مثال ۱

انرژی تشکیل سه بار q_1 ، q_2 و q_3 را از طریق رابطه $W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \frac{kq_iq_j}{r_{ij}}$ محاسبه نمایید.

حل:

$n = 3$

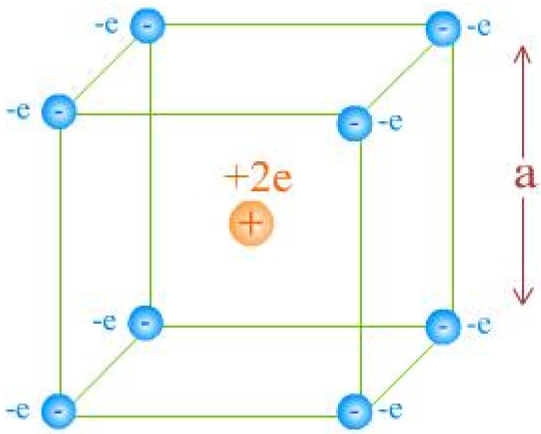
$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \frac{kq_iq_j}{r_{ij}}$$

$$W = \frac{1}{2}\left(\frac{kq_1q_2}{r_{12}} + \frac{kq_1q_3}{r_{13}} + \frac{kq_2q_1}{r_{21}} + \frac{kq_2q_3}{r_{23}} + \frac{kq_3q_1}{r_{31}} + \frac{kq_3q_2}{r_{32}}\right)$$

$$W = \frac{kq_1q_2}{r_{12}} + \frac{kq_1q_3}{r_{13}} + \frac{kq_2q_3}{r_{23}}$$

مثال ۲

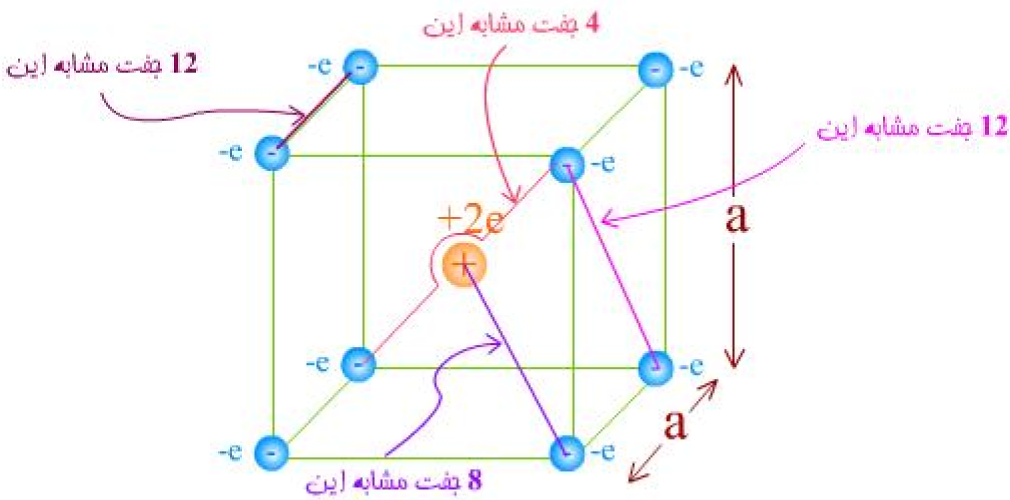
انرژی تشکیل توزیع بار مطابق شکل را بیابید.



حل:

برای محاسبه انرژی تشکیل از رابطه $W = \sum_{\text{جفت‌های مستقل}} \frac{kq_iq_j}{r_{ij}}$ استفاده می کنیم.

در این مثال شمردن جفت های مستقل نقش اساسی را بازی می کند.

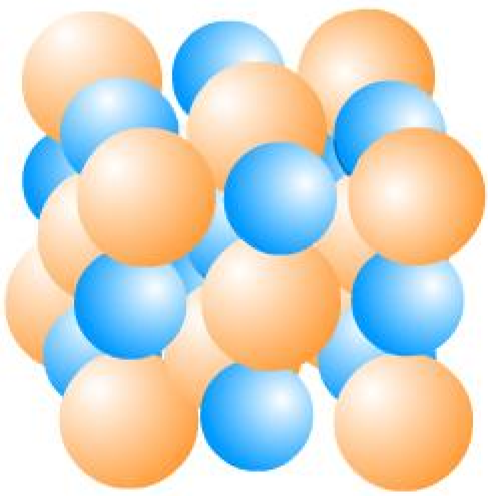


$$W = 8\left(k\frac{-2e^2}{\frac{\sqrt{3}\,a}{2}}\right) + 12\left(\frac{ke^2}{a}\right) + 12\left(\frac{ke^2}{\sqrt{2}\,a}\right)$$

$$+ 4\left(\frac{ke^2}{\sqrt{3}\,a}\right) = k\,\frac{4.32e^2}{a}$$

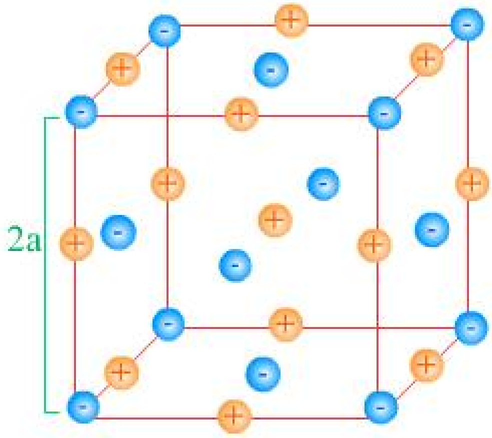
مثال۳

کریستال کلرورسدیم از یونهای مثبت (Na^+) و یونهای منفی (Cl^-) که متناوباً بطور مرتب روی شبکه سه بعدی چیده شده اند، تشکیل شده است. انرژی تشکیل کلرورسدیم را محاسبه نمایید.



حل:

یک نمونه ماکروسکپی از این نوع کریستال حداقل چیزی حدود 10^{20} اتم دارد، لذا ما با جمع بسیار بزرگی روبه رو هستیم، یکی از یونها را می توان به عنوان مرجع انتخاب نمود مهم نیست که از کدام نوع، اندرکنش آن را با تمام یونهای دیگر محاسبه می‌کنیم و بعد حاصل را به سادگی در تعداد کل یونها از هر دو نوع ضرب می‌کنیم.



انرژی تشکیل شبکه کریستال کلرور سدیم که از N اتم تشکیل شده است برابر است با

$$W = \frac{1}{2} N \sum_{j=2}^{N} \frac{q_i\, q_j}{r_{ij}}$$

اگر یون مثبت در مرکز باشد . جمع روی تمام همسایه هایش چه دور و چه نزدیک برابر است با :

$$\sum_{j=2}^{N} \frac{q_1\, q_j}{r_{1j}} = -\frac{6ke^2}{a} + \frac{12\, ke^2}{\sqrt{2}\, a} - \frac{8\, ke^2}{\sqrt{3}\, a} + \cdots$$

$$W = \frac{1}{2} Nk \left[-\frac{6\, e^2}{a} + \frac{12\, e^2}{\sqrt{2}\, a} - \frac{8e^2}{\sqrt{3}\, a} + \cdots \right]$$

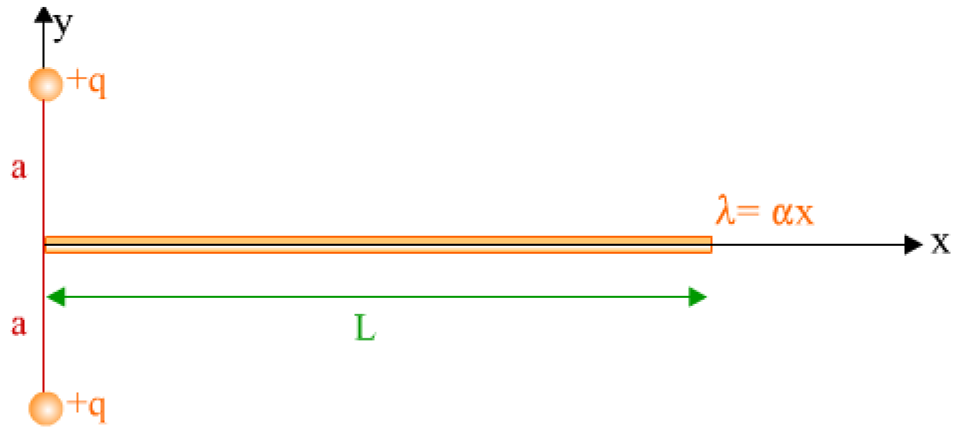
$$W = \frac{-0.8738\ Nk\ e^2}{a^2}$$

N تعداد کل یونهاست، دو برابر تعداد مولکول های Nacl ، علامت منفی نشان دهنده آن است که برای تبدیل کریستال به یون های تشکیل دهنده باید کار انجام شود .

مثال ۱:

چه مقدار کار لازم است تا میله ای به طول L با چگالی $\lambda = \alpha x$ را مطابق شکل از بی نهایت انتقال داده وبین دو بار $+q$ قرار دهیم؟

(انرژی پتانسیل میله وتوزیع دوبارچقدراست؟)



حل:

$$W_a = \int \rho(\vec{r})\, \varphi_a(\vec{r})\, dv$$

روش اول: همانطور که مساله خواسته میله انتقال یافته است.

$$W_a = \int \lambda(x)\, \varphi_a(x)\, dl$$

چگالی بار میله

پتانسیل توزیع دو بار روی میله

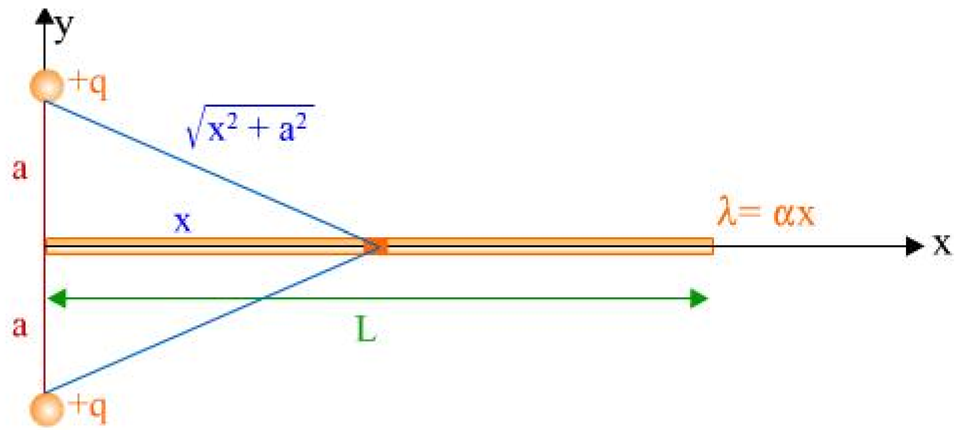
المان طول میله

پتانسیل دوبار روی میله

$$\varphi_a(x) = \frac{2kq}{(a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$W_a = \int_0^L \alpha x \frac{2kq}{(a^2 + x^2)^2} dx \Rightarrow W_a = 2kq\alpha(x^2 + a^2)\Big|_0^L$$

$$W_a = 2kq\alpha[(x^2 + L^2)^{\frac{1}{2}} - a\,]$$



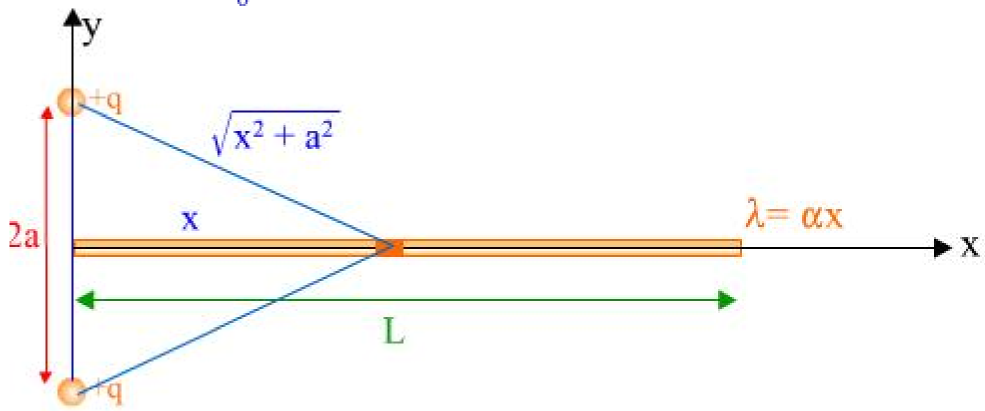
روش دوم: دوبار از بی‌نهایت بطور صلب انتقال یافته اند.

$$W_a = 2q\varphi(a)$$

$\varphi(a)$ پتانسیل میله در نقطه $y = a$

$$\varphi_a(\vec{r}) = k\int \frac{dq}{|r - r'|} = k\int \frac{\lambda dl}{|r - r'|} = k\int_0^L \frac{\alpha x dx}{(x^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= k\alpha\left[(a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} \Big|_0^L\right] = 2k\alpha\left[(a^2 + L^2)^{\frac{1}{2}} - a\right]$$

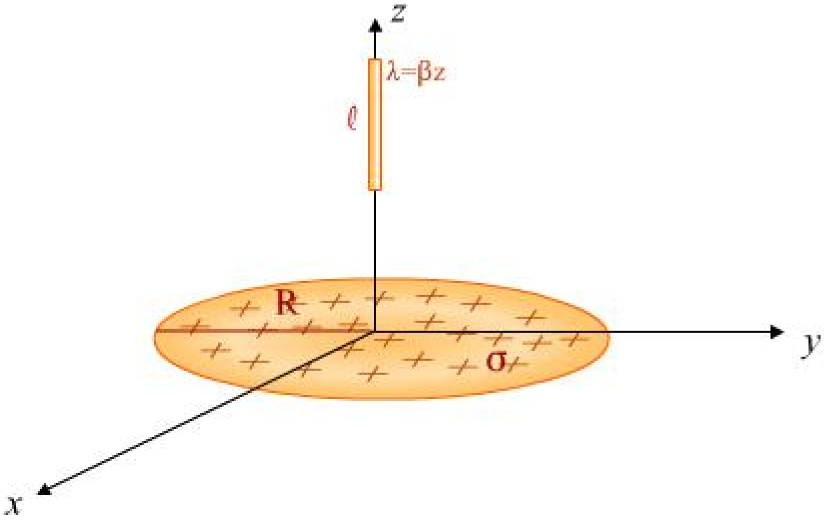


$$W_a = 2kq\alpha\left[(a^2 + L^2)^{\frac{1}{2}} - a\right]$$

در هر دو روش همان طور که انتظار می رفت باید به یک نتیجه منجر شوند.

مثال ۲:

انرژی پتانسیل یک میله به چگالی $\lambda = \beta z$ که روی محور دیسکی‌به شعاع R و چگالی یکنواخت σ قرارگرفته است را مطابق شکل محاسبه نمائید. (چه مقدار کار لازم است تا اینکه با انتقال میله یا دیسک از بی نهایت دوتوزیع در کنارهم مطابق شکل قرارگیرند).



روش اول : میله انتقال داده شود.

$$W_a = \int \rho(\vec{r})\, \varphi(\vec{r})\, dv = \int \lambda \varphi_a \, dl$$

چگالی بار میله

پتانسیل دیسک روی یک نقطه دلخواه میله

المان طول میله

ابتدا پتانسیل دیسک را روی یک نقطه دلخواه روی محورش محاسبه می نمائیم.

$$\varphi_a(\vec{r}) = k\int \frac{dq}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

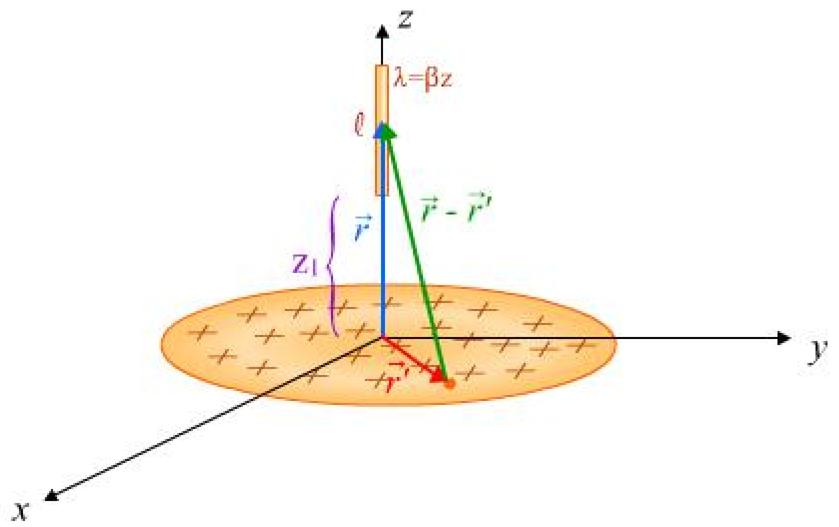
$$\varphi_a(0,0,z) = k\int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\sigma \rho d\rho d\varphi}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\varphi_a(0,0,z) = 2\pi k\sigma\, [(R^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} - z]$$

$$W_a = \int_{z_1}^{z_1+\ell} 2\pi k\sigma\beta z\, [\, (R^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} - z\,]dz$$

$$= 2\pi k\sigma\beta\Big[\frac{1}{3}(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}\, z^3\Big]\Big|_{z_1}^{z_1+\ell}$$

$$W_a = \frac{2}{3}\pi k\sigma\beta\Big\{[\, R^2 + (z_1+\ell)^2]^{\frac{3}{2}} - (z_1+\ell)^3 - (\, R^2 + z_1)^{\frac{3}{2}} + z_1^{\,3}\Big\}$$



روش دوم : دیسک انتقال داده شود

$$W_a = \int \sigma \;\; \varphi_a \; ds$$

چگالی دیسک

المان سطح دیسک

پتانسیل میله روی یک نقطه دلخواه دیسک

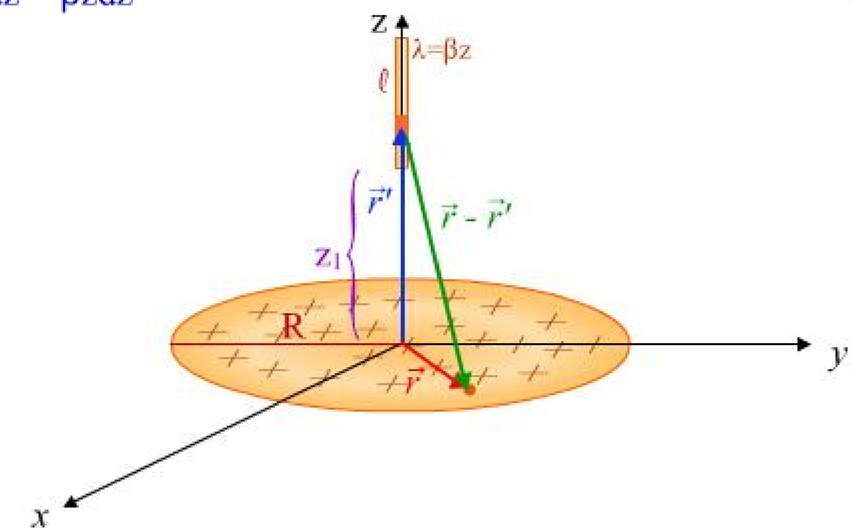
ابتدا پتانسیل میله را در یک نقطه دلخواه روی دیسک در ربع اول محاسبه می کنیم :

موضع المان بار بر روی میله $\quad \vec{r}' = z\hat{k}$

موضع میدان روی دیسک $\quad \vec{r} = \rho\hat{\rho}$

فاصله المان بار تا نقطه میدان $\quad |\vec{r}-\vec{r}'| = \sqrt{\rho^2 + z^2}$

المان بار $\quad dq = \lambda dz = \beta z dz$



$$\varphi_a(\rho, \varphi, 0) = k\int_{z_1}^{z_1+\ell} \frac{\beta z dz}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} = k\beta(\rho^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \Big|_{z_1}^{z_1+\ell}$$

$$= k\beta\left\{[\rho^2 + (z_1 + \ell)^2]^{\frac{1}{2}} - [(\rho^2 + z_1^2)^2]^{\frac{1}{2}}\right\}$$

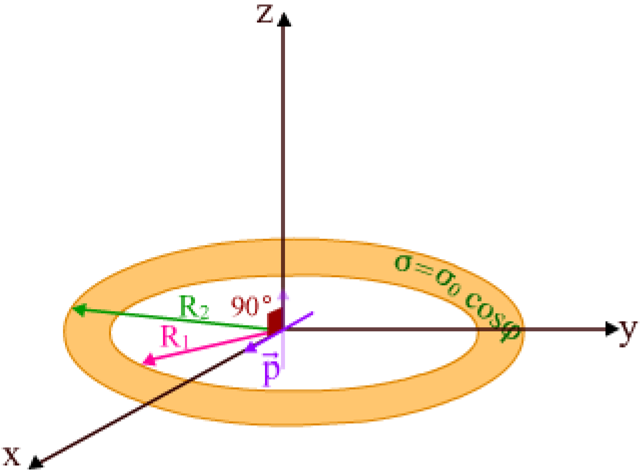
$$= k\beta\left\{[\rho^2 + (z_1 + \ell)^2]^{\frac{1}{2}} - (\rho^2 + z_1)^2\right\}$$

$$W_a = \int_0^{2\pi}\int_0^{R} k\beta\sigma\left\{[(z_1 + \ell)^2 + \rho^2]^{\frac{1}{2}} - (z_1^2 + \rho^2)\right\} \rho d\rho d\varphi$$

$$W_a = \frac{2}{3} k\pi\sigma\beta\left\{[(z_1 + \ell)^2 + R^2]^{\frac{3}{2}} - (z_1^2 + R^2)^{\frac{3}{2}} - (z_1 + \ell)^3 + z_1^3\right\}$$

مثال ۳

دو قطبی P مطابق شکل در مرکز یک دیسک تو خالی شعاع داخلی R_1 و شعاع خارجی R_2 که دارای بار سطحی به‌چگالی $\sigma = \sigma_0 \cos\varphi$ قرار دارد . اگر این دوقطبی به اندازه $\theta = 90°$ روی صفحه xz بچرخد ودرراستای محور x قرارگیرد تغییردرانرژی پتانسیل سیستم را محاسبه نمائید.



ابتدا انرژی پتانسیل سیستم وقتی دو قطبی در راستای محور z قرار دارد یعنی ممان دو قطبی آن $\vec{p} = p\hat{k}$ محاسبه می شود .

$$W_a^{(1)} = \int \sigma \ \ \varphi_a \ ds$$

چگالی دیسک

المان سطح دیسک

پتانسیل دو قطبی روی دیسک

پتانسیل یک دو قطبی بطور کلی :

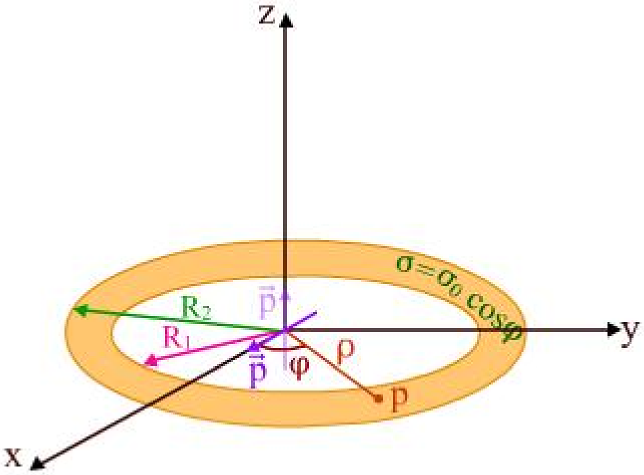
$$\varphi(\vec r) = k\frac{\vec p \cdot \hat r}{r^2}$$

پتانسیل دو قطبی $\vec p = p\hat k$ در یک نقطه دلخواه P روی صفحه xy :

$$\varphi_a(x,y,0) = k\frac{p\hat k \cdot \hat\rho}{\rho^2}$$

چون موضع نقطه P :

$$\vec r = \rho\hat\rho \quad\Rightarrow\quad \varphi_a = 0 \quad\Rightarrow\quad W_a^{(1)} = 0$$



در حالت بعدی دو قطبی می چرخد و در راستای محور x قرار می‌گیرد . پتانسیل دو قطبی روی یک نقطه دلخواه روی دیسک در ربع اول .

$$\varphi_a(x,y,z) = k\frac{p\hat i \cdot \hat\rho}{\rho^2} = kp\,\frac{\hat i\cdot(\hat i\cos\varphi + \hat j\sin\varphi)}{\rho^2} = kp\,\frac{\cos\varphi}{\rho^2}$$

$$W_a^{(2)} = \int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} kp\,\frac{\cos\varphi}{\rho^2}\,\sigma_0\cos\varphi\,\rho\, d\rho\, d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} k\sigma_0 p\,\frac{\cos^2\varphi}{\rho}\, d\rho\, d\varphi$$

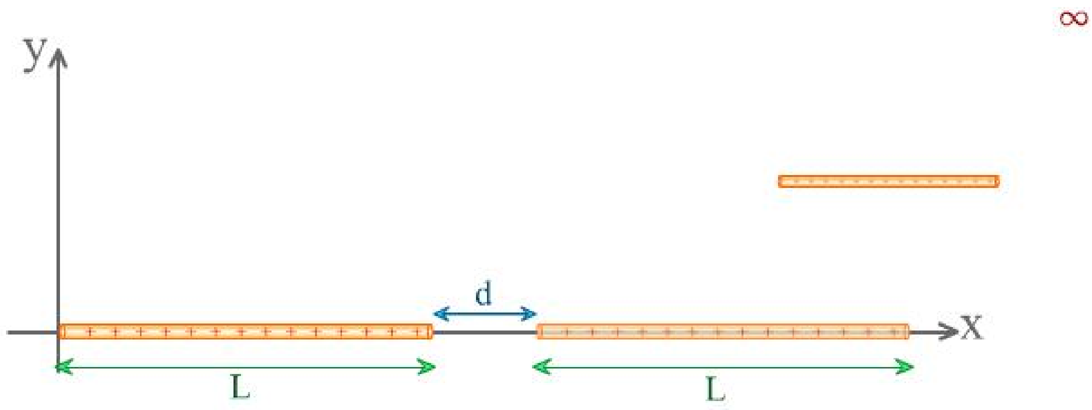
$$W_a^{(2)} = k\sigma_0 p\int_{R_1}^{R_2}\frac{d\rho}{\rho}\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\, d\varphi$$

$$= k\sigma_0 p\,\ell n\,\frac{R_2}{R_1}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\varphi\right)d\varphi = k\pi\sigma_0 p\,\ell n\,\frac{R_2}{R_1}$$

$$\Delta W = W_a^{(2)} - W_a^{(1)} = k\pi\sigma_0 p\,\ell n\,\frac{R_2}{R_1}$$

مثال۴

دو میله به طول L (با فاصله d از یکدیگر) با چگالی یکنواخت λ مطابق شکل در نظر بگیرید. چه مقدار کار لازم است تا میله سمت راست را به بی‌نهایت انتقال دهیم؟



حل:

$$W = -W_a = -\int \rho \varphi_a \, dv = -\int \lambda \;\varphi_a\; dx$$

چگالی بار میله سمت راست

پتانسیل میله سمت چپ روی یک نقطه
دلخواه میله سمت راست

المان طول میله سمت راست

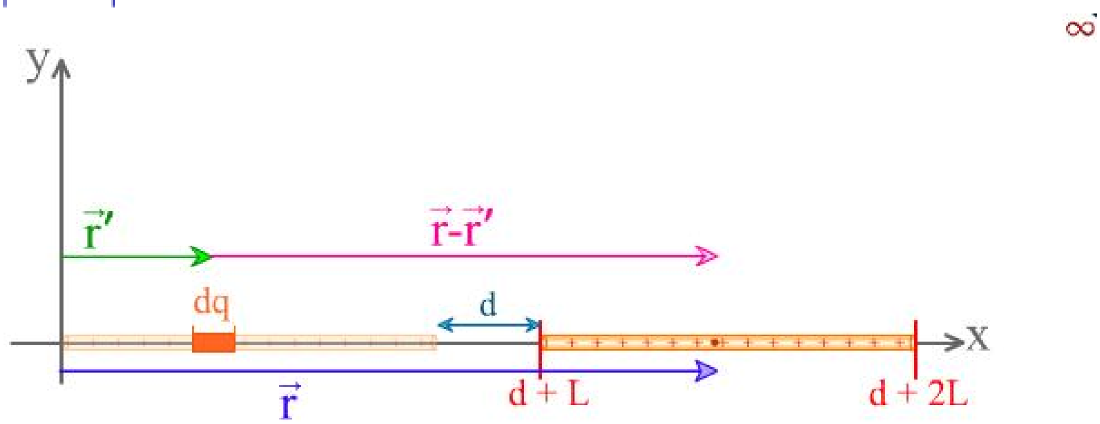
ابتدا φ_a را محاسبه می کنیم:

$$\varphi_a(\vec{r}) = k \int \frac{dq}{|r - r'|}$$

$$\vec{r} = \hat{i}x$$

$$\vec{r}\,' = \hat{i}x'$$

$$|\vec{r} - \vec{r}\,'| = x - x'$$



$$W = -W_a = -k\lambda^2 \int_{d+L}^{d+2L} \left[\ln x - \ln(x-L) \right] dx$$

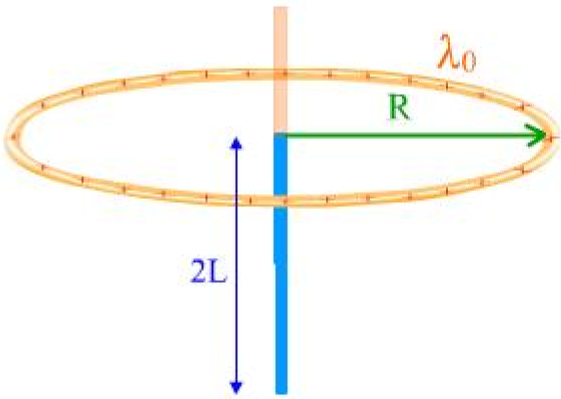
$$\boxed{\int \ln x \, dx = x \ln x - x}$$

$$W = -k\lambda^2 \left[x \ln x - x - (x-L)\ln(x-L) + (x-L) \right] \Big|_{d+L}^{d+2L}$$

$$= -k\lambda^2 \left[(d+2L)\ln(d+2L) - 2(d+L)\ln(d+L) + d \ln d \right]$$

مثال۵

سیم نازک باردار حلقوی به شعاع R و چگالی خطی یکنواخت λ_0 مفروض است. میله ی نازک و مستقیم به طول $2L$ و چگالی بار خطی $\lambda = \alpha |z|$ مطابق شکل روی محور آن قرار دارد. چه مقدار کار لازم است تا اینکه میله به اندازه L جابه‌جا شود. بطوری که انتهای آن روی مرکز حلقه قرار گیرد. (تغییر انرژی پتانسیل سیستم چه مقدار است؟)



کار لازم یا تغییر انرژی پتانسیل سیستم

$$\Delta W = W_a^{(2)} - W_a^{(1)}$$

$$W_a = \int \rho \varphi_a dv \quad \Rightarrow \quad W_a^{(1)} = \int \lambda \; \varphi_a \; d\ell$$

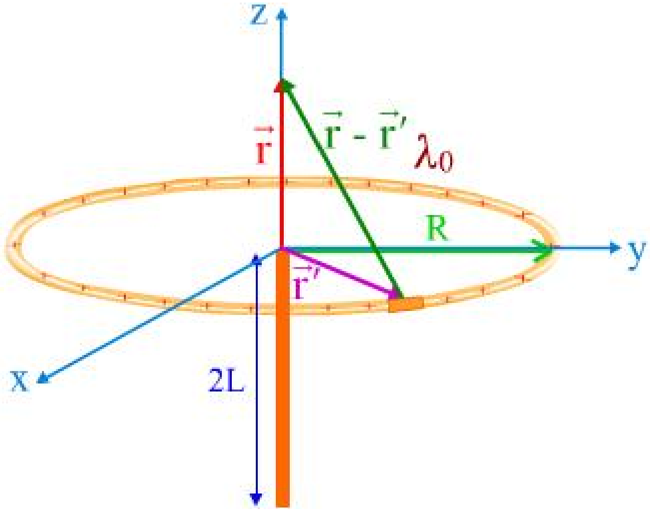
چگالی میله

المان طول میله

پتانسیل حلقه روی میله

پتانسیل حلقه روی میله

$$\varphi_a(0,0,z) = k\int_0^{2\pi} \frac{\lambda_0 R\, d\varphi}{(R^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} = k\,\frac{2\pi\,\lambda_0 R}{(R^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}$$



$$W_a^{(1)} = \int_{-L}^{L} \frac{\alpha|z|\, 2\pi k\,\lambda_0 R\, dz}{(R^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} = 2\pi k\,\lambda_0 R\,\alpha \int_{-L}^{L} \frac{|z|\, dz}{(R^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

تابع زیر انتگرال $\frac{|z|}{(R^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}$ زوج است لذا :

$$W_a^{(1)} = 4\pi k\lambda_0 R\alpha \int_0^L \frac{zdz}{(R^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= 4\pi k\lambda_0 R\alpha\left[(R^2+z^2)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^L\right]$$

$$= 4\pi k\lambda_0 R\alpha\left[(R^2+L^2)^{\frac{1}{2}} - R\right]$$

$$W_a^{(2)} = \int_{-2L}^{0} \frac{\alpha|z|2\pi Rk\lambda_0}{(R^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}dz$$

$$= -2\pi kR\lambda_0\alpha \int_{-2L}^{0} \frac{zdz}{(R^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= -2\pi R k \lambda_0 \alpha \left[(R^2+z^2)^{\frac{1}{2}} \Big|_{-2L}^{0} \right]$$

$$= -2\pi R k \lambda_0 \alpha \left[R - (R^2+4L^2)^{\frac{1}{2}} \right]$$

$$= 2\pi R k \lambda_0 \alpha \left[(R^2+4L^2)^{\frac{1}{2}} - R \right]$$

$$\Delta W = W_a^{(2)} - W_a^{(1)}$$

$$= 2\pi R k \lambda_0 \alpha \left[(R^2+4L^2)^{\frac{1}{2}} - R - 2\,(R^2+4L^2)^{\frac{1}{2}} + 2R \right]$$

$$\Delta W = 2\pi R k \lambda_0 \alpha \left[(R^2+4L^2)^{\frac{1}{2}} - 2\,(R^2+L^2)^{\frac{1}{2}} + R \right]$$