Subject : معادلات دیفرانسیل
Year: 89 Month. 12 Date. 5

ABADANOMRAN

بسم الله الرحمن الرحیم

جزوه درس معادلات دیفرانسیل - استاد میشور

کتب مرجع: معادلات دیفرانسیل علی اصغر کرایه چیان

معادلات دیفرانسیل - مسعود نیکوکار

معادلات دیفرانسیل - سیمونز

فصل اول: معادلات دیفرانسیل مرتبه اول.

(تفکیک پذیر - همگن - کامل - عامل انتگرال ساز - خطی - کاهش مرتبه -)

فصل دوم: معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم.

(ضرایب ثابت - روش V - ضرایب نامعین - روش تغییر پارامتر)

فصل سوم: تبدیلات لاپلاس.

(معرفی و قواعد تبدیلات لاپلاس - کاربرد لاپلاس در معادلات)

فصل چهارم: حل معادلات به روش سری ها.

بسمه تعالی

تعریف: به هر معادله شامل x و y و مشتقات y نسبت به x یک معادله دیفرانسیل می‌گوئیم.

مثال: $5x^2 y' + \frac{2x}{y} = \ln x$ مرتبه دوم

$y'' + 5y' + 6y = 0$ مرتبه دوم

هدف: یافتن y (y یک تابع است) می‌باشد.

بدنبال ... هستیم که خود و مشتقاتشان در معادله صدق می‌کنند

به عنوان مثال معادله‌ی دیفرانسیل $y''+5y'+6y=0$ را در نظر بگیرید: ← $y=e^{-2x}$

یکی دیگر از جوابهای این معادله $y=e^{-3x}$ می‌باشد.

به این جوابها، جواب خصوصی معادله می‌گوئیم در جایی که هدف از حل یک معادله دیفرانسیل یافتن تمامی جوابهای معادله می‌باشد که آنها را به صورت یک دسته جواب به عنوان جواب عمومی می‌گوئیم.

مثلاً در مورد مثال بالا جواب عمومی به صورت زیر می‌باشد: $y=c_1e^{-2x}+c_2e^{-3x}$

معادلات مرتبه اول

۱- تفکیک پذیر یا جدایی پذیر: هر معادله دیفرانسیل که پس از ساده کردن به صورت $F(x)\,dx = g(x)\,dy$ نوشته شود را تفکیک پذیر می‌گوئیم. برای حل این معادله کافی است از طرفین آن انتگرال بگیریم.

مثال) $(x^2-1)yy'=2x \to (x^2-1)y\frac{dy}{dx}=2x$

$\to (x^2-1)y\,dy=2x\,dx$

$\to y\,dy=\frac{2x\,dx}{(x^2-1)} \rightsquigarrow \int y\,dy=\int\frac{2x\,dx}{(x^2-1)}$

مشتق مخرج در صورت

$\boxed{\Rightarrow \frac{y^2}{2}=\ln(x^2-1)+C}$

مثال) $y'=e^{x+y} \to y'=e^x.e^y \to \frac{dy}{dx}=e^x e^y \to e^{-y}dy=e^x dx$

$\int \frac{dy}{e^y}=\int e^x dx \rightsquigarrow \boxed{-e^{-y}=e^x+C}$ یا $\boxed{-\frac{1}{e^y}=e^x+C}$

مثال) $2x(y+1)dx+(x^2-1)dy=0$

$\to (x^2-1)dy=-2x(y+1)dx \to \frac{(x^2-1)dy}{(x^2-1)(y+1)}=\frac{-2x(y+1)dx}{(x^2-1)(y+1)}$

$\to \frac{dy}{y+1}=\frac{-2x\,dx}{x^2-1}$

$\to \int\frac{dy}{y+1}=\int\frac{-2x\,dx}{x^2-1} \rightsquigarrow \boxed{\ln|y+1|=-\ln(x^2-1)+C}$

یا $\ln(y+1)=\ln\frac{1}{(x^2-1)}+\ln C$

یا $\ln(y+1)=\ln\frac{C}{x^2-1} \Rightarrow y+1=\frac{C}{x^2-1} \rightsquigarrow \boxed{y=\frac{C}{x^2-1}-1}$

مثال $y' = \sin^2(x - y + 1)$

← نکته: این معادله جدایی پذیر نیست با یک تغییر متغیر مناسب می‌توان آن را جدا کرد.

$z = x - y + 1 \Rightarrow z' = 1 - y' \Rightarrow y' = 1 - z'$

درمعادله $1 - z' = \sin^2 z \Rightarrow 1 - \dfrac{dz}{dx} = \sin^2 z$

$\Rightarrow -\dfrac{dz}{dx} = -(1 + \sin^2) z \Rightarrow -\dfrac{dz}{dx} = -\cos^2 z \Rightarrow \dfrac{dz}{\cos^2 z} = dx$

ق.ب $\tan z = x + C \Rightarrow \boxed{\tan(x - y + 1) = x + C}$ جواب عمومی

$\frac{1}{\sin^2} = -\cot$

$\frac{1}{\cos^2} = \tan$

پایان جلسه اول

معادله‌های همگن :

تعریف : معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه اول $m\,dx + n\,dy = 0$ را همگن گوییم هرگاه توابع m و n هر دو همگن و هم درجه باشند. نمونه‌های از معادلات همگن :

$(x^2+y^2)dx + 2xy\,dy = 0$

$(4x+2y)dx - 5xy\,dy = 0$

$(\sqrt{x^2+y^2})dx - 2y\,dy = 0$

$2x\,dx + 4y\sin(y/x)\,dy = 0$

← برای حل یک معادله همگن کافی است از تغییر متغیر زیر استفاده کنیم

$$z = y/x \rightarrow y = zx \rightarrow y' = z'x + z$$ ⇐ حفظ کنید

معادله همگن زیر را حل کنید.

اول y' — $(x+y)dx - (x-y)dy = 0$

$(x+y) - (x-y)y' = 0 \rightarrow y' = \dfrac{x+y}{x-y}$

$$z'x + z = \frac{x+zx}{x-zx} = \frac{x(1+z)}{x(1-z)} = \frac{1+z}{1-z}$$

$$z'x = \frac{1+z}{1-z} - \frac{z}{1} = \frac{1+z-z+z^2}{1-z} = \frac{1+z^2}{1-z}$$

ادامه در صفحه بعد

این انتگرال را به دو انتگرال تجزیه می کنیم

$$\frac{dz}{dx}x=\frac{1+z^2}{1-z} \rightarrow \int\frac{1-z}{1+z^2}dz=\int\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{1}{1-z^2}dz-\frac{1}{2}\int 2\frac{z}{1+z^2}dz=\int\frac{dx}{x}$$

به برای توان ۲ اضافه می کنیم

$$\rightarrow \operatorname{ArcTan} z-\frac{1}{2}\ln(1+z^2)=\ln x+c$$

$$\rightarrow \boxed{\operatorname{Arctan}(y/x)-\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)=\ln x+C}$$ جواب نهایی

مثال) معادله همگن زیر را حل کنید

$$y'=\frac{y^2+2xy}{x^2}$$

$$z'x+z=\frac{z^2x^2+2xzx}{x^2}=\frac{\cancel{x^2}(z^2+2z)}{\cancel{x^2}}\rightarrow z'x=z^2+2z-z$$

$$\frac{dz}{dx}x=z^2+z\rightarrow\int\frac{dz}{z^2+z}=\int\frac{dx}{x}$$

تجزیه z به $z(z+1)$

$$\int\frac{1}{z}+\frac{1}{z+1}dz=\int\frac{dx}{x}\Rightarrow \ln z-\ln(z+1)=\ln x+c$$

$$\ln(y/x)-\ln(y/x+1)=\ln x+c$$

مثال) معادله همگن زیر را حل کنید. (الف) $(2x\sin\frac{y}{x}+3y\cos\frac{y}{x})dx$

$$(2x\sin\frac{y}{x}+3y\cos\frac{y}{x})dx-3x\cos\frac{y}{x}dy=0$$

$$\overline{\quad dx \quad}$$

$$(2x\sin\frac{y}{x}+3y\cos\frac{y}{x})\frac{dx}{dx}-3x\cos\frac{y}{x}y'=0$$

$$\to y'=\frac{2x\sin\frac{y}{x}+3y\cos\frac{y}{x}}{3x\cos\frac{y}{x}}=0$$

$$z'x+z=\frac{2x\sin z+3zx\cos z}{3x\cos z}\to z'x+z=\frac{2\sin+3z\cos z}{3\cos z}-z$$

$$z'x=\frac{2\sin z+3z\cancel{\cos z}-3\cancel{z}\cos z}{3\cos z}\to zx=\frac{2}{3}\tan z\to$$

$$\frac{dz}{dx}x=\frac{2}{3}\tan z\to\int\frac{3}{2}\cot z\,dz=\int\frac{dx}{x}$$

جواب عمومی

$$\frac{3}{2}\ln\sin z=\ln x+c\to\boxed{\frac{3}{2}\ln\sin\frac{y}{x}=\ln x+c}$$

یادآوری: $\int\tan x=$ $\int ctg:$

گاهی اوقات می‌توان معادلات همگن را با تغییر متغیرات به یک معادله‌ی همگن تبدیل کرد.

به مثال‌های زیر توجه کنید

مثال) معادله‌ی زیر را در نظر بگیرید $y' = \dfrac{4x-3y+5}{2x-y+2}$ این معادله همگن

ببینیم چه جایی که می‌توان با تغییر متغیرات آن را همگن نمود؟

$$\begin{cases} X = x-\alpha \\ Y = y-\beta \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x = X+\alpha \\ y = Y+\beta \end{cases}$$

$Y' = y'$ اگر مشتق بگیریم برابر است

$$Y' = \frac{4(X+\alpha)-3(Y+\beta)+5}{2(X+\alpha)-(Y+\beta)+2}$$

$$Y' = \frac{4X-3Y+(4\alpha-3\beta+5)}{2X-Y+(2\alpha-\beta+2)} \qquad \begin{cases} 4\alpha-3\beta+5=0 \\ -2)\ 2\alpha-\beta+2=0 \end{cases}$$

$$-\beta+1=0 \rightsquigarrow \beta=1$$
$$\alpha = -\tfrac{1}{2}$$

$$Y' = \frac{4X-3Y}{2X-Y} \to Z'X+Z = \frac{4X-3ZX}{2X-ZX} = \frac{4-3Z}{2-Z}$$

وضع مشترک

ادامه در ابتدای صفحه بعد

$$zx = \frac{4-3z}{2-z} - \frac{z}{1} = \frac{4-3z+2z+z^2}{2-z}$$

$$\frac{dz}{dx}x = \frac{z^2-5z+4}{2-z}$$ x ها یکطرف و z ها یکطرف

$$\int \frac{2-z}{z^2-5z+4}\,dz = \int \frac{dx}{x}$$

$(z-1)(z-4)$

جمع ضریب منفی دارد

$$\int \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-4}\,dz = \int \frac{dx}{x} \to \frac{Az-4A+Bz-B}{//}$$

$$\begin{cases} A+B=-1 \\ -4A-B=2 \end{cases} \rightsquigarrow A=\frac{1}{3},\ B=-\frac{2}{3}$$

$$-3A=1$$

$$\int \frac{1/3}{z-1} + \int \frac{-2/3}{z-4}\,dz = \int \frac{dx}{x}$$

$$-\tfrac{1}{3}\ln(z-1) - \tfrac{2}{3}\ln(z-4) = \ln x + C$$

جواب

$$-\tfrac{1}{3}\ln\left(\frac{y-1}{x+\frac{1}{2}} - 1\right) - \tfrac{2}{3}\ln\left(\frac{y-1}{x+\frac{1}{2}} - 4\right) = \ln\left(x+\tfrac{1}{2}\right) + C$$

← معادله زیر را در نظر بگیرید:

$$y' = \frac{x+y+1}{2x+2y+3}$$

← اگر حاصل ضرایب متغیرها صفر باشد از روش قبلی قابل حل نیست.

← چون حاصل ضرایب متغیرهای این معادله برابر صفر است این معادله به روش قبل حل نمی‌شود
در این گونه مواقع کافی است صورت یا مخرج کسر را به دلخواه به عنوان متغیر در نظر بگیریم.

$$y' = \frac{x+y+1}{2x+2y+3}$$

$$z = x+y+1$$

$$2z = 2x+2y+2$$

$$2z+1 = 2x+2y+3$$

$$z' = 1+y' \rightarrow y' = z'-1$$

$$\boxed{z'-1 = \frac{z}{2z+1}}$$

$$z' = \frac{z}{2z+1} + 1 \rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{z+2z+1}{2z+1} \rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{3z+1}{2z+1}$$

$$\int \frac{2z+1}{3z+1}\,dz = \int dx$$

پاورقی

$$\begin{array}{r|l} 2z+1 & 3z+1 \\ \hline -2z-\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \end{array}$$

← اگر هم درجه بودند صورت را به مخرج تقسیم می‌کنیم

$$\int \left(\frac{2}{3} + \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{3}}{3z+1}\right) dz = \int dx$$

$\frac{2}{3}z + \frac{1}{2}\ln(3z+1) = x + C$

پایان جلسه دوم: $\rightarrow \frac{2}{3}(x+y+1) + \frac{1}{9}\ln(3x+3y+4) = x + C$

Subject :

Year: Month. Date.

ABADANOMRAN

$\frac{2}{3}z+\frac{1}{2}\ln(3z+1)=x+C$

پایان جلسه دوم : $\to \frac{2}{3}(x+y+1)+\frac{1}{9}\ln(3x+3y+4)=x+C$

مثال - معادله زیر را به صورت کامل بودن حل کنید: $(\frac{y}{x}+6x)dx+(\ln x-2)dy=0$

$$\begin{cases}\frac{\partial m}{\partial y}=\frac{1}{x} \to \text{کامل است}\\ \frac{\partial n}{\partial x}=\frac{1}{x}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{y}{x}+6x \xrightarrow[\text{مشتق نسبت به } y]{\text{انتگرال نسبت به } x} f=y\ln x+3x^2+g(y)\\ \frac{\partial f}{\partial y}=\ln x-2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=\ln x+g'(y)\end{cases}$$

$\to g'(y)=-2 \Rightarrow g(y)=-2y$

مثال) معادله مثلثاتی زیر را در صورت کامل بودن حل کنید

$(\cos y+y\cos x)dx+(\sin x-x\sin y)dy=0$

*جواب در صفحه ی بعدی

$$\begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial y} = -\sin y + \cos x \\ \dfrac{\partial N}{\partial x} = \cos x - \sin y \end{cases}$$

کامل است

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = \cos y + y\cos x \xrightarrow{\text{انتگرال نسبت به } x} F = x\cos y + y\sin x + g(y) \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = \sin x - x\sin y \end{cases}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -x\sin y + \sin x + g'(y)$$

$$g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = c$$

جواب عمومی $x\cos y + y\sin x + C = 0$

عامل انتگرال‌ساز برمعادله مقابل توجه کنید

$$(4xy + 3y^2 - x)\,dx + (x^2 + 2xy)\,dy = 0$$

* این معادله کامل نیست زیرا

$$\begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial y} = 4x + 6y \\ \dfrac{\partial N}{\partial x} = 2x + 2y \end{cases}$$

حل معادله فوق را در x^2 ضرب می‌کنیم

$$(4x^3y + 3y^2x^2 - x^3)\,dx + (x^4 + 2x^3y)\,dy = 0$$

Subject :

Year: Month. Date.

ABADANOMRAN

$$\begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial y} = 4x^3 + 6yx^2 \\ \\ \dfrac{\partial N}{\partial x} = 4x^3 + 6x^2y \end{cases}$$

← تعریف: عبارت μ را عامل انتگرال‌ساز معادله $Mdx + Ndy = 0$ می‌نامیم

هرگاه معادله $\mu M dx + \mu N dy = 0$ کامل باشد.

حال با دو پرسش زیر مواجه می‌شویم:

A) آیا هر معادله دیفرانسیل غیرکامل، عامل انتگرال‌ساز دارد؟

B) عامل انتگرال‌ساز چگونه یافت می‌شود؟

جواب پرسش اول مثبت است اما در بسیاری از موارد عامل انتگرال‌ساز را فقط به صورت صوری می‌توان نوشت بنابراین عامل انتگرال‌ساز معادلات غیرکامل را فقط در بعضی از موارد خاص بررسی می‌کنیم، این موارد عبارتند از:

1) هنگامی که عامل انتگرال‌ساز فقط برحسب x باشد.

2) هنگامی که عامل انتگرال‌ساز فقط برحسب y باشد.

3) هنگامی که عامل انتگرال‌ساز برحسب $x+y$ باشد.

← برای یافتن عامل انتگرال‌ساز عبارت $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$ را می‌یابیم سپس یکی از حالات زیر رخ می‌دهد.

$$\left\{\begin{array}{l}
1)\ \dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}=g(x) \Rightarrow \mu=e^{\int g(x)dx} \\[2ex]
2)\ \dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{-M}=h(y) \Rightarrow \mu=e^{\int h(y)dy} \\[2ex]
3)\ \dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N-M}=k(z) \Rightarrow \mu=e^{\int k(z)dz} \quad \boxed{z=x+y}
\end{array}\right.$$

مثال) عامل انتگرال ساز معادله زیر را بدست آورید سپس آن را حل نمائید.

$$(4xy+3y^2-x)dx+(x^2+2xy)dy=0$$

حل

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}, \quad \frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=4x+6y-(2x+2y)=2x+4y, \quad N=x^2+2xy$$

$$=\frac{2(x+2y)}{x(x+2y)}=\frac{2}{x} \rightarrow \mu=e^{\int \frac{2}{x}dx}=e^{2\operatorname{Ln}x}=x^2$$

توان

$$\rightarrow (4x^3y+3y^2x^2-x^3)dx+(x^4+2x^3y)dy=0$$

$$\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\partial F}{\partial x}=4x^3y+3y^2x^2-x^3 \\[2ex]
\dfrac{\partial F}{\partial y}=x^4+2x^3y \xrightarrow[\text{انتگرال نسبت به } y]{} F=yx^4+x^3y^2+g(x)
\end{array}\right.$$

مشتق نسبت به x $\rightarrow \dfrac{\partial F}{\partial x}=4x^3y+3x^2y^2+g'(x)$

$g'(x) = -x^3 \Rightarrow g(x) = -\frac{x^4}{4} \Rightarrow$ جواب عمومی $yx^4 + x^3y^2 - \frac{x^4}{4} = C$

مثال) عامل انتگرال‌ساز معادله زیر را یافته آن را حل کنید.

$$\underbrace{(3x^2 - y^2)}_{N}dy - \underbrace{2xy\,dx}_{M} = 0$$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M} = -2x - 6x = \frac{-8x}{2xy} = \frac{-4}{y}$$

$$M = e^{\int -\frac{4}{y}dy} \to e^{-4\ln y} = y^{-4} = \frac{1}{y^4}$$

$$\left(\frac{3x^2}{y^4} - \frac{1}{y^2}\right)dy - \frac{2x}{y^4}dx = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{2x}{y^3} \xrightarrow{\text{انتگرال نسبت به } x} F = -\frac{x^2}{y^3} + g(y)$$

مشتق نسبت به y

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{3x^2}{y^4} - \frac{1}{y^2} \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{3x^2}{y^4} + g'(y)$$

$$\boxed{\int -\frac{1}{x^2}dx = \frac{1}{x}}$$

حفظ شود

$$g'(y) = -\frac{1}{y^2} \to g(y) = \frac{1}{y}$$

پایان جلسه سوم.

معادله خطی: هر معادله به صورت $y'+p(x)y=q(x)$ را یک معادله خطی می گویند مثل:

$y'-\frac{2}{x}y=4x^3$ یا $y'+y\ln x=\sin x$ یا $y'+xy=\tan\frac{9x}{x}$

برای حل معادله خطی سعی می کنیم عامل انتگرال ساز را بیابیم بنابراین فرم معادله را به شکل زیر در می آوریم

$y'+P(x)y=q(x) \to \frac{dy}{dx}+P(x)y=q(x)$

dx ضرب در $\to dy+P(x)y\,dx=q(x)dx \Rightarrow (P(x)y-q(x))dx+dy=0$

از روش قبلی $\to \frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=(P(x)-0=P(x)) \Rightarrow \mu=e^{\int P(x)dx}$

فرمول کلی عامل انتگرال ساز معادله خطی

$\boxed{M=e^{\int P(x)dx}}$ $\Longleftrightarrow$ فرمول کلی عامل انتگرال ساز معادله خطی

مثال: معادله خطی زیر را حل کنید $y'-\frac{2}{x}y=x$

$y=e^{\int P(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right) \leftarrow$ فرمول

$y=e^{-\int -\frac{2}{x}dx}\left(\int x\,e^{\int -\frac{2}{x}}dx+C\right) \leftarrow$ فرمول پس از جای گذاری

$y=e^{2\ln x}\left(\int x\,e^{-2\ln x}dx+C\right)$ $(*) \Rightarrow M=e^{\int P(x)dx}$

$y=x^2\left(\int x\,x^{-2}dx+C\right) \Rightarrow y=x^2(\ln x+C)$ جواب عمومی

مثال $y' + y\cot x = 5e^{\cos x} \rightarrow y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x) e^{\int p(x)dx} dx + C\right)$

$y = e^{-\int \cot x \, dx}\left(\int 5e^{\cos x} e^{\int \cot x \, dx} dx + C\right)$

$y = e^{-\ln \sin x}\left(\int 5e^{\cos x} e^{\ln \sin x} dx + C\right)$

$y = \frac{1}{\sin x}\left(-\int 5e^{\cos x} (-\sin x) dx + C\right)$ تغییر متغیر که اعمال شود $u = \cos x$

$y = \frac{1}{\sin x}\left(-\int 5e^{u} du + C\right)$

$y = \frac{1}{\sin x}\left(-5e^{\cos x} + C\right)$

مثال $xy' - 2y = x^3 \sin 4x \Rightarrow xy' - 2y = x^3 \sin 4x \Rightarrow y' - \frac{2y}{x} = x^2 \sin 4x$

$y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x) e^{\int p(x)dx} dx + C\right)$

$y = e^{-\int -\frac{2}{x} dx}\left(\int x^2 \sin 4x \, e^{\int -2/x \, dx} dx + C\right)$

$y = e^{2\ln x}\left(\int x^2 \sin 4x \, e^{-2\ln x} dx + C\right)$

$y = x^2\left(\int \cancel{x^2} \sin 4x \cdot \frac{1}{\cancel{x^2}} dx + C\right)$

$y = x^2\left(\int \sin 4x \, dx + C\right) \Rightarrow \boxed{y = x^2\left(-\frac{1}{4}\cos 4x + C\right)}$ جواب عمومی

$y' + y = \frac{1}{1+e^{2x}}$

$y = e^{-\int 1 dx}\left(\int \frac{1}{1+e^{2x}} e^{\int 1 dx} dx + C\right) \rightarrow y = e^{-x}\left(\int \frac{1}{1+e^{2x}} e^{x} dx + C\right)$

$\left(\int \frac{1}{1+u^2} du + C\right) \Rightarrow \boxed{y = e^{-x}\left(\operatorname{Arctan} e^{x} + C\right)} \longrightarrow$ جواب عمومی

مثال

مهم

$$e^y y' + e^y = 4\sin x$$

این معادله خطی نیست، اما با تغییر متغیر زیر به معادله خطی تبدیل می‌شود.

$$z = e^y \rightarrow z' = e^y y'$$

$$\rightarrow z' + z = 4\sin x$$ این معادله خطی است

$$\Rightarrow z = e^{-\int 1\,dx}\left(\int 4\sin x\, e^{\int 1\,dx}\,dx + C\right)$$

$$\Rightarrow z = e^{-x}\left(\int 4\sin x\, e^{x}\,dx + C\right)$$

$$e^y = z = e^{-x}\left(4\left(\frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2}\right) + C\right.$$

معادله برنولی: این معادله به صورت

$$y' + p(x)y = q(x)y^n$$

که باید توجه کنید که چنانچه $n=0$ یا $n=1$ باشد آنگاه معادله فوق هم خطی است

در غیر این صورت معادله برنولی با تغییر متغیر زیر به یک معادله خطی تبدیل می‌شود.

$$\boxed{z = y^{1-n}}$$

مثال) معادله برنولی زیر را حل کنید.

$$y' + \frac{1}{x}y = x^3 y^3$$

حل $z = y^{1-3} \rightarrow z = y^{-2}$

$$\Rightarrow z' = -2y^{-3}y'$$

$$\xrightarrow{\times\, -2y^{-3}} -2y^{-3}y' - 2y^{-3}\frac{1}{x}y = -2\cancel{y^{-3}}x^3\cancel{y^3}$$

$$z' - \frac{2}{x}z = -2x^3$$ خطی

$$z' - \frac{2}{x}z = -2x^3 \rightarrow z = e^{-\int -\frac{2}{x}dx}\left(\int -2x^3 e^{\int -\frac{2}{x}dx}\,dx + C\right)$$

$$z = x^2(-x^2 + C) \rightarrow y^{-2} = x^2(-x^2 + C)$$

طرفین را بر x تقسیم

مثال) حل کنید

$$xy' - \frac{y}{2\ln x} = y^2 \Rightarrow y' - \frac{y}{2x\ln x} = \frac{y^2}{x}$$

$$z = y^{1-n} \to z = y^{-1} \to z' = -y^{-2}y'$$

$$-y'y^{-2} + \frac{yy^{-2}}{2x\ln x} = -\frac{1}{x}$$ این معادله خطی است

یادآوری

$$z = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right)$$

$$z = e^{-\int \frac{1}{2x\ln x}dx}\left(\int -\frac{1}{x}e^{\int \frac{1}{2x\ln x}dx}dx + C\right)$$

$u = \ln x$, $du = \frac{1}{x}dx$

$$z = e^{-\frac{1}{2}\ln\ln x}\left(\int -\frac{1}{x}e^{\frac{1}{2}\ln\ln x}dx + C\right)$$

$$z = (\ln x)^{-\frac{1}{2}}\left(\int -\frac{1}{x}(\ln x)^{\frac{1}{2}}dx + C\right)$$

$\int \frac{1}{u}du = \ln u = \ln\ln x$

$$y^{-1} = z = (\ln x)^{-\frac{1}{2}}\left(-\frac{\ln x^{3/2}}{3/2} + C\right)$$

$\int u^{1/2}du = \frac{u^{3/2}}{3/2}$

پایان جلسه چهارم

ابتدای جلسه نهم

معادلات خطی مرتبه دوم

هر معادله بصورت $y'' + P(x)y' + q(x)y = R(x)$ را یک معادله خطی مرتبه دوم می نویسیم. چنانچه $R(x)=0$ باشد معادله را همگن ناصره و در غیر این صورت آن را ناهمگن می نامیم.

دو تقسیم زیر در حل معادله فوق دارای اهمیت می باشد:

۱- اگر y_1 و y_2 دو جواب خصوصی از معادله همگن باشند آنگاه ترکیب آنها جواب عمومی معادله همگن خواهد بود. $y_c = C_1y_1 + C_2y_2$ جواب عمومی

۲- اگر y_1 جواب خصوصی معادله ناهمگن باشد y_c جواب عمومی معادله همگن تولید آن باشد آنگاه جواب عمومی معادله ناهمگن به صورت زیر است $y = y_c + y_1$ جواب عمومی

در این حالت چهار روش زیر استفاده می کنیم

۱- روش ضرایب ثابت

۲- روش $\sqrt{\ }$ (یک جواب از روی جواب دیگر)

۳- روش ضرایب نامعین

۴- روش تغییر پارامتر (P و q دو عدد هستند)

۱- روش ضرایب ثابت : این روش برای یافتن جواب معادله ای بصورت $y'' + Py' + qy = 0$ می باشد. برای حل این معادله ابتدا جواب آن را بصورت زیر حدس می زنیم:

صفحه بعدی

$y = e^{kx}$

$y' = k e^{kx}$ $\xrightarrow{\text{در معادله}}$ $k^2 e^{kx} + p k e^{kx} + q e^{kx} = 0$

$y'' = k^2 e^{kx}$ $\quad e^{kx}(k^2+pk+q)=0$

$$\xrightarrow{e^{kx}\neq 0} k^2+pk+q=0 \to \begin{cases} k_1 & y_1=e^{k_1 x}\\ k_2 & y_2=e^{k_2 x}\end{cases}$$

مثال) معادله زیر را به روش ضرایب ثابت حل کنید: $y''+5y'+6y=0$

حل:

معادله مشخصه: $k^2+5k+6=0$

$$(k+2)(k+3)=0 \to \begin{cases} k_1=-2\\ k_2=-3\end{cases} \begin{cases} y_1=e^{-2x}\\ y_2=e^{-3x}\end{cases} \to y=c_1 e^{-2x}+c_2 e^{-3x}$$

جواب عمومی

* توجه کنید که معادله درجه دو ممکن است دارای ۲ جواب نباشد. لذا حالات خاصی پیش می‌آید که به شرح زیر است.

$k^2+pk+q=0$ معادله مشخصه

1) $\Delta>0 \to \begin{cases} k_1 \Rightarrow & y_1=e^{k_1 x}\\ k_2 \Rightarrow & y_2=e^{k_2 x}\end{cases}$ در این حالت ها اشاره به c c

2) $\Delta=0 \to k_1 = \begin{cases} y_1=e^{k_1 x}\\ y_2=x e^{k_1 x}\end{cases}$ $\quad i=\sqrt{-1}$

3) $\Delta<0 \to \underbrace{\alpha}_{\text{قسمت حقیقی}} + \underbrace{\beta i}_{\text{قسمت موهومی}} \Rightarrow \begin{cases} y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x\\ y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x\end{cases}$

مثال) معادلات زیر را به روش ضرایب ثابت حل نمایید.

1) $y''-2y'+y=0$

معادله مشخصه $\to k^2-2k+1=0$

$$(k-1)(k-1)=0 \Rightarrow k=1 \begin{cases} y_1=e^{x}\\ y_2=xe^{x}\end{cases} \Rightarrow y=c_1 e^{x}+c_2 x e^{x}$$

$$\Rightarrow y=c_1 e^{-x}\cos 2x+c_2 e^{-x}\sin 2x$$

جواب عمومی

2) $y'' + 2y' + 5y = 0 \xrightarrow{\text{حل}} k^2 + 2k + 5 = 0 \rightarrow k = \frac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2}$

$\Rightarrow k = \frac{-2 \pm \sqrt{+16}\,\sqrt{-1}}{2} \rightarrow k = \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i \rightarrow \begin{cases} y_1 = e^{-x}\cos 2x \\ y_2 = e^{-x}\sin 2x \end{cases}$

جواب عمومی $\rightarrow y = C_1 e^{-x}\cos 2x + C_2 e^{-x}\sin 2x$ $\qquad i = \sqrt{-1}$

معادله اویلر ← این معادله بصورت $x^2y'' + Pxy' + qy = 0$ می‌باشد.

اگر بتوان به نحوی x ها را در این معادله حذف کرد، آنگاه می‌توان به روش ضرایب ثابت آن معادله را حل کرد.

برای اینکار از تغییر متغیر مستقل زیر استفاده می‌کنیم: $z = \ln x$

حال لازم است y' و y'' را برحسب y'_z و y''_z بیابیم.

$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \times \frac{dz}{dx} = y' \frac{1}{x}$

پاورقی:

$\boxed{y' = y'_z \cdot \frac{1}{x}}$ 1: حفظ شود

$\rightarrow y'' = (y'_z \frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2} y'_z + \left(\frac{dy_z}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}\right)\frac{1}{x}$

$\rightarrow y'' = -\frac{1}{x^2} y'_z + y''_z \frac{1}{x^2}$ $\longrightarrow$ حفظ شود

$x^2y'' + Pxy' + qy = 0 \rightarrow x^2\left(-\frac{1}{x^2}y'_z + y''_z\frac{1}{x^2}\right) + P\cancel{x}\,y'_z\frac{1}{\cancel{x}} + qy = 0$

ادامه در صفحه آینده

$y_z'' + (P-1)y_z' + 9y = 0$ معادل این روش بشرط اینکه ضریب x یک باشد از این روش استفاده می‌شود.

مثال) معادله اویلر زیر را حل کنید.

1) $2x^2y''+10xy'+8y=0$

حل $\to x^2y''+5xy'+4y=0$

$z=\ln x \to y''+4y'+4y=0 \to (k+2)(k+2)=0 \to k=-2$

$$\begin{cases} y_1=e^{-2z}=e^{-2\ln x}=x^{-2} \\ y_2=ze^{-2z}=(\ln x)e^{-2\ln x}=(\ln x)x^{-2} \Rightarrow \boxed{y=C_1x^{-2}+C_2\ln x} \end{cases}$$

→ جواب عمومی

2) $x^2y''-xy'-3y=0$

حل $\to z=\ln x \to y''-2y'-3y \to k^2-2k-3=0 \to (k+1)(k-3)=0$

$$\begin{cases} k_1=-1 \\ k_2=3 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1=e^{-z}=e^{-\ln x}=1/x \\ y_2=e^{3z}=e^{3\ln x}=x^3 \end{cases}$$

جواب عمومی $\boxed{y=C_1 1/x+C_2x^3}$

پایان جلسه پنجم

جلسه ششم روش ۱۷ (یک جواب از روی جواب دیگر)

همانطور که می‌دانید برای حل یک معادله همگن به دو جواب خصوصی نیاز داریم. چنانچه یکی از آنها را در اختیار ما قرار دهند آنگاه دومی را به شیوه‌ی زیر می‌توان محاسبه کرد:

فرض کنید y_1 جواب خصوصی $y''+P(x)y'+q(x)y=0$ باشد در این صورت y_2 عبارت است از:

$$\begin{cases} y_2 = V y_1 \\ V = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P(x)\,dx} dx \end{cases}$$

مثال) فرض کنید $y_1 = 1$ یک جواب معادله $y'' + \frac{2}{x} y' = 0$ باشد جواب عمومی معادله را بیابید.

$y_1 = 1 \quad y_2 = V y_1$

$$V = \int \frac{1}{y_1^2} = \int \frac{1}{1} e^{-\int \frac{2}{x} dx} dx = \int e^{-2\ln x} dx$$

$$\int x^{-2} dx = -\frac{1}{x} \Rightarrow y_2 = -\frac{1}{x} \quad y = c_1 + c_2\left(-\frac{1}{x}\right)$$ جواب عمومی

مثال) فرض کنید $y_1 = x^2$ یک جواب معادله $x^2 y'' + x y' - 4y = 0$ باشد جواب عمومی معادله فوق مطلوب است.

$y_2 = V y_1$

$$\Rightarrow V = \int \frac{1}{y_1^2} = \int \frac{1}{x^4} e^{-\int \frac{1}{x} dx} dx = \int \frac{1}{x^4} e^{-\ln x} dx = \int x^{-5} dx = \frac{x^{-4}}{-4}$$

$$\Rightarrow y_2 = \frac{x^{-4}}{-4} x^2 = \frac{x^{-2}}{-4} \rightarrow y = c_1 x^2 + c_2\left(\frac{x^{-2}}{-4}\right)$$ جواب عمومی

مثال: اگر $y_1 = x$ جواب معادله $(1 + x\cot x)y'' - xy' + y = 0$ باشد جواب عمومی آن را بیابید.

$$y_2 = Vy_1$$

$$V = \int \frac{1}{y_1^2} = \int \frac{1}{x^2} e^{+\int \frac{x}{1+x\cot x} dx} dx$$

$$\rightarrow V = \int \frac{1}{x^2} e^{\ln(\sin x - x\cos x)} dx$$

پاورقی

$$u = \sin x - x\cos x$$

$$du = \cancel{\cos x} - \cancel{\cos x} + x\sin x$$

$$\int \frac{x\,dx}{1 - x\cot x} = \int \frac{x\,dx}{\frac{1}{1} - \frac{x\cos x}{\sin x}}$$

$$\int \frac{\frac{x}{1}dx}{\frac{\sin x - x\cos x}{\sin x}} = \int \frac{x\sin x\,dx}{\underbrace{\sin x - x\cos x}_{u}} = \int \frac{du}{u}$$

$$\Rightarrow \ln u = \ln(\sin x - x\cos x)$$

$$\rightarrow \int \frac{1}{x^2}(\sin x - x\cos x)dx$$

$$\rightarrow \int \frac{1}{x^2}\sin x\,dx - \int \frac{1}{x}\cos x\,dx$$

$$\begin{cases} u = \sin x \\ dv = \frac{1}{x^2}dx \end{cases} \quad \begin{cases} du = \cos x\,dx \\ v = -\frac{1}{x} \end{cases}$$

$$\rightarrow \left[-\frac{1}{x}\sin x + \cancel{\int \frac{1}{x}\cos x}\right] - \cancel{\int \frac{1}{x}\cos x\,dx} = -\frac{1}{x}\sin x$$

$$y_2 = Vy_1 = -\sin x \qquad y = C_1 x + C_2(-\sin x)$$

جواب عمومی

مثال) جواب عمومی معادله $y''+4y'+4y=0$ را بیابید.

$$k^2+4k+4=0 \xrightarrow{\Delta=0} k=-2 \Rightarrow \begin{cases} y_1=e^{-2x} \\ y_2=ve^{-2x} \end{cases}$$

$$\rightarrow v=\int \frac{1}{e^{-4x}} e^{-\int 4dx} dx$$

$$\rightarrow \int \frac{1}{e^{-4x}} e^{-4x} dx = \boxed{x}$$

ب) روش ضرایب نامعین: در این روش می‌خواهیم یک جواب خصوصی برای یک معادله ناهمگن با ضرایب ثابت زیر بیابیم:

$$y''+py'+qy=R(x)$$

که در آن $R(x)$ الزاماً بصورت تابعی ($e^{\alpha x}$) یا چند جمله‌ای یا مثلثاتی $(a\sin x+b\cos x)$ و یا ترکیبی از آنها باشد.

جواب خصوصی مورد نظر برای این معادله از طریق حدس زدن آن بدست می‌آید که برای این عمل پیش حالت ایجاد می‌کنیم.

1- اگر $R(x)$ تابعی باشد $R(x)=e^{\alpha x}$، در این صورت حدس می‌زنیم $y=Ae^{\alpha x}$

2- اگر α ریشه ساده معادله مشخصه باشد باید حدس را در x ضرب کنیم.

اگر α ریشه مضاعف معادله مشخصه باشد باید حدس را در x^2 ضرب کنیم.

۲) اگر $R(x)$ چند جمله‌ای باشد $R(x)=ax^n+ax^{n-1}+\dots+a_0$ $\xrightarrow{\text{جواب خصوصی}}$ $y=A_nx^n+A_{n-1}x^{n+1}+\dots+A_0$

- اگر صفر ریشه‌ی معادله‌ی ساده مشخصه باشد جواب خصوصی را باید در x ضرب کنیم.
- اگر صفر ریشه‌ی مضاعف معادله‌ی مشخصه باشد جواب خصوصی را باید در x^2 ضرب کنیم.

۳) اگر $R(x)$ مثلثاتی باشد $R(x)=a\sin\beta x+b\cos\beta x$ $\xrightarrow{\text{جواب خصوصی}}$ $y=A\sin\beta x+B\sin\beta x$

نکته: اگر $i\beta$ ریشه‌ی معادله مشخصه باشد جواب خصوصی را باید در x ضرب کنیم.

بعد از اینکه جواب خصوصی را انتخاب کردیم لازم است از آن مشتق گرفته و در معادله‌ی داده شده قرار دهیم سپس ضرایب موجود در طرفین تساوی را مساوی قرار می‌دهیم بدین ترتیب دستگاهی بدست می‌آید که با حل آن ضرایب نامعین جواب خصوصی مشخص می‌شود.

مثال) جواب عمومی معادله زیر را با روش ضرایب نامعین بیابید $y''+2y'+y=4x^2+1$

جواب خصوصی $y=Ax^2+Bx+C$

$2A+4Ax+2B+Ax^2+Bx+C=4x^2+1$

$y'=2Ax+B$

$y''=2A$

$$\begin{cases} A=4 \\ 4A+B=0 \quad B=-16 \\ 2A+2B+C=1 \\ 8-32+C=1 \end{cases}$$

$C=25$

$y''+2y'+y=0$

$k^2+2k+1=0$

$k=-1 \rightarrow \begin{cases} y_1=e^{-x} \\ y_2=xe^{-x} \end{cases} \rightarrow y=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}$ عمومی

ادامه در صفحه‌ی بعدی ←

جواب خصوصی $y = 4x^2 - 16x + 25$

جواب عمومی $y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + 4x^2 - 16x + 25$

مثال) فقط جواب خصوصی را بیابید

$2)\ y'' - y' = 2x$ حدس $= \cancel{Ax+B}$

حدس $y = Ax^2 + Bx$

$y' = 2Ax + B \rightarrow y'' = 2A$

$\begin{cases} 2A - B = 0 & B = -2 \\ -2A = 2 & A = -1 \\ - & \end{cases}$

عدد ثابت

ضریب x

ضریب x^2

جواب خصوصی $\rightarrow y = -x^2 - 2x$

مثال) فقط جواب خصوصی را بیابید

$3)\ y'' - 7y' + 6y = e^x \Rightarrow \boxed{\alpha = 1}$

حدس $= y = \cancel{Ae^x}$

حدس $y = Axe^x \rightarrow y' = Ae^x + Axe^x \quad y'' = Ae^x + Ae^x + Axe^x$

ضریب e^x $\quad 2A - 7A = 1 \quad -5A = 1 \quad A = -\frac{1}{5}$

ضریب xe^x — جواب خصوصی $\rightarrow y = -\frac{1}{5} x e^x$

پایان جلسه ششم

جلسه هفتم

مثال: جواب خصوصی معادله زیر را به روش ضرایب نامعین میابید.

$y'' + 2y' + 2y = 4\sin x$

حدس $y = A\sin x + B\cos x$

معادله مشخصه: $\Rightarrow k^2 + 2k + 2 = 0 \to k = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} \Rightarrow \dfrac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i$

$y' = A\cos x - B\sin x$

$y'' = -A\sin x - B\cos x$

$\to$ در معادله می‌گذاریم $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \text{ضریب } \sin x: & -A - 2B + 2A = 4 \\ \text{ضریب } \cos x: & -B + 2A + 2B = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} A - 2B = 4 \\ 2A + B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{4}{5} \\ B = -\frac{8}{5} \end{cases}$$

جواب خصوصی $\Rightarrow \frac{4}{5}\sin x - \frac{8}{5}\cos x$

مثال: جواب خصوصی معادله زیر را به روش ضرایب نامعین بیابید.

پیاوری:

$y''+9y=2\sin 3x$

معادله مشخصه

$k^2+9=0$

$k^2=-9$

$k=\pm\sqrt{-9}$

$k=\pm 3i$

حدس $y=\cancel{A\sin 3x+B\cos 3x}$

حدس جدید $y=Ax\sin 3x+Bx\cos 3x$

$y'=A\sin 3x+3Ax\cos 3x+B\cos 3x-3Bx\sin 3x$

$y''=3A\cos 3x+3A\cos 3x-9Ax\sin 3x-3B\sin 3x$

$-3B\sin 3x-9Bx\cos 2x$ ← ادامه

چون $3i$ ریشه معادله مشخصه است باید حدس عوض شود

در معادله می‌گذاریم

$$\begin{cases} -6B=2 \rightarrow B=-\frac{1}{3} \\ 6A=0 \rightarrow A=0 \end{cases} \rightarrow y=-\frac{1}{3}x\cos 3x$$

برای جواب خصوصی در حدس می‌گذاریم

<= روش کاهش مرتبه: (یکی از مباحث فصل اول است که امتحان ندارد)

یکی از روش‌های حل معادله مرتبه دوم، تبدیل آن به یک معادله مرتبه اول است به این روش کاهش مرتبه می‌گوییم.

۱- معادلاتی که شامل y نیستند. $F(x, y', y'')=0$

در این گونه معادلات می‌توان با قرار دادن $y' = p$ مرتبه معادله را کاهش داد

$$\begin{cases} y' = p \\ y'' = p' \end{cases} \qquad F(x, p, p') = 0 \leftarrow \text{معادله مرتبه اول}$$

مثال: معادله‌ی زیر را به روش کاهش مرتبه حل کنید.

$$x^2 y'' = 2xy' + y'^2$$

حل ⇒ جایگذاری می‌کنیم

$$\begin{cases} y' = p \\ y'' = p' \end{cases} \rightarrow x^2 p' = 2xp + p^2$$

← حال باید نوع معادله را تشخیص دهیم

$$\Rightarrow x^2 p' - 2xp = p^2$$

$$\Rightarrow p' - \frac{2}{x}p = \frac{1}{x^2}p^2$$

برای سادگی در تشخیص، ساده کردیم.

$$p' - \frac{2}{x}p = \frac{1}{x^2}p^2$$

← حال برنولی مقابل را حل می‌کنیم

$$z = p^{+1-2} = p^{-1} \Rightarrow z' = -1p^{-2}p'$$

$$-p^{-2}p' + \frac{2}{x}p^{-2}p = \frac{-1}{x^2}p^{-2}p^2 \Rightarrow z' + \frac{2}{x}z = \frac{-1}{x^2}$$

خطی ← حل می‌کنیم

$$z = e^{-\int \frac{2}{x}dx}\left(\int \frac{-1}{x^2}\, e^{\int \frac{2}{x}dx}\, dx + C\right)$$

$$z = \frac{1}{x^2}(-x+C) \Rightarrow \frac{1}{p} = \frac{1}{x^2}(-x+C) \Rightarrow \frac{1}{p} = \frac{-x+C}{x^2}$$

ادامه در صفحه بعد

$$P = \frac{x^2}{-x+C} \Rightarrow y' = \frac{x^2}{-x+C} \Rightarrow y = \int \frac{x^2}{-x+C}\,dx$$

حل انتگرال

$$\int \frac{x^2 - C^2 + C^2}{-x+C}\,dx$$

$-(-x+C)$ $-x+C$

$(x-C)(x+C)$

$$\int \frac{x^2 - C^2}{\cancel{-x+C}} + \frac{C^2}{-x+C}$$

$$\int -x - C + \frac{C^2}{-x+C}\,dx$$

$$\begin{array}{l|l} \cancel{x^2} & -x+C \\ \hline -\cancel{x^2} + Cx & -x - C \\ \cancel{Cx} & \\ -\cancel{Cx} + C^2 & \\ C^2 & \end{array}$$

$$\int -x - C + \frac{C^2}{-x+C}\,dx$$

$$y = -\frac{x^2}{2} - C_1 x - C^2 \ln(-x + C_1) + C_2$$

مثال) معادلات زیر را حل کنید

$$y'' - \frac{1}{x} y' = 0 \xrightarrow{\text{حل}} y' = P$$
$$y'' = P'$$

$$\Rightarrow P' - \frac{1}{x} P = 0 \Rightarrow \frac{dP}{dx} = \frac{P}{x} \Rightarrow \int \frac{dP}{P} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln P = \ln x + \ln C$$

$$\ln P = \ln Cx \Rightarrow P = Cx \Rightarrow y' = Cx \Rightarrow \begin{cases} y = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 \\ \boxed{y = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2} \end{cases}$$

۲) معادلاتی که x ندارند: در این گونه معادلات نیز مجدداً $y'=P$ را انتخاب می‌کنیم

$F(y,y',y'')=0$ $\rightsquigarrow$ $y'=P$

$$y''=\frac{dP}{dx}=\frac{dP}{dy}\frac{dy}{dx}=\frac{dP}{dy}P \Rightarrow$$

$F\left(y,P,\frac{dP}{dy}P\right)$ معادله مرتبه اول (در این معادله y را عملاً تغییر مستقل در نظر گرفته می‌شود).

مثال) معادله زیر را با روش کاهش مرتبه حل کنید

$yy''+y'^2=0$

$$y'=P \qquad \Rightarrow yP\frac{dP}{dy}+P^2=0 \Rightarrow yP\frac{dP}{dy}=-P^2$$

$$y''=\frac{dP}{dy}P$$

$$\Rightarrow \frac{y}{P}\frac{dP}{dy}=-1 \Rightarrow \int\frac{dP}{P}=-\int\frac{dy}{y} \Rightarrow \ln P=-\ln y+\ln C$$

$$\Rightarrow \ln P=\ln\frac{1}{y}+\ln C \Rightarrow \ln P=\ln\frac{C}{y} \Rightarrow P=\frac{C}{y} \Rightarrow y'=\frac{C}{y}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{C}{y} \Rightarrow \int y\,dy=\int C\,dx \Rightarrow \boxed{\frac{y^2}{2}=C_1x+C_2}$$

مثال : معادله را به روش کاهش مرتبه حل کنید. $y'' - 9y = 0$

$y' = P$

$y'' = \frac{dP}{dy} P \Rightarrow \frac{dP}{dy} P - 9y = 0 \Rightarrow \frac{dp}{dy} P = 9y \Rightarrow \int P\,dp = \int 9y\,dy$

$\frac{P^2}{2} = \frac{9y^2}{2} + \frac{C}{2} \Rightarrow P^2 = 9y^2 + C \Rightarrow P = \sqrt{9y^2 + C}$

$\Rightarrow y' = \sqrt{9y^2 + C} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \sqrt{9y^2 + C}$

$\int \frac{dy}{9y^2 + c^2} = \int dx \Rightarrow \frac{1}{3} \text{ArcSinh} \frac{3y}{C_1} = x + C_2$

یادآوری

$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$, $\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$

روشلی :

به کمک این روش می خواهیم یک جواب خصوصی برای معادله ناهمگن

$y''+P(x)y'+q(x)y=R(x)$ بیابیم ابتدا جواب عمومی معادله همگن نظیر آن را می یابیم

فرض کنید که جواب عمومی همگن بصورت روبرو است $y=C_1y_1+C_2y_2$ عمومی همگن

در اینصورت جواب خصوصی ناهمگن عبارت است از: $y=V_1y_1+V_2y_2$ خصوصی ناهمگن

V_1 و V_2 را به کمک فرمول زیر می یابیم.

$$V_1=\int\frac{-y_2R(x)}{W(y_1,y_2)}dx$$

$$V_2=\int\frac{y_1R(x)}{W(y_1,y_2)}dx$$

$W(y_1,y_2)$ (رونسکی) ، دترمینان زیر است:

$$W_{(y_1,y_2)}=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

جواب خصوصی معادله زیر را با روش پارامتر بیابید $y''+y=\sec x$

حل: $y''+y=0 \quad k^2+1=0$

$k^2=-1 \rightarrow k=\pm\sqrt{-1}=\pm i$ $\begin{cases} y_1=\cos x \\ y_2=\sin x \end{cases}$ عمومی همگن $=C_1\cos x+C_2\sin x$

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}=\cos^2 x+\sin^2 x=1$$

$$V_1=\int\frac{-\sin x\sec x}{1}dx=+\ln\cos x$$

$$V_2=\int\frac{\cos x\sec x}{1}dx=\int 1\,dx=x$$

جواب خصوصی $\Rightarrow$ $\boxed{y=(\ln\cos x)\cos x+x\sin x}$

جواب خصوصی معادله زیر را به روش تغییر پارامتر بیابید.

$$y''-7y'=6e^{6x}$$

$$y''-7y'=0\rightarrow k^2-7k=0\rightarrow k(k-7)=0\begin{cases}k=0\\k=7\end{cases}\rightarrow\begin{cases}y_1=e^{0x}=1\\y_1=e^{7x}\end{cases}$$

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix}1&e^{7x}\\0&7e^{7x}\end{vmatrix}=7e^{7x}$$

$$V_1=\int\frac{-e^{7x}\,6e^{6x}}{7e^{7x}}dx=-\frac{6}{7}\int e^{6x}dx=-\frac{1}{7}e^{6x}$$

جواب خصوصی $\Rightarrow\left(-\frac{1}{7}e^{6x}\right)+\left(-\frac{6}{7}e^{-x}\right)e^{7x}$

$$V_2=\int\frac{6e^{6x}}{7e^{7x}}=\frac{6}{7}\int e^{-x}dx=-\frac{6}{7}e^{-x}$$

پاورقی:

$$\int e^{ax}=\frac{1}{a}e^{ax}$$

جواب خصوصی معادله زیر را به روش تغییر پارامتر بیابید. (اویلر ناهمگن)

$x^2y'' + 7xy' + 5y = x$

$* z = \ln x \Rightarrow e^{z} = e^{\ln x} \Rightarrow x$

چون متغیر z است دیگر x نیست ($z = \ln x$)

$z = \ln x \rightarrow y'' + 6y' + 5y = e^{z} \ *$

$y'' + 6y' + 5y = 0 \rightarrow k^2 + 6k + 5 = 0 \rightarrow \begin{cases} (k+1) \Rightarrow k = -1 \\ (k+5) \Rightarrow k = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = e^{-z} \ * \\ y_2 = e^{-5z} \end{cases}$

$W = \begin{vmatrix} e^{-z} & e^{-5z} \\ -e^{-z} & -5e^{-5z} \end{vmatrix} \Rightarrow -5e^{-6z} + e^{-6z} \Rightarrow -4e^{-6z}$

$V_1 = \int \frac{-e^{-5z}\, e^{z}}{-4e^{-6z}}\, dz = \frac{1}{4} \int e^{2z}\, dz = \frac{1}{8} e^{2z}$

$V_2 = \int \frac{e^{-z}\, e^{z}}{-4e^{-6z}}\, dz = -\frac{1}{4} \int e^{6z}\, dz = -\frac{1}{24} e^{6z}$

جواب خصوصی $\Rightarrow y = e^{-z}\left(\frac{1}{8}e^{2z}\right) + \left(-\frac{1}{24}e^{6z}\right)e^{-5z} = \frac{1}{8}e^{z} - \frac{1}{24}e^{z} = \frac{1}{8}x - \frac{1}{24}x$

جواب خصوصی $\Rightarrow y = \frac{1}{8}x - \frac{1}{24}x$

تبدیلات لاپلاس

تعریف: فرض کنید تابع $f(x)$ در بازه‌ی $[0, \infty)$ تعریف شده باشد لاپلاس تابع $f(x)$ که با نماد $L[f(x)]$ نمایش می‌دهیم، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L[f(x)] = \int_0^\infty e^{-px} f(x)\,dx$$

هر عدد بتوان $+\infty$ صفر می‌شود.

مثال: $L[1] = \int_0^\infty e^{-px}\,dx = -\frac{1}{p} e^{-px} \Big]_0^\infty = +\frac{1}{p} \to \boxed{L[1] = \frac{1}{p}}$

$$\underbrace{L[x] = \int_0^\infty e^{-px} x\,dx}_{\text{جزء به جزء}} \quad \begin{cases} u = x \\ dv = e^{-px} \end{cases} \quad \begin{cases} du = dx \\ v = -\frac{1}{p} e^{-px} \end{cases}$$

$$-\frac{1}{p} x e^{-px} + \frac{1}{p}\int e^{-px}\,dx = -\frac{1}{p} x e^{-px} - \frac{1}{p^2} e^{-px} \Big|_0^\infty = +\frac{1}{p^2}$$

⇐ جدول لاپلاس

تابع	1	x	x^n	e^{ax}	$\sin ax$	$\cos ax$	$\sinh ax$	$\cosh ax$
لاپلاس	$\frac{1}{p}$	$\frac{1}{p^2}$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$\frac{1}{p-a}$	$\frac{a}{p^2+a^2}$	$\frac{p}{p^2+a^2}$	$\frac{a}{p^2-a^2}$	$\frac{p}{p^2-a^2}$

قواعد لاپلاس

① تبدیل لاپلاس، یک تبدیل خطی است. یعنی به عبارت دیگر:

$$L[af(x)+bg(x)]=aL[f(x)]+bL[g(x)]$$

مثال

الف) $L[4x^3+e^{2x}]=4L[x^3]+L[e^{2x}]=4\left(\frac{6}{p^4}\right)+\frac{1}{p-2}$

ب) $L[2e^{-3x}+\sin 2x]=2L[e^{-3x}]+L[\sin 2x]\to 2\left(\frac{1}{p+3}\right)+\frac{2}{p^2+4}$

ج) $L[\sin^2 x]=L\left[\frac{1-\cos 2x}{2}\right]=\frac{1}{2}L[1-\cos 2x]\to\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+4}\right)$

② دستور انتقال اول: $L[f(x)]=f(p)\to L[e^{ax}f(x)]=f(p-a)$

مثال)

الف) $L[e^{2x}x^3]=\frac{6}{(p-2)^4}$

ب) $\overset{*}{L}[e^{3x}\cos 5x]=\frac{(p-3)}{(p-3)^2+25}$

ج) $L[e^{-2x}\sinh x]=\frac{1}{(p+2)^2-1}$

⚠ توجه ← دستور انتقال اول در محاسبه لاپلاس معکوس نیز کاربردهای فراوانی دارد. به مثال های زیر توجه کنید:

الف) $L^{-1}\left[\frac{1}{*(p-4)^2}\right] = x e^{4x}$ — * بجای $(p-4)^2$، (p^2) فرض می کنیم پس می شود $\frac{1}{p^2} = x$ طبق تعریف e است.

ب) $L^{-1}\left[\frac{1}{*(p-2)^4}\right] = \frac{1}{6} x^3 e^{2x}$ — * پرانتز را p فرض می کنیم $(p)^4$، x^3 نیست چون اول 6 دارد پس $\frac{1}{6}x^3$ را می گذاریم

ج) $L^{-1}\left[\frac{1}{(p-4)^2+9}\right] = \frac{1}{3}\sin 3x\, e^{4x}$ — $\frac{1}{p^3+a}$

د) $L^{-1}\left[\frac{(p-2)+2}{(p-2)^2+25}\right] = L^{-1}\left[\underbrace{\frac{p-2}{(p-2)^3+25}}_{\text{Cos}x \text{ است}} + \underbrace{\frac{2}{(p-2)^2+25}}_{\text{Sin}x \text{ است}}\right]$

$\rightarrow e^{2x}\cos 5x + \frac{2}{5}\sin 5x\, e^{2x}$

$*\ \frac{2}{p^2+a^2}$ — $\frac{1}{5}\sin 5x$ } پس در صورت 2 می گذاریم $\frac{2}{5}\sin 5x$

ه) $L^{-1}\left[\frac{1}{p^2+6p+13}\right]=L^{-1}\left[\frac{1}{(p+3)^2+4}\right]=\frac{1}{2}\sin 2x\, e^{-3x}$

نصف ضریب p به توان 2 تا 13 . 4 فاصله داریم تا بشود 13 پس + به اضافه +4

$13-9=3^2$

و) $L^{-1}\left[\frac{1}{p^2+10p+21}\right]=L^{-1}\left[\frac{1}{(p+5)^2-4}\right]=\frac{1}{2}\sinh 2x\, e^{-5x}$

$\frac{1}{p^2+4}=\sinh 2x$ و $\frac{1}{p^2+4}=\frac{1}{2}\sin 2x$

قواعد لاپلاس

1- خطی $\frac{3}{p^2+9}$

2- دستور انتگرال اول $L[e^{2x}\sin 3x]=\frac{3}{(p-2)^2-9}$

3- لاپلاس مشتق

$$\begin{cases} L[(f)']=pL[f]-f(0) \\ L[(f'')]=p^2L[f]-pf(0)-f'(0) \end{cases}$$

مهمترین کاربرد این قاعده در حل معادلات دیفرانسیل است که بعدا اشاره خواهد شد.

④ لاپلاس انتگرال $L\left[\int_0^x f(x)\,dx\right] = \frac{L[f(x)]}{p}$

مثال) الف) $L\left[\int_0^x \cos 4x\,dx\right] = \dfrac{\frac{p}{p^2+16}}{p}$

ب) $L\left[\int_0^x e^{3x} x^2\,dx\right] = \dfrac{\frac{2}{(p-3)^3}}{p}$

مثال) لاپلاس معکوس های زیر را بیابید

الف) $L^{-1}\left[\frac{1}{p(p-1)}\right] = L^{-1}\left[\dfrac{\frac{1}{p-1}}{p}\right] = \int_0^x e^x\,dx$ یا $L^{-1}\left[\frac{1}{p(p-1)}\right]$

$\Rightarrow L^{-1}\left[\frac{-1}{p} + \frac{1}{p-1}\right] \Rightarrow -1 + e^x$

ب) $L^{-1}\left[\frac{1}{p^3+p}\right] = L^{-1}\left[\dfrac{\frac{1}{p^2+1}}{p}\right] = \int_0^x \sin x\,dx$

$$\text{ج)}\ L^{-1}\left[\frac{1}{p^3+p^2}\right] = L^{-1}\left[\frac{\frac{1}{p+1}}{p}\right] = \underbrace{\int_0^x \left(\int_0^x e^{-x}dx\right)dx}^{\text{چون دوتا } p \text{ داریم}}$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{p(p-1)}\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{p^2-p}\right] \xrightarrow{\text{مربع کامل}} L^{-1}\left[\frac{1}{(p-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}\right] = e^{\frac{1}{2}x}\, 2\sinh\frac{1}{2}x$$

5- مشتق لاپلاس

$$L[x f(x)] = -L[f(x)]'$$

6- انتگرال لاپلاس

$$L\left[\frac{f(x)}{x}\right] = \int_p^{\infty} L[f(x)]\,dp$$

مثال) * در این مواقع به x کاری نداریم لاپلاس تقسیم را حساب می‌کنیم و چون x وارد به مشتق منفی قرار می‌دهیم.

$$L\left[x e^{2x}\right] = -\left(\frac{1}{p-4}\right)'$$

$$L\left[x e^{2x}\right] = -\left(\frac{1}{p-2}\right)'$$

$$L\left[x e^{4x}\sinh x\right] = -\left(\frac{1}{(p-4)^2-1}\right)$$

دستور انتقال بخاطر e^{4x}

دستور انتقال است به خاطر x یک منفی به مشتق

Subject :

Year: Month. Date.

$$L\left[\frac{\sin x}{x}\right]=\int_{p}^{\infty}\frac{1}{p^2+1}\,dp$$

$$L\left[x^2\sin x\right]=+\left(\frac{1}{p^2+1}\right)''$$ چون x^2 است پس دوبار در منفی ضرب کرده و دوبار مشتق می‌گیریم.

مثال) لاپلاس معکوس های زیر را بیابید

A) $L^{-1}\left[\ln\frac{p+1}{p-1}\right]=f(x)$

از دو طرف لاپلاس می‌گیریم

قانون پنجم را بکار می‌گیریم

$$L-\left(\ln\frac{p+1}{p-1}\right)'=L\left[f(x)\right]\to-\left(\frac{p-1}{p+1}\times\frac{p-1-(p+1)}{(p-1)^2}\right)=L\left[x f(x)\right]$$

$$L\left[x f(x)\right]=\frac{2}{(p+1)(p-1)}$$

$$L\left[x f(x)\right]=\frac{2}{p^2-1}=2\left(\frac{1}{p^2-1}\right)=L\left[2\sinh x\right]$$

$$x f(x)=2\sinh x\Rightarrow \boxed{f(x)=\frac{2\sinh x}{x}}$$

پاورقی ← $\ln\frac{p+1}{p-1}$ را در چنین مسائلی یکبار انتگرال و یکبار مشتق می‌گیریم

کدام شان به آن می‌خورد (ساده می‌کنیم) اگر مشتق به کار آمد قاعده ۵ و اگر انتگرال کار آمد از قاعده ۶ بهره می‌بریم

$$B)\ L^{-1}\left[\operatorname{ArcTan}\left(\tfrac{1}{p}\right)\right]=f(x)$$ ← با مشتق ساده‌تر می‌شود پس قاعده ی ۶ را بکار می‌بریم

از طرفین لاپلاس می‌گیریم

$$\operatorname{Arc\,tg}\left(\tfrac{1}{p}\right)=L[f(x)]$$

ضرب در x

$$-\left(\operatorname{Arc\,tg}\left(\tfrac{1}{p}\right)\right)'=L[x f(x)]$$

مشتق باید منفی — قاعده ی ۶

$$-\left(\frac{1}{1+\frac{1}{p^2}}\times\left(-\frac{1}{p^2}\right)\right)=L[x f(x)]$$

$$-\left(\frac{1}{\frac{p^2+1}{p^2}}\times-\frac{1}{p^2}\right)=L[x f(x)]$$

$$L[\sin x]=\frac{1}{p^2+1}=L[x f(x)]$$

$$x f(x)=\sin x \longrightarrow \boxed{f(x)=\frac{\sin x}{x}}$$

$$u=p^2+1 \rightarrow du=2p$$

$$\int\frac{2p}{(p^2+1)^2}dp=\int\frac{du}{u^2}=-\frac{1}{u}=\frac{-1}{p^2+1}$$

در اینجا انتگرال ساده‌ترش می‌کند پس قاعده ی ۷ را بکار می‌بریم

$$C)\ L^{-1}\left[\frac{2p}{(p^2+1)^2}\right]=f(x)\rightarrow\frac{2p}{(p^2+1)^2}=L[f(x)]\rightarrow\int_p^{\infty}\frac{2p}{(p^2+1)^2}dp=L\left[\frac{f(x)}{x}\right]$$

$$-\frac{1}{p^2+1}\Big|_p^{\infty}=L\left[\frac{f(x)}{x}\right]\rightarrow L(\sin x)=+\frac{1}{p^2+1}=L\left[\frac{f(x)}{x}\right]\rightarrow\frac{f(x)}{x}=\sin x$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x)=x\sin x}$$

← کاربرد لاپلاس در حل معادلات دیفرانسیل

به کمک تبدیل لاپلاس می توان جواب خصوصی بعضی از معادلات را که دارای شرایط اولیه می باشند را بدست آورد برای این کار کافیست از طرفین معادله لاپلاس بگیریم سپس با استفاده از قاعده سوم آنرا ساده کرده تا $L[y]$ بدست آید سرانجام به کمک لاپلاس معکوس جواب معادله دیفرانسیل مشخص می شود

مثال) با استفاده از لاپلاس جواب خصوصی معادله زیر را با توجه به شرایط اولیه داده شده بیابید

$$y'' - 4y' + 4y = m \qquad \text{شرایط اولیه} \begin{cases} y(0)=0 \\ y'(0)=0 \end{cases}$$

$$L[y''] - 4L[y'] + 4L[y] = L[m]$$

$$(p^2 L[y] - p\cancel{y(0)} - y'(0)) - 4(pL[y] - y(0)) + 4L[y] = \frac{1}{p^2}$$

$$p^2 L[y] - 4pL[y] + 4L[y] = \frac{1}{p^2}$$

$$(p^2 - 4p + 4)L[y] = \frac{1}{p^2}$$

ادامه در صفحه ی بعد

$$L[y] = \frac{1}{p^2(p^2-4p+4)}$$

$$y = L^{-1}\left[\underbrace{\frac{1}{p^2(p^2-4p+4)}}_{*}\right] = L^{-1}\left[\frac{\frac{\frac{1}{(p-2)^2}}{p}}{p}\right]$$

* در اینجا p داریم تقسیم را می‌دهیم بالا

* دستور انتقال $(p-2)^2$ را p فرض می‌کنیم سپس $\frac{1}{p^2}$ پس xe^{2x} می‌شود.

$$= \int_0^x \int_0^x x e^{2x}\,dx\,dx$$

پس دوبار انتگرال لازم است. $\frac{\frac{\frac{1}{(p-2)^2}}{p}}{p}$ چون ۲ تا p داریم

* هروقت $(p-2)^2$ و یا امثال را دیدید دستور العمل انتقال را پیاده کنید.

$$y'' + y = \cos x \quad L[y''] + L[y] = L[\cos x]$$

شرایط اولیه
$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \qquad \left(p^2[y] - p\cancel{y(0)}^{0} - \cancel{y'(0)}^{1}\right) + L[y] = \frac{p}{p^2+1}$$

را اینور منتقل می‌کنیم

$$p^2 L[y] - 1 + L[y] = \frac{p}{p^2+1}$$

$$(P^2+1)\,L[y] = \frac{P}{P^2+1}+1$$

$$L[y] = \frac{P}{(P^2+1)^2}+\frac{1}{P^2+1} \Rightarrow y = L^{-1}\left[\frac{P}{(P^2+1)^2}+\frac{1}{P^2+1}\right]$$

قاعده ششم ‌ $\sin x$

$$y = \frac{1}{2}x\sin x + \sin x$$

*

چون P^2 توان 2 دارد دستور انتقال بکار نمی رود.

* قاعده ششم

ـ پایان ـ

← جهان امروز از نداشتن داروی بنام پرهیز و اخلاق رنج می برد. هاری کوری

حمیدرضا نوذری

۱ معادله همگن زیر را حل کنید

$$(5x-2y)y'-y=2x$$

$$y'=\frac{y+2x}{5x-2y}$$

$$z'x+z=\frac{2x+2y}{5x-2zx}=\frac{\cancel{x}(z+2)}{\cancel{x}(5-2z)}$$

$$z'x=\frac{z+2}{5-2z}-\frac{z}{1}=\frac{z+2-5z+2z^2}{5-2z}=\frac{2z^2-4z+2}{5-2z}$$

$$\frac{dz}{dx}x=\frac{2z^2-4z+2}{5-2z}\Rightarrow\int\frac{5-2z}{2z^2-4z+2}dz=\int\frac{dx}{x}$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{(2z-2)-3}{(z^2-2z+1)}dz$$

$$-\frac{1}{2}\left[\int\frac{2z-2}{z^2-2z+1}dz-\int\frac{3}{\underbrace{z^2-2z+1}_{(z-1)^2}}dz\right]$$

$$-\frac{1}{2}\left[\ln(z^2-2z+1)+\frac{3}{z-1}\right]=\ln x+C$$

معادله را حل کنید (خطی)

$$y' + y\,\mathrm{Cotg}\,x = \frac{1}{\sin x}$$

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int q(x)\, e^{\int P(x)\,dx}\,dx + C\right)$$

$$y = e^{-\int \cot x}\left(\int \frac{1}{\sin x}\, e^{\int \cot x\, dx}\,dx + C\right)$$

$$y = e^{-\ln \sin x}\left(\int \frac{1}{\sin x}\, e^{\ln \sin x} + C\right) \Rightarrow$$

$$y = \frac{1}{\sin x}\left(\int 1\,dx + C\right) \Rightarrow y = \frac{1}{\sin x}\left(x + C\right)$$

یکی از دو معادله زیر را حل کنید. برنولی

$$\begin{cases} xy' + \dfrac{y}{2\ln x} = y^2 \\ \\ y' + \dfrac{1}{x}y = -2xy^2 \end{cases}$$

$$xy' + \frac{y}{2\ln x} = y^2$$

$$y' + \frac{1}{2x\ln x}y = \frac{1}{x}y^2 \Rightarrow -y^{-2}y' - y^{-2}\frac{1}{2x\ln x}y = -y^{-2}\frac{1}{x}y^2$$

$$z = y^{1-2} \Rightarrow z = y^{-1} \Rightarrow z' = \boxed{-y^{-2}}\, y'$$

$$z' - \frac{1}{2x\ln x}z = -\frac{1}{x}$$

$$z = e^{-\int \frac{-1}{2x\underbrace{\ln x}_{u}}dx}\left(-\frac{1}{x}e^{\int -\frac{1}{2x\ln x}}dx + C\right)$$

$$z = \cancel{e}^{\frac{1}{2}\cancel{\ln}\ln x}\left(-\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{2}\ln\ln x}dx + C\right.$$

$$z = (\ln x)^{\frac{1}{2}}\left(\int -\frac{1}{x}\frac{1}{(\ln x)^{\frac{1}{2}}}dx + C\right) \Rightarrow -\int \frac{1}{u^{\frac{1}{2}}} = -2\sqrt{u}$$

$y^{-1} = z = (\ln x)^{\frac{1}{2}} \left(-2\sqrt{\ln x} + C\right)$

$y'' - y' - 2y = 20 e^{4x}$ روش ضرایب نامعین

$k^2 - k - 2 = 0 \Rightarrow (k-2)(k+1) = 0 \begin{cases} k = 2 \\ k = -1 \end{cases} \begin{cases} y_1 = e^{2x} \\ y_2 = e^{-x} \end{cases}$

جواب عمومی همگن $\Rightarrow y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$

حدس $y = Ae^{4x}$ حدس درست است

$y' = 4Ae^{4x} \Rightarrow 16A - 4A - 2A = 20 \rightarrow 10A = 20 \Rightarrow \boxed{A = 2}$

$y'' = 16Ae^{4x}$

جواب عمومی نا همگن $= y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + 2e^{4x}$

$y'' - y' = 2x - 1$ ج

حدس $y = Ax + B \Rightarrow y = Ax^2 + Bx \Rightarrow y' = 2Ax + B \Rightarrow y'' = 2A$

حدس غلط بود

معادله مشخصه $\Rightarrow k^2 - k = 0$

در معادله

$$\begin{cases} -2A = 2 \Rightarrow \boxed{A = -1} \\ 2A - B = -1 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{matrix} -2 - B = -1 \\ B = -1 \end{matrix}}$$

$\boxed{\text{جواب خصوصی } y = -x^2 - x}$

$x^2 y'' + 4x y' - 4y = 0$ تعیین جواب از روی جواب دیگر

$y_1 = x \quad , \quad y_2 = V y_1 \rightsquigarrow y_2 = \frac{x^{-4}}{-5}$

$$V = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P(x)\,dx}\, dx$$

$$V = \int \frac{1}{x^2} e^{-\int \frac{4}{x} dx}\, dx = \int \frac{1}{x^2} e^{-4\ln x}\, dx$$

$$= \int \frac{1}{x^2}\,\frac{1}{x^4}\,dx = \int x^{-6}\,dx = \frac{x^{-5}}{-5}$$ 6

$$\begin{cases} y'' + y = \sec x \\ y'' + y = \tan x \end{cases}$$

$k^2 + 1 = 0$

$k = \pm i \quad \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = \sin x \\ y_2 = \cos x \end{cases}$

$$W = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -1$$

$$V_1 = \int \frac{-\cos x \tan x}{-1}\,dx = -\cos x$$

$$V_2 \int \frac{\sin x \tan x}{-1}\,dx = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos x}\,dx$$

$$-\int \sec x - \cos x\,dx = -\left[\ln(\sec x + \tan x) - \sin x\right]$$

جواب عمومی $\Rightarrow y = V_1 y_1 + V_2 y_2$

$x^2y'' - 2xy' + 2y = 4x^2$ 7. تغییر دارالتر

$z = \ln x$ $y'' - 3y' + 2y = 4e^{2z}$

$k^2 - 3k + 2 = 0 \rightarrow (k-2)(k-1) = 0 \begin{cases} k=1 \\ k=2 \end{cases} \begin{cases} y_1 = e^z \\ y_2 = e^{2z} \end{cases}$

عمومی همگن $\boxed{y = C_1e^z + C_2e^{2z}}$

حدس $y = Ae^{2z}$ حدس مناسب نمی باشد

$y = Aze^{2z}$

$y' = Ae^{2z} + 2Aze^{2z}$ در معادله د $4A - 3A = 4 \Rightarrow \boxed{A = 4}$

$y'' = 2Ae^{2z} + 2Ae^{2z} + 4Aze^{2z}$

جواب خصوصی $y = 4ze^{2z}$

$$L\left[\int_0^x e^x \cos 2x \, dx\right] = \frac{\frac{p-1}{(p-1)^2+4}}{p}$$ 8

$$\frac{p}{p^2+4}$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{p(p^2+1)}\right] = L^{-1}\left[\frac{\frac{1}{p^2+1}}{p}\right] \Rightarrow \int_0^x \sin x \, dx$$

$$L^{-1}\left[\frac{p}{p^2-2p+26}\right] = L^{-1}\left[\frac{p-1+1}{(p-1)^2+25}\right] = L^{-1}\left[\frac{(p-1)}{(p-1)^2+25} + \frac{1}{(p-1)^2+25}\right]$$

$$= e^x \cos 5x + e^x \frac{1}{5} \sin 5x$$

کاربرد لاپلاس در معادلات

$$y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$$

شرایط اولیه $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \rightarrow L[y''] + 2L[y'] + L[y] = 2L[e^{-x}]$

$$p^2L[y] - p\cancel{y(0)}^{0} - y'(0) + 2\left(pL[y] - \cancel{y(0)}^{0}\right) + L[y] = \frac{2}{p+1}$$

$$(p^2+2p+1)\,L[y] = \frac{2}{p+1} + 1$$

$$L[y] = \frac{\frac{2}{p+1}+1}{\underbrace{p^2+2p+1}_{(p+1)^2}} = \frac{2}{(p+1)^3} + \frac{1}{(p+1)^2}$$

$$y = L^{-1}\left[\frac{2}{(p+1)^3} + \frac{1}{(p+1)^2}\right] = \boxed{e^{-x}x^2 + e^{-x}x}$$

معادلات دیفرانسیل

تمرینها

معادلات جداپذیر

در تمرینهای ۱ تا ۱۴ بعضی از معادلات داده شده جداپذیر هستند و بعضی نیستند. برای آنهایی که جداپذیر هستند، جواب عمومی را پیدا کنید:

۱- $y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}$ ۲- $y' = y^{\frac{1}{2}}$

۳- $y' + xy = 3$ ۴- $y' = x - xy - y + 1$

۵- $(1+x)ydx + xdy = 0$ ۶- $yy' = y^2x^3 + y^2x$

۷- $xy' - \frac{y}{\ln x} = xy^2$ ۸- $3xydx + (x^2+4)dy = 0$

۹- $(1+\ln x)dx + (1+\ln y)dy = 0$ ۱۰- $y^2dx + (x^2-3y)dy = 0$

۱۱- $a^2dx = x\sqrt{x^2-a^2}\,dy$

۱۲- $(1+y^2)\cos x\,dx = 2(1+\sin^2 x)y\,dy$

۱۳- $ye^{x+y}dy = dx$ ۱۴- $y' = e^{y-x}\sin x$

جواب هریک از مسایل مقدار اولیه زیر را تعیین کنید:

۱۵- $\sqrt{1+x^2}\,\frac{dy}{dx} = xe^{-y}$, $y(0) = 0$

۱۶- $(1-y^2)x\frac{dy}{dx} + (1+x^2)y = 0$, $y\left(\frac{1}{2}\right) = 2$

۱۷- $y' = xe^{y-x^2}$, $y(0) = 0$

۱۸- $(x+1)y' = x\sqrt{y+1}$, $y(0) = 0$

۱۹- $\frac{y'}{y} - x = xy$, $y(0) = 1$

۲۰- $xy' - y = 1$, $y(2) = 3$

معادلات همگن

در تمرینهای ۱ تا ۱۲ بعضی از معادلات همگن هستند و بعضی نیستند. برای معادلات همگن، جواب عمومی را به دست آورید:

۱- $(5x-2y)y' - y = 2x$

۲- $x\cos\left(\frac{y}{x}\right)y' = x\sin\left(\frac{y}{x}\right) + y\cos\left(\frac{y}{x}\right)$

۳- $(x^2+y^2)dy + 2x(x+y)dx = 0$

۴- $y(x^2-xy+y^2) + xy'(x^2+xy+y^2) = 0$

۵- $xdy - ydx = \sqrt{xy}\,dx$ ۶- $xy' = y + \sqrt{x^2+y^2}$

۷- $-x^2ydx + (x^3+y^3)dy = 0$ ۸- $y' = e^{-\frac{1}{x}} + y$

۹- $(\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y})dx + (\sqrt{x-y} - \sqrt{x+y})dy = 0$

۱۰- [illegible]$xydx - (x^2-y^2)dy = 0$

۱۱- $\left(x\tan\left(\frac{y}{x}\right) + y\right)dx - xdy = 0$

۱۲- $(x^3 + y^2\sqrt{x^2+y^2})dx - xy\sqrt{x^2+y^2}\,dy = 0$

جواب هریک از مسایل مقدار اولیه زیر را به دست آورید:

-۱۳ $x(x+y)y' = x^2+y^2 \quad , \quad y(1)=0$

-۱۴ $y' = -\frac{x+2y}{y} \quad , \quad y(1)=1$

-۱۵ $(2x-5y)dx+(4x-y)dy=0 \quad , \quad y(1)=4$

-۱۶ $y'=\sqrt{\frac{x+y}{2x}} \quad , \quad y(1)=2$

-۱۷ $(x^2+y^2)dx-2xydy=0 \quad y(1)=1$

معادلات کامل

در تمرینهای زیر بعضی از معادلات کامل هستند و بعضی نیستند. برای معادلات کامل جواب عمومی را به دست آورید:

-۱ $(3x^2+4xy)dx+(2x^2+2y)dy=0$

-۲ $(3x^2y+y^2)dx=(-x^3+2xy)dy$

-۳ $(x-y)dx+(-x+y+2)dy=0$

-۴ $(e^x\cos y-x^2)dx+(e^y\sin x+y^2)dy=0$

-۵ $(2xy-\tan y)dx+(x^2-x\sec^2 y)dy=0$

-۶ $y'=y^{\frac{1}{2}}$

-۷ $ye^{xy}dx+(xe^{xy}+1)dy=0$

-۸ $\cos y\,dx+\sin x\,dy=0$

-۹ $(y+\cos x)dx+(x+\sin y)dy=0$

-۱۰ $x(8x^2y-3x)dx+(2x^4+5y)dy=0$

-۱۱ $[2x+y\cos(xy)]dx+x\cos(xy)dy=0$

-۱۲ $(x^2+y^2)dx-2xy\,dy=0$

جواب هریک از مسایل مقدار اولیه را به دست آورید:

-۱۳ $(2x\cos y+3x^2y)dx+(x^3-x^2\sin y-y)dy=0 \quad , \quad y(0)=2$

-۱۴ $(x-y)dx+(-x+y+2)dy=0 \quad , \quad y(1)=1$

-۱۵ $(ye^{xy}-2y^3)dx+(xe^{xy}-6xy^2-2y)dy=0 \quad y(0)=2$

-۱۶ $(1-xy)^{-2}dx+\left[y^2+x^2(1-xy)^{-2}\right]dy=0 \quad y(4)=1$

-۱۷ $\left(\frac{3-y}{x^2}\right)dx+\left(\frac{y^2-2x}{xy^2}\right)dy=0 \quad , \quad y(-1)=2$

-۱۸ $(x^2+y^2)dx+2xy\,dy=0 \quad y(1)=-1$

معادلات خطی

در تمرینهای زیر بعضی از معادلات خطی اند و بعضی نیستند. معادلات خطی را مشخص نموده و آنها را حل کنید:

-۱ $y'+y\cot x=\frac{1}{\sin x}$ -۲ $yy'-7y=6x$

-۳ $(x^2+y^2)dx-2xy\,dy=0$ -۴ $(\sin^2 x-y)dx-\tan x\,dy=0$

-۵ $(x^4+2y)dx - xdy = 0$ -۶ $y' + \frac{1}{\sin x}y = y^2$

-۷ $2y\,dx = (x^2-1)(dx-dy)$ -۸ $\cos x\frac{dy}{dx} = 2 + 2y\sin x$

-۹ $dx - (1+2x\tan y)dy = 0$ -۱۰ $y' = y + 3x^2e^x$

-۱۱ $(y - x + xy\cot x)dx + xdy = 0$

-۱۲ $y' - \frac{3}{x-1}y = (x-1)^4$

جواب هریک از مسایل مقدار اولیه را تعیین کنید:

-۱۳ $(1+x^2)y' + 2xy = -2x \quad , \quad y(0) = -1$

-۱۴ $(x-1)y' - 3y = (x-1)^5 \quad , \quad y(-1) = 16$

-۱۵ $(1-x^2)y' + xy = x \quad , \quad y(0) = 2$

-۱۶ $y^2dx + (3xy-1)dy = 0 \quad , \quad y(1) = 1$

-۱۷ $\frac{dr}{d\theta} + r\tan\theta = \cos^2\theta \quad , \quad r\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

-۱۸ $y' - y = b(x) \quad , \quad y(0) = 1$

که:

$$b(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & x \ge 0 \end{cases}$$

معادلات برنولی

جواب عمومی معادلات برنولی زیر را به دست آورید:

-۱ $y(6y^2 - x - 1)dx + 2xdy = 0$

-۲ $x(1-x^2)y' + (2x^2-1)y = x^3y^2$

-۳ $\frac{dy}{dx} = y\cot x + \frac{y^2}{\sin x}$ -۴ $y' - 2xy = 4xy^{\frac{1}{2}}$

-۵ $y' + \frac{1}{x}y = -2xy^2$ -۶ $xy' + \frac{y}{2\ln x} = y^2$

-۷ $dy + (4y - 8y^{-3})xdx = 0$ -۸ $y' - \frac{1}{x}y = -\frac{1}{2y}$

-۹ جواب معادله برنولی زیر را با شرط داده شده پیدا کنید:

$$x(x^2-1)y' - y = x^3y^3 \;,\; y(2) = -\frac{1}{2}$$

عامل انتگرال ساز

هریک از معادلات زیر عامل انتگرال سازی دارند که تابعی است فقط از x یا فقط از y. برای هریک عامل انتگرال ساز را تعیین نموده و سپس جواب عمومی معادله را تعیین کنید:

-۱ $(x^2 - 2y)dx + xdy = 0$

-۲ $(4x^2y^3 - 2y)dx + (3x^3y^2 - x)dy = 0$

-۳ $(y^2 + x^2 + y)dy + xydx = 0$

-۴ $2x(y - e^{-x^2})dx + dy = 0$

-۵ $(x^4 + y^4)dx - xy^3dy = 0$

-۶ $(x^2 - y^2 + x)dx + 2xy\,dy = 0$

-۷ $y(x+y+1)dx + x(x+3y+2)dy = 0$

-۸ $(3y - 2xe^{-3x})dx + dy = 0$

-۹ $y(x+y)dx + (x+2y-1)dy = 0$

۱۰- $(y-2x)dx - xdy = 0$

۱۱- تحقیق کنید که هریک از توابع زیر یک عامل انتگرال ساز معادله $ydx - xdy = 0$ است و سپس با استفاده از هریک از این توابع، معادله را حل کنید:

(الف) $\mu(y)=\dfrac{1}{y^2} \; , \; y \neq 0$ (ب) $\mu(x,y)=\dfrac{1}{xy} \; , \; x\neq 0 \; , \; y \neq 0$

(ت) $\mu(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2} \quad x\neq 0 \; , \; y\neq 0$ (ث) $\mu(x)=\dfrac{1}{x^2} \; , \; x\neq 0$

(ج) $\mu(x,y)=\dfrac{1}{x^2-y^2} \; , \; x\neq \pm y$ (ح) $\mu(x,y)=\dfrac{1}{(x-y)^2} \; , \; x\neq y$

(خ) $\mu(x,y)=\dfrac{1}{(x+y)^2} \; , \; x\neq -y$

۱۲- تحقیق کنید تابع $\mu(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2}$ یک عامل انتگرال ساز معادله:

$$\left(2x^2+2y^2+x\right)dx+\left(x^2+y^2+y\right)dy=0$$

است و به کمک آن جواب معادله را بیابید.

برای هریک از معادلات زیر، یک عامل انتگرال ساز که بستگی به هر دو متغیر x و y داشته باشد، بیابید و با استفاده از آن معادله را حل کنید. در حل معادلات، از قضایای زیر استفاده نمایید:

$$d(xy)=ydx+xdy \; , \; d\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{xdy-ydx}{x^2} \; , \; d\left(\tan^{-1}\frac{y}{x}\right)=\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$$

۱۳- $\left(x^2+y^2-x\right)dx-ydy=0$

۱۴- $ydx+\left(x^2y^3+x\right)dy=0$

۱۵- $ydx+\left(x+x^3y^2\right)dy=0$

۱۶- $y\left(x^2+y^2-1\right)dx+x\left(x^2+y^2+1\right)dy=0$

۱۷- $xdy-ydx=\left(x^2+9y^2\right)dx$

۱۸- $y\left(x^3e^{xy}-y\right)dx+x\left(y+x^3e^{xy}\right)dy=0$

۱۹- $\left[x\left(x^2+y^2\right)^2-y\right]dx+\left[\left(x^2+y^2\right)^2y+x\right]dy=0$

۲۰- نشان دهید اگر $\dfrac{M_y-N_x}{Ny-Mx}$ تابعی از $z=xy$ برای مثال، $g(z)$ باشد، آنگاه $\mu(z)=e^{\int g(z)dz}$ یک عامل انتگرال ساز معادله $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ است. با استفاده از آن، برای هریک از معادلات زیر یک عامل انتگرال ساز بیابید و سپس جواب عمومی را پیدا کنید:

(الف) $ydx+\left(x+3x^3y^4\right)dy=0$

(ب) $\left(8ydx+8xdy\right)+x^2y^3\left(4ydx+5x\,dy\right)=0$

(ت) $\left(y-xy^2\right)dx-\left(x+x^2y\right)dy=0$

۲۱- هریک از معادلات زیر دارای عامل انتگرال سازی به صورت $\mu=x^my^n$ است. این عامل را بیابید و با استفاده از آن جواب عمومی را به دست آورید:

(الف) $\left(3y+4xy^2\right)dx+\left(2x+3x^2y\right)dy=0$

(ب) $x^3y^3\left(2ydx+xdy\right)-\left(5ydx+7xdy\right)=0$

۲۲- مانند تمرین ۲۰، شرایطی پیدا کنید که معادله $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ دارای عامل انتگرال سازی به صورتهای $\mu(x+y)$ یا $\mu\left(x^2+y^2\right)$ یا $\mu(xy)$ یا $\mu\left(\dfrac{y}{x}\right)$ باشد.

۲۳- ثابت کنید اگر $F(x,y)$ تابع همگن و از درجه k نسبت به x و y باشد، آنگاه:

$$xF_x + yF_y = kF \qquad \text{(قضیه اویلر)}$$

۲۴- به کمک تمرین ۲۳ نشان دهید اگر معادله $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ همگن و $Mx + Ny \neq 0$، آنگاه $\frac{1}{Mx + Ny}$ یک عامل انتگرال ساز معادله است و با استفاده از آن معادلات همگن زیر را حل کنید:

(الف) $xydx - (x^2 + 2y^2)dy = 0$

(ب) $(x^4 + y^4)dx - xy^3dy = 0$

(ت) $y^2dx + (x^2 - xy - y^2)dy = 0$

مسیرهای قائم و مایل

۱- مسیرهای قائم خانواده منحنیهای زیر را به دست آورید:

(الف) $x^2 + y^2 = 2cx$

(ب) $y = \frac{x}{cx + 1}$

(ت) $x^2 - y^2 = 2cx$

۲- مقدار k را طوری تعیین کنید که سهمیهای $y = c_1x^2 + k$، مسیرهای قائم بیضی های $x^2 + 2y^2 - y = c_2$ باشند (c_1 و c_2 پارامتر هستند).

۳- مقدار n را طوری تعیین کنید که منحنیهای $x^n + y^n = c_1$، مسیرهای قائم خانواده $y = \frac{x}{1 - c_2x}$ باشند.

۴- نشان دهید مسیرهای قائم خانواده $\frac{x^2}{a^2 + c} + \frac{y^2}{b^2 + c} = 1$ ($a > 0$ و $b > 0$) متعلق

به همین خانواده است که c پارامتر می باشد.

۵- خانواده منحنیهایی را پیدا کنید که با هریک ازمنحنیهای خانواده $y = \frac{c}{x}$، زاویه $\frac{\pi}{4}$ بسازد.

مسیرهای قائم در مختصات قطبی

۶- فرض کنید $r = f(\theta)$ معادله یک منحنی در مختصات قطبی باشد. می دانیم زاویه Ψ مماس براین منحنی با شعاع حامل برابر است با:

$$\tan\Psi = \frac{r}{r'} = \frac{f(\theta)}{f'(\theta)}$$

فرض کنید $r = f_1(\theta)$ و $r = f_2(\theta)$ معادله دو منحنی در مختصات قطبی باشند که در نقطه (r, θ) متقاطع اند و:

$$\tan\Psi_1 = \frac{f_1(\theta)}{f'_1(\theta)}, \quad \tan\Psi_2 = \frac{f_2(\theta)}{f'_2(\theta)}$$

نشان دهید شرط آن که دو منحنی در نقطه (r, θ) برهم عمود باشند، آن است که:

$$\tan\Psi_1 = -\frac{1}{\tan\Psi_2}$$

۷- با استفاده از تمرین ۶، مسیرهای قائم خانواده منحنیهای زیر را در مختصات قطبی پیدا کنید:

(الف) $r = c(1 + \cos\theta)$

(ب) $r = c\sin\theta$

(ت) $r = c\sin 2\theta$

معادلات ریکاتی

۱- معادله مرتبه اول $y' + P(x)y + Q(x)y^2 = R(x)$ که در آن P، Q و R توابعی پیوسته از x هستند، معادله ریکاتی نامیده می شود. نشان دهید اگر $y_1 = u(x)$ یک جواب معادله ریکاتی باشد، آنگاه معادله دارای جوابهای دیگری به شکل $y = u(x) + \frac{1}{v(x)}$ نیز

هست که $v(x)$ در معادله خطی زیر صدق می‌کند:

$$v' - \left(2uQ(x) + P(x)\right)v = Q(x)$$

۲- با استفاده از تمرین ۱، جواب عمومی معادلات ریکاتی زیر را که یک جواب آنها داده شده است، پیدا کنید:

الف) $y' + (2x-1)y - y^2 = x^2 - x + 1 \quad , \quad y_1 = x$

ب) $y' = xy^2 + (1-2x)y + x - 1 \quad , \quad y_1 = 1$

ت) $y' = e^{-x}y^2 + y - e^x \quad , \quad y_1 = e^x$

ث) $y' = x^3(y-x)^2 + \frac{y}{x} \quad , \quad y_1 = x$

۳- معادله ریکاتی $y' + y + y^2 = 2$ دارای جوابهای ثابت است. این جوابها را پیدا کنید و جواب عمومی معادله را نیز تعیین نمایید.

معادلاتی که به همگن یا جداپذیر تبدیل می‌شوند

۱- نشان دهید معادله دیفرانسیل به شکل:

$$y' = \frac{ax + by + c}{Ax + By + C}$$

که در آن $aB - bA \neq 0$، با تبدیل:

$$x = X + h \quad , \quad y = Y + k$$

به یک معادله همگن تبدیل می‌شود که h و k از دستگاه معادلات زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{cases} ah + bk + c = 0 \\ Ah + Bk + C = 0 \end{cases}$$

همچنین نشان دهید درحالتی که $aB - bA = 0$، معادله باتعویض متغیر $ax + by = u$، به یک معادله جداپذیر تبدیل می‌شود.

۲- با استفاده از تمرین ۱، جواب عمومی هریک از معادلات زیر را تعیین کنید:

الف) $y' = \dfrac{x + 2y - 4}{2x + y - 5}$

ب) $y' = \dfrac{-x - 2y + 1}{3(x + 2y)}$

ت) $(y - 2)dx - (x - y - 1)dy = 0$

ث) $(x - 4y - 9)dx + (4x + y - 2)dy = 0$

۳- جواب مسأله مقدار اولیه زیر را پیدا کنید:

$$y' = \frac{4(3x + y - 2)}{3x + y} \quad , \quad y(1) = 0$$

۴- جواب عمومی معادله $y' = (9x + 4y + 1)^2$ را به دست آورید.

معادلات کلرو

۱- جواب عمومی و جواب غیرعادی معادلات کلرو زیر را به دست آورید:

الف) $y = xy' - 4(y')^3$

ب) $y = xy' - e^{y'}$

۲- یک معادله کلرو بنویسید که جواب غیر عادی آن $y = x - x^2$ باشد.

معادلات لاگرانژ: هر معادله مرتبه اول به شکل کلی:

$$y = x\,\varphi(p) + \psi(p) \qquad (1)$$

که $p = y'$، *معادله لاگرانژ* نامیده می‌شود. در حالت خاص که $\varphi(p) = p$، معادله کلرو است. برای حل معادلات لاگرانژ، مانند معادلات کلرو، از معادله نسبت به x مشتق

می گیریم. در آن صورت خواهیم داشت:

$$p-\varphi(p)=\left[x\,\varphi'(p)+\psi'(p)\right]\frac{dp}{dx} \qquad (۲)$$

برای هر مقدار ثابت $p=p_0$ که $p-\varphi(p)=0$، داریم $\frac{dp}{dx}=0$؛ و به ازای این p دو طرف معادله (۲) صفر می شود. جواب متناظر با $p=p_0$، یعنی $\frac{dy}{dx}=p_0$، یک تابع خطی از x است. برای به دست آوردن این تابع، در (۱) قرار می دهیم $p=p_0$؛ آنگاه تابع مطلوب به صورت زیر نتیجه خواهد شد:

$$y=x\varphi(p_0)+\psi(p_0) \qquad (۳)$$

حال با فرض $p-\varphi(p)\neq 0$، معادله (۲) یک معادله خطی به شکل زیر است:

$$\frac{dx}{dp}-\frac{\varphi'(p)}{p-\varphi(p)}\,x=\frac{\psi'(p)}{p-\varphi(p)} \qquad (۴)$$

جواب عمومی معادله (۴) به شکل زیر است:

$$x=f(p,\,c) \qquad (۵)$$

بنابراین:

$$\begin{cases} x=f(p,\,c) \\ y=x\,\varphi(p)+\psi(p) \end{cases} \qquad (۶)$$

جواب (۱) به شکل پارامتری است؛ و از حذف p درمعادلات (۶)، جواب عمومی (۱) به صورت:

$$g(x,y,c)=0 \qquad (۷)$$

به دست می آید. عموماً جواب (۳) را از جواب عمومی (۷) نمی توان به دست آورد، و لذا (۳) جواب غیرعادی معادله (۱) است.

تمرین – جواب عمومی و جواب غیرعادی معادله لاگرانژ $y=x(y')^2+(y')^2$ را به دست آورید.

معادلات قابل تبدیل به معادلات مرتبه اول

جواب عمومی هریک از معادلات مرتبه دوم زیر را پیدا کنید:

۱- $y''=y'$ ، ۲- $2y''=e^y$

۳- $y''=\sqrt{1+(y')^2}$ ، ۴- $y''=1-(y')^2$

۵- $(y'')^2=\left(1+(y')^2\right)^3$ ، ۶- $xy''=y'+1$

۷- $yy'=y''\sqrt{y^2+(y')^2}-y'y''$ ، ۸- $yy''+(y')^2-(y')^3\ln y=0$

جواب هریک از مسایل مقدار اولیه زیر را به دست آورید:

۹- $xy''+y'+x=0 \;,\; y(0)=y'(0)=0$

۱۰- $yy''-(y')^2=y^2 \;,\; y(0)=1 \,,\, y'(0)=0$

۱۱- $(y'')^2-2y''-2xy'+(y')^2+x^2=0 \;,\; y(0)=\frac{1}{2} \,,\, y'(0)=1$

۱۲- $yy''+(y')^2=1 \;,\; y(0)=2 \;,\; y'(0)=1$

۱۳- $y''y^3=1 \;,\; y\left(\frac{1}{2}\right)=y'\left(\frac{1}{2}\right)=1$

۱۴- $3y''=y^{-\frac{5}{3}} \;,\; y(0)=y'(0)=1$

۱۵- $y''=\frac{y'}{x}\left(1+\ln\frac{y'}{x}\right) \;,\; y(1)=\frac{1}{2} \,,\, y'(1)=1$

مسایل گوناگون

معادلات زیر را حل کنید:

۱- $(y^2+y+1)dx+x(x-3y^2-1)dy=0$

۲- $(x^5 - y^2)dx + 2xy\,dy = 0$

۳- $y^3 \sec^2 x\,dx - (1 - 2y^2 \tan x)dy = 0$

۴- $xy\,dx + (y^4 - 3x^2)dy = 0$

۵- $ydx + x(x^2 y - 1)dy = 0$

۶- $ydx = x(1 + xy^4)dy$

۷- $y' = \tan y \cot x - \sec y \cos x$

۸- $y(x - 1)dx - (x^2 - 2x - 2y)dy = 0$

۹- $4dx + (x - y + 2)^2 dy = 0$

۱۰- $(xy - \sin x)dx + x^2 dy = 0$

۱۱- $y' = \sin(x + y)$

۱۲- $2x^3 y' = y(y^2 + 3x^2)$

۱۳- $y' = 1 + 6xe^{x-y}$

۱۴- $2ydx + x(x^2 \ln y - 1)dy = 0$

۱۵- $(1 + 3x \sin y)dx - x^2 \cos y\,dy = 0$

۱۶- $y(x + y)dx + (x + 2y - 1)dy = 0$

۱۷- $y' = (x - y)^2 - 2(x - y) - 2$

۱۸- $y(6y^2 - x - 1)dx + 2xdy = 0$

۱۹- $(x - y \ln y + y \ln x)dx + x(\ln y - \ln x)dy = 0$

۲۰- $y(2x - y + 1)dx + x(3x - 4y + 3)dy = 0$

برای معادلات زیر جواب خصوصی پیدا کنید:

۲۱- $(1 + xy)dx - xdy = 0 \quad , \quad y(1) = 0$

۲۲- $y' = 2(3x + y)^2 - 1 \quad , \quad y(0) = 1$

۲۳- $\left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)dx - xdy = 0 \quad , \quad y(\sqrt{3}) = 1$

۲۴- $y' = \dfrac{3x^2 + 4x + 2}{2(y - 1)} \quad , \quad y(0) = -1$

۲۵- $\left(x + e^{\frac{x}{y}}\right)dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \dfrac{x}{y}\right)dy = 0 \quad , \quad y(0) = 2$

۲۶- $y' = \dfrac{2xy\, e^{\left(\frac{x}{y}\right)^2}}{y^2 + y^2 e^{\left(\frac{x}{y}\right)^2} + 2x^2 e^{\left(\frac{x}{y}\right)^2}} \quad , \quad y(0) = 2$

معادلات زیر را با استفاده از تعویض متغیرهای داده شده حل کنید:

۲۷- $\left(2 + 2x^2 y^{\frac{1}{2}}\right)ydx + \left(x^2 y^{\frac{1}{2}} + 2\right)xdy = 0 \quad , \quad x^2 y^{\frac{1}{2}} = u$

۲۸- $y(xy + 1)dx + x(1 + xy + x^2 y^2)dy = 0 \quad , \quad xy = u$

۲۹- $(2x^2 + 3y^2 - 7)xdx - (3x^2 + 2y^2 - 8)ydy = 0 \quad , \quad x^2 = u \, , \, y^2 = v$

۳۰- $y' = \dfrac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2 + y^2 - x^2} \quad , \quad x = r\cos\theta \, , \, y = r\sin\theta$

مسایل نظری

۱- نشان دهید توابع $y(x) \equiv -2$ و $y(x) = -2\cos x$ هردو جوابهای معادله $y' = \sqrt{4 - y^2}$ هستند که در شرط $y(0) = -2$ صدق می‌کنند. آیا این مطلب قضیه وجود و یکتایی را نقض می‌کند؟

در فصل ۲ نشان دادیم که $Q(t)$، بار خازن، در معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی زیر صدق می‌کند:

$$L\frac{d^2Q}{dt^2}+R\frac{dQ}{dt}+\frac{1}{C}Q=E(t)$$

که در این جا به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{d^2Q}{dt^2}+4\frac{dQ}{dt}+13Q=26 \qquad (10)$$

شرایط اولیه مسأله عبارتند از:

$$Q(0)=0,\ Q'(0)=I(0)=0 \qquad (11)$$

جواب عمومی معادله (۱۰) چنین است:

$$Q(t)=e^{-2t}\left(c_1\cos 3t+c_2\sin 3t\right)+2$$

که با استفاده از شرایط (۱۱)، داریم:

$$Q(t)=e^{-2t}\left(-2\cos 3t-\frac{4}{3}\sin 3t\right)+2 \qquad (12)$$

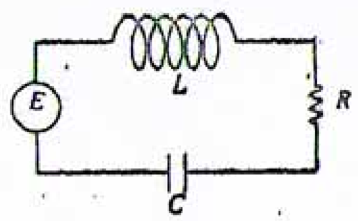
چون $I(t)=\frac{dQ}{dt}$، پس شدت جریان عبارت است از:

$$I(t)=\frac{26}{3}e^{-2t}\sin 3t$$

از (۱۲) نتیجه می‌شود:

$$\lim_{t\to\infty}Q(t)=2$$

که بار الکتریکی حالت پایا است.



تمرینها

معادلات خطی همگن با ضرایب ثابت

در تمرینهای زیر، جواب عمومی معادلات داده شده را به دست آورید:

۱- $4y''-4y'+y=0$
۲- $y''+9y=0$
۳- $y''-2y'+5y=0$
۴- $y''-9y=0$
۵- $y'''-4y''+4y'=0$
۶- $2y^{(4)}-3y'''-2y''=0$
۷- $4y^{(4)}+4y'''-3y''-2y'+y=0$
۸- $y'''+3y''+3y'+y=0$
۹- $y^{(4)}+18y''+81y=0$
۱۰- $y'''-2y''+y'-2y=0$
۱۱- $y''+iy'+2y=0$
۱۲- $y'''-2y''-5y'+6y=0$

جواب هریک از مسایل مقدار اولیه زیر را به دست آورید:

۱۳- $y''+4y'+4y=0\ ,\ y(0)=y'(0)=1$
۱۴- $y'''+7y''+19y'+13y=0\ ,\ y(0)=0\ ,\ y'(0)=2\ ,\ y''(0)=-2$
۱۵- $y'''-3y'-2y=0\ ,\ y(0)=0\ ,\ y'(0)=9\ ,\ y''(0)=0$
۱۶- $y''+4y=0\ ,\ y\left(\frac{\pi}{4}\right)=1\ ,\ y'\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$
۱۷- $y'''-2y''+2y'=0\ ,\ y(0)=-2\ ,\ y'(0)=0\ ,\ y''(0)=4$
۱۸- $y'''-y''-y'+y=0\ ,\ y(0)=0\ ,\ y'(0)=5\ ,\ y''(0)=2$

معادلات خطی ناهمگن با ضرایب ثابت

جواب عمومی معادلات زیر را به دست آورید.

۱- $y''-y'-2y=20e^{4x}$
۲- $y'''+3y''+3y'+y=4e^{-x}$

۳- $y''' + y' = 2x - 1$ ۴- $y'' - 4y' + 4y = 5\sin x$

۵- $y''' + y' = 4\cos x$ ۶- $y'' - 4y' + 4y = 12xe^{2x}$

۷- $y'' - y' - 2y = -6xe^{-x}$ ۸- $y'' + 2y' + 5y = 4e^{-x}\cos 2x$

۹- $y'' - 3y' + 2y = e^{x}\sin x$ ۱۰- $y'' + y = xe^{2x}$

۱۱- $y'' + y = 6e^{x} + 6\sin x$ ۱۲- $y'' + y = 8\cos^{3} x$

۱۳- $y'' - y' - 2y = \cosh 2x$ ۱۴- $y'' - 3y' + 2y = 4e^{3x} + 6e^{-x}$

۱۵- $y'' - 4y' + 4y = 6\cos 2x + 8x$ ۱۶- $y'' - y' - 2y = 2xe^{-x} + x^{2}$

برای هریک از معادلات زیر، یک جواب خصوصی با روش ضرایب نامعین پیدا کنید:

۱۷- $y'' + y = x + 2e^{-x}$ ۱۸- $y'' - y = e^{x} + \sin x$

۱۹- $y^{(6)} - 3y^{(4)} = 1$ ۲۰- $y'' + 4y = 4x^{3} - 8x^{2} - 14x + 7$

۲۱- $2y'' + y' - y = e^{x}(x^{2} - 1)$ ۲۲- $y'' + y = e^{x}(x + 1)$

جواب هریک از مسایل مقدار اولیه زیر را پیدا کنید:

۲۳- $y'' + y = x + 2e^{-x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -2$

۲۴- $y'' - y = xe^{x}, \quad y(0) = 0; \quad y'(0) = 1$

۲۵- $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}, \quad y(0) = 0; \quad y'(0) = 0$

۲۶- $y'' + y' = x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

۲۷- $y'' + y = 4\cos x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3$

۲۸- $y'' + 2y' + 3y = 5e^{2x}, \quad y(0) = 5; \quad y'(0) = 2$

در تمرینهای، زیر جواب عمومی معادلات ناهمگن را به‌دست آورید. برای هریک، جواب خصوصی را با استفاده از عملگر D پیدا کنید.

۱- $(D^{2} - 6D + 9)y = 2e^{3x}$ ۲- $(D^{2} + D - 6)y = 12e^{-x}$

۳- $(D^{2} - 4D + 4)y = 100\cos 2x$ ۴- $D^{2}(2D + 3)y = x^{2}$

۵- $(D^{2} + 2D + 2)y = e^{-x}\sin x$ ۶- $(D^{2} + 9)y = x\cos x$

۷- $(D + 1)^{3}y = 12x^{2}e^{-x}$

۸- $(D^{2} + 4D + 4)y = e^{-2x}\cos 3x$

در تمرینهای زیر، یک جواب خصوصی با استفاده از عملگر D به دست آورید:

۱- $(D^{2} - 3D + 2)y = x^{2} + 2x + 3$ ۲- $D(D - 2)y = 8\cos x$

۳- $(D^{2} - 3D)y = 2e^{3x}$ ۴- $(D^{2} + 4)y = x\sinh x$

۵- $(D^{2} - 4D + 2)y = 12$ ۶- $(D + 1)^{2}y = x^{1/2}e^{-x}$

۷- $(D + 1)^{2}y = x^{3}e^{-x}$ ۸- $(D^{2} + 4)y = x^{2}\sin 2x$

۹- $(D^{2} + 4)y = 2\cos x\cos 3x$ ۱۰- $(D^{2} - 1)y = 5e^{x}\sin x$

۱۱- $(D^{2} + 4)y = x\sin 2x$

۱۲- $(D^{2} - 4)y = x + 4\cos x + e^{-2x}$

در معادلات همگن زیر، یک جواب داده شده است. جواب عمومی هریک را با روش کاهش مرتبه پیدا کنید.

۱- $x^{2}y'' + xy' - y = 0, \quad y_1 = x$

۲- $(1 - x^{2})y'' - 2xy' + 2y = 0, \quad y_1 = x$

۳- $x^{2}(x + 1)y'' - 2xy' + 2y = 0, \quad y_1 = x$

۴- $y'' + \frac{2}{x}y' + \frac{9}{x^{4}}y = 0, \quad y_1 = \cos\left(\frac{3}{x}\right)$

۵- $xy'' + 2(1 - x)y' + (x - 2)y = 0, \quad y_1 = e^{x}$

-۶ $x^2y'' + x^2y' - (x+2)y = 0 \quad , \quad y_1 = \frac{1}{x}e^{-x}$

-۷ $(1 - x\cot x)y'' - xy' + y = 0 \quad , \quad y_1 = x$

-۸ $x(1-2x\ln x)y'' + (1+4x^2\ln x)y' - (2+4x)y = 0 \quad ; \quad y_1 = \ln x$

-۹ $xy'' + (2x-1)y' - 2y = 0 \quad , \quad y_1 = e^{-2x}$

جواب عمومی معادلات ناهمگن زیر را با روش تغییر پارامترها به دست آورید:

-۱ $y'' + y = \tan x$ -۲ $y'' - 2y' + 3y = \frac{1}{1+e^{-x}}$

-۳ $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$ -۴ $y'' + y = \sec x$

-۵ $y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{1+x}$ -۶ $y'' + 6y' + 9y = \frac{e^{-3x}}{x^3}$

-۷ $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$ -۸ $y'' - 12y' + 36y = e^{6x}\ln x$

-۹ $y'' - y' = \sec^2 x - \tan x$ -۱۰ $y'' + y = \sec^3 x$

-۱۱ $y'' + 2y' + y = x^{-2}e^{-x}\ln x$ -۱۲ $y'' + 4y' + 5y = e^{-2x}\sec x$

در معادلات ناهمگن زیر یک جواب معادله همگن نظیر داده شده است. جواب عمومی را با استفاده از روش تغییر پارامترها پیدا کنید:

-۱۳ $2xy'' + (1-4x)y' + (2x-1)y = e^x \quad , \quad y_1 = e^x$

-۱۴ $xy'' + 2(1-x)y' + (x-2)y = 2e^x \quad , \quad y_1 = e^x$

-۱۵ $x^4y'' + 2x^3y' + y = 1 \quad , \quad y_1 = \sin\frac{1}{x}$

-۱۶ $x^2y'' + 4xy' - 4y = x^4 \quad , \quad y_1 = x$

-۱۷ $y'' - \frac{2}{x}y' + \left(1 + \frac{2}{x^2}\right)y = xe^x \quad , \quad y_1 = x\cos x$

جواب عمومی معادلات اویلر زیر را پیدا کنید:

-۱ $x^2y'' + 7xy' + 9y = 0$ -۲ $x^3y''' - x^2y'' + xy' = 0$

-۳ $x^2y'' - 2xy' + 2y = 6\ln x\ , \ x>0$ -۴ $x^2y'' + xy' - y = -2x^2e^x$

-۵ $x^3y''' + x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$ -۶ $x^2y'' - 2xy' + 2y = 4x^2$

-۷ $x^3y''' + xy' - y = 0$ -۸ $x^2y'' + xy' - 4y = 4x^6$

-۹ $x^2y'' - 2y = \ln x \ , \ x > 0$

-۱۰ $x^3y''' + 3x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$

برای معادلات اویلر زیر، یک جواب خصوصی با شرایط داده شده به دست آورید:

-۱۱ $x^2y'' - xy' + y = 0 \quad , \quad y(-1) = 1 \quad , \quad y'(-1) = 0$

-۱۲ $x^2y'' - xy' + y = 0 \quad ; \quad y(1) = 1 \quad , \quad y'(1) = 0$

-۱۳ $2x^2y'' + 7xy' - 3y = 0 \quad , \quad y(-4) = 1 \quad , \quad y'(-4) = 0$

-۱۴ $x^3y''' + 4x^2y'' - 8xy' + 8y = 0 , \quad y(1) = 0 \ ; \ y'(1) = 1 , \quad y''(1) = 0$

-۱۵ $x^2y'' + 4xy' + 2y = 0 \quad , \quad y(1) = 1 \quad , \quad y'(1) = 2$

برای معادلات اویلر زیر، یک جواب خصوصی با استفاده از روش تغییر پارامترها به دست آورید:

-۱۶ $y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{y}{x^2} = \frac{1}{x^2+x^3} \quad , \quad x > 0$

-۱۷ $x^2y'' - 3xy' + 4y = x + 2$

-۱۸ نشان دهید با تعویض متغیر $t = ax + b$، معادله:

$$A(ax+b)^2y'' + B(ax+b)y' + Cy = 0$$

به یک معادله اویلر تبدیل می‌شود.