اعداد حقیقی (۱)

اعداد اولین بار در رابطه با امر شمارش ظاهر شدند. اعداد طبیعی:

$$۱, ۲, ۳, \ldots$$

وسیلهٔ سنجش تعدد اشیاء در یک مجموعهٔ مشخص‌اند. از آنجا که کمیت‌های مورد اندازه‌گیری همیشه به صورت گسسته و مجزا ظاهر نمی‌شوند، انسان از دیرباز دریافت که برای سنجش میزان کمیت، شمارش و اعداد طبیعی کفایت نمی‌کنند، بلکه باید نسبت دو کمیت از یک جنس را نیز نوعی عدد تلقی کرد. مقایسهٔ وزن اجسام و طول پاره‌خط‌ها از این جمله‌اند. برای انجام مقایسهٔ دو کمیت، شیئی همجنس با دو شیء مورد مقایسه ولی کوچکتر از آنها در نظر گرفته می‌شود که اندازهٔ هر شیء مضرب صحیحی از اندازهٔ آن باشد. در شکل ۱ دو پاره‌خط $L_۰$ و $L_۱$ نمایش داده شده‌اند و پاره‌خطی L که ۵ بار در $L_۰$ و ۳ بار در $L_۱$ می‌گنجد. در این صورت نسبت طول $L_۰$ به طول $L_۱$ را به $\frac{۵}{۳}$ نمایش می‌دهند. نسبت‌های $\frac{m}{n}$ که در آن m و n عدد طبیعی باشند امروزه اعداد گویا یا کسرهای متعارف می‌نامیم. ریاضیدان یونانی یودوکسوس[۱] حدود ۴ قرن قبل از میلاد کسرها را به طور جامع بررسی کرد و نظریهٔ او در فصل پنجم کتاب اصول اقلیدس (قرن سوم قبل از میلاد) نقل شده است. هرگاه پاره‌خطی L به عنوان مرجع یا واحد در نظر گرفته شود، n یک عدد طبیعی باشد، و L' پاره‌خطی که L دقیقاً n بار در آن می‌گنجد، نسبت طول L' به طول L برابر $\frac{n}{۱}$ است. از آنجا که طول L' را می‌توان نتیجهٔ n بار شمارش طول L در نظر گرفت، تمایزی میان $\frac{n}{۱}$ و n قایل نمی‌شویم و از این رو مجموعهٔ اعداد گویا را گسترشی از مجموعهٔ اعداد طبیعی تلقی می‌کنیم.

---
[۱] Eudoxus

به طور کلی دو کمیت از یک جنس را همسنگ می‌نامیم در صورتی که کمیتی از همان جنس (به عنوان "واحد" یا "سنگه") وجود داشته باشد که اندازهٔ هر یک از کمیت‌های داده شده مضرب صحیحی از اندازهٔ سنگه باشد. در شکل ۱، طول پاره‌خط‌های $L_۰$ و $L_۱$ همسنگ هستند و می‌توان از طول L به عنوان سنگه استفاده کرد. در عمل به نظر می‌آید باید بتوان برای مقایسهٔ هر دو کمیت همجنس، واحدی به اندازهٔ کافی کوچک انتخاب کرد که هر دو کمیت مضرب صحیحی از آن واحد باشند، یا به عبارتی دیگر، به نظر می‌آید که هر دو کمیت همجنس، همسنگ باشند. برای تأکید بر اهمیت مسأله، موضوع را به صورت یک سؤال مطرح می‌کنیم:

سؤال. آیا هر دو کمیت همجنس، همسنگ نیز هستند؟

اینکه جواب این سؤال منفی است ظاهراً در قرن پنجم پیش از میلاد توسط هیپاسوس[۲] کشف شد و بحرانی در فلسفه و علم باستان پدید آورد. فیثاغورسیان اعتقاد داشتند که اعداد (صحیح) به نوعی منشاء و عنصر ساخت همهٔ هستی‌اند و این کشف هیپاسوس که دو پاره‌خط وجود دارد که نمی‌توان هر دو را با یک واحد مشترک شمرد بنیاد تفکر آنها را متزلزل ساخت. استدلال هیپاسوس را بعداً خواهیم آورد ولی استدلال ساده زیر که دو قرن بعد در جزوهٔ دهم کتاب اصول اقلیدس ظاهر می‌شود اندکی بعد کشف شد. در اینجا نشان داده می‌شود که طول ضلع مربع و طول قطر آن همسنگ نیستند، یا به زبان امروزی نسبت این دو طول یک عدد گویا نیست. اگر طول ضلع مربع را l بگیریم، طول قطر آن طبق قضیهٔ فیثاغورس برابر $l\sqrt{۲}$ است و نسبت طول قطر به طول ضلع برابر $\sqrt{۲}$ می‌شود. روش ارائه شده در کتاب اقلیدس برای اثبات ناگویا بودن $\sqrt{۲}$، برهان خلف است. فرض می‌کنیم $\sqrt{۲} = \frac{M}{N}$ که در آن M و N عدد صحیح هستند. کسر $\frac{M}{N}$ را تا حد ممکن با حذف مقسوم‌علیه‌های مشترک ساده می‌کنیم تا به صورت $\frac{m}{n}$ در آید، پس $\sqrt{۲} = \frac{m}{n}$ در وضعیتی است که m و n مقسوم‌علیه مشترک ندارند. با مجذور کردن دو طرف داریم $۲n^۲ = m^۲$، پس $m^۲$ زوج است پس $m = ۲k$ و نتیجه می‌گیریم که $n^۲ = ۲k^۲$. باز به ترتیب بالا n باید خود زوج باشد، $n = ۲l$. حال m و n هر دو زوج هستند، یعنی هر دو بر ۲ قابل قسمت‌اند در حالی که فرض شده بود m و n مقسوم‌علیه مشترک ندارند. این تناقض نشان می‌دهد که

[۲] Hippasus

بیان $\sqrt{۲}$ به صورت $\frac{m}{n}$ ممکن نیست، یعنی $\sqrt{۲}$ گویا نیست، و به بیانی دیگر طول ضلع و طول قطر مربع همسنگ نیستند.

در واقع می‌توان به سادگی ثابت کرد که اگر n خود مجذور کامل نباشد $\sqrt{n}$ گویا نیست. در قطعهٔ ۱۴۷ کتاب تئه‌تتوس افلاطون[۳] (قرن چهارم پیش از میلاد) اشاره می‌شود که ریاضیدان یونانی تئودروس این مطلب را تا $n = ۱۷$ به اثبات رسانده است. در جای دیگری از آثار افلاطون یکی از مناظره‌کنندگان از جهل آتنی‌ها نسبت به اعداد ابراز شرمساری کند و بالاخص اینکه اکثر مردم به وجود کمیت‌های ناهمسنگ آگاهی نداشتند.

در اینجا آنچه به ظن قوی کشف هیپاسوس از نسبت‌های ناگویا بوده است نقل می‌کنیم. علامت ویژهٔ فیثاغورسیان موسوم به پنتاگرام یک پنج‌ضلعی منتظم بود. در یک چنین پنج‌ضلعی با رسم قطرها پنج‌ضلعی منتظم دیگری در داخل ساخته می‌شود و می‌توان این کار را همواره ادامه داد (شکل ۲). نشان می‌دهیم چگونه مقایسهٔ نسبت طول قطر پنج‌ضلعی منتظم به طول ضلع آن یک کمیت ناگویا به‌دست می‌دهد. به طور کلی فرض کنید $a_۰$ و $a_۱$ دو کمیت همجنس باشند (مثلاً طول‌های دو پاره‌خط) و $a_۰ < a_۱$. اگر $a_۱$ دقیقاً $n_۱$ بار در $a_۰$ بگنجد، $n_۱$: عدد طبیعی، آنگاه $a_۰$ و $a_۱$ همسنگ هستند و داریم $a_۰ = n_۱a_۱$. در هر صورت $n_۱$ را بزرگترین عدد طبیعی می‌گیریم که $n_۱a_۱$ از $a_۰$ تجاوز نکند و داریم

$$a_۰ = n_۱a_۱ + a_۲ \quad , \quad ۰ \leq a_۲ < a_۱ \qquad (۱)$$

ملاحظه کردیم که اگر $a_۲ = ۰$، $a_۱$ خود سنگهٔ مناسب برای مقایسه $a_۰$ و $a_۱$ است. حال فرض کنید $a_۲ \neq ۰$. در اینجا $a_۲$ را به حداکثر دفعات ممکن در $a_۱$ می‌گنجانیم یعنی بزرگترین عدد طبیعی $n_۲$ را انتخاب می‌کنیم که $n_۲a_۲ \leq a_۱$. پس:

$$a_۱ = n_۲a_۲ + a_۳ \quad , \quad ۰ \leq a_۳ < a_۲ \qquad (۲)$$

اگر $a_۳ = ۰$، آنگاه $a_۱$ مضرب صحیحی از $a_۲$ است. از (۱) می‌بینیم که در این صورت $a_۰$ نیز مضرب صحیحی از $a_۲$ خواهد شد و بدین ترتیب $a_۲$ سنگهٔ مناسب برای سنجش $a_۰$ و $a_۱$ است. اگر $a_۳ \neq ۰$،

[۳] دورهٔ آثار افلاطون (جلد پنجم و هفتم)، ترجمه محمدحسن لطفی، انتشارات خوارزمی (۱۳۵۷).

این فرایند را ادامه داده می‌نویسیم:

$$a_2 = n_3 a_3 + a_4 \quad , \quad 0 \leq a_4 < a_3 \tag{3}$$

که در آن n_3 یک عدد طبیعی است. مجدداً اگر $a_4 = 0$ با دنبال کردن (۳)، (۲) و (۱) می‌بینیم که a_3 سنگه‌ای برای سنجش a_1 و a_0 است و گرنه ادامه می‌دهیم. ادعا می‌کنیم:

(۱—۱) گزاره. a_0 و a_1 همسنگ هستند اگر و تنها اگر فرایند بالا در تعدادی متناهی گام به باقیماندهٔ صفر برسد، یعنی عدد طبیعی k وجود داشته باشد که $a_{k-1} = n_k a_k$، n_k: عدد طبیعی. در این صورت a_k سنگه‌ای برای سنجش a_0 و a_1 است.

اثبات. اگر فرایند فوق در k گام به صفر برسد داریم:

$$\begin{cases} a_0 = n_1 a_1 + a_2, & 0 < a_2 < a_1 \quad n_1 : \text{عدد طبیعی} \\ a_1 = n_2 a_2 + a_3, & 0 < a_3 < a_2 \quad n_2 : \text{عدد طبیعی} \\ \vdots & \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{k-2} = n_{k-1} a_{k-1} + a_k, & 0 < a_k < a_{k-1} \quad n_{k-1} : \text{عدد طبیعی} \\ a_{k-1} = n_k a_k & \qquad\qquad n_k : \text{عدد طبیعی} \end{cases} \tag{4}$$

رابطهٔ آخر نشان می‌دهد a_{k-1} مضرب صحیحی از a_k است، پس از رابطه یکی به آخر a_{k-2} مضربی از a_k است، و به همین ترتیب با صعود به دو رابطهٔ اول نتیجه می‌شود که a_0 و a_1 هر دو مضرب صحیحی از a_k هستند، یعنی a_k سنگه‌ای برای سنجش a_0 و a_1 است. بالعکس فرض کنید a_0 و a_1 همسنگ باشند، در این صورت عددی $u > 0$ به عنوان سنگه وجود دارد که a_0 و a_1 هر دو مضرب صحیحی از u هستند. از رابطهٔ اول بالا نتیجه می‌شود که a_2 نیز مضربی صحیح از u است، سپس از رابطه بعد a_3 مضربی صحیح از u است، و به همین ترتیب اگر ثابت شده باشد که $a_0, a_1, \ldots, a_p$ مضرب صحیح u هستند و رابطهٔ بعدی به شکل

$$a_{p-1} = n_p a_p + a_{p+1}$$

باشد، نتیجه می‌گیریم که $a_{p+1} = a_{p-1} - n_p a_p$ مضرب صحیحی از u است. حال اگر این فرایند به باقیماندهٔ صفر نرسد، دنباله باقیمانده‌ها به صورت نزولی زیر است:

$$a_1 > a_2 > a_3 > \cdots$$

که در اینجا همهٔ a_j ها مضرب صحیحی از عدد مثبت u می‌باشند. چنین وضعیتی غیرممکن است زیرا که بین دو عدد u و a_1 فقط تعدادی متناهی مضرب صحیح u می‌گنجد. این امر نشان می‌دهد که اگر a_0 و a_1 همسنگ باشند، فرایند بالا بالاخره به باقیمانده صفر می‌رسد و آخرین مقسوم‌علیه به‌دست آمده سنگه لازم است. □

با اتکاء به مطلب بالا و استدلالی هندسی، هیپاسوس نشان داد نسبت‌های قطر و ضلع پنج‌ضلعی منتظم همسنگ نیستند بدین ترتیب که اگر فرایند فوق برای آنها پیاده شود هیچگاه به باقیمانده صفر نمی‌رسیم. به شکل (۲) توجه کنید. از تساوی زوایای داخلی و اضلاع پنج‌ضلعی منتظم مشاهده می‌کنیم که هر قطر موازی ضلعی است که از هیچ یک از دو انتهای آن نمی‌گذرد: $AC \| ED$، $BE \| CD$، ... . بنابراین مثلث‌های ABC و $EB'D$ به اضلاع دو به دو موازی متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{EB'}{ED}$$

طول قطر پنج‌ضلعی را a_0 و طول ضلع آن را a_1 می‌نامیم. از آنجا که زوایای داخلی پنج‌ضلعی باز هستند ($= 108^\circ$) داریم $a_0 > a_1$. چون چهارضلعی $ABCB'$ متوازی‌الاضلاع است داریم $EB' = a_0 - a_1$. پس

$$\frac{a_1}{a_0} = \frac{a_0 - a_1}{a_1}$$

$a_0 - a_1$ را به a_2 نمایش می‌دهیم. داریم $a_2 < a_1$ زیرا که در مثلث $EB'D$ هر ضلع از تفاضل دو ضلع دیگر بزرگتر است. پس:

$$a_0 = 1 \cdot a_1 + a_2 \quad , \quad 0 < a_2 < a_1$$

حال $a_1 - a_2$ را به a_3 نمایش می‌دهیم و ملاحظه می‌کنیم که a_3 برابر طول پنج‌ضلعی منتظم کوچک $A'B'C'D'E'$ است زیرا که طول AB' برابر a_1 و طول AC' برابر a_2 است. از طرفی دیگر طول قطر

$A'B'C'D'E'$ برابر $a_۲$ است زیرا که اگر از A' به D' و C' وصل کنیم متوازی الاضلاعی ایجاد می‌شود ($A'D'$ و AD هر دو موازی BC هستند؛ $A'C'$ و AC هر دو موازی DE) بنابراین $a_۳ < a_۲$ و داریم:

$$a_۱ = ۱ \cdot a_۲ + a_۳ \quad , \quad ۰ < a_۳ < a_۲$$

حال اگر پنج‌ضلعی منتظم $A'B'C'D'E'$ به ضلع $a_۳$ و قطر $a_۲$ را در نظر بگیریم، مجدداً وضعیت پنج‌ضلعی متشابه $ABCDE$ با طول ضلع و طول قطر به ترتیب $a_۱$ و $a_۰$ تکرار می‌شود، یعنی خواهیم داشت

$$a_۲ = ۱ \cdot a_۳ + a_۴ \quad , \quad ۰ < a_۴ < a_۳$$

$$a_۳ = ۱ \cdot a_۴ + a_۵ \quad , \quad ۰ < a_۵ < a_۴$$

به طور کلی اگر a_i ها تا a_n تعریف شده باشند، با تعریف $a_{n+۱} = a_{n-۱} - a_n$، و با توجه به اینکه همواره با رسم کردن قطرهای پنج‌ضلعی منتظم یک پنج‌ضلعی منتظم دیگر در درون پنج‌ضلعی پدید می‌آید خواهیم داشت:

$$a_{n-۱} = ۱ \cdot a_n + a_{n+۱} \quad , \quad ۰ < a_{n+۱} < a_n$$

بدین ترتیب در وضعیت گزاره ۱—۱ هستیم و در شِقی که هرگز باقیمانده به صفر نمی‌رسد، پس $a_۰$ و $a_۱$ همسنگ نیستند، یا به عبارت دیگر $\frac{a_۰}{a_۱}$ ناگویا است!

تمرین ۱. نشان دهید $\frac{a_۰}{a_۱} = \frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$. این نسبت به نسبت طلایی معروف است و خواص ریاضی جالب توجهی دارد که بعضی از دوران باستان شناخته شده بودند. بالاخص یونانیان "زیباترین" مستطیل از نظر تناسب اضلاع را، مستطیلی می‌دانستند که نسبت طول به عرض آن برابر نسبت طلایی باشد. نشان دهید این مستطیل‌ها، و فقط این مستطیل‌ها، این ویژگی را دارند که اگر از آنها یک مربع به ضلع عرض مستطیل داده شده برداشته شود، مستطیل باقیمانده متشابه با مستطیل اولیه است.

تمرین ۲. نشان دهید اگر عدد طبیعی n مجذور کامل نباشد، $\sqrt{n}$ ناگویا است. (راهنمایی: از تجزیه اعداد طبیعی به عوامل اول استفاده کنید.)

در اینجا باید به این مطلب اشاره شود که نظام عددنویسی متداول امروز به صورت اعشاری (یا هر مبنای دیگر) در زمان یونان باستان وجود نداشت. یک نسبت گویا که مطابق (۱—۱) در k گام به سنگه می‌رسد به صورت زیر نمایش داده می‌شد:

$$n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \cfrac{1}{\ddots n_{k-1} + \frac{1}{n_k}}}} \tag{۵}$$

چنین عبارتی را یک کسر مسلسل متناهی (یا مختومه) می‌نامند. توجه کنید که طبق (۴) داریم:

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{a_1} &= n_1 + \frac{a_2}{a_1} = n_1 + \frac{1}{\frac{a_1}{a_2}} \\ &= n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{a_3}{a_2}} = n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{\frac{a_2}{a_3}}} \end{aligned}$$

و با ادامهٔ استفاده از (۴) به (۵) می‌رسیم. در مورد نسبت‌های ناگویا کسر مسلسل مختومه نمی‌شود. مثلاً در مورد نسبت طلایی نمایش زیر به‌دست می‌آید:

$$\cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots 1 + \cdots}}} \tag{۶}$$

کسرهای مسلسل امروزه نیز در ریاضیات کاربردهای مهم دارند، نه برای نمایش روزمرهٔ اعداد، بلکه به منظور محاسبات تقریبی دقیق و نیز در پاره‌ای مقولات نظری.

با روش امروزی عددنویسی (به پایهٔ ۱۰ یا هر پایهٔ دیگر)، می‌توان رهیافت ساده‌ای برای اثبات وجود نسبت‌های ناگویا مشاهده کرد. فرض کنید می‌خواهیم نسبت $\frac{m}{n}$، m و n دو عدد طبیعی، را به صورت اعشاری بنویسیم. به روش معمولی تقسیم اگر m بر n بخش‌پذیر باشد که به یک عدد طبیعی می‌رسیم. و گرنه، پس از استفاده از همهٔ ارقام m، باقیمانده‌ای حاصل می‌شود که از n کوچکتر و از صفر بزرگتر است. در این صورت با افزودن یک صفر به طرف راست باقیمانده به عمل تقسیم ادامه می‌دهیم. هر بار عددی کوچکتر از به عنوان باقیمانده به‌دست می‌آید. اگر این باقیمانده زمانی صفر شود به عددی به شکل $c_0/c_1c_2\dots c_k$ رسیده‌ایم به معنای

$$c_0 + \frac{c_1}{10} + \cdots + \frac{c_k}{10^k}$$

است. اگر باقیمانده هیچگاه صفر نشود، هر باقیمانده باید یکی از اعداد $۱, ۲, \ldots, n - ۱$ باشد، بنابراین قطعاً با n بار تکرار، باقیمانده‌ای برای بار دوم ظاهر خواهد شد. از آن پس ارقام اعشاری به صورت اولین ظهور این باقیمانده تکرار خواهند شد. بنابراین اگر نمایش اعشاری $\frac{m}{n}$ مختومه نشود، ارقام پس از اعشار مالاً به صورت تناوبی تکرار خواهند شد. بنابراین هر کسر اعشاری که مالاً تناوبی نباشد نمی‌تواند نمایشگر یک عدد گویا باشد. بدین ترتیب، مثلاً:

$$۰/۱۰۱۰۰۱۰۰۰۱۰۰۰۰۱\ldots$$

که در آن طول بلوک‌های صفر هر بار یکی نسبت به قبلی افزایش می‌یابد و امکان تناوب در آن وجود ندارد برابر هیچ کسر $\frac{m}{n}$ نیست. تنها سؤالی که می‌ماند این است که آیا عبارت بالا واقعاً یک "عدد" است؟ یا به طور کلی، آیا می‌توان هر عبارت به شکل

$$c_۰/c_۱c_۲c_۳\ldots$$

که در آن $c_۰$ یک عدد صحیح نامنفی و بقیهٔ c_i ها رقم (یعنی اعداد ۰ تا ۹) هستند یک "عدد" تلقی کرد؟ برای پاسخ به این سؤال لازم است که مفهوم "عدد" به طور دقیق‌تر بررسی شود و این در جلسه آینده انجام خواهد شد.

اعداد حقیقی (۲)

صحبت جلسه گذشته با این سؤال به پایان رسید که اگر c_0 یک عدد طبیعی یا صفر باشد و هر c_i، $i = 1, 2, \ldots$، یک رقم، یعنی عددی از مجموعهٔ $\{0, 1, \ldots, 9\}$، آیا می‌توان عبارت:

$$c_0/c_1c_2c_3\ldots \tag{1}$$

را یک "عدد" تلقی کرد؟ برای اینکه این سؤال معنی داشته باشد باید دو چیز روشن شود:

الف) مقصود از عبارت بالا چیست؟

ب) مقصود از یک عدد چیست؟

در مورد سؤال (ب)، جواب ریاضیدانان باستان را می‌دانیم و فعلاً همین جواب را مبنا قرار می‌دهیم. مقصود از یک عدد، نسبت طول‌های دو پاره‌خط است. بالاخص اگر پاره‌خطی را به عنوان واحد انتخاب و تثبیت کنیم، طول‌های همهٔ پاره‌خط‌های ممکن، مجموعهٔ اعداد (مثبت) را تشکیل می‌دهند. به این ترتیب اگر نیم‌خطی H انتخاب کنیم، مبدأ آن را ۰ بنامیم و نقطه‌ای دیگر را به عنوان نقطهٔ واحد، ۱، اختیار کنیم، تناظری یک به یک میان نقاط این نیم‌خط و اعداد (مثبت) منظور می‌شود. بدین ترتیب که هر نقطهٔ c روی این نیم‌خط، پاره‌خطی از ۰ تا c تعریف می‌کند (شکل ۱) که طول این پاره‌خط نسبت به واحد اختیار شده عدد متناظر است. البته در اینجا ادراک هندسی، شهودی قابل اعتماد تلقی می‌گردد. بدین ترتیب فرض می‌کنیم در مورد مفهوم خط راست و طول مناقشه‌ای نیست، برداشت همهٔ انسان‌ها از این مفاهیم یکسان است، و کارکردن با این مفاهیم به مشکل منطقی منجر

نمی‌شود. باید توجه داشت که از نظر دانشمندان باستان، هندسه یک شاخهٔ علم طبیعی بود و اصول متعارف متکی بر ادراک انسان مجاز شمرده می‌شدند.

در مورد (الف)، اکنون کوشش خواهیم کرد برای (۱) معنایی قایل شویم. اگر به جای سه نقطه (ادامه نامحدود) در (۱) عبارت $c_\circ/c_1\ldots c_n$ را در نظر بگیریم، این عبارت مفهومی دقیق و روشن دارد:

$$C_n = c_\circ/c_1\ldots c_n = c_\circ + \frac{c_1}{10} + \cdots + \frac{c_n}{10^n}$$

یک n خاص تثبیت می‌کنیم. اگر عبارت (۱) یک عدد باشد، این عدد قطعاً باید دست کم به اندازهٔ C_n باشد زیرا که افزودن ارقام c_{n+1} به بعد نمی‌تواند آن را کوچکتر سازد. ولی عددی که ممکن است توسط (۱) بیان شود حداکثر چقدر بزرگتر از C_n می‌تواند باشد؟ این عدد نمی‌تواند از $\frac{1}{10^n}$ بزرگتر از C_n باشد زیرا که در آن صورت می‌بایست رقم n ام پس از اعشار از c_n بزرگتر شود. بنابراین:

$$C_n \leq c_\circ/c_1c_2c_3\ldots \leq C_n + \frac{1}{10^n} \qquad (2)$$

رابطهٔ (۲) باید به‌ازای هر n برقرار باشد. بدین ترتیب $c_\circ/c_1c_2c_3\ldots$، در صورت وجود، عددی است که در نامساوی (۲) به‌ازای هر n صدق می‌کند، $n = \circ, 1, 2, \ldots$.

(۲—۱) لم. حداکثر یک عدد ممکن است در نامساوی (۲) به‌ازای هر n صدق کند.

اثبات. اگر دو عدد c و c' وجود داشته باشند که به‌ازای هر n در بازهٔ $[C_n, C_n + \frac{1}{10^n}]$ قرار گیرند، فاصلهٔ این دو عدد از هر $\frac{1}{10^n}$ کوچکتر است. چون با بزرگ گرفتن n، $\frac{1}{10^n}$ را می‌توان به دلخواه کوچک ساخت، فاصله c و c' باید از هر عددی کوچکتر باشد، پس $c = c'$. □

اکنون می‌بینیم که وجود عددی با ویژگی (۲) متضمن چیست. چنین عددی باید در همهٔ بازه‌های $[C_n, C_n + \frac{1}{10^n}]$ قرار گیرد. توجه کنید که چون

$$C_\circ \leq C_1 \leq C_2 \leq \cdots$$

$$C_\circ + 1 \geq C_1 + \frac{1}{10} \geq C_2 + \frac{1}{10^2} \geq \cdots$$

این بازه‌ها تو در تو هستند:

$$\cdots \subset [C_2, C_2 + \frac{1}{10^2}] \subset [C_1, C_1 + \frac{1}{10}] \subset [C_0, C_0 + 1]$$

هر بازه طولی $\frac{1}{10}$ بازهٔ سمت راست خود دارد و عدد فرضی $c_0/c_1c_2\ldots$ باید در همهٔ این بازه‌ها قرار گیرد. شهود ما از "پیوسته بودن" نیم‌خط H حکم می‌کند که این دنبالهٔ انقباضی بازه‌های بسته باید به یک تک نقطه روی نیم‌خط H متقارب شود که باید به ناچار همان نقطهٔ $c_0/c_1c_2\ldots$ باشد که در همهٔ این بازه‌ها قرار دارد. این تصور هندسی قابل اثبات نیست بلکه جزیی از ادراک ما از پیوسته بودن خط راست است. به این دلیل این حکم را به عنوان یک اصل وضع می‌کنیم:

(۲—۲) اصل تمامیت (صورت اول). عددی (منحصر به فرد) وجود دارد که در همهٔ نامساوی‌های (۲)، به‌ازای $n = 0, 1, 2, \ldots$، صدق می‌کند. (در واقع به زودی خواهیم دید که، بالعکس، هر نقطهٔ روی H نمایشی به شکل $c_0/c_1c_2c_3\ldots$، مختوم یا نامختوم، دارد).

بدین ترتیب، طبق اصل تمامیت، $c_0/c_1c_2c_3\ldots$ نمایشگر یک عدد (و فقط یک عدد، طبق لم ۲—۱) است. همچنان که در جلسهٔ قبل دیدیم در میان این اعداد فقط آنهایی که مختومه هستند، یعنی $c_n = 0$ از یک n به بعد، و آنهایی که مآلاً متناوب می‌شوند نمایشگر اعداد گویا، یعنی کسرهای $\frac{m}{n}$، m, n عدد طبیعی، هستند. سایر اعداد را ناگویا یا اصم می‌نامند. بنابراین با اتکاء به اصل تمامیت می‌توان اعداد ناگویای فراوانی ارائه کرد.

نکتهٔ زیر، که به عنوان مثال ارائه می‌شود، نتیجه مستقیم اصل تمامیت و لم ۲—۱ است:

مثال. می‌خواهیم عدد زیر را بررسی کنیم:

$$1/999\ldots$$

پس در اینجا $c_0 = 1$ و $c_i = 9$ به‌ازای هر $i \geq 1$. طبق اصل تمامیت این قطعاً یک عدد است و در همهٔ نامساوی‌های زیر صدق می‌کند:

$$1/\underbrace{9\ldots9}_{n} \leq 1/999\ldots \leq 1/\underbrace{9\ldots9}_{n} + \frac{1}{10^n} = 2 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

از طرفی دیگر عدد ۲ نیز در همین نامساوی به‌ازای هر n صدق می‌کند. بنابراین طبق ۲—۱ داریم:

$$1/999\ldots = 2$$

تمرین. فرض کنید $c_n < 9$ و $c_i = 9$ به‌ازای هر $i > n$. به روش مثال قبل ثابت کنید عدد

$$c_0/c_1 \ldots c_n 999\ldots$$

برابر $c_0/c_1 \ldots c_{n-1}(c_n + 1)$ است.

در اینجا لازم است برای تکمیل بحث نشان دهیم هر عدد، یعنی هر عضو H، به صورت اعشاری مختوم یا نامختوم قابل نمایش است. اگر c عضوی از H باشد، دو عدد صحیح متوالی c_0 و $c_0 + 1$ می‌توان یافت که $c_0 \leq c < c_0 + 1$. اگر بازهٔ $[c_0, c_0 + 1[$ را به صورت زیر به ۱۰ زیربازهٔ مجزا تجزیه کنیم:

$$[c_0, c_0 + \frac{1}{10}[\cup[c_0 + \frac{1}{10}, c_0 + \frac{2}{10}[\cup \cdots \cup [c_0 + \frac{9}{10}, c_0 + 1[$$

عدد c در یک و تنها یکی از این ۱۰ بازه قرار دارد، مثلاً c عضو $[c_0 + \frac{c_1}{10}, c_0 + \frac{c_1+1}{10}[$، $c_1 = 0, 1, \ldots, 9$، است. که در این صورت می‌توان نوشت:

$$c_0 + \frac{c_1}{10} \leq c \leq c_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{1}{10}$$

به همین ترتیب بازهٔ $[c_0 + \frac{c_1}{10}, c_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{1}{10}[$ را به ۱۰ بازهٔ به طول $\frac{1}{100}$ تجزیه کرده و نتیجه می‌گیریم که رقمی c_2 وجود دارد به طوری که:

$$c_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{100} \leq c \leq c_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{100} + \frac{1}{100}$$

با ادامهٔ این عمل، اگر در گامی، c دقیقاً برابر نقطهٔ انتهایی سمت چپ شود، مثلاً $c = c_0 + \frac{c_1}{10} + \cdots + \frac{c_k}{10^k}$، داریم $c = c_0/c_1 \ldots c_k$. در غیر این صورت این فرایند متوقف نمی‌شود و خواهیم داشت:

$$c_0 + \tfrac{c_1}{10} + \cdots + \tfrac{c_n}{10^n} \leq c \quad < \quad c_0 + \tfrac{c_1}{10} + \cdots + \tfrac{c_n}{10^n} + \tfrac{1}{10^n} \qquad \text{به‌ازای هر } n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\leq \quad c_0 + \tfrac{c_1}{10} + \cdots + \tfrac{c_n}{10^n} + \tfrac{1}{10^n}$$

عددی که در هر همهٔ این نامساوی‌ها صدق کند، طبق تعریف به $c_0/c_1c_2c_3\ldots$ نمایش دادیم.

معمولاً اصل تمامیت به شکل معادل دیگری ارائه می‌شود که مجردتر است، کلی‌تر به نظر می‌رسد و وابستگی ظاهری (۲ـ۲) به مبنای عددنویسی ۱۰ را ندارد. ضمن ارائه این صورت اصل تمامیت، نشان خواهیم داد که در واقع دو صورت معادل‌اند. توجه داشته باشید که تصویر هندسی ما از مجموعه اعداد، اکنون نقاط روی یک نیم‌خط H است. نقطهٔ آغازی این نیم‌خط را $\bar{0}$ نامیدیم و امتداد نیم‌خط را معمولاً به طرف راست می‌گیریم (شکل ۱). به این ترتیب رابطهٔ ترتیبی $a < b$ از نظر هندسی بدین معنی است که b در طرف راست a قرار دارد. از این پس از نماد متداول برای بازه‌ها نیز استفاده خواهیم کرد. بدین ترتیب اگر a و b در H باشند، $[a,b] = \{x \in H \mid a \le x \le b\}$، $[a,b[= \{x \in H \mid a \le x < b\}$ و به همین ترتیب $]a,b]$ و $]a,b[$ تعریف می‌شوند. اگر S زیرمجموعه‌ای از H باشد، عدد M را یک کران بالا برای S می‌نامیم در صورتی که:

$$M \ge s \quad \text{برای هر عضو } s \text{ از } S$$

بعضی زیرمجموعه‌های S دارای کران بالایی هستند و بعضی نیستند. مثلاً برای هر یک از دو بازه $[a,b]$ و $]a,b[$، هر عدد M که $M \ge b$ یک کران بالایی برای مجموعه است، ولی مجموعهٔ اعداد طبیعی $\{1,2,3,\ldots\}$ کران بالایی ندارد. عدد M_0 را کوچکترین کران بالایی برای مجموعهٔ S می‌نامیم در صورتی که:

الف) M_0 یک کران بالا برای S باشد.

ب) به‌ازای هر کران بالای M برای مجموعهٔ S داشته باشیم $M_0 \le M$.

توجه کنید که، در صورت وجود، کوچکترین کران بالا منحصر به فرد است زیرا که اگر M_0 و M_1 هر دو کوچکترین کران بالا برای مجموعهٔ S باشند باید داشته باشیم $M_0 \le M_1$ و $M_1 \le M_0$، پس $M_0 = M_1$.

(۲ـ۳) اصل تمامیت (صورت دوم). اگر برای زیرمجموعهٔ ناتهی S از H کران بالایی وجود داشته باشد، آنگاه برای S یک کوچکترین کران بالایی (منحصر به فرد) وجود دارد.

لازم به تذکر است که کوچکترین کران بالایی مجموعهٔ S ممکن است عضو S باشد یا نباشد. مثلاً برای هر دو مجموعهٔ $[۱,۲]$ و $]۱,۲]$، عدد ۲ کوچکترین کران بالا است که عضو $[۱,۲]$ می‌باشد ولی عضو $]۱,۲[$ نیست.

اکنون نشان می‌دهیم که دو صورت اصل تمامیت معادل هستند به این مفهوم که اگر هر یک را بپذیریم، دیگری از اصل پذیرفته شده قابل اثبات است.

نخست نشان می‌دهیم صورت اول، صورت دوم را نتیجه می‌دهد. بدین ترتیب S را مجموعه‌ای ناتهی از H می‌گیریم که کران بالایی دارد و برای آن کوچکترین کران بالایی را ارائه می‌کنیم. هر عضو S را به صورت اعشاری نمایش می‌دهیم. چون S کران بالا دارد، در بین اجزاء صحیح این نمایش‌های اعشاری بزرگترین وجود دارد (در غیر این صورت برای هر عدد طبیعی n، S عضوی بزرگتر از n خواهد داشت و S دارای کران بالایی نخواهد بود). بزرگترین جزء صحیح در میان اعضای S را $c_۰$ می‌نامیم. حال $S_۱$ را زیرمجموعهٔ S می‌گیریم که از اعضای با جزء صحیح $c_۰$ تشکیل شده است و به رقم اول پس از اعشار اعضای $S_۱$ نگاه می‌کنیم. این رقم باید یکی از اعداد $۰,۱,\ldots,۹$ باشد. بزرگترین رقم اول پس از اعشار موجود میان اعضای $S_۱$ را $c_۱$ می‌نامیم. حال $S_۲$ را زیرمجموعهٔ $S_۱$ می‌گیریم که اعضایش با $c_۰/c_۱$ شروع می‌شوند و به رقم دوم پس از اعشار در میان عناصر $S_۲$ نگاه می‌کنیم. بزرگترین رقم موجود را $c_۲$ می‌نامیم و عمل بالا را ادامه می‌دهیم. حال $c = c_۰/c_۱c_۲c_۳\ldots$ طبق اصل تمامیت یک عدد است و از روش ساخت c مشخص است که:

$$c_۰ + \frac{c_۱}{۱۰} + \cdots + \frac{c_n}{۱۰^n} \leq c \leq c_۰ + \frac{c_۱}{۱۰} + \cdots + \frac{c_n}{۱۰^n} + \frac{۱}{۱۰^n} \qquad \text{برای هر } n = ۰,۱,۲,\ldots$$

ادعا می‌کنیم c کوچکترین کران بالایی برای مجموعهٔ S است. اینکه c کران بالایی برای S است از نامساوی‌های سمت چپ نتیجه می‌شود، در واقع در هر مرحله رقم n ام c بزرگترین رقم موجود در بین عناصر S انتخاب شد. به علاوه کران بالایی کوچکتری از c برای S وجود ندارد زیرا که اگر $c' = c'_۰/c'_۰c'_۱c'_۲\ldots$ کوچکتر از $c = c_۰/c_۱c_۲c_۳\ldots$ باشد، در یک مرحله رقم متناظر، c'_n، باید کوچکتر از c_n باشد. اگر این رویداد برای اولین بار به‌ازای $n = k$ رخ دهد، عناصری از S وجود دارند که رقم k ام آنها بزرگتر از c'_k است، پس c' از بعضی عناصر S کوچکتر است و نمی‌تواند کران بالا برای S

باشد.

بالعکس ثابت می‌کنیم صورت دوم اصل تمامیت، صورت اول را نتیجه می‌دهد. یعنی ثابت می‌کنیم هرگاه c_0 یک عدد صحیح از مجموعه $\{0, 1, 2, \ldots\}$ باشد و c_i ها یک مجموعهٔ ارقام، یعنی اعضای مجموعهٔ $\{0, 1, \ldots, 9\}$، آنگاه عددی c وجود دارد که:

$$c_0 + \frac{c_1}{10} + \cdots + \frac{c_n}{10^n} \leq c \leq c_0 + \frac{c_1}{10} + \cdots + \frac{c_n}{10^n} + \frac{1}{10^n} \quad n = 0, 1, 2, \ldots \text{ برای هر } \quad (3)$$

برای این کار، مجموعهٔ T را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$T = \{c_0, c_0/c_1, c_0/c_1c_2, \ldots\}$$

این مجموعه کران بالا دارد (مثلاً $c_0 + 1$)، پس طبق صورت دوم اصل تمامیت، دارای کوچکترین کران بالایی است که به c نمایش می‌دهیم. باید ثابت کنیم این عدد c در نامساوی‌های (۳) صدق می‌کند. اینکه c کران بالایی برای S است نشان می‌دهد c از هیچ یک از $c_0/c_1 \ldots c_n$ها کوچکتر نیست، یعنی نامساوی‌های سمت چپ برقرارند. حال اگر نامساوی‌های سمت راست برقرار نباشند عدد صحیحی k وجود دارد که

$$c_0 + \frac{c_1}{10} + \cdots + \frac{c_k}{10^k} + \frac{1}{10^k} < c$$

ولی $c_0 + \frac{c_1}{10} + \cdots + \frac{c_k}{10^k} + \frac{1}{10^k}$ از همهٔ عناصر T بزرگتر است (توجه کنید که $0/0 \ldots 0c_{k+1} \ldots c_n < \frac{1}{10^k}$) بنابراین یک کران بالایی برای T کوچکتر از c یافت شده است که خلاف انتخاب c به عنوان کوچکترین کران بالایی T است. بدین ترتیب صورت اول اصل تمامیت از صورت دوم نتیجه می‌شود.

در اینجا لازم است از "اعداد منفی" نیز صحبت شود. از نظر تاریخی پذیرفتن اعداد منفی به عنوان عدد قرن‌ها طول کشید و در واقع اعداد منفی کمابیش همراه با "اعداد موهومی" که در جلسات بعد مطرح خواهند شد در قرن شانزدهم میلادی طی توسعه بیشتر علم جبر به عنوان "عدد" پذیرفته شدند. ساده‌ترین راه معرفی اعداد منفی تداوم نیم‌خط H به سوی چپ به یک خط راست کامل است. قرینهٔ

هر عضو x در H را به "$-x$" نمایش می‌دهیم، عملیات جبری مأنوس را اعمال می‌کنیم و رابطه ترتیب $a < b$ به معنای a در طرف چپ b قرار دارد را منظور می‌کنیم. مجموعهٔ اعداد مثبت، منفی و صفر که بدین طریق به‌دست می‌آیند مجموعهٔ اعداد حقیقی می‌نامیم و به $\mathbb{R}$ نمایش می‌دهیم. صورت دوم اصل تمامیت را می‌توان عیناً برای اعداد حقیقی نوشت:

(۲—۴) اصل تمامیت برای $\mathbb{R}$. اگر برای زیرمجموعهٔ ناتهی S از $\mathbb{R}$ کران بالایی وجود داشته باشد، آنگاه برای S یک کوچکترین کران بالایی وجود دارد.

اینکه (۲—۴) از (۲—۳) نتیجه می‌شود به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم. به علاوه می‌توان مفهوم کران پایین و بزرگترین کران پایین را نیز با وارونه کردن نامساوی‌ها تعریف کرد و حکم زیر را نتیجه گرفت:

(۲—۴) اگر برای زیرمجموعهٔ ناتهی S از $\mathbb{R}$ کران پایینی وجود داشته باشد، آنگاه برای S بزرگترین کران پایینی وجود دارد.

تمرین. (۲—۵) را از (۲—۴) نتیجه بگیرید (راهنمایی. مجموعهٔ S' را در نظر بگیرید که از کلیهٔ "$-x$" ها، به‌ازای $x \in S$، تشکیل شده است).

تمرین. نشان دهید کران بالایی A برای مجموعهٔ S کوچکترین کران بالایی است A اگر و تنها اگر به‌ازای هر عدد طبیعی n، عضوی از s از S وجود داشته باشد که $s > A - \frac{1}{10^n}$.

هرگاه a و b اعداد حقیقی باشند، بازه‌های $[a, b]$، $[a, b[$، $]a, b]$ و $]a, b[$ عیناً مانند قبل تعریف می‌شوند. مقصود از $[a, \infty[$ مجموعهٔ $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$ و مقصود از $]-\infty, a]$ مجموعهٔ $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$ است. به همین ترتیب مجموعه‌های $]a, \infty[$ و $]-\infty, a[$ تعریف می‌شوند.

اعداد مختلط (۱)

§ ۱. مقدمه

در دو جلسهٔ گذشته پیرامون اعداد حقیقی صحبت کردیم. دیدیم که مفهوم عدد در رابطه با شمارش و اندازه‌گیری کمیت‌ها پدید آمد و نخست به آنچه امروز اعداد گویای مثبت می‌نامیم محدود بود. لیکن ضرورت تجربهٔ علمی توسعهٔ مفهوم عدد را ایجاب کرد به قسمی که اعداد گویا و اعداد منفی نیز به عنوان "عدد" شناخته شدند و مجموعهٔ این مفاهیم، امروز مجموعهٔ اعداد حقیقی، $\mathbb{R}$، خوانده می‌شود.

در طی کوشش‌هایی که در قرن شانزدهم میلادی مبذول حل معادلات درجه سه می‌گشت معلوم شد که مفهوم عدد حقیقی هنوز دستخوش کاستی‌هایی است که این کوشش‌ها را دچار معضل می‌سازد. با اندکی بازسازی تاریخ، این موضوع را اکنون بررسی می‌کنیم. هر معادلهٔ درجه ۳ برحسب x با ضرایب حقیقی را می‌توان پس از تقسیم کردن بر ضریب جملهٔ $x^{۳}$ به صورت زیر نوشت:

$$x^{۳} + ax^{۲} + bx + c = ۰ \qquad (۱)$$

با یک جایگزینی ساده می‌توان جملهٔ درجهٔ دوم را حذف کرد. اگر قرار دهیم $x = t - \frac{a}{۳}$، معادله (۱) به شکل

$$t^{۳} + pt + q = ۰ \qquad (۲)$$

در می‌آید که در آن p, q عبارت‌هایی برحسب ضرایب a، b و c هستند. حال کوشش می‌کنیم معادلهٔ

(۲) را حل کنیم. اگر بنویسیم $t = u + v$، داریم

$$
\begin{aligned}
&(u+v)^3 + p(u+v) + q = 0 \\
&u^3 + v^3 + (3uv + p)(u+v) + q = 0
\end{aligned}
\qquad (۳)
$$

برای هر زوج u, v که در این معادله صدق کند، یک جواب $t = u + v$ برای (۲) به‌دست می‌آید. برای به‌دست آوردن چنین زوجی نخست مشاهده می‌کنیم که (۳) یک معادله با دو مجهول است که انتظار داریم معمولاً بی‌نهایت جواب داشته باشد.

با افزودن یک رابطهٔ دیگر میان u, v، سعی می‌کنیم به جواب مشخصی برسیم. قرار می‌دهیم:

$$uv = -\frac{p}{3} \text{ یا } 3uv + p = 0 \qquad (۴)$$

که در این صورت (۳) و (۴) به صورت دستگاه زیر در می‌آیند:

$$
\begin{cases}
u^3 + v^3 = -q \\
u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27}
\end{cases}
\qquad (۵)
$$

حال با داشتن مجموع و حاصل‌ضرب دو کمیت u^3 و v^3 می‌توانیم یک معادله درجه دوم بنویسیم که ریشه‌هایش u^3 و v^3 باشند:

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0 \qquad (٦)$$

پس

$$z = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + \frac{4}{27}q^3}}{2}$$

دو جواب z مقادیر u^3 و v^3 هستند، پس با گرفتن کعب آنها و با استفاده از $t = u + v$، جواب (۲) به‌دست می‌آید:

$$t = \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4}{27}p^3}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{q^2 + \frac{4}{27}p^3}}{2}} \qquad (۷)$$

این فرمول که به فرمول کاردانو[1] معروف است ظاهراً دستور کامل حل معادلات درجه ۳ است، ولی کمی دقت در مورد عبارت فوق و استفادهٔ عملی از آن دو مشکل را برملا می‌سازد:

[1] جیرو لامو کاردانو Girolamo Cardano (۱۵۰۱—۱۵۷۶) دانشمند ایتالیایی که گفته می‌شود این فرمول و روش حل فوق را در واقع از ریاضیدان ایتالیایی دیگری نیکولو تارتالیا Niccoló Tartaglia (۱۴۹۹—۱۵۵۷) با قسم به مخفی نگاهداشتن آن دریافت کرده است.

۱) یک معادلهٔ درجه دوم، $ax^۲ + bx + c = ۰$، ممکن است هیچ، یک یا دو جواب داشته باشد. وجود $\pm$ در فرمول جواب، یعنی $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^۲ - ۴ac}}{۲}$ بیانگر امکان وجود دو جواب است. معادلات درجه ۳ ممکن است تا سه جواب حقیقی داشته باشند ولی فرمول (۷) ظاهراً فقط یک جواب را به‌دست می‌دهد. در عمل این مشکلی نیست زیرا که اگر مثلاً یک جواب $t = \alpha$ برای (۲) در دست باشد، می‌توانیم بنویسیم:

$$t^۳ + pt + q = (t - \alpha)(t^۲ + At + B)$$

و با بررسی $t^۲ + At + B = ۰$ جواب‌های احتمالی دیگر پیدا خواهند شد. با این حال به نظر می‌رسد فرمول (۷) از عمومیتی مشابه فرمول حل معادلات درجه دوم برخوردار نیست. مثال زیر را در نظر بگیرید:

$$t^۳ - ۳t + ۲ = ۰$$

عبارت $t^۳ - ۳t + ۲$ را می‌توان به صورت $(t - ۱)^۲(t + ۲)$ نوشت، پس جواب‌های معادلهٔ بالا عبارتند از $۱, ۱, -۲$. حال اگر فرمول کاردانو را به‌کار گیریم، با توجه به $p = -۳$ و $q = ۲$ داریم:

$$t = \sqrt[۳]{-۱} + \sqrt[۳]{-۱} = -۲$$

و فقط یکی از جواب‌ها حاصل می‌شود.

۲) مشکل جدی‌تری را که منجر به توسعهٔ مفهوم عدد و پذیرفتن اشیایی به شکل $\sqrt{-۱}$ به عنوان "عدد" شد با ذکر یک مثال تشریح می‌کنیم. معادلهٔ زیر را در نظر بگیرید:

$$t^۳ - ۶t + ۴ = ۰ \tag{۸}$$

مشاهده کنید که $t = ۲$ در این معادله صدق می‌کند، پس می‌توان جمله $(t - ۲)$ را فاکتورگیری کرد و داریم:

$$t^۳ - ۶t + ۴ = (t - ۲)(t^۲ + ۲t - ۲)$$

با قرار دادن $t^{۲} + ۲t - ۲ = ۰$ کلیهٔ جواب‌های معادله (۸) به‌دست می‌آیند:

$$t = ۲ \quad , \quad -۱ \pm \sqrt{۳}$$

از طرفی دیگر از فرمول (۷) داریم:

$$t = \sqrt[۳]{\frac{-۴ + \sqrt{-۱۶}}{۲}} + \sqrt[۳]{\frac{-۴ - \sqrt{-۱۶}}{۲}}$$

اگر $\sqrt{-۱۶}$ به $۴\sqrt{-۱}$ خلاصه کنیم خواهیم داشت:

$$t = \sqrt[۳]{-۲ + ۲\sqrt{-۱}} + \sqrt[۳]{-۲ - ۲\sqrt{-۱}} \qquad (۹)$$

این عبارت در ظاهر هیچ یک از سه جواب ذکر شده نیست و به علاوه از نظر معنی مشکوک است زیرا که تاکنون برای $\sqrt{-۱}$ معنایی قایل نشده‌ایم. ریاضیدانان قرن شانزدهم متوجه شدند که می‌توان به محاسبهٔ صوری زیر متوسل شد. فرض کنید $\sqrt{-۱}$ معنی دارد یا حداقل می‌توان با آن محاسبات عادی جبری را انجام داد. در این صورت توجه کنید که بنابر اتحاد $(a+b)^{۳} = a^{۳} + ۳a^{۲}b + ۳ab^{۲} + b^{۳}$:

$$\begin{aligned}(۱ + \sqrt{-۱})^{۳} &= ۱ + ۳\sqrt{-۱} - ۳ - \sqrt{-۱} \\ &= -۲ + ۲\sqrt{-۱}\end{aligned}$$

و مشابهاً داریم $(۱ - \sqrt{-۱})^{۳} = -۲ - \sqrt{-۱}$، پس (۹) به صورت زیر ساده می‌شود:

$$t = ۱ + \sqrt{-۱} + ۱ - \sqrt{-۱} = ۲$$

یعنی علیرغم این که برای $\sqrt{-۱}$ معنایی قایل نیستیم، اگر با آن به صورت یک عدد عملیات جبری انجام دهیم، جواب معادله را به‌دست خواهیم آورد! کاردانو در کتاب خود مقادیری مانند $\sqrt{-۱}$ را «اعداد مجازی» قلمداد می‌کرد که هر چند خود عدد نیستند و لیکن رفتار جبری مشابه اعداد دارند و به کمک آنها می‌توان به حقایقی در مورد اعداد رسید، همچنان که پذیرفتن اعداد منفی در جبر راه را برای بررسی مقادیر مثبت هموارتر می‌کند.

طی دو تا سه قرن مفهوم $\sqrt{-1}$ و امثال آن تدریجاً جای خود را در ریاضیات یافت و تعبیر معنایی دقیقی برای آن ارائه شد. اولین افرادی که تعبیری هندسی برای $\sqrt{-1}$ ارائه دادند مساح نروژی کاسپار وسل[۲] و حسابدار سوییسی ژان روبر آرگان[۳] بودند ولی بررسی جامع و دقیق این گونه عدد و خواص جبری آنها در آثار ریاضیدان بزرگ آلمانی گاؤس[۴] به کمال رسید[۵]. روش امروزی برخورد با "اعداد مختلط" روش گاؤس است. پس از بررسی اعداد مختلط در بخش‌های آینده، حل معادلات درجه ۳ را مجدداً بررسی کرده نشان خواهیم داد روشی که برای حل معادلات درجه ۳ ارائه کردیم اگر در چارچوب اعداد مختلط انجام گیرد، روشی کامل است و به یافتن کلیه جواب‌های معادله منجر می‌شود.

§ ۲. معرفی اعداد مختلط

اعداد حقیقی را در تناظر یک به یک با نقاط یک خط راست قرار داده‌ایم. حال صفحهٔ مختصاتی xy را در نظر می‌گیریم و محور x در آن را به عنوان جایگاه اعداد حقیقی تثبیت می‌کنیم، یعنی عدد حقیقی x را به نقطهٔ $(x, 0)$ نمایش می‌دهیم. با گذر از این خط به تمام صفحه به تعمیمی از مفهوم عدد حقیقی خواهیم رسید که در برگیرنده اعداد حقیقی است. برای دو نقطهٔ $z = (x, y)$ و $z' = (x', y')$ از صفحه مفهوم مجموع و حاصل‌ضرب را طوری تعریف خواهیم کرد که اگر به "اعداد حقیقی"، یعنی زوج‌های $(x, 0)$ و $(x', 0)$ محدود شود، همان مفهوم مجموع و حاصل‌ضرب معمولی، یعنی $(x + x', 0)$ و $(xx', 0)$ را به‌دست دهد.

(۲—۱) <u>جمع</u> برای $z = (x, y)$ و $z' = (x', y')$ تعریف می‌کنیم:

$$z + z' = (x + x', y + y')$$

---

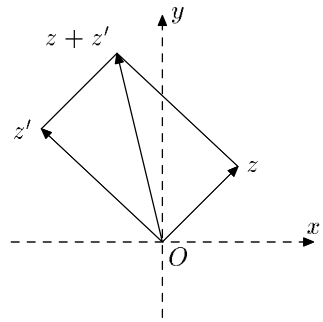
[۲] Caspar Wessel

[۳] Jean Robert Argand

[۴] Carl Friedrich Gauss

[۵] برای مطالعه سیر تاریخی تحول مفهوم عدد مختلط به فصل ۳ کتاب زیر مراجعه کنید:
Ebbinghaus, H. D., et al **Numbers**, Springer 1991.

بدین ترتیب نقاط $\underline{\circ} = (\circ, \circ)$، z، z' و $z + z'$ چهار رأس یک متوازی الاضلاع را تشکیل می‌دهند و عمل جمع نقاط همان جمع برداری برای بردارهای ساطع از مبدأ مختصات است (شکل ۱).



(۲—۱—۱) خواص جمع

(۲—۱—۱) تعویض پذیری (جابجایی) $z + z' = z' + z$.

(۲—۱—۲) شرکت‌پذیری $z + (z' + z'') = (z + z') + z''$.

(۲—۱—۳) عنصر بی‌اثر نقطه $\underline{\circ} = (\circ, \circ)$ (و فقط این نقطه) دارای این ویژگی است که

$$z + \underline{\circ} = \underline{\circ} + z = z$$

(۲—۱—۴) عنصر قرینه برای $z = (x, y)$، قرینه یا منفی z به صورت

$$-z = (-x, -y)$$

تعریف می‌شود و (یگانه نقطه) دارای این ویژگی است که:

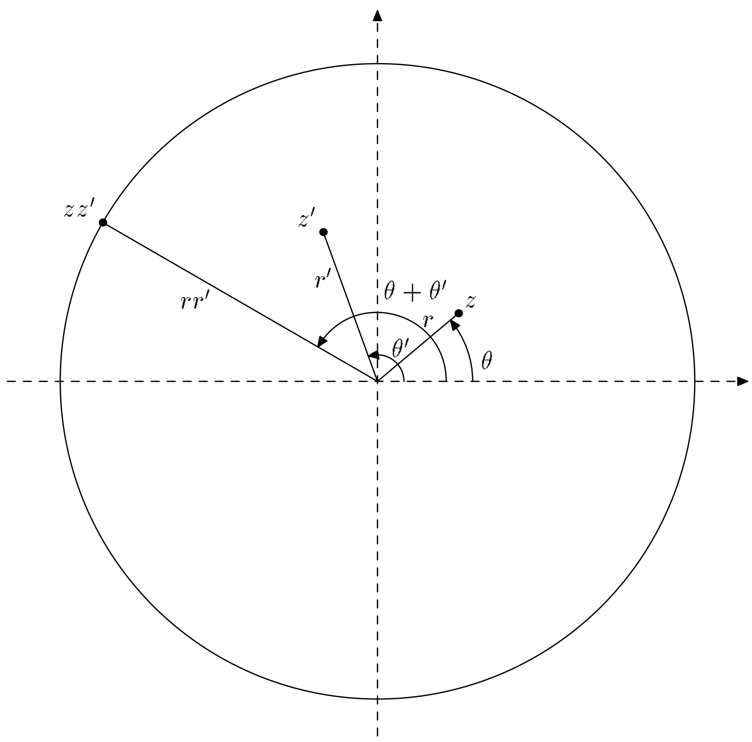
$$z + (-z) = (-z) + z = \underline{\circ}$$

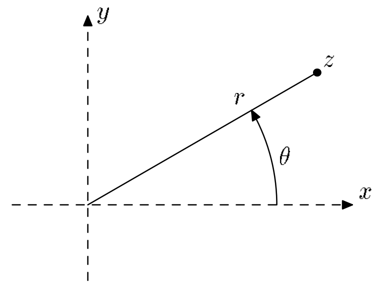
خواص فوق‌الذکر همه به سادگی از این نتیجه می‌شوند که ویژگی متناظر برای هر مؤلفه، که عدد حقیقی است، برقرار است.

(۲—۱) ضرب تعریف حاصل‌ضرب $z = (x, y)$ و $z' = (x', y')$ در آغاز دور از ذهن به نظر خواهد رسید ولی تدریجاً موضوعیت آن روشن خواهد شد. نخست توجه کنید که بر خلاف مجموع که

مؤلفه به مؤلفه تعریف شد، چنین تعریفی برای حاصل‌ضرب متضمن بروز خواصی خواهد شد که دور از خواص مأنوس اعداد حقیقی است. اگر $z \cdot z'$ را به صورت (xx', yy') تعریف کنیم، نتیجه می‌شود که $(\circ, \circ) = (\circ, ۱) \cdot (۱, \circ)$، یعنی حاصل‌ضرب دو عنصر غیر صفر، صفر می‌شود، که خلاف خواص جبری اعداد حقیقی است. خواص حاصل‌ضربی که تعریف خواهیم کرد شبیه‌تر به خواص ضرب اعداد حقیقی است و با حاصل‌ضرب اعداد حقیقی سازگار خواهد بود، یعنی حاصل‌ضرب $(x, \circ) \cdot (x', \circ)$ برابر $(xx', \circ)$ می‌شود.

برای $z = (x, y)$ و $z' = (x', y')$، $z \cdot z'$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم. zz' نقطه‌ای در صفحه خواهد بود که فاصلهٔ آن از مبدأ مختصات برابر حاصل‌ضرب فواصل z و z' از مبدأ است. پس اگر فاصلهٔ z و z' از مبدأ به ترتیب r و r' باشد، $z \cdot z'$ روی دایرهٔ شعاع rr' به مرکز <u>$\circ$</u> قرار خواهد داشت.





اگر z یا z' صفر باشد، r یا r' صفر خواهد شد و در نتیجه لزوماً $zz' = ۰$. حال فرض می‌کنیم $z \neq \underline{۰}$ و $z' \neq \underline{۰}$. در این صورت θ را برابر زاویهٔ از نیم‌خط مثبت محور x به نیم‌خط واصل $\underline{۰}$ به z می‌گیریم و به همین ترتیب θ' را برای z' در نظر می‌گیریم. اکنون zz' را آن نقطه روی دایرهٔ شعاع rr' حول $\underline{۰}$ می‌گیریم که زاویهٔ از نیمه مثبت محور x به شعاع حامل آن برابر $\theta + \theta'$ باشد.

(۲—۲—۱) <u>خواص ضرب</u>

(۲—۲—۱—۱) <u>تعویض‌پذیری</u> (جابجایی) $z \cdot z' = z' \cdot z$.

(۲—۲—۱—۲) <u>شرکت‌پذیری</u> $z \cdot (z' \cdot z'') = (z \cdot z') \cdot z''$.

(۲—۲—۱—۳) <u>عنصر بی‌اثر</u> نقطهٔ $(۱, ۰)$ (و فقط این نقطه) دارای این ویژگی است که

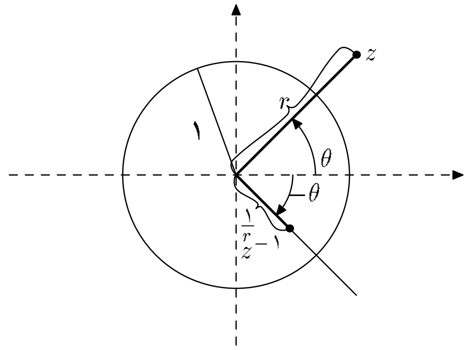
$$z \cdot (۱, ۰) = (۱, ۰) \cdot z = z$$

(۲—۲—۱—۴) <u>عنصر معکوس</u> برای هر $z \neq \underline{۰}$ عنصری (منحصر به فرد) z' وجود دارد که

$$z \cdot z' = z' \cdot z = (۱, ۰)$$

اثبات دو خاصیت اول کاملاً سرراست است. برای (۲—۲—۱—۳)، در مورد $(۱, ۰)$ داریم $r = ۱$ و $\theta = ۰$ و حکم نتیجه می‌شود. بالاخره برای عنصر معکوس ضربی، اگر $z \neq \underline{۰}$، فاصله z از $\underline{۰}$، یعنی r، ناصفر است، آنگاه z' با فاصله $r^{-۱}$ و زاویهٔ $(-\theta)$ یگانه نقطه‌ای است که در شرایط صدق می‌کند

(شکل ۳)



زوج (r,θ) که به نقطهٔ $z=(x,y)$ نسبت داده شد (شکل ۲ (الف)) مختصات قطبی نقطهٔ z خوانده می‌شوند. مؤلفه r، فاصله از مبدأ، به طور منحصر به فرد تعیین می‌شود ولی θ یگانه نیست، با افزودن هر مضرب صحیح (2π) به θ، یک مقدار قابل قبول دیگر به‌دست می‌آید. r را به $|z|$ (قدر مطلق z) و θ را گاهی به $arg(z)$ نمایش می‌دهند. توجه کنید که برای همهٔ نقاط روی یک نیم‌خط ساطع از 0، $arg(z)$ برابر است. مثلاً $arg(z)=\frac{\pi}{2}$ نقاط $(0,y)$، $y>0$؛ $arg(z)=\pi$ نقاط $(x,0)$، $x<0$، $arg(z)=\frac{3\pi}{2}$ نقاط $(0,y)$ با $y<0$ را نمایش می‌دهند.

در (۲—۱—۱) و (۲—۲—۱) خواص جمع و ضرب خلاصه شد. برای تکمیل خواص جبری، رابطهٔ $+$ و $\cdot$ نیز مطرح است که در زیر می‌آید:

(۲—۳) قانون پخشی برای z, z', z'' داریم:

$$z\cdot(z'+z'')=(z\cdot z'')+(z\cdot z'')$$

$$(z+z')\cdot z''=(z\cdot z'')+(z\cdot z'')$$

قبل از اثبات قانون پخشی، بعضی نتایج به‌دست آمده تا این لحظه را بررسی می‌کنیم.

(۲—۴) نمادگذاری مجموعه نقاط صفحه با عمل جمع و ضرب فوق را به $\mathbb{C}$ نمایش داده، مجموعه اعداد مختلط می‌نامیم. به این ترتیب هر زوج (x,y) یک عدد مختلط خوانده می‌شود. توجه کنید که $\mathbb{R}$ با جمع و ضرب معمول آن یک زیردستگاه $\mathbb{C}$ است، یعنی اگر عناصر $\mathbb{R}$ را به $(x,0)$ نمایش دهیم، مجموع و حاصل‌ضرب دو عدد حقیقی، به عنوان عدد حقیقی یا عدد مختلط یکی است. در

مورد حاصل‌ضرب $z=(x,0)$ و $z'=(x',0)$، توجه کنید که اگر x و x' هم علامت باشند، داریم $arg(z)=arg(z')=0$ یا $arg(z)=arg(z')=\pi$، پس در هر دو حالت $arg(z\cdot z')=0$ و چون $xx'>0$، $|zz'|=xx'$، پس $(x,0)\cdot(x',0)=(xx',0)$. در حالتی که x و x' مختلف العلامت باشند، $arg(zz')=\pi$، $xx'<0$ و xx' یگانه نقطه با $arg=\pi$ است که فاصلهٔ آن از $\underline{0}$ برابر $-xx'=|z||z'|$ می‌باشد، پس مجدداً $(x,0)\cdot(x',0)=(xx',0)$.

بارزترین نتیجه فوری تعریف جمع و ضرب برای نقاط صفحه وجود جذر برای (-1) است. چون فاصله $(-1,0)$ از مبدأ برابر واحد است، فاصله هر جذر احتمالی آن از مبدأ باید ۱ باشد. از طرفی دیگر $arg(-1,0)=\pi$، و دقیقاً دو نقطهٔ $(0,1)$ و $(0,-1)$ ویژگی مورد نظر را دارند:

$$(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)$$

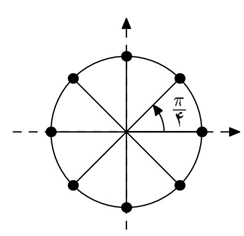
$$(0,-1)\cdot(0,-1)=(-1,0)$$

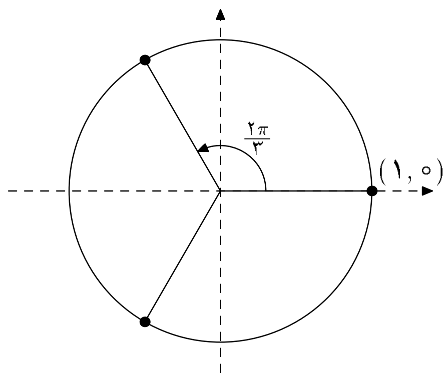
نقطهٔ $(0,1)$ را به i نمایش می‌دهند، پس $-i=(0,-1)$ و $\pm i$ جذرهای (-1) (یا $(-1,0)$) هستند. نتیجه این که عدد ۱ (یا $(1,0)$) دارای چهار ریشهٔ چهارم است، یعنی ± 1 و $\pm i$.

به طور کلی ۱ دارای n ریشهٔ n ام است. از تعریف ضرب نتیجه می‌شود که n نقطهٔ زیر که به طور متساوی الفاصله روی دایرهٔ واحد توزیع شده‌اند ریشه‌های n ام ۱ می‌باشند:

$$(1,0),(\cos\frac{2\pi}{n},\sin\frac{2\pi}{n}),(\cos\frac{4\pi}{n},\sin\frac{4\pi}{n}),\ldots,(\cos\frac{(n-1)2\pi}{n},\sin\frac{(n-1)2\pi}{n})$$

در شکل ۴ (الف) ریشه‌های سوم ۱ و در شکل ۴ (ب) ریشه‌های هشتم ۱ نمایش داده شده‌اند.





جهت ارجاع‌های بعدی توجه کنید که ریشه‌های سوم ۱ عبارتند از:

$(۱, ۰)$

$(-\frac{۱}{۲}, \frac{\sqrt{۳}}{۲}) = (\cos\frac{۲\pi}{۳}, \sin\frac{۲\pi}{۳})$

$(-\frac{۱}{۲}, -\frac{\sqrt{۳}}{۲}) = (\cos\frac{۴\pi}{۳}, \sin\frac{۴\pi}{۳})$

اعداد مختلط (۲)

از جلسهٔ قبل به یاد آورید که اگر زوج (r,θ) مختصات قطبی نقطهٔ (x,y) باشد، r فاصلهٔ نقطهٔ (x,y) از مبدأ است و θ زاویه‌ای است که از نیم‌خط مثبت محور x به نیم‌خط واصل از $\underline{0}$ به (x,y) در نظر گرفته می‌شود. جهت مثلثاتی را برای θ مثبت و جهت عقربهٔ ساعت را منفی می‌گیریم. داریم

$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta \tag{۱}$$

در واقع هر زوج (r,θ) با $r \geq 0$ که در روابط فوق صدق کند یک زوج مختصات قطبی برای $z=(x,y)$ منظور می‌شود. حال فرض کنید (r',θ') مختصات قطبی برای $z'=(x',y')$ باشد. طبق تعریف ضرب اعداد مختلط داریم:

$$\begin{aligned} z\cdot z' &= (rr'\cos(\theta+\theta'), rr'\sin(\theta+\theta')) \\ &= (rr'\cos\theta\cos\theta' - rr'\sin\theta\sin\theta', rr'\sin\theta\cos\theta' + rr'\cos\theta\sin\theta') \\ &= (xx'-yy', xy'+x'y) \end{aligned}$$

پس

$$(x,y)\cdot(x',y') = (xx'-yy', xy'+x'y) \tag{۲}$$

رابطه فوق بیان جبری حاصل‌ضرب دو عدد مختلط است و می‌توان از آن به عنوان تعریف حاصل‌ضرب استفاده کرد. با استفاده از (۲)، اکنون صحت قانون پخشی را تحقیق می‌کنیم. فرض

کنید $z''=(x'',y'')$، در این صورت:

$$\begin{aligned} z\cdot(z'+z'') &= (x,y)\cdot(x'+x'',y'+y'') \\ &= (x(x'+x'')-y(y'+y''),x(y'+y'')+(x'+x'')y) \qquad \text{طبق (۲)} \\ &= ((xx'-yy')+(xx''-yy''),(xy'+x'y)+(xy''+x''y)) \\ &= (xx'-yy',xy'+x'y)+(xx''-yy'',xy''+x''y) \\ &= zz'+zz'' \end{aligned}$$

یادآوری می‌کنیم که مجموعهٔ اعداد حقیقی، $\mathbb{R}$، را به عنوان زیرمجموعهٔ $\mathbb{C}$ متشکل از نقاط روی محور x در نظر می‌گیریم، یعنی x و $(x,\circ)$ یکی فرض می‌شوند، بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} (x,y) &= (x,\circ)+(\circ,y) \\ &= (x,\circ)+(\circ,۱)(y,\circ) \qquad \text{(طبق (۲))} \\ &= x+iy \end{aligned}$$

در واقع وقتی نقاط صفحه را به عنوان "عدد مختلط" تلقی می‌کنیم، نماد $x+iy$ معمول‌تر از (x,y) است. با توجه به قوانین جابجایی، شرکت‌پذیری و پخشی، کارکردن با $x+iy$ مانند کار کردن با اعداد معمولی است. فقط باید توجه داشت که همه جا $i\cdot i$ تبدیل به (-۱) می‌شود. مثلاً دستور (۲) را می‌توان به شکل زیر مجدداً تحقیق کرد:

$$\begin{aligned} (x+iy)\cdot(x'+iy') &= (x+iy)\cdot x'+(x+iy)\cdot(iy') \\ &= xx'+iyx'+xiy'+(iy)(iy') \\ &= xx'+i(yx'+xy')+(i\cdot i)(yy') \\ &= (xx'-yy')+i(xy'+x'y) \end{aligned}$$

نمایش یک عدد مختلط به صورت $z=x+iy$ را نمایش متعارفی یک عدد مختلط می‌نامند. x را قسمت حقیقی z و y را قسمت موهومی z می‌نامند. به طور کلی اعداد روی محور y، یعنی iy، اعداد موهومی خوانده می‌شوند. فاصله $z=x+iy$ از $\underline{\circ}$ (که در مختصات قطبی به r نمایش می‌دادیم) قدرمطلق z خوانده می‌شود و به $|z|$ نمایش داده می‌شود. بنابراین

$$|z|=\sqrt{x^{۲}+y^{۲}} \qquad (۳)$$

روابط زیر برای اعداد مختلط z و z' برقرارند:

$$|z+z'| \le |z|+|z'| \qquad \text{(نامساوی مثلث)} \qquad (۴)$$

$$|z \cdot z'| = |z||z'| \qquad (۵)$$

رابطه (۵) نتیجه تعریف هندسی حاصل‌ضرب اعداد مختلط است و (۴) قاعده‌ای کلی برای جمع بردارهاست که می‌توان اینجا با به‌کار گرفتن تعریف جمع و (۳) تحقیق نمود (تمرین). معنی هندسی آن این است که مجموع دو ضلع مثلث بزرگتر یا مساوی ضلع سوم است.

نماد معمول و مفید دیگری نماد مزدوج است. برای $z = x + iy$، قرینهٔ آن نسبت به محور x، یعنی $x - iy$ به $\overline{z}$ نمایش داده شده و مزدوج z خوانده می‌شود. اثبات روابط زیر سرراست است و به عنوان تمرین واگذار می‌شود:

$$\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'} \qquad (٦)$$

$$\overline{z \cdot z'} = \overline{z} \cdot \overline{z'} \qquad (۷)$$

همچنین توجه کنید که

$$z \cdot \overline{z} = |z|^{۲} \qquad (۸)$$

بالاخره برای زاویهٔ قطبی θ، گاهی نماد $arg(z)$ به‌کار می‌رود. بدین ترتیب

$$z = |z|(\cos(arg(z)) + i\sin(arg(z))) \qquad (۹)$$

حال اعداد مختلط z با $|z| = ۱$ را در نظر می‌گیریم. داریم:

$$z = \cos\theta + i\sin\theta$$

این عدد را به $cis(\theta)$ نیز نمایش می‌دهیم. از تعریف هندسی حاصل‌ضرب نتیجه می‌شود که اگر n یک عدد صحیح مثبت باشد داریم

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) \qquad (10)$$

فرمول (۱۰) به فرمول دُمواور[1] معروف است و کاربردهای فراوانی دارد. قبل از ارائه بعضی از این کاربردها، خاطر نشان می‌کنیم که (۱۰) برای همهٔ اعداد صحیح n، اعم از مثبت، منفی و صفر، برقرار است. برای هر عدد مختلط z، z^0 را طبق قرارداد برابر ۱ قرار می‌دهیم که رابطهٔ بالا را برقرار می‌کند. برای $n = -1$، با توجه به تعریف معکوس ضربی داریم:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{-1} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$$

حال مقصود از z^{-n}، n: عدد صحیح مثبت، معکوس ضربی z^n است، پس:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{-n} = (\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))^{-1} = \cos((-n)\theta) + i\sin((-n)\theta)$$

پس فرمول دموآور همچنان برقرار است.

کاربرد ۱: اتحادهای مثلثاتی

بعضی اتحادهای مثلثاتی را می‌توان به کمک فرمول دموآور به‌دست آورد. معمولاً باید عبارت مناسبی را به قسمت‌های حقیقی و موهومی تفکیک کرد. به عنوان نمونه فرض کنید می‌خواهیم $\cos 3\theta$ و $\sin 3\theta$ را برحسب $\cos\theta$ و $\sin\theta$ بنویسیم. فرمول دموآور برای $n = 3$ می‌دهد:

$$\begin{aligned}\cos 3\theta + i\sin 3\theta &= (\cos\theta + i\sin\theta)^3\\ &= \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - i\sin^3\theta\\ &= (\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta) + i(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta)\end{aligned}$$

[1] de Moivre

پس

$$\begin{cases} \cos ۳\theta = \cos^۳\theta - ۳\cos\theta\sin^۲\theta \\ \sin ۳\theta = ۳\cos^۲\theta\sin\theta - \sin^۳\theta \end{cases}$$

کاربرد ۲: ریشهٔ nـ ام اعداد مختلط

در جلسهٔ قبل ریشه‌های nـ ام واحد را محاسبه کردیم و دیدیم که ۱ دارای n ریشهٔ nـ ام متمایز است. این مطلب برای هر عدد مختلط $z \neq ۰$ درست است. از (۹) استفاده می‌کنیم و برای ساده نویسی $arg(z)$ را به θ نمایش می‌دهیم.

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

اگر w یک ریشهٔ nـ ام z باشد، داریم $w^n = z$. w را به صورت $|w|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ می‌نویسیم، پس:

$$|w|^n(\cos n\alpha + i\sin\alpha) = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

چون قدرمطلق طرف راست $|z|$ و قدرمطلق طرف چپ $|w|^n$ است داریم $|w|^n = |z|$، یعنی $|w|$ برابر $\sqrt[n]{|z|}$ است که مقصود از $\sqrt[n]{|z|}$ ریشه nـ ام مثبت عدد مثبت $|z|$ می‌باشد. با مساوی قراردادن قسمت‌های حقیقی و موهومی دو طرف داریم

$$\begin{cases} \cos n\alpha = \cos\theta \\ \sin n\alpha = \sin\theta \end{cases}$$

پس

$$n\alpha = \theta + ۲k\pi \quad , \quad k: \text{عدد صحیح}$$

$$\alpha = \tfrac{\theta}{n} + k\tfrac{۲\pi}{n}$$

بنابراین ریشه‌های nـ ام z عبارتند از اعداد:

$$\sqrt[n]{|z|}(\cos(\frac{\theta}{n} + k\frac{۲\pi}{n}) + i\sin(\frac{\theta}{n} + k\frac{۲\pi}{n})) \qquad k: \text{عدد صحیح}$$

توجه کنید که وقتی k کلیه اعداد صحیح را طی می‌کند فقط n مقدار متمایز در طرف راست پدید می‌آید زیرا که اگر مضربی صحیح از n به k افزوده شود، یک مضرب صحیح 2π به $\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}$ افزوده می‌شود که اثری بر کسینوس و سینوس ندارد، پس در واقع n ریشهٔ nــ ام برای $|z|$ به شرح زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} \sqrt[n]{|z|}(\cos(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}) + i\sin(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n})) \\ k = 0, 1, \ldots, n-1 \end{cases} \tag{11}$$

اکنون با توصیفی که از اعداد مختلط داشته‌ایم می‌توانیم بحث تاریخی در مورد حل معادلات درجه سوم را تکمیل کنیم. یادآوری می‌کنیم که برای حل معادلهٔ $t^3 + pt + q = 0$، t را به صورت $t = u + v$ نوشتیم و با افزودن یک رابطهٔ $3uv + p = 0$ به این نتیجه رسیدیم که u, v باید ریشه‌های سوم جواب‌های معادلهٔ درجه دوم $z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0$، یعنی ریشه‌های سوم دو مقدار:

$$z = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + \frac{4}{27}p^3}}{2} \tag{12}$$

باشند. ما در آغاز p و q را حقیقی گرفتیم ولی اگر p و q مختلط نیز باشند هیچ خللی در استدلال پدید نمی‌آید زیرا که همان قوانین جبری حاکمند و تا اینجا همهٔ ملاحظات در مورد معادلات درجه سوم با ضرایب مختلط نیز صادق است. توجه کنید که در (۱۲) زیر رادیکال ممکن است منفی شود ولی اکنون این مطلب مشکلی ایجاد نخواهد کرد زیرا که اعداد موهومی و مختلط نیز معنی پیدا کرده‌اند. حال هر یک از دو مقدار z در (۱۲) دارای سه ریشهٔ سوم است (به استثنای حالتی که یک جواب یا هر دو صفر شوند)، و در مجموع $3 \times 3 = 9$ انتخاب برای زوج (u, v) به‌دست خواهد آمد، ولی نشان می‌دهیم که حداکثر سه انتخاب در اینجا در مسأله صدق می‌کند. توجه کنید که رابطهٔ کمکی $3uv + p = 0$، یا $uv = -\frac{p}{3}$ باید برقرار باشد. یک جواب ممکن را به (u_1, v_1) نمایش دهید، پس

$$u_1 = \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4}{27}p^3}}{2}} \quad , \quad v_1 = \sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{q^2 + \frac{4}{27}p^3}}{2}}$$

که در اینجا مقصود از $\sqrt[3]{}$ یک انتخاب ریشهٔ سوم است به طوری که $u_1 v_1 = -\frac{p}{3}$. حال هر انتخاب

دیگر ریشهٔ سوم برای جواب‌های (۱۱) باید به شکل

$$u = \omega_1 u_1 \quad , \quad v = \omega_2 u_2$$

باشد که ω_1 و ω_2 ریشه‌های سوم واحد هستند. برای این که $uv = -\frac{p}{3}$ همچنان برقرار بماند باید داشته باشیم $\omega_1\omega_2 = 1$. ولی سه ریشه واحد عبارتند از:

$$1$$

$$\omega = cis(\tfrac{2\pi}{3}) = -\tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\omega^2 = cis(\tfrac{4\pi}{3}) = -\tfrac{1}{2} - i\tfrac{\sqrt{3}}{2}$$

و تنها سه امکان برای $\omega_1\omega_2 = 1$ وجود دارد که عبارتند از:

$$(\omega_1 = \omega_2 = 1) \quad , \quad (\omega_1 = \omega, \omega_2 = \omega^2) \quad , \quad (\omega_1 = \omega^2, \omega_2 = \omega)$$

پس اگر (u_1, v_1) یک زوج قابل قبول باشد، زوج‌های قابل قبول دیگری عبارتند از $(\omega u_1, \omega^2 u_2)$ و $(\omega^2 u_1, \omega u_2)$، پس سه جواب

$$t = u_1 + v_1$$

$$t = \omega u_1 + \omega^2 u_2$$

$$t = \omega^2 u_1 + \omega u_2$$

برای معادلهٔ درجه سه $t^3 + pt + q = 0$ به‌دست می‌آید.

با این ابزار دو مثال آغاز جلسه ۳ را به طور کامل بررسی می‌کنیم:

مثال ۱. معادلهٔ $t^3 - 3t + 2 = 0$ را در نظر بگیرید. داریم $p = -3$، $q = 2$ و u, v ریشه‌های سوم دو مقدار

$$z = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = -1$$

خواهند شد. بدین ترتیب هر یک از u, v باید یک ریشهٔ سوم (-1) انتخاب شود. ریشه‌های سوم (-1) طبق (۱۱) عبارتند از:

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad \cos\pi = -1 \quad , \quad \cos\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

باید زوج‌هایی انتخاب شوند که حاصل‌ضربشان برابر $-\frac{p}{۳} = ۱$ شود، مثلاً $u_۱ = v_۱ = -۱$ بدین ترتیب سه ریشهٔ معادله عبارتند از:

$$-\omega^۲ - \omega = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} = ۱ \quad , \quad -\omega - \omega^۲ = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} = ۱ \quad , \quad -۱ - ۱ = -۲$$

مثال ۲. معادلهٔ $t^۳ - ٦t + ۴ = ۰$ را در نظر می‌گیریم که برای آن $p = -٦$، $q = ۴$ و u, v هر یک ریشه‌های سوم دو مقدار

$$z = \frac{-۴ \pm \sqrt{١٦ - ۳۲}}{۲} = -۲ \pm ۲i$$

هستند. این ریشه‌های سوم عبارتند از:

ریشه‌های سوم $-۲ + ۲i$:

$$\sqrt{۲} cis \frac{\pi}{۴} = ۱ + i \quad , \quad \sqrt{۲} cis (\frac{\pi}{۴} + \frac{۲\pi}{۳}) \quad , \quad \sqrt{۲} cis (\frac{\pi}{۴} + \frac{۴\pi}{۳})$$

ریشه‌های سوم $-۲ - ۲i$:

$$\sqrt{۲} cis \frac{۵\pi}{۱۲} \quad , \quad \sqrt{۲} cis (\frac{۵\pi}{۱۲} + \frac{۲\pi}{۳}) \quad , \quad \sqrt{۲} cis (\frac{۵\pi}{۱۲} + \frac{۴\pi}{۳}) = \sqrt{۲} cis (-\frac{\pi}{۴}) = ۱ - i$$

ملاحظه می‌کنیم که $-\frac{p}{۳} = ۲ = (۱+i)(۱-i)$، پس یک جواب عبارت است از $(۱+i)+(۱-i) = ۲$ و همهٔ جواب‌ها به شرح زیرند:

$$(۱ + i) + (۱ - i) = ۲$$

$$\omega(۱ + i) + \omega^۲(۱ - i) = (-\tfrac{۱}{۲} + i\tfrac{\sqrt{۳}}{۲})(۱ + i) + (-\tfrac{۱}{۲} - i\tfrac{\sqrt{۳}}{۲})(۱ - i) = -۱ - \sqrt{۳}$$

$$\omega^۲(۱ + i) + \omega(۱ - i) = (-\tfrac{۱}{۲} - i\tfrac{\sqrt{۳}}{۲})(۱ + i) + (-\tfrac{۱}{۲} + i\tfrac{\sqrt{۳}}{۲})(۱ - i) = -۱ + \sqrt{۳}$$

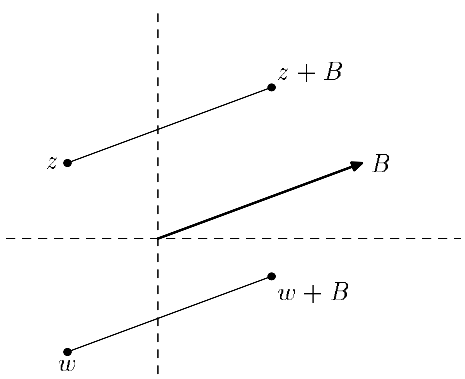
این مثال به خوبی نشان می‌دهد که چگونه با گذر از اعداد مختلط می‌توان به نتایجی با اعداد حقیقی رسید.

اعداد مختلط و تبدیلات صفحه

کاربردهای متنوعی برای اعداد مختلط وجود دارد. در اینجا به ارائه یک نمونه از این کاربردها می‌پردازیم. صفحهٔ $\mathbb{R}^۲$ یا معادلاً $\mathbb{C}$ را در نظر بگیرید. به کمک اعداد مختلط به بررسی تبدیل‌های "انتقال"، "دوران" و "تجانس" از صفحه خواهیم پرداخت. انتقال را به این مفهوم می‌گیریم که همهٔ نقاط صفحه در یک امتداد و به یک مقدار حرکت کنند. به طور دقیق‌تر، برای بردار ثابتی B، هر نقطه به اندازهٔ B حرکت می‌کند. از آنجا که جمع اعداد مختلط متناظر با جمع بردارها تعریف شد، می‌توان انتقال را تابعی $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ به شکل

$$T(z) = z + B \qquad (۱)$$

تلقی کرد که در آن B یک عدد مختلط ثابت است. بدین ترتیب اگر $B_۱$ و $B_۲$ دو عدد مختلط ثابت

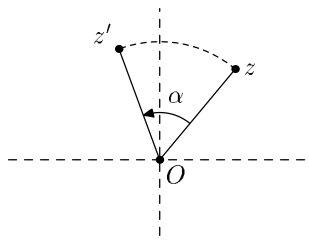


باشند حاصل دو انتقال متوالی با $B_۱$ و $B_۲$ عبارت است از:

$$z \longrightarrow z + B_۱ \longrightarrow (z_۱ + B_۱) + B_۲ = z + (B_۱ + B_۲)$$

یعنی انتقال به وسیله $B_1 + B_2$.

حال دوران را در نظر می‌گیریم و نخست دوران حول مبدأ مختصات، یعنی $\underline{\circ}$، را بررسی می‌کنیم. برای هر زاویهٔ α، مقصود از دوران حول $\underline{\circ}$ به زاویهٔ α تبدیلی است که هر نقطه z را به نقطه‌ای z' می‌فرستد که فاصلهٔ آن از مبدأ برابر فاصله z از مبدأ است ولی زاویه از خط واصل از $\underline{\circ}$ به z به خط واصل از $\underline{\circ}$ به z' برابر مقدار ثابت α است. توجه داشته باشید که همواره طبق قرارداد، مقادیر مثبت α در جهت مثلثاتی (ضد عقربه ساعت) منظور می‌شود. با توجه به تعریف حاصل‌ضرب اعداد مختلط، اگر



$R : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ یک دوران حول مبدأ مختصات باشد، داریم:

$$R(z) = cis(\alpha) \cdot z \qquad (۲)$$

که α مقداری ثابت است. حال اگر بخواهیم دوران زاویه α حول نقطهٔ دلخواهی $z_\circ$ را با اعداد مختلط نمایش دهیم به طریق زیر عمل می‌کنیم. نخست انتقالی به اندازهٔ $(-z_\circ)$ انجام می‌دهیم که $z_\circ$ را به $\underline{\circ}$ منتقل کند، سپس دوران زاویهٔ α حول $\underline{\circ}$ را انجام می‌دهیم (ضرب کردن در $cis(\alpha)$)، و بالاخره با انتقال به وسیلهٔ $z_\circ$، نقطه اولیهٔ $z_\circ$ را به مکان اولیه‌اش باز می‌گردانیم. بدین ترتیب دوران زاویه α حول $z_\circ$ به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$z \longrightarrow z - z_\circ \longrightarrow cis(\alpha) \cdot (z - z_\circ) \longrightarrow cis(\alpha) \cdot (z - z_\circ) + z_\circ \qquad (۳)$$

پس فرمول دوران زاویهٔ α حول $z_\circ$ به صورت زیر نیز داده می‌شود:

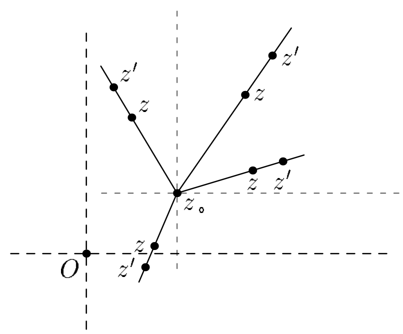
$$z \longrightarrow cis(\alpha) \cdot (z - z_\circ) + z_\circ = cis(\alpha) \cdot z + (1 - cis(\alpha)) \cdot z_\circ \qquad (۴)$$

توجه کنید که چون $(1 - cis(\alpha)) \cdot z_\circ$ یک عدد مختلط ثابت است، بلافاصله نتیجه می‌شود که

(۵—۱) هر دوران در صفحه را می‌توان به صورت ترکیب دوران حول $\underline{\circ}$ با همان زاویه و یک انتقال نوشت.

بالعکس اگر متوالیاً یک دوران زاویهٔ α، $\alpha \neq ۲k\pi$، حول $\underline{\circ}$ و سپس یک انتقال صورت گیرد، ادعا می‌کنیم حاصل یک دوران زاویهٔ α حول نقطه‌ای $z_\circ$ خواهد بود. چنین ترکیبی به صورت $cis(\alpha)\cdot z+B$ خواهد بود. چون فرض کرده‌ایم $\alpha \neq ۲k\pi$، داریم $\cos(\alpha) \neq ۱$ پس اگر $z_\circ$ را به صورت $\frac{B}{۱-cis(\alpha)}$ تعریف کنیم، داریم $cis(\alpha)\cdot z+B = cis(\alpha)\cdot z + (۱-cis(\alpha))\cdot z_\circ$ که طبق (۴) دوران زاویهٔ α حول $z_\circ$ است.

حال تبدیل تجانس را در نظر می‌گیریم. اگر عدد حقیقی نامنفی k داده شده باشد و $z_\circ$ یک نقطه در صفحه باشد، مقصود از تجانس به مرکز $z_\circ$ با ضریب k این است که هر نقطه z روی نیم‌خط واصل از $z_\circ$ به z به نقطه‌ای z' حرکت می‌کند که فاصله‌اش از $z_\circ$، k برابر فاصله z از $z_\circ$ است.



چون فاصله $z_\circ$ از $z_\circ$ صفر است و $k\cdot\circ=\circ$، مرکز تجانس تحت اثر تجانس ثابت باقی می‌ماند. برای به‌دست آوردن فرمولی برای تجانس، نخست حالتی را در نظر می‌گیریم که مرکز تجانس مبدأ مختصات، $\underline{\circ}$، است. در این حالت روشن است که نقطه z به نقطهٔ kz فرستاده می‌شود (ضرب عدد k در "بردار" z). بدین ترتیب تابع تجانس به مرکز $\underline{\circ}$ با ضریب k، $H:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$، عبارت است از:

$$H(z)=kz \qquad (۵)$$

برای تجانس نسبت به مرکز دلخواه $z_\circ$، به روشی مشابه دوران حول $z_\circ$ عمل می‌کنیم، یعنی نخست با انتقال $(-z_\circ)$ در صفحه، نقطهٔ $z_\circ$ را به $\underline{\circ}$ منتقل می‌کنیم، سپس تجانس فوق، H، را انجام می‌دهیم و

بالاخره حاصل را به اندازهٔ $z_\circ$ انتقال می‌دهیم:

$$z \longrightarrow z - z_\circ \longrightarrow k(z - z_\circ) \longrightarrow k(z - z_\circ) + z_\circ \qquad (٦)$$

یعنی تابع تجانس به مرکز $z_\circ$ و ضریب k را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$z \longrightarrow k(z - z_\circ) + z_\circ = kz + (۱ - k)z_\circ \qquad (۷)$$

از آنجا که $(۱ - k)z_\circ$ عددی ثابت است داریم

(۵—۲) هر تجانس در صفحه را می‌توان به صورت ترکیب تجانس حول $\underline{\circ}$ با همان ضریب و یک انتقال نوشت.

در اینجا نیز عکس مطلب درست است. فرض کنید نخست تجانس با ضریب $k \neq ۱$ انجام گیرد و سپس یک انتقال با بردار B. در این صورت حاصل اثر بر نقطهٔ z عبارت است از $kz + B$. چون $k \neq ۱$، $\frac{B}{۱-k}$ تعریف شده است و اگر آن را $z_\circ$ بنامیم داریم $kz + B = kz + (۱ - k)z_\circ$ که طبق (۷) تجانس با ضریب k به مرکز $z_\circ$ است. حال اگر به فرمول‌های کلی انتقال، دوران و تجانس، که توسط (۱)، (۴) و (۷) ارائه شده‌اند، نظر کنیم، ملاحظه می‌کنیم که هر سه، تابع‌های درجه یک نسبت به z تعریف می‌کنند. اکنون نشان می‌دهیم که عکس این مطلب نیز صحیح است، یعنی هر تابع درجه یک $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ در واقع ترکیبی از این سه نوع تبدیل است. فرض کنید تابع $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ به صورت

$$f(z) = Az + B \qquad (۸)$$

داده شده است که در آن A, B اعداد مختلط ثابت باشند. اگر $A = \circ$ که همهٔ نقاط صفحه به نقطهٔ ثابت B فرستاده می‌شوند و این، تجانس به مرکز B با ضریب $k = \circ$ است.

فرض کنید $A \neq \circ$، می‌توان نوشت:

$$A = |A| cis(\alpha) \qquad (۹)$$

پس f را می‌توان به صورت ترکیب زیر نوشت:

$$z \xrightarrow{\text{دوران حول } \underline{\circ}} cis(\alpha) \cdot z \xrightarrow{\text{تجانس به مرکز } \underline{\circ}} |A| cis(\alpha) \cdot z \xrightarrow{\text{انتقال}} |A| cis(\alpha) \cdot z + B \qquad (۱۰)$$

یعنی هر تابع درجه یک، ترکیب یک دوران حول $\underline{o}$، یک تجانس به مرکز $\underline{o}$، و یک انتقال است. همچنین چون عمل ضرب جابجایی است، می‌توان ترتیب دوران و تجانس را تعویض کرد.

در واقع اکنون می‌بینیم که ترکیب (۱۰) یا یک انتقال است و یا ترکیب یک دوران و یک تجانس به مرکز مشترک:

حالت اول: $A = ۱$ در این صورت تابع به $z \longrightarrow z + B$ خلاصه می‌شود که یک انتقال است.

حالت دوم: $A \neq ۱$ در این صورت نشان می‌دهیم که نقطه‌ای $z_{\circ}$ وجود دارد به طوری که $z \longrightarrow Az + B$ ترکیب یک دوران و یک تجانس به مرکز $z_{\circ}$ است. یک چنین نقطهٔ $z_{\circ}$ باید در رابطهٔ $Az_{\circ} + B = z_{\circ}$ صدق کند چون مرکز دوران و تجانس ثابت می‌ماند، پس معادلاً $(۱ - A)z_{\circ} = B$ و چون $A \neq ۱$ فرض شده است، $z_{\circ} = \frac{B}{۱-A}$ به‌دست می‌آید. حال نشان می‌دهیم که این نقطه فی‌الواقع ویژگی مورد نظر را دارد، یعنی $z \longrightarrow Az + B$ ترکیب دوران و تجانس حول $z_{\circ}$ است. داریم:

$$Az + B = A(z - \frac{B}{۱ - A}) + B + \frac{AB}{۱ - A} = A(z - z_{\circ}) + z_{\circ}$$

با نوشتن $A = |A|cis(\alpha)$ ملاحظه می‌کنیم که این تابع ترکیب دوران با زاویه α و تجانس با ضریب $|A|$ حول $z_{\circ}$ است.

بالاخص دو حالت زیر را مورد توجه قرار می‌دهیم:

اگر $A \neq ۱$ و $|A| = ۱$، تابع $z \longrightarrow Az + B$ دوران به زاویه $cis(arg(A))$ حول $z_{\circ} = \frac{B}{۱-A}$ است.

اگر $A \neq ۱$ و $A \geq \circ$، تابع $z \longrightarrow Az + B$ تجانس با ضریب A حول $z_{\circ} = \frac{B}{۱-A}$ است.

مثال ۱. فرض کنید $T_۱ : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ دوران به زاویه α حول $z_۱$ و $T_۲ : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ دوران به زاویهٔ β حول $z_۲$ است. در این صورت ترکیب $T_۲ \circ T_۱$ چگونه تبدیلی است؟

داریم $T_۱(z) = cis(\alpha) \cdot z + B_۱$ و $T_۲(z) = cis(\beta) \cdot z + B_۲$. پس

$$\begin{aligned} T_۲ \circ T_۱(z) &= T_۲(cis(\alpha) \cdot z + B_۱) + B_۲ \\ &= cis(\beta) \cdot cis(\alpha) \cdot z + cis(\beta) \cdot B_۱ + B_۲ \\ &= cis(\alpha + \beta) \cdot z + (cis(\beta) \cdot B_۱ + B_۲) \end{aligned}$$

که در اینجا $cis(\beta) \cdot B_۱ + B_۲$ یک عدد مختلط ثابت است. اگر $\alpha + \beta = ۲k\pi$، یا $\cos(\alpha + \beta) = ۱$

این تبدیل یک انتقال با مقدار $cis(\beta)\cdot B_1 + B_2$ است. اگر $\alpha+\beta \neq 2k\pi$، تبدیل فوق یک دوران به زاویه $\alpha+\beta$ حول $z_0 = \frac{cis(\beta)\cdot B_1 + B_2}{1-cis(\alpha+\beta)}$ می‌باشد.

دنبالهٔ عددی و سری عددی (۱)

وقتی در جلسات اول مفهوم عدد حقیقی را مطرح کردیم، اشاره داشتیم به اینکه عملیات جبری را می‌توان همانند عملیاتی که برای اعداد گویا مطرح می‌شود به همهٔ اعداد حقیقی تعمیم داد. در واقع اگر چهار عمل اصلی جمع، تفریق، ضرب و تقسیم را به صورت هندسی مطرح کنیم هیچ تفاوتی میان اعداد گویا و ناگویا مشاهده نمی‌شود. در شکل ۱ این چهار عمل نمایش داده شده‌اند. فرض کنید دو عدد حقیقی مثبت a و b داده شده‌اند. نقاط A و B در سمت راست محور حقیقی را طوری می‌گیریم که پاره‌خط‌های OA و OB طول‌های به ترتیب a و b داشته باشند. حال اگر دهانهٔ پرگاری را به اندازه OA باز کنیم و به مرکز B و این شعاع دایره‌ای رسم کنیم، نقطهٔ تقاطع دایره در سمت راست نقطهٔ B، یعنی نقطهٔ C، عدد $a+b$ را نمایش می‌دهد (یعنی طول پاره‌خط OC برابر $a+b$ است) و نقطهٔ تقاطع در سمت چپ B، یعنی نقطهٔ D، نمایشگر عدد $a-b$ است. برای عمل ضرب دو نیم‌خط از O رسم می‌کنیم. روی یک نیم‌خط نقاط U و B را طوری می‌گیریم که طول OU برابر واحد و طول OB برابر b باشد. روی نیم‌خط دیگر نقطهٔ A به نحوی اختیار می‌کنیم که طول OA برابر a باشد. حال اگر خط راستی از B به موازات UA رسم کنیم، نقطهٔ تلاقی آن با نیم‌خط دیگر، یعنی C طوری است که طول OC برابر ab است (بنابر تشابه مثلث‌ها). برای ترسیم نسبت $\frac{a}{b}$ کافی است بدانیم چگونه باید $\frac{1}{b}$ را رسم کنیم. روی دو نیم‌خط متقاطع در O، نقاط U و V را طوری بگیرید که OU و OV هر دو طول واحد داشته باشند. نقطهٔ B را روی نیم‌خط OU طوری می‌گیریم که طول OB برابر b باشد. در این صورت خطی که از U به موازات BV رسم شود خط دیگر را در نقطه‌ای B' قطع می‌کند که فاصله‌اش از O برابر $\frac{1}{b}$ است (مجدداً تشابه). روش معمول دیگری این است که دایره‌ای به شعاع واحد و مرکز O رسم

می‌کنیم. روی نیم‌خطی ساطع از O، نقطهٔ B را طوری می‌گیریم که طول OB برابر b باشد. نخست فرض کنید $b > ۱$، پس B خارج دایره باشد. در این صورت از B مماسی بر دایره رسم می‌کنیم و از نقطهٔ تماس بر OB عمود می‌کنیم. فاصلهٔ پای عمود، B'، از O برابر $\frac{۱}{b}$ است (مجدداً تشابه مثلث‌ها). برای $b < ۱$، با مراجعه به همان شکل معکوس فرایند بالا را در نظر می‌گیریم.

هرگاه یکی یا هر دوی a و b منفی باشند، می‌توان با قرینه‌گیری مناسب کماکان از روش‌های بالا استفاده کرد. این نیز قابل ذکر است که هرگاه پاره‌خط‌هایی به طول a و b داده شده باشند، ترسیمات هندسی فوق به کمک پرگار و خط‌کش غیرمدرج قابل اجرا هستند.

حال می‌خواهیم چهار عمل اصلی را به صورت حسابی یا جبری توصیف کنیم. فرض کنید $a = a_۰/a_۱a_۲a_۳\dots$ و $b = b_۰/b_۱b_۲b_۳\dots$ دو عدد مثبت باشند. چگونه باید $a+b$ را محاسبه کرد؟ اگر بسط اعشاری a و b مختومه باشند روش محاسبهٔ $a+b$ را در دبستان آموخته‌ایم. به طور کلی اگر a و b گویا باشند، آنها را به صورت $a = \frac{m}{n}$ و $b = \frac{m'}{n'}$ می‌نویسیم، که در اینجا n', m', n, m عدد صحیح مثبت هستند، و داریم $a+b = \frac{nm'+n'm}{nn'}$. مشکل وقتی است که a و b ناگویا باشند. روشن است که الگوریتم دبستانی جمع اعشاری از سمت راست در اینجا جوابگو نیست زیرا که در سمت راست این اعداد مختومه نمی‌شوند و نقطهٔ شروعی وجود ندارد.

$$\begin{array}{cccccc} & a_۰ & / & a_۱ & a_۲ & a_۳ \quad \dots \\ + & b_۰ & / & b_۱ & b_۲ & b_۳ \quad \dots \\ \hline & & & ? & & \end{array}$$

ولی می‌توان یک راه تقریب عملی به صورت زیر ارائه کرد. اگر هر یک از دو عدد بالا رقم پس از n رقم اعشار مختومه کنیم عددهای $a' = a_۰/a_۱\dots a_n$ و $b' = b_۰/b_۱\dots b_n$ به‌دست می‌آیند که تقریب‌های a و b هر یک با خطای کوچکتر یا مساوی $\frac{۱}{۱۰^n}$ هستند. حال اگر a' و b' را به طریق عادی جمع کنیم حاصل حداکثر $\frac{۱}{۱۰^n} \times ۲$ با مجموع $a+b$ فاصله دارد. با بزرگ گرفتن n می‌توان $\frac{۲}{۱۰^n}$، یعنی حداکثر خطای حاصل جمع، را به دلخواه کوچک کرد. اکنون می‌توان به سادگی نشان داد که $a+b$ در واقع کوچکترین کران بالایی این تقریب‌هاست. در مورد حاصلضرب و خارج‌قسمت (به فرض مخرج $\neq ۰$) می‌توان به روش مشابهی از کسرهای مختومه برای تقریب استفاده کرد ولی در این دو مورد اگر $|a-a'| \leq \frac{۱}{۱۰^n}$ و $|b-b'| \leq \frac{۱}{۱۰^n}$، تخمین خطای حاصل‌ضرب و خارج‌قسمت، یعنی $|ab-a'b'|$ و

$|\frac{a}{b} - \frac{a'}{b'}|$ به این سادگی نیست. در زیر مفهومی کارساز و کلی‌تر، زیر عنوان "همگرایی دنباله" مطرح می‌کنیم که در برگیرنده همهٔ این موارد است و کاربردهای فراوان دیگری نیز خواهد داشت.

مقصودمان از یک قطعه از اعداد صحیح مجموعه‌ای به شکل زیر متشکل از اعداد صحیح است:

$$\{k, k+۱, k+۲, \ldots\}$$

یعنی قطعه شامل همهٔ اعداد صحیح بزرگتر یا مساوی k است. اگر S یک قطعه از اعداد صحیح باشد و E یک مجموعه، هر تابع $a : S \longrightarrow E$ را یک دنباله (در E) می‌نامند. بدین ترتیب a به هر عضو n از S، عنصری $a(n)$ از E نسبت می‌دهد. معمولاً به جای $a(n)$ می‌نویسیم a_n و تصویر تابع a را به ترتیب صعودی ردیف می‌کنیم:

$$a_k, a_{k+۱}, a_{k+۲}, \ldots \qquad (۱)$$

نماد $(a_i)_{i=k}^{\infty}$ نیز برای نمایش دنباله به‌کار می‌رود. بدین ترتیب معمولاً به جای اینکه دنباله را یک تابع از S به E تلقی کنیم، دنباله را مجموعه‌ای از عناصر E تلقی می‌کنیم که به ترتیب از k شماره‌گذاری شده است. ضمناً لزومی ندارد که a_i ها، به عنوان اعضای E، متمایز باشند، یا به زبان تابعی، تابع a لزوماً یک به یک فرض نمی‌شود.

(۶—۱) چند مثال

(۶—۱—۱) دنباله $a : \{۱, ۲, ۳, \ldots\} \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$a_n = \frac{۱}{n}$$

این یک دنباله از اعداد حقیقی است که به سوی نقطهٔ ۰ تجمع می‌کند.

(۶—۱—۲) دنباله $a : \{۱, ۲, ۳, \ldots\} \longrightarrow \mathbb{R}$ که به صورت

$$a_n = n + \frac{۱}{n}$$

تعریف می‌شود دنباله‌ای دیگر از اعداد حقیقی است که با افزایش اندیس n به تدریج بزرگتر می‌شود و هیچ‌جا تجمع نمی‌کند.

(۶—۱—۳) دنباله $a : \{۱, ۲, ۳, \ldots\} \longrightarrow \mathbb{C}$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$a_n = \frac{i^n}{n}$$

چند جملهٔ اول این دنباله عبارتند از:

$$i, \frac{-۱}{۲}, \frac{-i}{۳}, \frac{۱}{۴}, \frac{i}{۵}, \frac{-۱}{۶}, \ldots$$

این اعداد به صورت چرخشی چهار نیم محور صفحه را متناوباً سیر می‌کنند و به سوی ۰ تجمع می‌کنند (شکل ۲).

(۶—۱—۴) $\mathcal{L}$ را مجموعهٔ خطوط راست در صفحه می‌گیریم و تابع $l : \{۰, ۱, ۲, \ldots\} \longrightarrow \mathcal{L}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: $l(n)$ یا l_n خط راست گذرا از ۰ با شیب n است، یعنی خط راست $y = nx$ (شکل ۳). این یک دنبالهٔ خطوط راست است که به سوی محور y میل می‌کند.

(۶—۱—۵) $\mathcal{F}$ را مجموعهٔ تابع‌های از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ می‌گیریم و تابع $c : \{۱, ۲, \ldots\} \longrightarrow \mathcal{F}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: $c(n)$ تابع $\cos nx$ است (شکل ۴). هر c_n یک تابع تناوبی است با دورهٔ تناوب $\frac{۲\pi}{n}$.

در این مرحله ما فقط به دنباله‌های عددی می‌پردازیم یعنی دنباله‌های $a : S \longrightarrow E$ که در آن E معمولاً $\mathbb{C}$ یا $\mathbb{R}$ است. بحث کلی را برای دنباله‌های اعداد مختلط می‌نویسیم و از آنجا که $\mathbb{R}$ زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{C}$ تلقی می‌شود، می‌توان دنباله‌های اعداد حقیقی را نیز به عنوان دنباله‌هایی از اعداد مختلط در نظر گرفت. در بعضی مثال‌ها مانند (۶—۱—۱) و (۶—۱—۳) می‌بینیم که با افزایش اندیس n، اعضای دنباله به نقطهٔ خاصی نزدیک می‌شوند. اگر دقت دید یا تشخیص دستگاه‌های مشاهده مثلاً $e > ۰$ باشد، آنگاه اگر اعضای دنباله در فاصله‌ای کوچکتر از e نسبت به نقطهٔ تجمع قرار گیرند، آنگاه نمی‌توان آنها را از نقطهٔ تجمع تمیز داد، انگار که دنباله به حالت سکون رسیده است. این مفهوم را "همگرایی" می‌نامیم و به شکل دقیق زیر تعریف می‌کنیم:

(۶—۲) **تعریف.** دنبالهٔ $a : S \longrightarrow \mathbb{C}$ را به نقطهٔ a^* همگرا می‌نامیم یا می‌گوییم a_n به a^* میل می‌کند، (و می‌نویسیم $a_n \longrightarrow a^*$، یا $\lim_{n\to\infty} a_n = a^*$)

در صورتی که برای هر $e > ٠$، عدد صحیح مثبت N وجود داشته باشد که هرگاه $n \geq N$، آنگاه $|a_n - a^*| < e$.

توجه کنید که طبق این تعریف، هر درجهٔ تشخیص $e > ٠$ که منظور شود، قرار است مرحله‌ای N، علی‌الاصول وابسته به e، وجود داشته باشد که از آن مرحله به بعد، a_n ها از a^* غیر قابل تشخیص باشند.

(٦—٣) چند مثال

(٦—٣—١) به مثال ٦—١—١ توجه کنید. در اینجا داریم $\frac{1}{n} \longrightarrow ٠$ زیرا که اگر $e > ٠$ منظور شود، با گرفتن عدد صحیح N بزرگتر از $\frac{1}{e}$، یعنی $\frac{1}{N} < e$، داریم: هرگاه $n \geq N$، آنگاه:

$$|\frac{1}{n} - ٠| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < e$$

(٦—٣—٢) در مثال ٦—٣—٣، دنباله به ٠ همگراست زیرا که برای هر $e > ٠$ داده شده، اگر مجدداً N را بزرگتر از $\frac{1}{e}$ می‌گیریم. برای $n \geq N$ داریم:

$$|\frac{i^n}{n} - ٠| = \frac{|i|^n}{n} = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < e$$

(٦—٣—٣) فرض کنید $c = c_٠/c_1 c_2 c_3 \ldots$ یک عدد مثبت به صورت بسط اعشاری باشد. دنباله C_n را به صورت بسط‌های مختومهٔ این عدد تعریف می‌کنیم، یعنی:

$$C_٠ = c_٠ \quad , \quad C_1 = c_٠/c_1 \quad , \quad C_2 = c_٠/c_1 c_2 \quad , \quad \ldots$$

ادعا می‌کنیم $C_n \longrightarrow c$. فرض کنید $e > ٠$ داده شده باشد. عدد N را طوری می‌گیریم که $\frac{1}{1٠^N} < e$ برای $n \geq N$ داریم:

$$|c - C_n| = ٠/٠ \ldots ٠ c_{n+1} c_{n+2} \ldots \leq \frac{1}{1٠^n} \leq \frac{1}{1٠^N} < e$$

(٦—٣—۴) مثال فوق را می‌توان بدین صورت تعمیم داد. فرض کنید $\{a_٠, a_1, a_2, \ldots\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد که $a_٠ \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots$ و مجموعهٔ $\{a_٠, a_1, a_2, \ldots\}$ دارای کران بالایی باشد.

نشان می‌دهیم a_n به کوچکترین کران بالایی مجموعهٔ فوق میل می‌کند. نخست می‌دانیم که طبق اصل تمامیت برای مجموعهٔ $\{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$ کوچکترین کران بالایی a^* وجود دارد. حال هر $e > 0$ که منظور شود، به بازه $]a^* - e, a^* + e[$ نگاه می‌کنیم. اگر هیچ a_N در این بازه قرار نگیرد، از آنجا که a^* یک کران بالایی برای مجموعهٔ a_n هاست، باید داشته باشیم $a_n \leq a^* - e$ برای هر n. بنابراین هر عدد بین $a^* - e$ و a^* یک کران بالایی برای مجموعه، کوچکتر از a^*، خواهد بود که خلاف این فرض است که a^* کوچکترین کران بالایی برای $\{a_0, a_1, \ldots\}$ می‌باشد. پس N وجود دارد که a_N در $]a^* - e, a^* + e[$ قرار می‌گیرد. البته $a^* - e < a_N \leq a^*$. از آنجا که دنبالهٔ (a_n) غیرنزولی است و هر a_n باید کوچکتر از کران بالایی a^* یا مساوی آن باشد، برای هر $n \geq N$ داریم:

$$a^* - e < a_N \leq a_n \leq a^*$$

بنابراین برای هر $n \geq N$، نامساوی $|a_n - a^*| < e$ برقرار است.

اکنون به مسأله‌ای که در آغاز این بخش مطرح شد باز می‌گردیم، یعنی روش محاسبه مجموع، حاصل‌ضرب و خارج‌قسمت اعداد حقیقی با تقریب مختومه ساختن را بررسی می‌کنیم. گزاره زیر در واقع کلی‌تر از این نیاز خاص است و بعداً موارد استفاده بسیار دیگری نیز خواهد داشت.

(۶–۴) گزاره. فرض کنید $(a_n)_{n=k}^{\infty}$ و $(b_n)_{n=k}^{\infty}$ دو دنبالهٔ اعداد مختلط باشند که $a_n \longrightarrow a^*$ و $b_n \longrightarrow b^*$. در این صورت:

الف) اگر دنبالهٔ $(c_n)_{n=k}^{\infty}$ را به صورت $c_n = a_n + b_n$ تعریف کنیم، داریم $c_n \longrightarrow a^* + b^*$.

ب) اگر دنبالهٔ $(c_n)_{n=k}^{\infty}$ را به صورت $c_n = a_n \cdot b_n$ تعریف کنیم، داریم $c_n \longrightarrow a^* \cdot b^*$.

ج) اگر مضافاً فرض کنیم $b_n \neq 0$ برای هر n و $b^* \neq 0$ و دنبالهٔ $(c_n)_{n=k}^{\infty}$ را به صورت $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ تعریف کنیم، داریم $c_n \longrightarrow \frac{a^*}{b^*}$.

اثبات. (الف) فرض کنید $e > 0$ داده شده باشد، N را طوری جستجو می‌کنیم که $n \geq N$ نتیجه دهد $|(a_n + b_n) - (a^* + b^*)| < e$. اگر بتوانیم N را طوری تأمین کنیم که $|a_n - a^*| < \frac{e}{2}$ و

$|b_n - b^*| < \frac{e}{۲}$ هر دو به‌ازای $n \geq N$ برقرار شوند، بنابر نامساوی مثلث داریم:

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (a^* + b^*)| &= |(a_n - a^*) + (b_n - b^*)| \\ &\leq |a_n - a^*| + |b_n - b^*| \\ &< \frac{e}{۲} + \frac{e}{۲} = e \end{aligned}$$

ولی از آنجا که $a_n \longrightarrow a^*$، برای $\frac{e}{۲} > ۰$، عددی $N_۱$ وجود دارد که $n \geq N_۱$ نتیجه می‌دهد که $|a_n - a^*| < \frac{e}{۲}$، و نیز از آنجا که $b_n \longrightarrow b^*$، برای $\frac{e}{۲} > ۰$، عددی $N_۲$ وجود دارد که $n \geq N_۲$ نتیجه می‌دهد $|b_n - b^*| < \frac{e}{۲}$. پس با گرفتن $N = \max\{N_۱, N_۲\}$، نتیجه مورد نظر حاصل می‌شود.

(ب) در اینجا نیز برای $e > ۰$ داده شده، N را طوری جستجو می‌کنیم که $n \geq N$ نتیجه دهد $|a_n b_n - a^* b^*| < e$. در اینجا مرتبط ساختن $|a_n b_n - a^* b^*|$ با دو کمیت $|a_n - a^*|$ و $|b_n - b^*|$ به سادگی قسمت (الف) نیست، مثلاً حاصل‌ضرب $(a_n - a^*)(b_n - b^*)$ برابر است با $a_n b_n - a_n b^* - a^* b_n + a^* b^*$ که در آن دو جملهٔ زاید وجود دارد و به جای تفاضل $a_n b_n - a^* b^*$، مجموع این دو جمله ظاهر می‌شود. از حکم کمکی زیر استفاده می‌کنیم:

(۶—۵) لم. هرگاه (c_n) دنباله‌ای همگرا از اعداد مختلط باشد و $c_n \longrightarrow c^*$، آنگاه عددی $K > ۰$ وجود دارد که $|c^*| \leq K$ و $|c_n| \leq K$ برای هر n (یا به اصطلاح، هر دنباله همگرا کراندار است).

اثبات ۶—۵. حول c^* یک گوی به شعاع ۱ در نظر می‌گیریم. طبق تعریف همگرایی، عددی N وجود دارد که برای $n \geq N$ داریم $|c_n - c^*| < ۱$. بنابراین برای $n \geq N$ داریم $|c_n| < |c^*| + ۱$ زیرا که هر نقطهٔ داخل گوی شعاع ۱ حول c^* باید نزدیکتر از $|c^*| + ۱$ از ۰ باشد. حال در بین تعداد متناهی عضو دنباله، قبل از مرحله N، که در بیرون گوی هستند، فاصلهٔ دورترین آنها به ۰ را به R نمایش می‌دهیم. در این صورت $K = \max\{R, |c^*| + ۱\}$ عدد مورد نظر است. □

اکنون به اثبات قسمت (ب) از گزاره باز می‌گردیم. عبارت $a_n b_n - a^* b^*$ را به صورت $a_n b_n - a_n b^* + a_n b^* - a^* b^*$ می‌نویسیم. پس داریم:

$$\begin{aligned} |a_n b_n - a^* b^*| &\leq |a_n b_n - a_n b^*| + |a_n b^* - a^* b^*| \\ &\leq |a_n||b_n - b^*| + |b^*||a_n - a^*| \end{aligned}$$

حال طبق لم ۶—۵، کرانی $K_۱$ برای دنبالهٔ (a_n) و a^*، و نیز کرانی $K_۲$ برای (b_n) و b^* وجود دارد،

پس:

$$|a_n b_n - a^* b^*| \leq K_1 |b_n - b^*| + K_2 |a_n - a^*| \qquad (2)$$

از آنجا که $a_n \longrightarrow a^*$، برای $\frac{e}{2K_2} > 0$، عددی N_1 وجود دارد که برای $n \geq N_1$ داریم $|a_n - a^*| < \frac{e}{2K_2}$، و نیز $b_n \longrightarrow b^*$ نتیجه می‌دهد که $\frac{e}{2K_1} > 0$، N_2 وجود دارد که برای $n \geq N_2$ داریم $|b_n - b^*| < \frac{e}{2K_1}$. با گرفتن $N = \max\{N_1, N_2\}$، برای $n \geq N$ هر دو نامساوی برقرارند و نتیجه می‌شود که $|a_n b_n - a^* b^*| < e$.

(ج) برای اثبات $\frac{a_n}{b_n} \longrightarrow \frac{a^*}{b^*}$، کافی است نشان دهیم $\frac{1}{b_n} \longrightarrow \frac{1}{b^*}$ و از حکم (ب) برای حاصل‌ضرب $a_n \cdot \frac{1}{b_n}$ استفاده کنیم. در اینجا نیز یک لم کمکی مشابه و معکوس لم قبلی مورد نیاز است:

(٦—٦) لم. هرگاه (b_n) دنباله‌ای از اعداد مختلط ناصفر باشد که $b_n \longrightarrow b^*$ و $b^* \neq 0$، آنگاه عددی $k > 0$ وجود دارد که $|b^*| \geq k$ و $|b_n| \geq k$ برای هر n.

اثبات. نقطهٔ b^* در فاصلهٔ مثبت $|b^*|$ از 0 قرار دارد. اگر گوی به شعاع $\frac{1}{2}|b^*|$ به مرکز b^* را در نظر بگیریم، چون $b_n \longrightarrow b^*$، N وجود دارد که برای $n \geq N$، $|b_n - b^*| < \frac{|b^*|}{2}$، پس $|b_n| > \frac{|b^*|}{2}$ برای $n \geq N$. برای تعداد متناهی عضو دنباله که ممکن است در خارج این گوی باشند، یعنی برای $n < N$، چون همه غیر صفر هستند، یکی کوچکترین فاصلهٔ مثبت ممکن از 0 را دارد. این فاصله را به r نمایش می‌دهیم. حال $\min\{r, \frac{|b^*|}{2}\}$ عدد k مورد نظر است. $\square$

به اثبات (ج) باز می‌گردیم، می‌خواهیم ثابت کنیم $\frac{1}{b_n} \longrightarrow \frac{1}{b^*}$. فرض کنید $e > 0$ داده شده باشد. می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b^*}\right| &= \frac{|b_n - b^*|}{|b_n||b^*|} \\ &\leq \frac{|b_n - b^*|}{k^2} \quad \text{(طبق لم ٦—٦)} \end{aligned} \qquad (3)$$

حال چون $b_n \longrightarrow b^*$، برای $ek^2 > 0$، وجود دارد N که $n \geq N$ نتیجه می‌دهد $|b_n - b^*| < ek^2$، پس برای $n \geq N$ داریم $\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b^*}\right| < e$. $\square$

بدین ترتیب، برای محاسبه حاصل‌ضرب و خارج‌قسمت دو عدد $a = a_0/a_1 a_2 a_3 \ldots$ و $b = b_0/b_1 b_2 b_3 \ldots$ می‌توان از تقریب‌های مختومهٔ $a = a_0/a_1 \ldots a_n$ و $b = b_0/b_1 \ldots b_n$ استفاده کرد

و با افزایش n به مقدار واقعی $a \cdot b$ نزدیکتر شد. اما در مورد حاصل‌ضرب و خارج‌قسمت تفاوت عمده‌ای با مجموع وجود دارد. در مورد مجموع دیدیم که اگر a و b هر یک پس از n رقم بعد از ممیز مختومه شوند، خطای مجموع از $\frac{۲}{۱۰^n}$ بیشتر نیست، مستقل از اینکه اعداد a و b چه باشند. در مورد حاصل‌ضرب و خارج‌قسمت نمی‌توان احکام مشابهی صادر کرد بدین معنی که اگر $a = a_۰/a_۱ \ldots a_n$ و $b = b_۰/b_۱ \ldots b_n$ به عنوان تقریب‌های مختومهٔ a و b در نظر گرفته شوند، انحراف حاصل‌ضرب (و خارج‌قسمت، به ترتیب) این دو عدد از ab (و $\frac{a}{b}$، به ترتیب) فقط به n وابسته نیست، بلکه به اندازهٔ a و b نیز بستگی خواهد داشت. مثلاً در اثبات ٦—۴ (ب)، طبق (۲) داریم:

$$|a_n b_n - a^* b^*| \leq K_۱ |b_n - b^*| + K_۲ |a_n - a^*|$$

که در اینجا $K_۱$ یک کران بالایی برای دنبالهٔ (a_n) و $K_۲$ یک کران بالایی برای دنبالهٔ (b_n) است. بدین ترتیب اگر قدرمطلق a_n ها به نسبت بزرگ باشد، باید $|b_n - b^*|$ را متناسباً کوچک انتخاب کرد، و همین طور برای b_n ها در رابطه با $|a_n - a^*|$، تا دقت مورد نظر حاصل شود. به مثال‌های زیر توجه کنید.

(٦—۷) مثال

(٦—۷—۱) دو عدد $a = ۴۸۷/r_۱ r_۲ r_۳ \ldots$ و $b = ۳/s_۱ s_۲ s_۳ \ldots$ داده شده‌اند. می‌خواهیم n را طوری اختیار کنیم که انحراف حاصل‌ضرب $a_n = ۴۸۷/r_۱ \ldots r_n$ و $b_n = ۳/s_۱ \ldots s_n$ از حاصل‌ضرب ab کوچکتر از $۱۰^{-۵}$ باشد. برای چنین n داریم $|a_n - a^*| \leq ۱۰^{-n}$ و $|b_n - b^*| < ۱۰^{-n}$، پس طبق (۲):

$$|a_n b_n - ab| \leq (K_۱ + K_۲) ۱۰^{-n}$$

می‌توان $K_۱ = ۴۸۸$ و $K_۲ = ۴$ را به عنوان کران بالایی برای دنباله‌های مختومه در نظر گرفت، پس طرف راست نامساوی بالا کوچکتر از $۱۰^{-n}(۴۹۲)$ است. اگر بخواهیم این خط کوچکتر از $۱۰^{-۵}$ باشد، $n = ۸$ کار می‌کند زیرا $۴۹۲ < ۱۰^۳$ ولی $n = ۷$ کار نمی‌کند. بدین ترتیب اگر هر یک از a و b

پس از هشت رقم پس از ممیز مختومه شوند، انحراف حاصل‌ضرب دو عدد مختومه از حاصل‌ضرب واقعی کوچکتر از $۱۰^{-۵}$ خواهد بود.

(۶—۷—۲) عدد $b = ۰/۰۳۲۱۹۰۹۹۰۹۹۹\ldots$ را در نظر می‌گیریم. اگر این عدد را پس از n رقم بعد از ممیز مختومه کنیم. تقریب را به b_n نمایش می‌دهیم. می‌خواهیم n را طوری اختیار کنیم که اختلاف $\frac{۱}{b_n}$ با $\frac{۱}{b}$ کوچکتر از $۱۰^{-۳}$ باشد. طبق نامساوی (۳) در اثبات ۶—۶ داریم:

$$|\frac{۱}{b_n} - \frac{۱}{b}| \leq \frac{۱}{k^۲}|b_n - b|$$

که در آن $k > ۰$ عددی است که $|b_n| \geq k$ و $|b^*| \geq k$. در اینجا می‌توانیم k را برابر ۰/۰۳۲۱ اختیار کنیم و با توجه به این که $۱۰^۵ < (۳۲۱)^۲$ داریم $۱۰^{-۳} < (۰/۰۳۲۱)^۲$ و $\frac{۱}{k^۲} < ۱۰^۳$، پس

$$|\frac{۱}{b_n} - \frac{۱}{b}| < (۱۰^۳)|b_n - b^*|$$

برای اینکه طرف راست کوچکتر از $۱۰^{-۳}$ باشد، کافی است که $|b_n - b^*|$ کوچکتر از $۱۰^{-۶}$ باشد، بنابراین معکوس ۰/۰۳۲۱۹۰ از $b^{-۱}$ انحرافی کوچکتر از $۱۰^{-۳}$ خواهد داشت. محاسبه با ماشین حساب به نسبت قوی نشان می‌دهد که:

$$(۰/۰۳۲۱۹۰۹۹۰۹۹۹)^{-۱} = ۳۱/۰۶۴۵۹۱۹۵$$
$$(۰/۰۳۲۱۹۰)^{-۱} = ۳۱/۰۶۵۵۴۸۳۰$$

اختلاف این دو عدد برابر ۰/۰۰۰۹۵۶۳۵ است که از $۱۰^{-۳}$ کوچکتر می‌باشد.

دنباله عددی و سری عددی (۲)

در عمل دستهٔ مهمی از دنباله‌ها از جمع‌زدن متوالی یا انباشتن جملات یک دنباله داده شده حاصل می‌شوند. مثلاً اگر به نمایش اعشاری عددی نگاه کنیم:

$$c = c_۰/c_۱c_۲c_۳\ldots$$

این در واقع حد دنبالهٔ اعداد اعشاری مختومهٔ زیر است:

$$c_۰, c_۰ + \frac{c_۱}{۱۰}, c_۰ + \frac{c_۱}{۱۰} + \frac{c_۲}{۱۰۰}, \ldots$$

که این دنباله از انباشتن متوالی دنباله زیر به‌دست می‌آید:

$$c_۰, \frac{c_۱}{۱۰}, \frac{c_۲}{۱۰۰}, \ldots$$

به طوری کلی اگر دنباله $(a_n)_{n=k}^{\infty}$ داده شده باشد، مقصود از سری مجموع‌های جزیی این دنباله، دنباله زیر است:

$$a_k, a_k + a_{k+۱}, a_k + a_{k+۱} + a_{k+۲}, \ldots$$

اگر دنبالهٔ اخیر به A همگرا باشد، اصطلاحاً گفته می‌شود که سری $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ همگراست و می‌نویسیم $\sum_{n=k}^{\infty} a_n = A$. در غیر این صورت، سری واگرا خوانده می‌شود. بدین ترتیب، اگر دنباله عدد صحیح نامنفی $c_۰, c_۱, c_۲, \ldots$ داده شده باشد که در آن برای $i \geq ۱$، $۰ \leq c_i \leq ۹$، سری $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{c_n}{۱۰^n}$ طبق اصل تمامیت همگراست و حد آن به $c_۰/c_۱c_۲c_۳\ldots$ نمایش داده می‌شود. وقتی همهٔ a_k ها اعداد حقیقی مثبت باشند واضح به نظر می‌رسد که انباشتن a_n ها فقط وقتی ممکن است منجر به یک حد متناهی شود که a_n ها سریعاً کوچک شوند. مثلاً برای $c = c_۰/c_۱c_۲c_۳\ldots$، جمله اندیس n برابر

$\frac{c_n}{10^n}$ است که به صفر میل می‌کند وقتی $n \longrightarrow +\infty$. در واقع شرط $a_n \longrightarrow 0$ یک شرط لازم برای همگرایی است حتی اگر a_n ها عدد مختلط باشند.

(۷–۱) شرط لازم همگرایی. اگر سری اعداد مختلط $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ همگرا باشد، داریم $a_n \longrightarrow 0$ وقتی $n \longrightarrow +\infty$.

اثبات. مجموع جزیی $a_k + \cdots + a_n$ را به S_n نمایش می‌دهیم. فرض کنید سری $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ به S همگراست، یعنی $S_n \longrightarrow S$. اگر $e > 0$ داده شده باشد، می‌خواهیم N را طوری بیابیم که برای $n > N$ داشته باشیم $|a_n| < e$. چون $S_n \longrightarrow S$، برای $\frac{e}{2} > 0$، N_1 وجود دارد که اگر $n > N_1$، آنگاه $|S_n - S| < \frac{e}{2}$. قرار می‌دهیم $N = N_1 + 1$، پس برای $n > N$ داریم:

$$|S_n - S| < \frac{e}{2} \quad , \quad |S_{n-1} - S| < \frac{e}{2}$$

بنابراین طبق نامساوی مثلث

$$|S_n - S_{n-1}| \leq |S_n - S| + |S - S_{n-1}| < e$$

ولی $S_n - S_{n-1} = a_n$ و حکم به اثبات می‌رسد. □

لازم به تأکید است که این شرط به تنهایی برای همگرایی $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ کافی نیست و در واقع a_n ها ممکن است در عین کوچکتر شدن و میل کردن به صفر، آنقدر سریع کوچک نشوند که مجموع آنها به عددی میل کند. مثال ساده و معروف زیر را باید همواره در ذهن داشت.

(۷–۲) سری هارمونیک. سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ را بررسی می‌کنیم. در اینجا شرط لازم همگرایی برقرار است زیرا که $\frac{1}{n} \longrightarrow 0$ وقتی $n \longrightarrow \infty$ ولی نشان می‌دهیم سری واگراست. به گروه‌بندی زیر از جملات سری تا اندیس $n = 2^k$ توجه کنید:

$$S_{2^k} = 1 + (\frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}) + \cdots + (\frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k})$$

داریم $\frac{1}{3}+\frac{1}{4} > 2(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}$، $\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8} > 4(\frac{1}{8}) = \frac{1}{2}$، … ، $\frac{1}{2^{k-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^k} > 2^{k-1}(\frac{1}{2^k}) = \frac{1}{2}$
بنابراین $S_{2^k} > 1 + \frac{k}{2}$، چون با افزایش k، $1 + \frac{k}{2}$ به دلخواه بزرگ می‌شود، S_n ها به حدی (متناهی)

میل نمی‌کنند. این مثال نشان می‌دهد که بررسی همگرایی یک سری ممکن است در مواردی دشوار باشد. در این جلسه ضمن معرفی چند سری مرجع، آزمون‌هایی برای همگرایی سری‌ها مطرح خواهیم کرد.

دو مثال زیر نقطهٔ ارجاع بسیاری از سری‌های دیگر و نیز بحث‌های نظری هستند.

(۷—۳) دو مثال

(۷—۳—۱) سری هندسی. فرض کنید $a \neq 0$ و r دو عدد مختلط داده شده باشند. سری $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ را در نظر می‌گیریم که از انباشتن دنباله زیر به‌دست می‌آید:

$$a, ar, ar^2, ar^3, \ldots$$

مورد $a = 0$ را کنار گذاشتیم زیرا که در این حالت همهٔ جملات صفر می‌شوند و وضعیت سری مشخص است. نشان می‌دهیم سری $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ همگراست اگر و تنها اگر $|r| < 1$. نخست به اتحاد زیر توجه کنید

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \tag{1}$$

که صحت آن را می‌توان با طرفین‌ـ وسطین تحقیق کرد. بنابراین به عنوان مجموع جزیی سری هندسی داریم:

$$\sum_{n=0}^{N} ar^n = a\frac{1 - r^{N+1}}{1 - r}$$

حال اگر $|r| < 1$، $r^{N+1} \longrightarrow 0$ وقتی $N \longrightarrow +\infty$، پس $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ به $\frac{a}{1-r}$ همگراست. بالعکس اگر $|r| \geq 1$، آنگاه $|ar^n| \geq |a| > 0$ و جملهٔ n ام به صفر میل نمی‌کند، پس شرط لازم همگرایی برقرار نیست.

(۷—۳—۲) سری p. برای $p > 0$ داده شده، سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ را سری p می‌نامند. در اینجا سری را فقط برای مقادیر صحیح p در نظر می‌گیریم. در آینده مقادیر غیر عدد صحیح نیز در نظر گرفته خواهد شد. برای $p = 1$، سری هارمونیک $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ به‌دست می‌آید که دیدیم واگراست هر چند که جملهٔ n ام

آن به صفر میل می‌کند وقتی $n \longrightarrow +\infty$. برای $p = ۲$، توجه کنید که

$$n > ۱: \quad \frac{۱}{n^۲} < \frac{۱}{n^۲ - n} = \frac{۱}{n-۱} - \frac{۱}{n}$$

و داریم

$$\begin{aligned} \sum_{n=۲}^{N} \frac{۱}{n^۲-n} &= (\tfrac{۱}{۱} - \tfrac{۱}{۲}) + (\tfrac{۱}{۲} - \tfrac{۱}{۳}) + \cdots + (\tfrac{۱}{N+۱} - \tfrac{۱}{N}) \\ &= ۱ - \tfrac{۱}{N} \end{aligned}$$

بنابراین $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۱}{n^۲-n}$ به مقدار ۱ همگراست. حال داریم:

$$N > ۱: \quad \sum_{n=۱}^{N} \frac{۱}{n^۲} < ۱ + \sum_{n=۲}^{N} \frac{۱}{n^۲ - n} = ۲ - \frac{۱}{N} < ۲$$

بنابراین دنباله (S_N)، $S_N = \sum_{n=۱}^{N} \frac{۱}{n^۲}$، یک دنبالهٔ صعودی با کران بالایی است که طبق ٦—۳—۴ جلسهٔ قبل به کوچکترین کران بالایی خود میل می‌کند. به همین ترتیب اگر $p > ۲$، داریم $\frac{۱}{n^p} < \frac{۱}{n^۲}$ و مجموع‌های جزیی $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^p}$ دنباله‌ای صعودی با کران بالایی هستند، پس سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^p}$ همگراست.

ایدهٔ اثبات فوق را برای ارجاع بعدی به صورت زیر ثبت می‌کنیم:

(۷—۴) فرض کنید $(a_n)_{n=k}^{\infty}$ یک دنباله اعداد حقیقی نامنفی باشد. در این صورت سری $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ همگراست اگر و تنها اگر برای دنبالهٔ مجموع‌های جزیی یک کران بالایی وجود داشته باشد.

اثبات. دنبالهٔ مجموع‌های جزیی را در نظر می‌گیریم:

$$S_k = a_k, S_{k+۱} = a_k + a_{k+۱}, \ldots$$

چون $a_i \geq ۰$، داریم $S_k \leq S_{k+۱} \leq S_{k+۲} \leq \cdots$. پس اگر S_n ها دارای کران بالایی باشند، طبق ٦—۳—۴، S_n به کوچکترین کران بالایی مجموعهٔ $\{S_k, S_{k+۱}, \ldots\}$ میل می‌کند. بالعکس اگر دنبالهٔ (S_n) همگرا باشد، می‌دانیم که در واقع هر دنباله همگرا در $\mathbb{C}$ کراندار است. □

به دلایلی که به زودی خواهیم دید، سری‌های اعداد حقیقی غیرمنفی از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند. برای این گونه سری‌ها اکنون می‌توانیم با توجه به (۷—۴) چند آزمون همگرایی ارائه کنیم:

(۷—۵) فرض کنید $(a_n)_{n=k}^{\infty}$ و $(b_n)_{n=l}^{\infty}$ دو دنباله از اعداد حقیقی غیرمنفی باشند و اندیسی N وجود داشته باشد، $N \geq k, l$، که برای $n \geq N$ داشته باشیم $a_n \leq b_n$. در این صورت:

الف) اگر $\sum_{n=l}^{\infty} b_n$ همگرا باشد، $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ نیز همگراست.

ب) اگر $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ واگرا باشد، $\sum_{n=l}^{\infty} b_n$ نیز واگراست.

اثبات. چون جمع کردن تعدادی متناهی جملهٔ اولیه اثری بر همگرایی یا واگرایی ندارد، کافی است در مورد سری‌های $\sum_{n=N}^{\infty} b_n$ و $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ بحث کنیم. اگر $\sum_{n=N}^{\infty} b_n$ همگرا باشد، دنبالهٔ مجموع‌های جزیی آن از کران بالایی، مثلاً $M > ۰$ برخوردار است. چون $a_n \leq b_n$، M کران بالایی برای مجموع‌های جزیی $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ نیز می‌باشد، پس طبق ۷—۴، $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ همگراست. بالعکس اگر $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ همگرا نباشد، مجموع‌های جزیی آن دارای کران بالایی نیستند و چون $b_n \geq a_n$، مجموع‌های جزیی $\sum_{n=N}^{\infty} b_n$ نیز به طور اولی کران بالایی ندارند، پس $\sum_{n=N}^{\infty} b_n$ واگراست. □

در این آزمون مقایسهٔ اندازهٔ a_n و b_n به صورت تفاضل مطرح بود (یعنی $b_n - a_n \geq ۰$). آزمون مشابهی برای نسبت وجود دارد:

(۷—٦) $(a_n)_{n=k}^{\infty}$ و $(b_n)_{n=l}^{\infty}$ دو دنبالهٔ اعداد حقیقی غیرمنفی هستند و N وجود دارد که $b_n \neq ۰$ برای $n \geq N$. در این صورت:

الف) اگر عددی $M > ۰$ وجود داشته باشد که $\frac{a_n}{b_n} \leq M$ برای n از مرحله‌ای به بعد، آنگاه اگر $\sum_{n=k}^{\infty} b_n$ همگرا باشد، $\sum_{n=l}^{\infty} a_n$ نیز همگراست.

ب) اگر عددی $m > ۰$ وجود داشته باشد که $\frac{a_n}{b_n} \geq m$ برای n از مرحله‌ای به بعد، آنگاه اگر $\sum_{n=k}^{\infty} b_n$ واگرا باشد، $\sum_{n=l}^{\infty} a_n$ نیز واگراست.

اثبات. الف) شرط $\frac{a_n}{b_n} \leq M$ معادل $a_n \leq Mb_n$ است. اگر $\sum_{n=l}^{\infty} b_n$ به B همگرا باشد، $\sum_{n=l}^{\infty}(Mb_n)$ به MB همگراست، پس طبق (۷—۵)، $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ نیز همگراست.

ب) شرط $\frac{a_n}{b_n} \geq m$ معادل $a_n \geq mb_n$ است. اگر $\sum_{n=l}^{\infty} b_n$ واگرا باشد، $\sum_{n=l}^{\infty}(mb_n)$ نیز واگراست چون $m \neq ۰$ (اگر $\sum_{n=l}^{\infty}(mb_n)$ همگرا باشد، با ضرب کردن هر جمله در $\frac{۱}{m}$ نتیجه می‌شود که سری $\sum_{n=l}^{\infty} b_n$ نیز واگراست) پس چون $a_n \geq mb_n$، طبق (۷—۴) سری $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ نیز همگراست. □

بسیاری اوقات حالت خاصی از (۵—۷) به صورت زیر مورد استفاده قرار می‌گیرد:

(۷—۷) $(a_n)_{n=k}^{\infty}$ و $(b_n)_{n=l}^{\infty}$ دو دنبالهٔ اعداد حقیقی غیرمنفی هستند و N وجود دارد که $b_n \neq 0$ برای $n \geq N$. فرض کنید $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ وجود داشته باشد و برابر L باشد. در این صورت:

الف) اگر $\sum_{n=l}^{\infty} b_n$ همگرا باشد، $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ نیز همگراست.

ب) اگر $L > 0$ و $\sum_{n=l}^{\infty} b_n$ واگرا باشد، $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ نیز واگراست.

اثبات. این در واقع حالت خاصی از ۷—٦ است. در (الف)، می‌توان از $M = L + 1$ استفاده کرد زیرا که اگر $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$، از مرحله‌ای به بعد همهٔ $\frac{a_n}{b_n}$ ها از $L + 1$ کوچکتر می‌شوند. در (ب)، اگر $L > 0$، با گرفتن $m = \frac{L}{2}$، می‌بینیم که چون $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$، از مرحله‌ای به بعد $\frac{a_n}{b_n}$ ها باید از m بزرگتر باشند. □

(۷—۸) مثال. وضعیت سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^3-n+3}{n^4+1}$ را از نظر همگرایی بررسی می‌کنیم. در این گونه مثال‌ها آنچه تعیین‌کننده است، اختلاف درجهٔ بالاترین جملهٔ صورت و مخرج است. اگر (درجهٔ صورت)—(درجهٔ مخرج) $= p$، مقایسه با $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ کارساز است. در مثال فوق:

$$\frac{\frac{2n^3-n+3}{n^4+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{2n^4 - n^2 + 3n}{n^4 + 1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$$

بنابراین واگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ نتیجه می‌دهد که سری داده شده واگراست.

(۷—۹) نکته. فرض کنید $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=k}^{\infty} b_n$ دو سری همگرا، به ترتیب به A و B باشند. در این صورت سری $\sum_{n=k}^{\infty} c_n$ را در نظر می‌گیریم که در آن $c_n = a_n + b_n$. ادعا می‌کنیم که $\sum_{n=k}^{\infty} c_n$ به $A + B$ همگراست. در واقع اگر مجموع‌های جزیی $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$، $\sum_{n=k}^{\infty} b_n$ و $\sum_{n=k}^{\infty} c_n$ را به ترتیب به A_n، B_n و C_n نمایش دهیم، داریم $C_n = A_n + B_n$ و حکم از گزارهٔ ٦—۴ جلسهٔ قبل نتیجه می‌شود. به همین ترتیب اگر c یک عدد مختلط دلخواه باشد، به سادگی دیده می‌شود که $\sum_{n=k}^{\infty}(ca_n)$ به cA همگراست. ولی نباید تصور کرد که اگر $\sum_{n=k}^{\infty} a_n = A$ و $\sum_{n=k}^{\infty} b_n = B$، آنگاه $\sum_{n=k}^{\infty}(a_n b_n)$ برابر AB است. مجموع جزیی سری اخیر تا مرحلهٔ N برابر $a_k b_k + \cdots + a_N b_N$ است

در حالی که حاصل‌ضرب مجموع‌های جزیی $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=k}^{\infty} b_n$، هر یک تا مرحلهٔ N، برابر $(a_k + \cdots + a_N)(b_k + \cdots + b_N)$ می‌باشد.

به کمک سری هندسی می‌توان دو آزمون بسیار مؤثر برای سری‌های اعداد مثبت ارائه کرد. دو آزمون زیر هر یک، یکی از ویژگی‌های سری هندسی را مبنا قرار می‌دهد. به سری هندسی زیر توجه کنید که در آن r یک عدد حقیقی مثبت فرض می‌شود:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots$$

می‌دانیم شرطی لازم و کافی برای همگرایی این سری این است که $r < 1$. حال می‌توان r را دو گونه تعبیر کرد. از سویی r نسبت دو جملهٔ متوالی است و از سویی دیگر r ریشهٔ n ام جملهٔ اندیس n این سری. در زیر ”آزمون نسبت“ در شرایطی که نسبت جملات متوالی تقریباً رفتاری مانند رفتار سری هندسی دارد، یعنی حدوداً ثابت است، کار می‌کند. ”آزمون ریشه“ وقتی کارایی دارد که ریشهٔ n ام جملهٔ اندیس n حدوداً ثابت باشد.

(۷—۱۰) آزمون نسبت. فرض کنید $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ یک سری با جملات مثبت است. در این صورت:

الف) اگر عددی $\rho < 1$ وجود داشته باشد و مرحله‌ای N که برای $n \geq N$ داشته باشیم $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \rho$، آنگاه $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ همگراست.

ب) اگر مرحله‌ای N وجود داشته باشد که برای $n \geq N$ داشته باشیم $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$، آنگاه $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ واگراست.

اثبات. طبق فرض داریم $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \rho$ برای $n \geq N$، پس:

$$a_{N+1} \leq \rho a_N$$

$$a_{N+2} \leq \rho a_{N+1} \leq \rho^2 a_N$$

$$\vdots$$

$$a_{N+k} \leq \rho a_{N+k-1} \leq \cdots \leq \rho^k a_N$$

بنابراین از مقایسهٔ سری با جملات مثبت $a_{N+۱} + a_{N+۱} + \cdots$ با سری هندسی $a_N\rho + a_N\rho^۲ + a_N\rho^۳ + \cdots$ با قدرنسبت $\rho < ۱$ نتیجه می‌شود که $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ همگراست. در مورد (ب)، داریم

$$\cdots \geq a_{N+۲} \geq a_{N+۱} \geq a_N > ۰$$

بنابراین شرط لازم همگرایی، $a_n \longrightarrow ۰$، تأمین نمی‌شود، و سری واگراست. $\square$

گاهی اوقات یک نتیجهٔ ایده آزمون فوق به صورت زیر کفایت می‌کند. فرض کنید $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+۱}}{a_n}$ وجود داشته و برابر R باشد. اگر $R < ۱$، عددی ρ بین R و ۱ در نظر می‌گیریم $R < \rho < ۱$. طبق تعریف حد دنباله، مرحله‌ای N وجود دارد که برای $n \geq N$، $|\frac{a_{n+۱}}{a_n} - R| < \rho - R$، پس $\frac{a_{n+۱}}{a_n} < \rho$ و همگرایی نتیجه می‌شود. اگر $R > ۱$، مجدداً مرحله‌ای N وجود دارد که برای $n \geq N$ داریم $|R - \frac{a_{n+۱}}{a_n}| < R - ۱$، پس $\frac{a_{n+۱}}{a_n} \geq ۱$ و سری واگراست. در حالتی که $R = ۱$، نتیجه قاطعی از این آزمون حاصل نمی‌شود. مثلاً برای سری p، $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^p}$،

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{۱}{(n+۱)^p}}{\frac{۱}{n^p}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{۱}{(۱+\frac{۱}{n})^p} = ۱$$

مستقل از اینکه p چه باشد. ولی این سری به‌ازای $p = ۱$ واگرا و به‌ازای $p > ۱$ همگراست.

(۷–۱۱) مثال. فرض کنید عدد حقیقی $x > ۰$ داده شده باشد. نشان می‌دهیم $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ همگراست. از آزمون نسبت داریم:

$$\frac{\frac{x^{n+۱}}{(n+۱)!}}{\frac{x^n}{n!}} = \frac{x}{n+۱} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} ۰ < ۱$$

پس این سری همگراست.

(۷–۱۲) آزمون ریشه. فرض کنید $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ یک سری با جملات مثبت است. در این صورت:

الف) اگر عددی $\rho < ۱$ وجود داشته باشد و مرحله‌ای N که برای $n \geq N$ داشته باشیم $\sqrt[n]{a_n} \leq \rho$، آنگاه $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ همگراست.

ب) اگر برای بی‌نهایت اندیس n داشته باشیم $\sqrt[n]{a_n} \geq ۱$، آنگاه سری $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ واگراست.

اثبات. برای (الف) داریم $a_n \leq \rho^n$ برای هر $n \geq N$ و مقایسه با سری هندسی $\sum \rho^n$، همگرایی سری را به اثبات می‌رساند. در مورد (ب)، $\sqrt[n]{a_n} \geq ۱$ به‌ازای بی‌نهایت اندیس n، نشان می‌دهد $a_n \geq ۱$ به‌ازای بی‌نهایت اندیس n، پس شرط لازم همگرایی $a_n \longrightarrow ۰$ نمی‌تواند برقرار باشد و سری واگراست. $\square$

در اینجا نیز بسیاری اوقات $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ در نظر گرفته می‌شود. اگر این حد وجود داشته باشد و آن را به R نمایش دهیم، سه وضعیت زیر ممکن است رخ دهد. اگر $R < ۱$ سری همگراست زیرا که اگر عددی ρ بین R و ۱ اختیار کنیم، $R < \rho < ۱$، از تعریف حد دنباله نتیجه می‌گیریم مرحله‌ای N وجود دارد که برای $n \geq N$ داریم $|\sqrt[n]{a_n} - R| < \rho - R$، پس $\sqrt[n]{a_n} < \rho$ و همگرایی نتیجه می‌شود. اگر $R > ۱$، پس از مرحله‌ای N داریم $|R - \sqrt[n]{a_n}| < R - ۱$، پس $\sqrt[n]{a_n} > ۱$ و واگرایی نتیجه می‌شود. در اینجا نیز $R = ۱$ نتیجه‌ای در مورد همگرایی نمی‌دهد زیرا که مجدداً در مورد سری p:

$$\sqrt[n]{\frac{۱}{n^p}} = \left(\frac{۱}{\sqrt[n]{n}}\right)^p$$

از آنجا که $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = ۱$، حد عبارت بالا به‌ازای هر p برابر ۱ است. پس این آزمون نمی‌تواند میان سری واگرای $\sum \frac{۱}{n}$ و سری همگرای $\sum \frac{۱}{n^۲}$ تمیز دهد.

(۷—۱۳) مثال. فرض کنید عدد حقیقی $x > ۰$ داده شده است، نشان می‌دهیم سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$ همگراست.

طبق آزمون ریشه:

$$\sqrt[n]{\frac{x^n}{n^n}} = \frac{x}{n} \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} ۰ < ۱$$

پس سری همگراست. می‌توانستیم این امر را از مقایسه $\frac{x^n}{n^n} \leq \frac{x^n}{n!}$ نیز به کمک مثال ۷—۹ نتیجه بگیریم.

دنباله عددی و سری عددی (۳)

در جلسهٔ قبل اشاره داشتیم به اینکه سری‌های اعداد حقیقی غیر منفی از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند و آزمون‌های همگرایی که مطرح کردیم مربوط به سری‌های اعداد غیرمنفی بودند. دلیل اهمیت سری‌های اعداد حقیقی غیرمنفی قضیهٔ زیر است:

(۸—۱) قضیه. فرض کنید $(z_n)_{n=k}^{\infty}$ یک دنبالهٔ اعداد مختلط باشد. اگر $\sum_{n=k}^{\infty}|z_n|$ همگرا باشد، آنگاه $\sum_{n=k}^{\infty}z_n$ نیز همگراست.

بدین ترتیب اگر بتوانیم به کمک یکی از آزمون‌های جلسهٔ قبل همگرایی سری قدرمطلق‌های جملات یک سری را به اثبات برسانیم، همگرایی سری اولیه نتیجه می‌شود. اگر برای سری $\sum_{n=k}^{\infty}z_n$، سری قدرمطلق‌ها، یعنی $\sum_{n=k}^{\infty}|z_n|$ همگرا باشد، $\sum_{n=k}^{\infty}z_n$ را همگرای مطلق می‌نامند. پس طبق قضیهٔ بالا، همگرایی مطلق، همگرایی را نتیجه می‌دهد. برای اثبات قضیهٔ بالا نخست به یک نکتهٔ کلی اشاره می‌کنیم.

(۸—۲) گزاره. فرض کنید $(c_n)_{n=k}^{\infty}$ یک دنبالهٔ اعداد مختلط باشد، $c_n=a_n+ib_n$، و $c=a+ib$ یک عدد مختلط. در این صورت $c_n\longrightarrow c$ اگر و تنها اگر $a_n\longrightarrow a$ و $b_n\longrightarrow b$.

اثبات. داریم

$$|a_n-a|,|b_n-b|\le|c_n-c| \tag{۱}$$

و

$$|c_n - c| \leq |a_n - a| + |b_n - b| \tag{۲}$$

نامساوی اولی بیان این مطلب است که در مثلث قائم‌الزاویه هر ضلع زاویه قأمه کوچکتر از وتر است، و نامساوی دوم بیان این مطلب که طول هر ضلع از مجموع دو ضلع دیگر کوچکتر است (شکل ۱).

فرض کنید $c_n \longrightarrow c$، پس برای هر $e > ۰$، N وجود دارد که $|c_n - c| < e$ برای هر $n > N$. بنابراین از نامساوی (۱) نتیجه می‌شود که $|a_n - a| < e$ و $|b_n - b| < e$ وقتی $n > N$. پس $c_n \longrightarrow c$ نتیجه می‌دهد $a_n \longrightarrow a$ و $b_n \longrightarrow b$. بالعکس فرض کنید $a_n \longrightarrow a$ و $b_n \longrightarrow b$. برای e داده شده، $N_۱$ و $N_۲$ وجود دارند که:

$$n > N_۱ : \quad |a_n - a| < \frac{e}{۲}$$

$$n > N_۲ : \quad |b_n - b| < \frac{e}{۲}$$

با قرار دادن $N = \max\{N_۱, N_۲\}$ می‌بینیم که اگر $n > N$، آنگاه طبق نامساوی (۲) داریم $|c_n - c| < e$ و حکم به اثبات می‌رسد. □

به زبان هندسی، گزارهٔ ۸—۲ حکم می‌کند که شرطی لازم و کافی برای $c_n \longrightarrow c$ این است که مؤلفهٔ افقی (قسمت حقیقی) c_n به مؤلفهٔ افقی (قسمت حقیقی) c میل کند و مؤلفهٔ قائم (قسمت موهومی) c_n به مؤلفهٔ قائم (قسمت موهومی) c.

حال قضیهٔ ۸—۱ را در حالتی که c_n ها حقیقی باشند در نظر بگیرید. پس دنباله‌ای از اعداد حقیقی $(c_n)_{n=k}^{\infty}$ داریم که $\sum_{n=k}^{\infty} |c_n|$ همگراست. می‌نویسیم:

$$c_n = (c_n + |c_n|) + (-|c_n|)$$

چون $\sum |c_n|$ همگرا فرض شده است، اگر همه جملات در عدد ثابت (-۱) ضرب شوند، نتیجه می‌شود که $\sum_{n=k}^{\infty}(-|c_n|)$ همگراست. پس اگر ثابت شود که $\sum_{n=k}^{\infty}(c_n + |c_n|)$ نیز همگراست،آنگاه مجموع جمله به جملهٔ دو سری همگرای فوق، همگرا خواهد شد. ولی داریم

$$۰ \leq c_n + |c_n| \leq ۲|c_n|$$

و $\sum_{n=k}^{\infty}(۲|c_n|)$ همگراست، پس طبق آزمون مقایسهٔ جلسهٔ قبل، ۷—۵، سری $\sum_{n=k}^{\infty}(c_n+|c_n|)$ همگراست.

اکنون قضیهٔ ۸—۱ را در حالت کلی بررسی می‌کنیم. فرض کنید $c_n=a_n+ib_n$، پس $|a_n|\le|c_n|$ و $|b_n|\le|c_n|$. اگر $\sum|c_n|$ همگرا باشد، طبق آزمون مقایسه، $\sum|a_n|$ و $\sum|b_n|$ همگرا خواهند شد. ولی a_n و b_n اعداد حقیقی هستند، پس طبق بحث بالا $\sum a_n$ و $\sum b_n$ نیز همگرا می‌شوند. بنابراین طبق گزارهٔ ۸—۲، $\sum c_n$ که در آن $c_n=a_n+ib_n$ نیز همگراست و اثبات ۸—۱ به انجام می‌رسد.

(۸—۳) چند مثال.

(۸—۳—۱) همگرایی سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{(n+i)^۲}$ را بررسی می‌کنیم. داریم $|n+i|=\sqrt{n^۲+۱}>n$، پس $|\frac{۱}{(n+i)^۲}|<\frac{۱}{n^۲}$ و در مقایسه با سری p، به‌ازای $p=۲$، $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۲}$، سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{|n+i|^۲}$ همگراست، در نتیجه $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{(n+i)^۲}$ همگراست.

همگرایی مطلق شرطی کافی برای همگرایی است ولی یک شرط لازم نیست. مثلاً با آن که سری هارمونیک $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n}$ واگراست، اگر جملات را یکی در میان منفی کنیم، سری حاصل، یعنی:

$$۱-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۴}+-\cdots$$

همگراست. در واقع آزمون کلی زیر برقرار است:

(۸—۴) آزمون سری متناوب لایب‌نیتس. فرض کنید $(a_n)_{n=۱}^{\infty}$ یک دنبالهٔ اعداد حقیقی نامنفی باشد که:

$$a_۱\ge a_۲\ge a_۳\ge\cdots$$

و $a_n\longrightarrow ۰$ وقتی $n\longrightarrow+\infty$. در این صورت سری $\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n+۱}a_n$ همگراست.

اثبات. به دنبالهٔ مجموع‌های جزیی این سری نگاه می‌کنیم:

$$S_۱=a_۱, S_۲=a_۱-a_۲, S_۳=a_۱-a_۲+a_۳,\ldots$$

مجموع‌های جزیی با اندیس فرد، یعنی $S_1, S_3, S_5, \dots$ را در نظر بگیرید. چون $a_{2n} \geq a_{2n+1}$، داریم:

$$S_{2n+1} = S_{2n-1} - a_{2n} + a_{2n+1} \leq S_{2n-1}$$

پس

$$\cdots \leq S_5 \leq S_3 \leq S_1$$

همین طور چون $a_{2n+1} \geq a_{2n+2}$، برای مجموع‌های جزیی زوج داریم $S_{2n+2} = S_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2} \geq S_{2n}$، پس:

$$\cdots \geq S_6 \geq S_4 \geq S_2$$

توجه کنید که a_1 یک کران بالایی برای دنباله مجموعهای جزیی زوج است زیرا که $a_i \geq a_{i+1}$، پس:

$$\begin{aligned} S_{2n} &= a_1 - a_2 + - = \cdots - a_{2n} \\ &= a_1 - (a_2 - a_3) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \\ &\leq a_1 \end{aligned}$$

بنابراین دنبالهٔ مجموع‌های جزیی با اندیس زوج به کوچکترین کران بالایی خود، مثلاً S میل می‌کند. نشان می‌دهیم کل دنبالهٔ مجموع‌های جزیی، $(S_n)_{n=1}^{\infty}$، به S میل می‌کند. فرض کنید $e > 0$ داده شده است. از آنجا که $S_{2n} \longrightarrow S$، N_1 وجود دارد که:

$$n > N_1 : \quad |S_{2n} - S| < \frac{e}{2}$$

از طرفی دیگر، فرض کرده‌ایم $a_n \longrightarrow 0$، پس N_2 وجود دارد که:

$$n > N_2 : \quad |a_n| < \frac{e}{2}$$

حال اگر قرار دهیم $N = 2\max\{N_1, N_2\}$، اگر $n = 2k > N$ داریم $k > N_1$، پس $|S_n - S| < \frac{e}{2} < e$ و اگر $n = 2k - 1 > N$، آنگاه $2k > N_2$ و:

$$\begin{aligned} |S_{2k-1} - S| &\leq |S_{2k-1} - S_{2k}| + |S_{2k} - S| \\ &= |a_{2k}| + |S_{2k} - S| \\ &< \frac{e}{2} + \frac{e}{2} = e \end{aligned}$$

پس $S_n \longrightarrow S$ و حکم به اثبات می‌رسد. $\square$

در واقع ایدهٔ اثبات فوق بسیار ساده و جالب توجه است. از آنجا که جملات سری متناوباً تغییر علامت می‌دهند و قدرمطلق جملات نوعاً کوچکتر می‌شوند (به هر حال هیچ‌گاه بزرگتر نمی‌شوند)، دنبالهٔ S_n روی محور حقیقی متناوباً به چپ و راست می‌جهد در حالی که دامنهٔ جهش آن رو به تنازل به صفر است ($a_n \longrightarrow ۰$). به این ترتیب $S_{۲n}$ ها از طرف چپ و $S_{۲n+۱}$ ها از طرف راست به سوی نقطه‌ای روی محور حقیقی تجمع می‌کنند (شکل ۲).

با توجه به این گزاره، سری‌های زیر همگرا هستند:

$$۱ - \tfrac{۱}{۲} + \tfrac{۱}{۳} - \tfrac{۱}{۴} + - \cdots$$

$$۱ - \tfrac{۱}{۳} + \tfrac{۱}{۵} - \tfrac{۱}{۷} + - \cdots$$

در آینده مجموع این دو سری خاص را محاسبه خواهیم کرد.

در این مقطع لازم است نکته‌ای در مورد به‌کارگیری نماد $\sum$ به عنوان حد سری گوشزد کنیم. $\sum$ معمولاً به معنای "مجموع" به‌کار می‌رود، مثلاً $\sum_{i=۱}^{n} a_i = a_۱ + \cdots + a_n$. از آنجا که $\sum_{i=۱}^{\infty} a_i$ به معنای انباشتن متوالی ولی تمام نشدنی a_i هاست، نماد $\sum$ بی‌مورد نیست ولی نباید پنداشت که این "مجموع نامتناهی" لزوماً خواص جمع معمولی را دارد. دیدیم که اگر هر جملهٔ یک سری را در عدد ثابت c ضرب کنیم، حد سری نیز در همان عدد ضرب خواهد شد (تعمیم قانون بخشی)، و نیز اگر $\sum a_n$ و $\sum b_n$ همگرا باشند، $\sum(a_n + b_n)$ نیز همگراست و به مجموع $\sum a_n$ و $\sum b_n$ میل می‌کند. این نوعی قانون جابجایی (تعویض‌پذیری) عمل جمع به بی‌نهایت عامل جمع است ولی اگر سری‌های $\sum a_n$ و $\sum b_n$ خود همگرا نباشند، سری مجموع جملات متناظر، یعنی $\sum(a_n + b_n)$ می‌تواند رفتار غیرمنتظره‌ای داشته باشد. در واقع ثابت می‌شود که اگر $\sum a_n$ یک سری همگرا باشد که همگرای مطلق نباشد، می‌توان با جابه‌جا کردن عوامل جمع، حد مجموع را به هر عدد دلخواه میل داد! روش کار را با مثال سری زیر نشان می‌دهیم. همین نوع استدلال در حالت کلی کار می‌کند. سری

$$۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۵} - \frac{۱}{۶} + - \cdots \qquad (۳)$$

را در نظر بگیرید. این در واقع مجموع دو سری غیر همگراست که جملهٔ نمونهٔ هر یک به صفر میل می‌کند. یکی از این سری‌ها، سری جملات با مخرج زوج است:

$$-\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۶}-\frac{۱}{۸}-\cdots$$

این سری با ضرب کردن جملات سری هارمونیک در $(-\frac{۱}{۲})$ پدید آمده است پس لزوماً واگراست (و گرنه با ضرب کردن جملات در ۲−، سری هارمونیک همگرا می‌شود). از طرفی دیگر چون $\frac{۱}{۲}<۱$، $\frac{۱}{۴}<\frac{۱}{۳}$، $\frac{۱}{۶}<\frac{۱}{۵}$، ...، سری جملات با مخرج فرد نیز واگراست. حد سری (۳) قطعاً از ۱ کوچکتر است زیرا با نوشتن سری به صورت زیر:

$$۱+(-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳})+(-\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۵})+(-\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۷})+\cdots$$

چون مجموع داخل هر پرانتز منفی است، هر بار عددی از مجموع قبلی کم می‌شود. با این حال نشان می‌دهیم با جابجایی مناسب می‌توان مجموع سری را به مثلاً عدد ۲ میل داد. برای این کار نخست جملات فرد $۱+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۷}+\cdots$ را تا جایی جمع می‌کنیم که از ۲ بیشتر شود. جدول زیر که از محاسبه با ماشین حساب حاصل شده است نشان می‌دهد باید تا $\frac{۱}{۱۵}$ جلو رفت:

$$\begin{array}{rcl} ۱ & < & ۲ \\ ۱+\frac{۱}{۳} & \simeq & ۱/۳۳۳۳<۲ \\ ۱+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۵} & \simeq & ۱/۵۳۳۳<۲ \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ ۱+\frac{۱}{۳}+\cdots+\frac{۱}{۱۳} & \simeq & ۱/۹۵۵۱<۲ \\ ۱+\frac{۱}{۳}+\cdots+\frac{۱}{۱۵} & \simeq & ۲/۰۲۱۸>۲ \end{array}$$

حال جملات زوج (منفی) را از مجموع محاسبه شده کم می‌کنیم تا مجموع کوچکتر از ۲ شود. در واقع در اینجا افزودن $-\frac{۱}{۲}$ کافی است:

$$(۱+\frac{۱}{۳}+\cdots+\frac{۱}{۱۵})-\frac{۱}{۲}\simeq ۱/۵۲۱۸$$

مجدداً جملات فرد (مثبت) را به ترتیب می‌افزاییم تا مجموع از ۲ تجاوز کند. محاسبه با ماشین حساب می‌دهد:

$$(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{15}) - \frac{1}{2} + (\frac{1}{17} + \cdots + \frac{1}{41}) \simeq 2/0041 > 2$$

اکنون از جملات زوج استفاده می‌کنیم تا مجموع از ۲ کوچکتر شود:

$$(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{15}) - \frac{1}{2} + (\frac{1}{17} + \cdots + \frac{1}{41}) - \frac{1}{4} \simeq 1/7541$$

با ادامه دادن این فرایند می‌بینیم که میزان انحراف از ۲ تدریجاً کوچکتر می‌شود زیرا که $\frac{1}{n}$ به تدریج کوچکتر می‌شود. روشن است که به جای ۲ می‌توان با این روش مجموع را به هر عددی میل داد.

قضیه‌ای جالب حکم می‌کند که این پدیده برای سری‌های همگرای مطلق رخ نمی‌دهد، یعنی اگر یک سری همگرای مطلق باشد، هیچ‌گونه جابجایی در جملات اثری بر حد سری نخواهد داشت. نکته تمایز از وضعیت بالا این است که در بالا به سبب واگرایی $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots$ قادر بودیم با افزودن جملات، مجموع را به ۲ برسانیم ولی در مورد سری‌های همگرای مطلق، هیچ زیردنباله‌ای از سری، واگرا نخواهد شد و قادر نخواهیم بود نوسان‌های مورد نیاز را ایجاد کنیم.

پایداری محاسبه

از این بخش بررسی تابع‌های حقیقی یک متغیری را آغاز می‌کنیم. مقصود از یک تابع حقیقی یک متغیری تابعی $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ است که در آن دامنهٔ تابع، یعنی S زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ است. به این ترتیب به هر عضو s از S، عدد حقیقی مشخصی $f(s)$ منسوب می‌شود. اگر f را، که معمولاً با یک فرمول یا دستورالعمل داده می‌شود، یک ماشین محاسبه یا برنامه‌ای رایانه‌ای فرض کنیم، به‌ازای ورودی s، همواره خروجی مشخصی $f(s)$ حاصل می‌شود.

یکی از ملاحظاتی که در همهٔ محاسبات علمی و مهندسی ظاهر می‌شود، موضوع تقریب است. نتیجه یک محاسبه یا حاصل به‌کارگیری یک تابع ممکن است عددی باشد که دانش "دقیق" آن به منظور کاربرد مورد نظر ضروری است. اما "دقیق" به چه معنی است؟ مثلاً توجه کنید که حتی عظیم‌ترین رایانه جهان حافظه‌ای محدود دارد و گنجایش ضبط و به‌کارگیری یک عدد اعشاری نامختومه $c_0/c_1c_2c_3\ldots$ را ندارد. به علاوه در هر کاربرد نیز، حساسیت دستگاه‌ها و دقت سنجش، آستانه‌ای دارد که دقت بیش از آن نه عملی است و نه لزوماً ضروری. بنابراین در هر کاربرد یا مقوله، معمولاً اندازهٔ خطای قابل تحملی $e > 0$ منظور می‌شود که عملاً دو نتیجهٔ نزدیکتر از e به یکدیگر از هم غیرقابل تشخیص‌اند و تقریب تا این اندازه قابل قبول محسوب می‌شود.

در زمینهٔ محاسبهٔ مقدار توابع، معمولاً آستانهٔ دقتی برای نتیجهٔ حاصل از به‌کارگیری تابع منظور می‌شود و سؤال اساسی این است که داده‌ها باید به چه دقتی معلوم باشند که حاصل محاسبه از دقت مورد نظر برخوردار شود. با ذکر چند مثال موضوع را پیگیری می‌کنیم.

(۹—۱) چند مثال.

(۹—۱—۱) تابع $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ را به صورت $f(x)=۵x+۳$ تعریف می‌کنیم. ورودی این تابع باید به چه دقت باشد که خطای خروجی آن کمتر از $۱۰^{-۴}$ باشد؟

حل و بحث. توجه کنید که چنین سؤالی می‌تواند مصداق عملی کاملاً معنی‌داری داشته باشد. فرض کنید لازم است ابعاد یک تصویر رایانه‌ای را پنج برابر بزرگ کنیم به طوری که تصویر حاصل همچنان هموار به نظر رسد یعنی جزییات عکس به صورت نقطه‌چین ظاهر نشود. به این منظور لازم است نقطه‌های مجاور از فاصلهٔ معینی به هم نزدیک‌تر بمانند که چشم انسان عکس را به صورت هموار مشاهده کند. سؤالی که در اینجا مطرح است این است که در شکل اولیه نقاط روشن باید چه اندازه به هم نزدیک باشند که پس از بزرگ‌سازی با ضریب ۵ تصویر قابل قبولی به‌دست آید. در فرمول این تابع می‌توان جمع‌کردن عدد ۳ را به معنای انتقال تصویر تلقی کرد که نباید اثری بر جواب مسأله داشته باشد.

حال به حل مسأله می‌پردازیم. دو ورودی $x_۱$ و $x_۲$ در نظر بگیرید. می‌خواهیم بدانیم فاصلهٔ این دو ورودی، یعنی $|x_۱-x_۲|$ چقدر باشد که فاصله خروجی‌های متناظر، یعنی $|f(x_۱)-f(x_۲)|$، کوچکتر از $۱۰^{-۴}$ باشد. باید داشته باشیم:

$$|(۵x_۱+۳)-(۵x_۲+۳)|<۱۰^{-۴}$$

یا معادلاً

$$۵|x_۱-x_۲|<۱۰^{-۴}$$

بنابراین واضح است که اگر $|x_۱-x_۲|<\frac{۱}{۵}۱۰^{-۴}$، آنگاه دقت مورد نظر در خروجی منظور می‌شود.

(۹—۱—۲) تابع مجذور کردن، یعنی $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$، $f(x)=x^۲$، را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم بدانیم عدد x باید به چه وقتی معلوم باشد که خطا در محاسبهٔ مجذور آن کوچکتر از $۱۰^{-۳}$ باشد.

حل و بحث. خواهیم دید که بر خلاف مثال قبل، در اینجا جواب مطلقی وجود ندارد، بلکه جواب به

حدود اندازهٔ x وابسته است. اگر x_1 و x_2 دو ورودی این تابع باشند، می‌خواهیم درجه دقتی $\delta > 0$ منظور کنیم که اگر $|x_1 - x_2| < \delta$ آنگاه فاصلهٔ خروجی‌های متناظر، یعنی $|x_1^2 - x_2^2|$، کوچکتر از 10^{-3} باشد. پس باید داشته باشیم:

$$|x_1^2 - x_2^2| < 10^{-3}$$

یا معادلاً:

$$|x_1 + x_2||x_1 - x_2| < 10^{-3}$$

کمی توجه به عبارت بالا نشان می‌دهد که مسأله به این صورت جواب ندارد، یعنی هیچ مقدار $\delta > 0$ وجود ندارد که برای هر دو عدد x_1 و x_2 به فاصله کوچکتر از δ، فاصلهٔ $|x_1^2 - x_2^2|$ کوچکتر از 10^{-3} باشد. فرض کنید چنین δ ای وجود داشته باشد. اگر دو عدد x_1 و x_2 را هر دو بزرگتر از $\frac{1}{\delta}$ ولی به فاصله $\frac{\delta}{2}$ از یکدیگر انتخاب کنیم، مثلاً:

$$x_1 = \frac{1}{\delta} \quad , \quad x_2 = \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}$$

از طرفی داریم $|x_1 - x_2| = \frac{\delta}{2} < \delta$ و از سویی دیگر $|x_1 + x_2| = \frac{2}{\delta} + \frac{\delta}{2}$، پس:

$$\begin{aligned} |x_1^2 - x_2^2| &= |x_1 + x_2||x_1 - x_2| = (\tfrac{2}{\delta} + \tfrac{\delta}{2})(\tfrac{\delta}{2}) \\ &= (\tfrac{2}{\delta} + \tfrac{\delta}{2})(\tfrac{\delta}{2}) = 1 + \tfrac{\delta^2}{4} \end{aligned}$$

که δ هرچه باشد $1 + \frac{\delta^2}{4}$ از 10^{-3} کوچکتر نمی‌شود. نکتهٔ این مسأله این است که وقتی عددی مجذور می‌شود، یعنی در خود ضرب می‌شود، هر خطا در عدد ورودی، خطایی حدوداً دو برابر حاصل‌ضرب این خطا در مقدار عدد داده شده در نتیجهٔ محاسبه ایجاد می‌کند. به طور دقیق، فرض کنید x مقدار "واقعی" و h خطایی در ارائه آن باشد. در این صورت:

$$(x+h)^2 - x^2 = 2hx + h^2$$

وقتی h کوچکتر از ۱ باشد، h^2 از h کوچکتر است، ولی $2hx$ می‌تواند بزرگ باشد اگر x بزرگ باشد.

بدین ترتیب سؤال مطرح شده را نمی‌توان به این کلیت پاسخ داد ولیکن در عمل، عددی که باید مجذور شود به طور تقریبی معلوم است و این دانش تقریبی، کافی است که ما را قادر سازد حدودی برای تقریب لازم به‌دست آوریم. مسأله خاص زیر را در نظر می‌گیریم. عددی a به صورت زیر داده شده است:

$$a = ۱۵/a_۱a_۲a_۳a_۴\ldots$$

که ارقام پس از اعشار a_n، تا n های خیلی بزرگ معلومند یا قابل محاسبه‌اند. می‌خواهیم بدانیم این عدد را پس از چند رقم مختومه کنیم که اختلاف مجذور عدد حاصل از مجذور a کوچکتر از $۱۰^{-۳}$ باشد. اگر عدد a را پس از n رقم اعشار مختومه کنیم، عددی

$$A_n = ۱۵/a_۱\ldots a_n$$

به‌دست می‌آید. می‌خواهیم بدانیم تا چند رقم n باید جلو رفت که $|A^۲ - A_n^۲|$ کوچکتر از $۱۰^{-۳}$ باشد. توجه کنید که این مصداقی از مسأله اولیه است. وقتی a را پس از n رقم اعشاری مختومه می‌کنیم، اختلاف $|A - A_n|$ کوچکتر یا مساوی ۱۰^{-n} است. پس در واقع سؤال این است که $|A - A_n|$ چه قدر کوچک گرفته شود که $|A^۲ - A_n^۲| < ۱۰^{-۳}$. داریم

$$|A^۲ - A_n^۲| = |A + A_n||A - A_n|$$

حال قطعاً A و A_n هر دو کوچکتر ۱۶ هستند، پس:

$$|A^۲ - A_n^۲| < ۳۲|A - A_n| \leq (۳۲)۱۰^{-n}$$

پس اگر بتوانیم n را طوری بگیریم که $(۳۲)۱۰^{-n} \leq ۱۰^{-۳}$، دقت مورد نظر در محاسبهٔ مجذور حاصل می‌شود. معادلاً باید داشته باشیم:

$$۱۰^n \geq (۳۲)۱۰^۳$$

اگر n برابر ۵ یا بزرگتر گرفته شود این نامساوی برقرار می‌شود. حاصل اینکه مجذور $۱۵/a_۱\ldots a_۵$ از مجذور $۱۵/a_۱a_۲a_۳\ldots$ کمتر از $۱۰^{-۳}$ فاصله دارد.

در مثال خاص بالا ما فقط تقریب نقصانی برای A را در نظر گرفتیم زیرا $A_n \leq A$. همین استدلال را می‌توان در واقع به طور کلی، بدون استفاده از عددنویسی اعشاری برای محاسبه مجذور اعداد نزدیک به ۱۵ تکرار کرد. فرض کنید a عددی باشد $۱۵ < a < ۱۶$، می‌خواهیم عددی $\delta > ۰$ بیابیم که اگر $|a - a'| < \delta$، آنگاه $|a^۲ - a'^۲| < ۱۰^{-۳}$. مقدمتاً $\delta_۱$ را کوچکتر یا مساوی $۱۶ - a$ و $a - ۱۵$ می‌گیریم، پس اگر $|a - a'| < \delta_۱$، آنگاه a' نیز عددی در بازهٔ $]۱۵, ۱۶[$ است. در این صورت داریم:

$$|a^۲ - a'^۲| = |a + a'||a - a'| < (۳۲)|a - a'|$$

بنابراین اگر $(۳۲)|a - a'|$ کوچکتر از $۱۰^{-۳}$ باشد، یعنی $|a - a'| < \frac{۱}{۳۲}۱۰^{-۳}$، $|a^۲ - a'^۲|$ کوچکتر از $۱۰^{-۳}$ خواهد بود. پس

$$\delta = \min\{۱۶ - a, a - ۱۵, \frac{۱}{۳۲}۱۰^{-۳}\}$$

ویژگی مورد نظر را دارد. اگر هیچ دانشی نسبت به اندازه $a - ۱۵$ و $۱۶ - a$ نداشته باشیم، یعنی ندانیم a کجای بازهٔ $]۱۵, ۱۶[$ قرار گرفته است می‌توانیم برای به‌دست آوردن δ مناسب به طریق زیر عمل کنیم. مقدمتاً فرض می‌کنیم $\delta_۱ = ۱$. آنگاه اگر $|a - a'| < \delta_۱$، قطعاً $۱۴ < a' < ۱۷$، پس $|a + a'| = a + a' < ۳۳$ و داریم:

$$|a^۲ - a'^۲| = |a + a'||a - a'| < ۳۳|a - a'|$$

پس اگر $|a - a'|$ کوچکتر از $\frac{۱}{۳۳}۱۰^{-۳}$ گرفته شود، داریم $|a^۲ - a'^۲| < ۱۰^{-۳}$. بنابراین

$$\delta = \min\{۱, \frac{۱}{۳۳}۱۰^{-۳}\} = \frac{۱}{۳۳}۱۰^{-۳}$$

به هر حال کار می‌کند.

(۹–۱–۳) تابع $f : \{x \in \mathbb{R} \mid x > ۰\} \longrightarrow \mathbb{R}$ را در نظر می‌گیریم که $f(x) = \frac{۱}{x}$. می‌خواهیم بدانیم عدد x باید به چه دقت معلوم باشد که خطای معکوس محاسبه شده از $۱۰^{-۲}$ کوچکتر باشد.

حل و بحث. در اینجا نیز پدیده‌ای مشابه مثال قبل ظاهر می‌شود، یعنی به طور کلی جواب به حدود اندازهٔ x وابسته خواهد بود. توجه کنید که اگر دو عدد بزرگ به اندازهٔ 10^{-n} اختلاف داشته باشند (n بزرگ) اختلاف معکوس آنها بسیار کوچک است، در حالی که اگر دو عدد کوچک همین اندازه اختلاف داشته باشند معکوسشان می‌تواند به نسبت دور از هم باشد. به عنوان مثال:

$$x_1 = 10 \quad , \quad x_2 = 10 + 10^{-3} \quad , \quad \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \simeq 0/0000099990$$

در حالی که

$$x_1 = 10^{-3} \quad , \quad x_2 = 10^{-3} + 10^{-3} \quad , \quad \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} = 500$$

بنابراین لازم است سؤال اولیه را با قید بیشتری مطرح کنیم. فرض کنید عدد a به صورت زیر داده شده است:

$$a = 0/02a_3a_4a_5\dots$$

می‌خواهیم $\delta > 0$ را طوری تعیین کنیم که اگر $|a-a'| < \delta$، آنگاه $|\frac{1}{a} - \frac{1}{a'}| < 10^{-2}$. چون دامنهٔ f را اعداد حقیقی مثبت در نظر گرفته‌ایم، برای هر a' در دامنهٔ f داریم:

$$|\frac{1}{a} - \frac{1}{a'}| = \frac{|a-a'|}{aa'}$$

از این عبارت روشن است که $\delta = a$ نمی‌تواند تخمین $|\frac{1}{a} - \frac{1}{a'}| < 10^{-2}$ را تأمین کند زیرا که اگر $\delta = a$، a' را می‌توان به دلخواه نزدیک به 0 گرفت و در این صورت کسر به دلخواه بزرگ می‌شود. برای رفع این اشکال، مقدمتاً $\delta_1 > 0$ را عددی کوچکتر از a می‌گیریم، مثلاً $\delta_1 = 10^{-2}$. بنابراین اگر $|a-a'| < \delta_1$، چون $a = 0/02a_3a_4\dots \geq 0/02$، داریم $a' > 0/01$. بدین ترتیب خواهیم داشت:

$$|a-a'| < 10^{-2} : \quad |\frac{1}{a} - \frac{1}{a'}| < \frac{|a-a'|}{(0/01)(0/02)} = \frac{10^4}{2}|a-a'|$$

اکنون می‌توانیم $\delta > 0$ نهایی مورد نظر را پیدا کنیم. می‌خواهیم عبارت بالا از 10^{-2} کوچکتر شود، پس اگر δ را برابر یا کوچکتر از $(2)(10^{-6})$ بگیریم داریم:

$$|a-a'| < 2 \times 10^{-2} : \quad |\frac{1}{a} - \frac{1}{a'}| < \frac{10^4}{2}|a-a'| < 10^{-2}$$

ضمناً این δ از δ_1 مقدماتی، یعنی 10^{-2}، کوچکتر است، پس شرط اولیهٔ دور ماندن از 0 نیز خود به خود برقرار می‌شود.

در دو مثال آخر سعی کردیم نشان دهیم تأمین دقت لازم در یک محاسبه ممکن است چندان آسان نباشد. گاهی اوقات درجهٔ دقت در داده‌ها باید بسیار زیاد باشد تا دقت مورد نظر در نتیجه حاصل شود. به طور کلی این انتظار که بتوان با اعمال دقت کافی در ارائه داده‌ها، دقت مورد نظر در نتیجهٔ مورد نظر را تأمین کرد "پایداری محاسبه" می‌نامیم. این ویژگی همیشه برقرار نیست. مثلاً تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید که به صورت زیر تعریف شده است:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$$

نمودار این تابع در شکل ۲ نمایش داده شده است. مقدار این تابع در $x = 0$ برابر ۱ است. توجه کنید که هیچ $\delta > 0$ وجود ندارد که $|x - 0| < \delta$ لزوماً دقت مثلاً $|f(x) - f(0)| < 10^{-1}$ را تضمین کند زیرا که اگر $x > 0$ و $|x - 0| < \delta$، آنگاه $|f(x) - f(0)| = 1 - x$ و $x > 0$ هر قدر کوچکتر شود، $1 - x$ بزرگتر می‌شود.

در زیر تعریف دقیق پایداری محاسبهٔ f در نقطه‌ای از قلمرو f را توصیف می‌کنیم. عنوان معمول‌تری برای "پایداری محاسبه"، اصطلاح "پیوستگی" است که در اینجا نیز به‌کار خواهیم برد، ولی کلمهٔ پیوستگی بار شهودی زیادی دارد که گاهی موجب سوء تفاهم می‌شود. دانشجو باید همواره تعریف دقیق زیر و آنچه با استدلال صحیح از آن نتیجه می‌شود در نظر داشته باشد و بیش از آن را از مفهوم پیوستگی انتظار نداشته باشد.

(۲-۹) تعریف. تابع $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ داده شده است و $a \in S$. می‌گوییم تابع f در a پیوسته است (یا تابع f در a از پایداری محاسبه برخوردار است) در صورتی که برای هر $e > 0$ داده شده، $\delta > 0$ متناظری وجود داشته باشد که برای هر نقطهٔ x از دامنهٔ f که $|x - a| < \delta$ داشته باشیم $|f(x) - f(a)| < e$.

اگر تابع $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ در هر نقطهٔ دامنهٔ خود پیوسته باشد، تابع f را پیوسته می‌نامیم. همان طور که

اشاره کردیم، نباید از کلمهٔ پیوستگی انتظاراتی فرای تعریف داشت. در مثال اول زیر تابع فقط در یک نقطه از دامنه خود پیوسته است و در مثال دوم تابعی پیوسته داریم که اطلاق کلمهٔ پیوسته برای آن دور از انتظار به نظر خواهد رسید.

چند مثال

(۹–۳–۱) تابع $f:[۰,۱]\longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{گویا } x \\ ۱-x & \text{ناگویا } x \end{cases}$$

نشان می‌دهیم این تابع فقط در نقطهٔ $x=\frac{۱}{۲}$ پیوسته است. از تمرین‌های بخش ۱ یادآوری می‌کنیم که در هر بازهٔ باز از اعداد حقیقی، هم اعداد گویا و هم اعداد ناگویا یافت می‌شوند. بنابراین شکل تقریبی نمودار این تابع (شکل ۳) را می‌توان به صورت دو نقطه‌چین متراکم روی خطوط $y=x$ و $y=۱-x$ تصور کرد که در نقطهٔ $(\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲})$ تجمع می‌یابند. نشان می‌دهیم این تابع در $x=\frac{۱}{۲}$ پیوسته است. برای $e>۰$ داده شده، ادعا می‌کنیم $\delta=e$ در نقطهٔ $\frac{۱}{۲}$ شرط تعریف را برآورده می‌کند. فرض کنید $|x-\frac{۱}{۲}|<e$. اگر x گویا شد که $f(x)=x$ و $|f(x)-f(\frac{۱}{۲})|<e$. اگر x ناگویا باشد، داریم $f(x)=۱-x$، پس $f(x)-\frac{۱}{۲}=۱-x-\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}-x$، پس مجدداً $|f(x)-f(\frac{۱}{۲})|=|\frac{۱}{۲}-x|=|x-\frac{۱}{۲}|<e$. حال نشان می‌دهیم برای $a\neq\frac{۱}{۲}$، تابع در a پیوسته نیست. e را برابر $|a-\frac{۱}{۲}|>۰$ می‌گیریم. $\delta>۰$ هرچه باشد، نقطه‌ای x ارائه می‌کنیم که $|x-a|<\delta$ ولی $|f(x)-f(a)|\not< e$. دو حالت در نظر می‌گیریم. اگر a گویا باشد داریم $f(a)=a$ و نقطهٔ ناگویای x را آنقدر نزدیک به a می‌گیریم که اولاً a و x در یک طرف $\frac{۱}{۲}$ باشند، ثانیاً $|x-a|<\delta$. در این صورت $f(x)=۱-x$ و:

$$|f(x)-f(a)|=|۱-x-a|=|(\frac{۱}{۲}-x)+(\frac{۱}{۲}-a)|$$

حالت دیگر اینکه a ناگویا و $f(a)=۱-a$. در این حالت x را نقطه‌ای گویا آنقدر نزدیک به a

می‌گیریم که x و a هر دو در یک طرف $\frac{۱}{۲}$ باشند و $|x-a| < \delta$. در این صورت نیز داریم:

$$|f(x)-f(a)| = |x-۱+a| = |(\frac{۱}{۲}-x)+(\frac{۱}{۲}-a)|$$

چون x و a در یک طرف $\frac{۱}{۲}$ انتخاب شده‌اند، $\frac{۱}{۲}-a$ و $\frac{۱}{۲}-a$ هم علامتند، پس:

$$\begin{aligned} |(\tfrac{۱}{۲}-x)+(\tfrac{۱}{۲}-a)| &= |\tfrac{۱}{۲}-x|+|\tfrac{۱}{۲}-a| \\ &> |\tfrac{۱}{۲}-a| = e \end{aligned}$$

در نتیجه مستقل از اینکه $\delta > ۰$ چه باشد، برای چنین x که $|x-a| < \delta$ داریم $|f(x)-f(a)| > e$، یعنی f در a پیوسته نیست.

(۹ــ۳ــ۲) مجموعهٔ اعداد صحیح، $\mathbb{Z}$، زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ است. نشان می‌دهیم هر تابع $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ پیوسته است. این ممکن است با شهود پیوستگی سازگار به نظر نرسد ولی ملاحظه خواهیم کرد که "گسستگی دامنه" در واقع پیوستگی تابع را سهل‌تر می‌سازد. نشان می‌دهیم f در هر نقطهٔ دامنه، $n \in \mathbb{Z}$، پیوسته است. $e > ۰$ هرچه باشد، می‌گیریم $\delta = ۱$. حال اگر x عنصری از دامنه باشد که $|x-n| < ۱$، چون x عدد صحیح است، لزوماً داریم $x = n$، پس $|f(x)-f(n)| = ۰ < e$ و شرط پیوستگی برقرار است. این مثال را می‌توان این‌گونه تعبیر کرد که اگر قرار باشد داده‌ها همه عدد صحیح باشند، تنها دادهٔ "نزدیک" به یک عدد صحیح خود آن است، پس خطایی در محاسبه صورت نمی‌گیرد.

(۹ــ۳ــ۳) در مقابل مثال قبل فرض کنید $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی باشد که همه‌جا صفر است به استثنای در مقادیر صحیح n که در آن $f(n) \neq ۰$. نشان می‌دهیم f در n پیوسته نیست. $e > ۰$ را کوچکتر از $|f(n)|$ می‌گیریم. حال $\delta > ۰$ هرچه باشد، نقطه‌ای x وجود دارد که $|x-n| < \delta$ و x عدد صحیح نیست. پس $f(x) = ۰$ و $|f(x)-f(n)| = |f(n)| > e$ و f در n پیوسته نیست. به سادگی می‌توان نشان داد f در هر نقطهٔ غیر عدد صحیح پیوسته است.

در مورد کارایی تعریف پیوستگی در رابطه با محاسبات عملی آن‌گونه که در آغاز این بخش مورد بحث قرار گرفت، ممکن است ایراد زیر به ذهن برسد. ما پیوستگی یا پایداری محاسبهٔ تابع f در یک

نقطهٔ a را تعریف کردیم. از آنجا که مقدار a ممکن است فقط به طور تقریبی معلوم باشد و تابع ممکن است در نقاط به دلخواه نزدیک به a پیوسته نباشد (مانند مثال ۹—۳—۱)، این تعریف چه ارزش عملی می‌تواند داشته باشد؟ در زیر نشان می‌دهیم که در واقع اگر f در a پیوسته باشد، برای هر دو مقدار $a_۱$ و $a_۲$ به اندازهٔ کافی نزدیک به a، فاصله $|f(a_۱) - f(a_۲)|$ نیز کوچک است، و بالعکس برقراری این رابطه دال بر پیوستگی f در a است.

(۹—۴) گزاره. تابع $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ داده شده است و $a \in S$. در این صورت f در a پیوسته است اگر و تنها اگر برای هر $e > ۰$، عددی $\delta > ۰$ وجود داشته باشد که برای هر دو نقطهٔ $a_۱$ و $a_۲$ در دامنهٔ f که در بازهٔ $]a - \delta, a + \delta[$ باشند، داشته باشیم $|f(a_۱) - f(a_۲)| < e$.

برهان. نخست توجه کنید که اگر ویژگی ذکر شده برقرار باشد، تابع در a پیوسته است زیرا که می‌توان یکی از $a_۱$ و $a_۲$ را خود نقطهٔ a گرفت و دیگری را نقطه‌ای دلخواه x در $]a - \delta, a + \delta[$. پس $|x - a| < \delta$ نتیجه می‌دهد $|f(x) - f(a)| < e$.

بالعکس فرض کنید f در a پیوسته است. اگر $e > ۰$ داده شده باشد، طبق پیوستگی f در a، برای $\frac{e}{۲} > ۰$، عددی $\delta > ۰$ وجود دارد که $|x - a| < \delta$ نتیجه می‌دهد $|f(x) - f(a)| < \frac{e}{۲}$. حال اگر برای $a_۱$ و $a_۲$ در دامنه تابع داشته باشیم $|a - a_۱| < \delta$ و $|a - a_۲| < \delta$، نتیجه می‌شود که:

$$|f(a_۱) - f(a_۲)| \leq |f(a_۱) - f(a)| + |f(a) - f(a_۲)| < \frac{e}{۲} + \frac{e}{۲} = e$$

□

بدین ترتیب اگر داده‌ها همه نزدیک به یک نقطهٔ پیوستگی تابع f باشند، می‌توان انتظار داشت که نتایج محاسبه با آنها نیز به هم نزدیک باشند.

نکتهٔ قابل ذکر دیگر اینکه همچنان که مثال‌های ۹—۱—۲ و ۹—۱—۳ در آغاز این بخش نشان دادند، برای $e > ۰$ داده شده، $\delta > ۰$ مناسب ممکن است علاوه بر وابستگی به e، به نقطه‌ای که در آن پیوستگی مطرح است وابسته باشد. در مثال ۹—۱—۱، برای $e > ۰$ داده شده، یک $\delta > ۰$ واحد برای هر نقطهٔ دامنه تعریف پیوستگی را برقرار می‌ساخت ولی در مثال‌های ۹—۱—۲ و ۹—۱—۳، مقدار δ

به اندازه نقطهٔ a در دامنه نیز وابسته بود. در حالتی که برای $e > 0$ داده شده، یک $\delta > 0$ وجود داشته باشد که در سراسر دامنه کار کند، یعنی هرگاه $|x_1 - x_2| < \delta$، آنگاه $|f(x_1) - f(x_2)| < e$ می‌گوییم تابع f در دامنهٔ خود به طور یکنواخت پیوسته است. در حالت کلی، مانند مثال $f(x) = x^2$، در مثال ۹—۱—۲، یا مثال $f(x) = \frac{1}{x}$ در مثال ۹—۱—۳ با دامنهٔ $x > 0$، تابع در سراسر دامنه خود پیوسته است ولیکن از پیوستگی یکنواخت برخوردار نیست.

تابع‌های پیوسته: مثال‌های ابتدایی

مفهوم پیوستگی یا پایداری محاسبه در بخش قبل معرفی شد. خواننده ممکن است شباهتی میان استدلال‌هایی که در بحث مثال‌های ۹—۱—۲ و ۹—۱—۳ به‌کار رفت و استدلال همگرایی حاصل‌ضرب و خارج‌قسمت دنباله‌های همگرا مشاهده کرده باشد. این شباهت تصادفی نیست. در واقع می‌توان پیوستگی را با ضابطه‌ای بر اساس همگرایی دنباله‌ها بیان کرد.

(۱۰—۱) گزاره. تابع $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ داده شده است که S زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ است و $a \in S$. در این صورت f در a پیوسته است اگر و تنها اگر برای هر دنبالهٔ (a_n) از نقاط S که $a_n \longrightarrow a$ داشته باشیم $f(a_n) \longrightarrow f(a)$.

دنباله همگرا به a را می‌توان سلسله‌ای از اندازه‌گیری‌های تدریجاً دقیق‌تر یک داده تلقی کرد و محتوای این گزاره این است که در صورت پیوستگی f در a، اندازه‌گیری‌های دقیق‌تر ورودی a، نتیجه‌های دقیق‌تر خروجی را فراهم می‌آورند.

برهان. فرض کنید f در a پیوسته است و $a_n \longrightarrow a$. می‌خواهیم ثابت کنیم $f(a_n) \longrightarrow f(a)$. پس برای $e > 0$ داده شده، می‌خواهیم N را طوری تعیین کنیم که اگر $n > N$، آنگاه $|f(a_n) - f(a)| < e$. بنابر پیوستگی f در a، برای همین e، δ وجود دارد که اگر $|x - a| < \delta$، آنگاه $|f(x) - f(a)| < e$. حال چون $a_n \longrightarrow a$، برای این $\delta > 0$، N وجود دارد که اگر $n > N$، آنگاه $|a_n - a| < \delta$. بنابراین این N شرط مورد نظر را ارضاء می‌کند.

بالعکس فرض کنید برای هر دنبالهٔ (a_n) که $a_n \longrightarrow a$ داریم $f(a_n) \longrightarrow f(a)$، نشان می‌دهیم f در a پیوسته است. فرض کنید $e > ۰$ داده شده باشد. اگر f در a پیوسته نباشد هیچ $\delta > ۰$ نمی‌توان یافت که برای هر نقطهٔ دامنه با $|x - a| < \delta$ داشته باشیم $|f(x) - f(a)| < e$. مثلاً برای $\delta = ۱$، نقطه‌ای $x_۱$ در دامنه وجود دارد که $|x_۱ - a| < ۱$ و $|f(x_۱) - f(a)| \geq e$. به همین ترتیب برای هر عدد صحیح مثبت n، نقطه‌ای x_n در دامنه یافت می‌شود که $|x_n - a| < \frac{۱}{n}$ و $|f(x_n) - f(a)| \geq e$. حال توجه کنید که دنبالهٔ به‌دست آمده از نقاط دامنه، یعنی (x_n) به a همگراست. اگر $\rho > ۰$ داده شده باشد، عدد N را طوری می‌گیریم که $\frac{۱}{N} < \rho$، پس اگر $N < n$، داریم

$$|x_n - a| < \frac{۱}{n} < \frac{۱}{N} < \rho$$

پس $x_n \longrightarrow a$. طبق فرض باید داشته باشیم $f(x_n) \longrightarrow f(a)$، پس برای $e > ۰$ بالا، باید N وجود داشته باشد که $n > N$ نتیجه دهد $|f(x_n) - f(a)| < e$، در حالی که داریم $|f(x_n) - f(a)| \geq e$ برای هر n. این تناقض نشان می‌دهد که فرض ناپیوستگی f در a درست نیست. $\square$

به کمک گزارهٔ بالا می‌توان پیوستگی مجموع، حاصل‌ضرب و خارج‌قسمت تابع‌های پیوسته را نتیجه گرفت.

(۱۰—۲) گزاره. فرض کنید تابع‌های f و g دارای دامنهٔ مشترک تعریف S هستند، $a \in S$، و هر دو تابع در نقطهٔ a پیوسته‌اند. در این صورت:

الف) تابع $f + g : S \longrightarrow \mathbb{R}$ که به صورت $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ تعریف می‌شود در $x = a$ پیوسته است.

ب) تابع $f \cdot g : S \longrightarrow \mathbb{R}$ که به صورت $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$ تعریف می‌شود در $x = a$ پیوسته است.

ج) فرض کنید مضافاً $g(a) \neq ۰$ و $S' = \{x \in S \mid g(x) \neq ۰\}$. در این صورت تابع $\frac{f}{g} : S' \longrightarrow \mathbb{R}$ که به صورت $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ تعریف می‌شود در $x = a$ پیوسته است.

برهان. اثبات این احکام همه به سادگی از احکام مشابه برای دنباله‌ها، گزارهٔ ٦—۴، و گزاره ١٠—١ نتیجه می‌شوند. به عنوان نمونه، اثبات (ج) را ارائه می‌کنیم. فرض کنید (x_n) دنباله‌ای در S' است که $x_n \longrightarrow a$، باید نشان دهیم $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \longrightarrow \frac{f(a)}{g(a)}$. بنابر پیوستگی f و g در نقطهٔ a داریم $f(x_n) \longrightarrow f(a)$ و $g(x_n) \longrightarrow g(x)$ و $g(a) \neq 0$. طبق گزاره (٦—۴) نتیجه می‌شود که $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \longrightarrow \frac{f(a)}{g(a)}$. $\square$

به کمک گزارهٔ بالا می‌توان دستهٔ بزرگی از تابع‌های پیوسته را شناسایی کرد. نشان می‌دهیم تابع‌های گویا، یعنی تابع‌هایی که مقدار آنها برابر نسبت دو چندجمله‌ای است:

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n} \qquad (1)$$

در هر نقطه که مخرج صفر نباشد پیوسته‌اند.

گام اول. هر تابع ثابت پیوسته است. این واضح است زیرا که برای هر $e > 0$، $|f(x) - f(a)| = 0 < e$ مستقل از x.

گام دوم. "تابع همانی"، یعنی تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$، $f(x) = x$، همه‌جا پیوسته است. برای $a \in \mathbb{R}$ و $e > 0$ داده شده، با گرفتن $\delta = e$، $|x - a| < \delta$ نتیجه می‌دهد $|f(x) - f(a)| = |x - a| < \delta = e$.

گام سوم. هر تابع تک‌جمله‌ای، $f(x) = cx^k$ پیوسته است، زیرا که حاصل‌ضرب متوالی تابع‌های با مقدار c، x، ...، x است.

گام چهارم. هر تابع چندجمله‌ای $f(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_p x^p$ پیوسته است زیرا که مجموع تابع‌های پیوسته گام سوم می‌باشد.

گام پنجم. در نقاطی که مخرج (١) صفر نباشد. طبق قسمت (ج) گزاره (١٠—٢) خارج‌قسمت دو تابع از نوع گام چهارم پیوسته است.

بدین ترتیب با اتکاء به گزارهٔ ١٠—٢ می‌توان با استفاده از عملیات جبری از تابع‌های پیوستهٔ داده شده تابع‌های پیوستهٔ جدید ساخت. حربهٔ دیگری برای تولید تابع‌های پیوسته، استفاده از ترکیب

تابع‌های پیوسته است:

(۱۰–۳) گزاره. فرض کنید $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ و $g : T \longrightarrow \mathbb{R}$ تابع‌های داده شده‌اند، $a \in S$، $f(a) = b$ در T قرار دارد، f در a پیوسته است و g در b پیوسته. در این صورت تابع $g \circ f$ در a پیوسته است.

برهان. قبل از ارائه اثبات لازم است یادآوری کنیم که دامنهٔ تعریف $g \circ f$ زیرمجموعهٔ زیر از S است:

$$S' = \{x \in S \mid f(x) \in T\}$$

بدین ترتیب a در S' است و $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ معنی دارد. برای $e > 0$ داده شده، $\delta > 0$ را جستجو می‌کنیم به طوری که اگر $x \in S'$ و $|x - a| < \delta$، آنگاه $|(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)| < e$. نخست چون g در نقطهٔ $b = f(a)$ پیوسته است، $\delta' > 0$ وجود دارد که اگر $y \in T$ و $|y - b| < \delta'$، آنگاه $|g(y) - g(b)| < e$. حال چون f در a پیوسته است و $b = f(a)$، برای $\delta' > 0$ بالا، $\delta > 0$ متناظری وجود دارد که اگر $x \in S$ و $|x - a| < \delta$ آنگاه $|f(x) - f(a)| < \delta'$. بالاخص چون $S' \subset S$، همین حکم برای عناصر x از S' که $|x - a| < \delta$ نیز برقرار است. بنابراین برای $x \in S'$ که $|x - a| < \delta$ داریم $|f(x) - f(a)| < \delta'$ و طبق انتخاب δ'، آنگاه $|g(f(x)) - g(f(a))| < e$ و پیوستگی $g \circ f$ در $x = a$ به اثبات می‌رسد. □

در اینجا ضمن یادآوری توابع مثلثاتی، خواص پیوستگی آنها را بررسی می‌کنیم. برای بیان "اندازه زاویه" به طریق زیر عمل می‌کنیم. دایرهٔ واحد $x^2 + y^2 = 1$ را در نظر بگیرید. همهٔ زوایا به صورت قطبی با رأس در مبدأ مختصات و نیم‌خط مثبت محور x به عنوان ضلع آغازی در نظر گرفته می‌شوند. اندازهٔ زاویه همواره به "رادیان" است، یعنی نسبت طول کمان مقابل به زاویه روی دایره، به شعاع دایره (که در اینجا واحد فرض شده است). از آنجا که این اندازه به صورت نسبت دو کمیت همجنس (هر دو طول) است، اندازهٔ زاویه به رادیان یک "عدد" حقیقی است. جهت مثلثاتی را جهت مثبت و جهت عقربهٔ ساعت را منفی قرارداد می‌کنیم. بدین ترتیب برای هر عدد حقیقی یک زاویه منظور می‌شود که به معنای طی کردن مسافتی روی محیط دایره (در جهت مثبت یا منفی، بسته به این که عدد داده شده مثبت یا منفی باشد) برحسب رادیان به اندازهٔ آن عدد است. بدین ترتیب برای هر عدد حقیقی θ، نقطهٔ

مشخصی روی دایرهٔ واحد به‌دست می‌آید. مختصهٔ x این نقطه را $\cos\theta$ و مختصهٔ y این نقطه را $\sin\theta$ می‌نامیم. توابع مثلثاتی دیگر به صورت $\tan = \frac{\sin}{\cos}$، $\cot = \frac{\cos}{\sin}$، $sec = \frac{1}{\cos}$ و $csc = \frac{1}{\sin}$ تعریف می‌شوند که البته دامنهٔ تعریف این چهار تابع حقیقی همهٔ $\mathbb{R}$ نیست، بلکه مجموعهٔ نقاطی از $\mathbb{R}$ است که در آن مخرج عبارت تعریف‌کننده صفر نباشد. اتحادهای مربوط توابع مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا مانند $\cos(\theta+\phi) = \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi$ همان طور که در بررسی اعداد مختلط دیدیم، همه از ضرب اعداد مختلط نتیجه می‌شوند و در اینجا دانسته فرض می‌شوند.

(۱۰–۴) گزاره. هر شش تابع مثلثاتی در دامنهٔ تعریف خود پیوسته‌اند.

برهان. کافی است پیوستگی $\sin$ و $\cos$ ثابت شود زیرا سایر توابع از ضرب و تقسیم این دو به‌دست می‌آیند و هر جا که مخرج صفر نباشد، طبق ۱۰–۲ پیوسته خواهند شد. به عنوان نمونه پیوستگی $\cos$ را ثابت می‌کنیم، پیوستگی $\sin$ مشابه است و نیز می‌توان با توجه به $\sin\theta = \cos(\frac{\pi}{2} - \theta)$، پیوستگی آن را به عنوان ترکیب دو تابع پیوسته $\theta \longrightarrow \frac{\pi}{2} - \theta$ و $\cos$ نتیجه گرفت. نخست نشان می‌دهیم کسینوس در 0 پیوسته است. چون $\cos 0 = 1$، باید ثابت کنیم که برای هر $e > 0$ داده شده، δ وجود دارد که هرگاه $|\theta| = |\theta - 0| < \delta$، آنگاه $|\cos\theta - 1| < e$. برای $|\theta|$ کوچک و مثبت طول OH برابر $\cos\theta$ است و برای $|\theta|$ کوچک منفی طول OK برابر $\cos\theta$ می‌باشد. بنابراین $|1 - \cos\theta| = 1 - \cos\theta$ برابر طول HT (یا KT) در حالت θ مثبت (به ترتیب در حالت θ منفی) می‌باشد. در مثلث قائم‌الزاویه AHT (به ترتیب BKT) طول ضلع مجاور به زاویهٔ قائمه از طول وتر کوچکتر است، یعنی $0 \leq 1 - \cos\theta \leq AT$ (به ترتیب $0 \leq 1 - \cos\theta \leq BT$). از طرفی دیگر طول وتر AT (به ترتیب BK) از طول کمان AT (به ترتیب BT) کوچکتر است، پس

$$0 \leq 1 - \cos\theta \leq |\theta| \qquad (2)$$

حال اگر برای $e > 0$ داده شده، δ را برابر e بگیریم، از $|\theta - 0| < \delta$ نتیجه شود که $|1 - \cos\theta| < e$ و پیوستگی $\cos$ در $\theta = 0$ به اثبات می‌رسد. به همین ترتیب پیوستگی $\sin$ در $\theta = 0$ را می‌توان ثابت کرد. در واقع توجه کنید که $|\sin\theta|$ برابر طول AH یا BK است که هر یک به دلیل مشابه فوق از $|\theta|$ کوچکتر

است، بنابراین

$$0 \leq |\sin\theta| \leq |\theta| \qquad (۳)$$

یا $|\sin\theta - \sin 0| \leq |\theta - 0|$ و مجدداً با گرفتن $\delta = e$ می‌توان پیوستگی $\sin$ در $\theta = 0$ را نتیجه گرفت.

حال نشان می‌دهیم $\cos$ در هر نقطه θ_0 پیوسته است. برای $e > 0$ داده شده، می‌خواهیم $\delta > 0$ پیدا کنیم که $|h| < \delta$ نتیجه دهد $|\cos(\theta_0 + h) - \cos\theta_0| < e$. داریم

$$\begin{aligned}
|\cos(\theta_0 + h) - \cos\theta_0| &= |\cos\theta_0 \cos h - \sin\theta_0 \sin h - \cos\theta_0| \\
&\leq |\cos\theta_0(\cos h - 1)| + |\sin\theta_0||\sin h| \\
&\leq |\cos h - 1| + |\sin h| \qquad (\text{چون } |\cos\theta_0| \leq 1, |\sin\theta_0| \leq 1) \\
&\leq 2|h| \qquad (\text{طبق (۲) و (۳)})
\end{aligned}$$

بنابراین با گرفتن $\delta = \frac{e}{2}$ حکم به اثبات می‌رسد. □

بدین ترتیب اکنون با توجه به گزاره‌های ۱۰–۲، ۱۰–۳ و ۱۰–۴، می‌توان در مورد پیوستگی انواع آمیزه‌های توابع گویا و توابع مثلثاتی بحث کرد.

خواص تابع‌های پیوسته (۱)

در دو بخش قبل کوشش کردیم بر مفهوم پیوستگی به عنوان "پایداری محاسبه" تأکید کنیم و خواننده را از اینکه پیوستگی را نوعی اتصال و یکپارچگی نمودار تابع تلقی کند بر حذر کنیم. در واقع اگر دامنهٔ یک تابع پیوسته یک بازه باشد، نمودار تابع برخی خواص "اتصال و یکپارچگی" را خواهد داشت. بعضی احکام این بخش در تأیید این ادعا هستند.

(۱۱—۱) **قضیهٔ مقدار بینی.** فرض کنید $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته باشد، $f(a) = A$ و $f(b) = B$. در این صورت برای هر عدد حقیقی C بین A و B، نقطه‌ای c در $[a, b]$ وجود دارد که $f(c) = C$.

اگر نمودار f را یک ریسمان فرض کنیم که بین نقطهٔ (a, A) و (b, B) کشیده شده است، طبق حکم این قضیه، ریسمان برای گذر از ارتفاع A به ارتفاع B باید از هر ارتفاع بینابینی C نیز گذر کند که تأییدی بر به هم بستگی و یکپارچگی ریسمان است. در شکل ۱، نمودار تابع سه بار، به‌ازای مقادیر $c_۱$، $c_۲$ و $c_۳$ در $[a, b]$، از ارتفاع C عبور می‌کند.

طبعاً برای اثبات این قضیه فقط می‌توان از تعریف تابع پیوسته و احکام دیگری که از این تعریف نتیجه شده باشند استفاده کرد. نخست حالتی خاص از این قضیه را به صورت زیر به اثبات می‌رسانیم، سپس نشان می‌دهیم حالت کلی به سادگی از این حالت خاص نتیجه می‌شود:

(۱۱—۲) **(حالت خاص)** فرض کنید $g : [۰, ۱] \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد که $g(۰) < ۰$ و $g(۱) > ۰$. در این صورت نقطه‌ای r در $[۰, ۱]$ وجود دارد که $g(r) = ۰$.

برهان. نقاط بازهٔ $[۰, ۱]$ در مبنای ۲ می‌نویسیم. بدین ترتیب هر عدد نمایشی به شکل $۰/n_۱n_۲n_۳\ldots$ دارد که در آن n_i برابر صفر یا یک است. بالاخص نقطهٔ ۱ به صورت $۰/۱۱۱۱\ldots$ نمایش داده می‌شود. ما در جستجوی نقطه‌ای

$$r = ۰/r_۱r_۲r_۳\ldots$$

هستیم که $g(r) = ۰$. ارقام پس از ممیز چنین عددی را متوالیاً محاسبه خواهیم کرد. $g(\frac{۱}{۲})$ را در نظر می‌گیریم. اگر $g(\frac{۱}{۲}) = ۰$، عددی با خاصیت مطلوب در بازهٔ $[۰, ۱]$ پیدا شده است و $\frac{۱}{۲} = ۰/۱۰۰۰\ldots$ (طرف راست به مبنای ۲) جواب مورد نظر است. اگر $g(\frac{۱}{۲}) \neq ۰$، یکی از دو حالت $g(\frac{۱}{۲}) > ۰$ یا $g(\frac{۱}{۲}) < ۰$ برقرار است. قرار می‌دهیم:

$$r_۱ = \begin{cases} ۰ & g(\frac{۱}{۲}) > ۰ \text{ اگر} \\ ۱ & g(\frac{۱}{۲}) < ۰ \text{ اگر} \end{cases}$$

اگر $g(\frac{۱}{۲}) > ۰$ بازهٔ $[۰, \frac{۱}{۲}]$ را $I_۱$ می‌نامیم و از این پس جستجو را در این بازه ادامه می‌دهیم زیرا که همانند بازهٔ اولیه $[۰, ۱]$، تابع در انتهای چپ این بازه منفی و در انتهای راست مثبت است. چون نمایش نقاط بازهٔ $[۰, \frac{۱}{۲}]$ در مبنای ۲ با رقم ۰ شروع می‌شود قرار دادیم $r_۱ = ۰$. همین طور اگر $g(\frac{۱}{۲}) < ۰$، بازهٔ $[\frac{۱}{۲}, ۱]$ را $I_۱$ خوانده و جستجو برای r را در این بازه ادامه می‌دهیم که g در انتهای چپ آن منفی و در انتهای راست آن مثبت است. چون نمایش نقاط این بازه در مبنای ۲ با رقم ۱ شروع می‌شود قرار دادیم $r_۱ = ۱$. در هر صورت حال به بازهٔ $I_۱$ توجه می‌کنیم و مجدداً این بازه را به دو زیربازهٔ بسته چپ و راست تجزیه می‌کنیم. اگر $m_۱$ نقطهٔ میانی (مکان تجزیه) باشد به علامت $g(m_۱)$ نگاه می‌کنیم. اگر $g(m_۱) = ۰$، $m_۱$ ویژگی مورد نظر را دارد و کار تمام است، در غیر این صورت $g(m_۱)$ باید مثبت یا منفی باشد. اگر $g(m_۱) > ۰$ آنگاه نیمهٔ چپ $I_۱$ دارای این ویژگی است که در انتهای چپ آن تابع g منفی و در انتهای راست آن g مثبت است. از این پس جستجو برای r را در این بازه پیگیری می‌کنیم و قرار می‌دهیم $r_۲ = ۰$ زیرا در نمایش مبنای ۲ نیمهٔ چپ $I_۱$ رقم دوم پس از ممیز ۰ است. بالعکس اگر $g(m_۱) < ۰$، نیمه راست $I_۱$ دارای این ویژگی است که در دو انتهای چپ و راست تابع g به ترتیب منفی و مثبت است و این زیربازه را برای ادامهٔ جستجو انتخاب می‌کنیم.

در این صورت طبعاً قرار می‌دهیم $r_۲ = ۱$. در هر صورت بازهٔ انتخاب شده را به $I_۲$ نمایش می‌دهیم. حال مجدداً علامت نقطهٔ وسط $I_۲$، $m_۲$، را در نظر می‌گیریم و عمل بالا را تکرار می‌کنیم. به طور کلی بسته به این که علامت $g(m_k)$ مثبت یا منفی باشد رقم kـ‌ام پس از ممیز را به ترتیب ۰ یا ۱ می‌گیریم، و اگر $g(m_k) = ۰$، عدد مورد نظر به صورت $r = ۰/r_۱ \ldots r_k$ به‌دست آمده است. وقتی هیچ $g(m_k)$ صفر نشود، هر رقم پس از اعشار محاسبه می‌شود و عددی $r = ۰/r_۱ r_۲ r_۳ \ldots$ به‌دست می‌آید. ادعا می‌کنیم $g(r) = ۰$. مبنای شهودی این ادعا این است که دنباله‌ای از بازه‌های تودرتو در نظر گرفته‌ایم $[۰, ۱] \supset I_۱ \supset I_۲ \supset \cdots$ که طول آنها به ترتیب ۱، $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۱}{۴}$، ... است و تابع g در انتهای چپ هر یک از این بازه‌ها منفی و در انتهای راست آن مثبت است. عدد r در همهٔ این بازه‌ها قرار دارد، پس دنباله‌ای از چپ به آن میل می‌کند که در همهٔ نقاط دنباله تابع g منفی است و دنباله از طرف راست به آن میل می‌کند که در تمام نقاط آن g مثبت است. از پیوستگی تابع g نتیجه خواهیم گرفت که $g(r) = ۰$.

به روش برهان خلف عمل می‌کنیم. نشان می‌دهیم $g(r) \neq ۰$ به تناقض منجر می‌شود. اگر $g(r) \neq ۰$، $g(r)$ باید مثبت یا منفی باشد. حالت $g(r) > ۰$ را در نظر می‌گیریم، مورد $g(r) < ۰$ کاملاً مشابه است. اگر $g(r) > ۰$، نشان می‌دهیم بازه‌ای $]r - \delta, r + \delta[$ حول r وجود دارد که برای هر نقطهٔ x از $[۰, ۱]$ که در این بازه قرار گیرد داریم $g(x) > ۰$. دلیل، پیوستگی g در r است (و این در واقع تنها استفاده ما از پیوستگی در اثبات است)، زیرا اگر $e > ۰$ را کوچکتر یا مساوی $g(r)$ بگیریم، طبق تعریف پیوستگی $\delta > ۰$ وجود دارد که برای هر عنصر دامنهٔ g (یعنی $[۰, ۱]$) که در فاصله کوچکتر از δ از r قرار گیرد داریم:

$$-e < g(r) - g(x) < e$$

چون $۰ < e \leq g(r)$، از نامساوی طرف راست نتیجه می‌گیریم که $g(x) > ۰$. حال توجه کنید که طول بازهٔ I_n برابر $\frac{۱}{۲^n}$ است و اگر n به اندازه کافی بزرگ باشد $\frac{۱}{۲^n} < \delta$. از آنجا که r عضو I_n هست و طول I_n کوچکتر از δ، نتیجه می‌شود که I_n به تمامی در $]r - \delta, r + \delta[$ قرار دارد. بنابراین در هر نقطهٔ I_n، g باید مثبت باشد، در حالی که در انتهای چپ I_n تابع g همواره منفی بود. این تناقض نشان می‌دهد که $g(r) > ۰$ ممکن نیست. مشابهاً $g(r) < ۰$ نیز منجر به تناقض می‌شود. پس لزوماً $g(r) = ۰$. □

اکنون نشان می‌دهیم که حالت کلی قضیه ۱۱—۱ به سادگی از ۱۱—۲ نتیجه می‌شود. فرض کنید در صورت ۱۱—۱ داریم $A < B$. حالت $A > B$ را می‌توان با در نظر گرفتن تابع $-f$ نتیجه گرفت. پس $A < C < B$. ایدهٔ اثبات این است که از یک سو با کم کردن مقدار ثابت C از $f(x)$، تابعی پیوسته به‌دست می‌آوریم که در انتهای چپ منفی و در انتهای راست مثبت است، و از سویی دیگر با تغییر مقیاس و انتقال $[a,b]$ به $[۰,۱]$، مسأله را به ۱۱—۲ تبدیل می‌کنیم. برای این کار، تابع $g : [۰,۱] \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g(t) = f((۱ - t)a + tb) - C$$

توجه کنید که وقتی متغیر t بازهٔ $[۰,۱]$ را طی می‌کند، عبارت درجه یک $(۱ - t)a + tb$ بازهٔ $[a,b]$ را می‌پیماید.

تابع ϕ که به صورت $\phi(t) = (۱ - t)a + tb$ تعریف می‌شود پیوسته است چون از درجه ۱ نسبت به t است، داریم $g(t) = f(\phi(t)) - C$. چون ترکیب تابع‌های پیوسته، پیوسته است $f \circ \phi$ پیوسته است و افزودن تابع ثابت $-C$ نیز پیوستگی را حفظ می‌کند، پس g پیوسته است. ولی $g(۰) = A - C < ۰$ و $g(۱) = B - C > ۰$، پس طبق ۱۱—۲، نقطه‌ای r در $[۰,۱]$ وجود دارد که $g(r) = ۰$، یعنی

$$f((۱ - r)a + rb) - C = ۰$$

حال $c = (۱ - r)a + rb$ نقطهٔ متناظر r در $[a,b]$ است و داریم $f(c) = C$ چنان که حکم بود.

تعدادی از احکام مربوط به تابع‌های پیوسته که حدس صحت آنها مبتنی بر شهود اتصال نمودار تابع پیوسته است از قضیهٔ مقدار بینی نتیجه می‌شوند. در باقیمانده این بخش دو نمونه از این احکام را بررسی خواهیم کرد. یک مورد استفادهٔ سادهٔ این قضیه در اثبات وجود ریشه برای معادلات است.

مثال ۱. نشان دهید معادلهٔ $\sin x - x^۲ + x + ۳ = ۰$ دارای دست‌کم دو ریشه در $[-\pi, \pi]$ است. عبارت $f(x) = \sin x - x^۲ + x + ۳$ یک تابع پیوسته تعریف می‌کند زیرا که مجموعی از تابع‌های پیوسته است. می‌خواهیم نشان دهیم دست‌کم دو x متمایز در $[-\pi, \pi]$ وجود دارند که $f(x) = ۰$. توجه

کنید که:

$$f(-\pi) = -\pi^{۲} - \pi + ۳ < ۰$$

$$f(\pi) = -\pi^{۲} + \pi + ۳ < ۰$$

ولی $f(۰) = ۳ > ۰$. بنابر قضیهٔ مقدار بینی $f(x) = ۰$ هم در $[-\pi, ۰]$ و هم در $[۰, \pi]$ ریشه دارد، که بنابراین دو ریشهٔ متمایزاند.

مثال ۲. فرض کنید $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ یک تابع پیوسته است، یعنی در واقع می‌توان f را یک تابع پیوسته از $[a, b]$ به $\mathbb{R}$ تصور کرد که برای هر x در دامنه، $f(x) \in [a, b]$. نشان می‌دهیم نقطه‌ای $x_۰$ در $[a, b]$ وجود دارد که $f(x_۰) = x_۰$. چنین نقطهٔ $x_۰$ را یک نقطهٔ ثابت برای تابع f می‌نامند. برای این کار، تابع کمکی $\phi(x) = x - f(x)$ را در نظر بگیرید، $\phi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. ϕ نیز پیوسته است زیرا که تفاضل دو تابع پیوسته می‌باشد. چون $f(a) \in [a, b]$، داریم $f(a) \geq a$، پس $\phi(a) \leq ۰$. همچنین $f(b) \in [a, b]$ نتیجه می‌دهد $f(b) \leq b$، پس $\phi(b) \geq ۰$. اگر داشته باشیم $\phi(a) = ۰$ یا $\phi(b) = ۰$، داریم $f(a) = a$، یا به ترتیب $f(b) = b$، و وجود نقطهٔ ثابت به‌دست آمده است، پس فرض کنید $\phi(a) < ۰$ و $\phi(b) > ۰$. از قضیهٔ مقدار بینی نتیجه می‌گیریم نقطه‌ای c در $[a, b]$ هست که $\phi(c) = ۰$، یا $f(c) = c$ و حکم به اثبات می‌رسد. نمایش هندسی این مطلب را می‌توان به صورت زیر به خاطر سپرد. چون برای هر x در $[a, b]$، $f(x)$ نیز در $[a, b]$ است، نمودار f در مربع $[a, b] \times [a, b]$ محصور است. خط $y = x$ از گوشه چپ پایین این مربع به گوشهٔ راست بالا رسم شده است. نمودار f ضلع چپ مربع را به ضلع راست مربع وصل می‌کند. حکم مسأله این است که این نمودار لزوماً خط $y = x$ را قطع می‌کند (شکل ۳).

اکنون به تشریح دو کاربرد قضیهٔ مقدار بینی که قبلاً اشاره کردیم می‌پردازیم.

(۱۱—۳) گزاره. فرض کنید I یک بازه است و $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته و یک به یک. در این صورت f اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی است.

برهان. فرض کنید x_0 یک نقطهٔ درونی I است. در این صورت ادعا می‌کنیم یک و تنها یکی از دو وضعیت زیر برقرار است:

الف) برای هر $x > x_0$ داریم $f(x) > f(x_0)$ و برای هر $x < x_0$ داریم $f(x) < f(x_0)$.

ب) برای هر $x > x_0$ داریم $f(x) < f(x_0)$ و برای هر $x < x_0$ داریم $f(x) > f(x_0)$.

برای اثبات فرض کنید $x_1 > x_0$. از آنجا که f یک به یک است یا $f(x_1) > f(x_0)$ و یا $f(x_1) < f(x_0)$. نخست فرض کنید $f(x_1) > f(x_0)$. نشان می‌دهیم وضعیت (الف) برقرار است. اگر $x_2 < x_0$ باید داشته باشیم $f(x_2) < f(x_0)$ زیرا اگر $f(x_2) > f(x_0)$ و $f(x_1) > f(x_0)$، از یک به یک بودن f نتیجه می‌گیریم که $f(x_1) \neq f(x_2)$. حال هر یک از $f(x_1)$ و $f(x_2)$ که بزرگتر باشد، مثلاً $f(x_1)$، تابع پیوستهٔ f باید در گذر از $f(x_0)$ به $f(x_2)$ مقدار $f(x_1)$ را یک بار دیگر در بازهٔ بین x_0 و x_2 اتخاذ کند که خلاف یک به یک بودن f است. حال فرض کنید $x_2 > x_0$، نشان می‌دهیم $f(x_2) > f(x_0)$. اگر $f(x_2) < f(x_0)$، آنگاه داریم $f(x_2) < f(x_0) < f(x_1)$، پس تابع پیوستهٔ f باید در گذر از مقدار $f(x_2)$ به $f(x_1)$ دست‌کم یک بار مقدار $f(x_0)$ را بین x_1 و x_2 اتخاذ کند خلاف یک به یک بودن f است زیرا که x_0 در یک طرف x_1 و x_2 قرار دارد. به همین ترتیب اگر برای یک نقطهٔ x_1 با $x_1 > x_0$ داشته باشیم $f(x_1) < f(x_0)$، می‌توانیم استدلال کنیم که وضعیت (ب) برقرار است.

برای ادامه اثبات، نقطه دلخواه درونی x_0 از I را در نظر می‌گیریم. نسبت به x_0، یکی از دو شرط (الف) یا (ب) بالا برقرار است. در حالت (الف) نشان می‌دهیم f لزوماً صعودی است و در حالت (ب) لزوماً نزولی. مثلاً فرض کنید وضعیت (ب) برقرار است. نشان می‌دهیم f نزولی است. دو نقطه x_1 و x_2 در I در نظر بگیرید که $x_1 < x_2$. باید ثابت کنیم $f(x_1) > f(x_2)$. وضعیت نسبی سه نقطهٔ x_0، x_1 و x_2 روی I به یکی از سه صورت زیر است که در هر مورد استدلال لازم را ارائه می‌کنیم:

$x_0 < x_1 < x_2$ طبق (ب) داریم $f(x_1) < f(x_0)$ و $f(x_2) < f(x_0)$. حکم نخست برهان (برقرار بودن (الف) یا (ب)) برای هر نقطهٔ درونی درست است، پس اگر این حکم را برای نقطهٔ درونی x_1

به‌کار بریم، چون $f(x_1) > f(x_0)$، نتیجه می‌شود که $f(x_2) < f(x_1)$، همان گونه که می‌خواستیم.

$x_1 < x_0 < x_2$ چون در وضعیت (ب) برای x_0 هستیم، داریم $f(x_1) > f(x_0)$ و $f(x_2) < f(x_0)$، پس $f(x_2) < f(x_1)$.

$x_1 < x_2 < x_0$ در اینجا حکم نخست برهان را برای نقطهٔ درونی x_2 به‌کار می‌گیریم. چون طبق (ب) $f(x_2) > f(x_0)$، نتیجه می‌شود که $f(x_1) > f(x_2)$ و حکم به اثبات می‌رسد.

استدلال در حالتی که (الف) برای x_0 برقرار باشد، کاملاً مشابه است و به خواننده واگذار می‌شود. □

کاربرد مهم دیگر قضیهٔ مقدار بینی که ارائه می‌کنیم پیوستگی وارون یک تابع پیوسته است. اگر $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع باشد، قرار می‌دهیم:

$$T = \{f(x) \mid x \in S\}$$

T را مجموعهٔ مقادیر f می‌نامند. اگر f یک به یک باشد، به‌ازای هر $y \in T$ یک و تنها یک x در S وجود دارد که $f(x) = y$. به این ترتیب تابعی $f^{-1} : T \longrightarrow \mathbb{R}$ تعریف می‌شود که $f^{-1}(y) = x$. f^{-1} را وارون یا معکوس (ترکیبی) f می‌نامند. دو حکم زیر برقرارند:

برای هر x در S: $\quad f^{-1}(f(x)) = x$

برای هر y در S: $\quad f(f^{-1}(y)) = y$

لازم به ذکر است که چون f^{-1} نقش x و y نسبت به f را تعویض می‌کند، نمودار f^{-1} در واقع قرینهٔ نمودار f نسبت به خط $x = y$ است (شکل ۴).

(۱۱–۴) گزاره. فرض کنید I یک بازه است و $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع یک به یک و پیوسته. در این صورت f^{-1} نیز پیوسته است.

برهان. طبق گزارهٔ ۱۱–۳ تابع f صعودی یا نزولی است. حکم را در حالتی که f صعودی است ثابت می‌کنیم و حالت f نزولی را که مشابه است به خواننده واگذار می‌کنیم. نخست توجه کنید که مجموعهٔ

تصویر، یعنی:

$$J = \{f(x) \mid x \in I\}$$

یک بازه است، بدین معنی که اگر y_1 و y_2 دو نقطهٔ J باشند که $y_2 < y_1$، آنگاه $[y_1, y_2]$ به تمامی در J قرار دارد. این مطلب را به این صورت توجیه می‌کنیم. چون y_1 و y_2 در J هستند، x_1 و x_2 یگانه در I وجود دارند که $y_1 = f(x_1)$ و $y_2 = f(x_2)$. چون f صعودی است، $x_2 < x_1$. حال اگر نقطه‌ای y در $[y_1, y_2]$ باشد، چون f روی $[x_1, x_2]$ پیوسته است، طبق قضیهٔ مقدار بینی باید عددی x در $[x_1, x_2]$ یافت شود که $f(x) = y$، پس $y \in J$.

برای اثبات پیوستگی f^{-1}، طبق گزاره ۱۰—۱ بخش پیشین کافی است نشان دهیم که برای هر دنباله (y_n) از نقاط J (دامنهٔ f^{-1}) که $y_n \longrightarrow y$، $y \in J$، داریم $f^{-1}(y_n) \longrightarrow f^{-1}(y)$. اول فرض کنید y یک نقطهٔ درونی J است و $y = f(x)$. ادعا می‌کنیم که در این صورت x نیز یک نقطهٔ درونی I است. برای این منظور، چون y نقطهٔ درونی است، $\delta > 0$ وجود دارد که $[y - \delta, y + \delta]$ به تمامی در J قرار دارد. پس $y - \delta = f(x_1)$ و $y + \delta = f(x_2)$، و از آنجا که f صعودی است $x_1 < x < x_2$، پس بازهٔ $[x_1, x_2]$ حول x به تمامی در I قرار دارد و x یک نقطهٔ درونی است. اکنون به اثبات $f^{-1}(y_n) \longrightarrow f^{-1}(y)$ می‌پردازیم. قرار می‌دهیم $f^{-1}(y_n) = x_n$، یا معادلاً $f(x_n) = y_n$. دو نقطهٔ $x + \rho$ و $x - \rho$، $\rho > 0$، حول x در I در نظر بگیرید. باید ثابت کنیم N به قسمی وجود دارد که برای $n > N$ داریم $x_n \in]x - \rho, x + \rho[$. قرار دهید $f(x - \rho) = \underline{y}$ و $f(x + \rho) = \overline{y}$. چون $y_n \longrightarrow y$، N وجود دارد که برای $n > N$ داریم $y_n \in]\underline{y}, \overline{y}[$. نتیجه این که برای $n > N$ داریم $x_n \in]x - \rho, x + \rho[$ و حکم به اثبات می‌رسد. وقتی y یک نقطهٔ انتهایی J باشد، و این تنها در صورتی است J از یک طرف بسته باشد، I نیز در طرف متناظر بسته است (به علت صعودی بودن f) و استدلال بالا با استفاده از بازه‌هایی که یک انتهای آنها بسته است تکرار می‌شود. $\square$

مثال ۱. فرض کنید $\mathbb{R}^+$ مجموعهٔ اعداد حقیقی غیرمنفی است. تابع $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت $f(x) = x^n$ تعریف می‌کنیم که در آن $n \geq 1$ یک عدد صحیح است. این تابع یک به یک و پیوسته و صعودی است، بنابراین وارون آن نیز باید پیوسته باشد. از آنجا که مجموعهٔ تصویر نیز برابر $\mathbb{R}^+$ است،

تابع وارون به دامنهٔ $\mathbb{R}^+$ است. این تابع عبارت است از $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{n}}$.

مثال ۲ (وارون توابع مثلثاتی) شش تابع مثلثاتی که تعریف کرده‌ایم همه تناوبی هستند، پس یک به یک نیستند و وارون به مفهوم معمول ندارند. ولی اگر دامنهٔ هر یک از این توابع را طوری محدود کنیم که در آن دامنه، تابع یک به یک باشد، می‌توان از وارون تابع مثلثاتی صحبت کرد. برای این کار انتخاب‌های متنوعی به عنوان دامنهٔ هر یک از تابع‌ها وجود دارد ولی قراردادهای زیر، قراردادهای متداول‌اند:

الف) برای سینوس، دامنه را به $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ محدود می‌کنیم که در این بازه سینوس همهٔ مقادیر $[-1, 1]$ را به طور یک به یک اتخاذ می‌کند. بنابراین $\sin^{-1}$ روی $[-1, 1]$ تعریف می‌شود و مقادیر آن در $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ منظور می‌شوند. $\sin^{-1}$ را گاهی به $Arcsin$ (با "A" بزرگ) نمایش می‌دهند.

ب) برای کسینوس، دامنه به $[0, \pi]$ محدود می‌شود که کسینوس این بازه را به طور یک به یک بر $[-1, 1]$ می‌نگارد. بدین ترتیب $\cos^{-1}$ روی $[-1, 1]$ تعریف شده و در $[0, \pi]$ مقدار می‌گیرد. $\cos^{-1}$ را به $Arccos$ نیز نمایش می‌دهند.

ج) برای تانژانت، از $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ استفاده می‌کنیم. تانژانت این بازه را به طور یک به یک بر تمام $\mathbb{R}$ می‌نگارد. $\tan^{-1}$ یا $Arctan$ روی $\mathbb{R}$ تعریف شده است و در $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ مقدار می‌گیرد.

تمرین. ثابت کنید مجموعهٔ تصویر تانژانت همه $\mathbb{R}$ است.

د) برای $\cot\theta$، $sec\theta$ و $csc\theta$، به ترتیب دامنه‌های $]0, \pi[$، $[0, \pi] - \{\frac{\pi}{2}\}$ و $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] - \{0\}$ را منظور می‌کنند.

خواص تابع‌های پیوسته (۲)

فرض کنید $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع باشد. نقطهٔ $x_\circ$ از S را یک نقطهٔ بیشینه یا ماکسیمم برای تابع f می‌نامیم در صورتی که $f(x_\circ) \geq f(x)$ برای هر x در S. به همین ترتیب نقطه کمینه یا می‌نیمم به عنوان نقطه‌ای $x_\circ$ که در آن $f(x_\circ) \leq f(x)$، برای هر x در S، تعریف می‌شود. در حالت اول $f(x_\circ)$ را بیشینه یا ماکسیمم تابع f در S، و در حالت دوم، $f(x_\circ)$ را کمینه یا می‌نیمم تابع f در S می‌نامند.

به طور کلی، به دلایل مختلف، تابع $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ ممکن است فاقد ماکسیمم یا می‌نیمم باشد. در شکل ۱ سه تابع نمایش داده شده‌اند. در (الف) تابع پیوسته نیست، به‌ازای مقادیر صحیح می‌نیمم تابع اتخاذ می‌شود ولی تابع ماکسیمم ندارد. در واقع تابع به دلخواه به کوچکترین کران بالایی مقادیر خود نزدیک می‌شود ولی به‌ازای هیچ نقطه دامنه برابر کوچکترین کران بالایی، یعنی ۱+، نمی‌شود. در (ب)، تابع پیوسته و صعودی است ولی از آنجا که دامنهٔ تابع یک بازهٔ باز است، تابع در هیچ نقطهٔ دامنه به کوچکترین کران بالایی خود یا بزرگترین کران پایینی نمی‌رسد. در (ج) نیز تابع پیوسته و صعودی است ولی در نزدیک شدن به دو انتهای بازه تابع بی‌کران می‌شود. برای تابعی که مجموعهٔ مقادیرش کران بالایی داشته باشد، نقطهٔ ماکسیمم نقطه‌ای در دامنه است که تابع این مقدار را بگیرد، و به همین ترتیب، برای تابعی که مجموعهٔ مقادیرش کران پایینی داشته باشد، نقطهٔ می‌نیمم نقطه‌ای از دامنه است

که مقدار تابع در آن برابر بزرگترین کران پایینی باشد. قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که برای یک تابع پیوسته تعریف شده روی $[a, b]$، a, b عدد حقیقی، همواره نقطهٔ ماکسیمم و نقطهٔ می‌نیمم وجود دارد، بالاخص چنین تابعی لزوماً کراندار است.

(۱۲—۱) قضیه. هر تابع پیوسته $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ دارای نقطهٔ ماکسیمم و می‌نیمم در $[a, b]$ است.

برهان این قضیه را نیز، مانند برهان قضیهٔ مقدار بینی در بخش پیش، نخست برای $[a,b]=[0,1]$ ارائه می‌کنیم. حالت کلی به روشی کاملاً مانند اثبات قضیهٔ مقدار بینی از همین حالت خاص نتیجه خواهد شد که این نتیجه‌گیری را به خواننده واگذار می‌کنیم.

برهان. فرض می‌کنیم $[a,b]=[0,1]$، $a=0$، $b=1$. نقاط بازهٔ $[0,1]$ را در مبنای ۲ می‌نویسیم. بدین ترتیب هر عضو $[0,1]$ نمایشی به شکل

$$c=0/c_1c_2c_3\ldots$$

دارد که در آن c_i ها رقم ۰ یا ۱ هستند. نقطه‌ای با نمایش بالا جستجو می‌کنیم که نقطهٔ ماکسیمم تابع f باشد. مانند اثبات قضیهٔ مقدار بینی ارقام c_1، c_2، c_3، ... را به ترتیب می‌سازیم ولی روش کار در اینجا از پیچیدگی بیشتری برخوردار است. بازهٔ $[0,1]$ را به صورت اجتماع دو زیربازهٔ $[0,\frac{1}{2}]$ و $[\frac{1}{2},1]$ در نظر می‌گیریم. ادعا می‌کنیم دست کم یکی از دو بازهٔ $[0,\frac{1}{2}]$ و $[\frac{1}{2},1]$ ویژگی زیر را دارد:

(*) هیچ نقطهٔ t_0 از این بازه وجود ندارد که به‌ازای هر t در بازهٔ دیگر داشته باشیم:

$$f(t_0)>f(t)$$

این ادعا که دست‌کم یکی از دو بازه $[0,\frac{1}{2}]$ و $[\frac{1}{2},1]$ ویژگی (*) را دارد بدین طریق توجیه می‌شود: اگر یکی از این دو بازه ویژگی ذکر شده را نداشته باشد، آنگاه عنصر t_0 از این بازه هست که $f(t_0)$ اکیداً بزرگتر از $f(t)$ برای هر t در بازهٔ دیگر است. بنابراین هیچ عنصری از بازهٔ دیگر وجود ندارد که مقدار f در آن اکیداً بزرگتر از مقدار f در هر نقطهٔ این بازه (بالاخص $f(t_0)$) باشد، یعنی بازهٔ دیگر ویژگی (*) را داراست.

اگر فقط یکی از دو بازه ویژگی (*) را داشته باشد، بازهٔ دیگر را I_1 می‌نامیم، و اگر هر دو بازه این ویژگی را داشته، یکی از آنها را به دلخواه I_1 می‌نامیم. رقم c_1 را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$c_1=\begin{cases}0 & I_1=[0,\frac{1}{2}] \text{ اگر}\\ 1 & I_1=[\frac{1}{2},1] \text{ اگر}\end{cases}$$

از این پس جستجو برای نقطهٔ ماکسیمم را به بازهٔ I_1 محدود می‌کنیم. I_1 را به صورت اجتماع دو زیربازهٔ چپ و راست، هر یک به طول $\frac{1}{4}$ می‌نویسیم. مجدداً به همان استدلالی که در بالا آمد ادعا می‌کنیم دست‌کم یکی از این دو زیربازهٔ I_1 باید واجد شرط (*) نسبت به دیگری باشد. مانند قبل اگر فقط یک زیربازه شرط (*) را احراز کند، دیگری را I_2 می‌نامیم، و اگر هر دو واجد شرط (*) باشند، یکی را به دلخواه I_2 می‌نامیم. تعریف می‌کنیم:

$$c_2 = \begin{cases} 0 & \text{اگر } I_2 \text{ زیربازهٔ چپ باشد} \\ 1 & \text{اگر } I_2 \text{ زیربازهٔ راست باشد} \end{cases}$$

و از این جستجو برای نقطهٔ ماکسیمم را به I_2 محدود می‌کنیم. این فرایند را با نیمه کردن I_2، ادعای اینکه (*) باید برای دست‌کم یک نیمهٔ آن برقرار باشد، انتخاب I_3 و تعیین c_3 برابر صفر یا یک بسته به این که نیمهٔ چپ I_3 باشد یا نیمهٔ راست، ادامه می‌دهیم. با ادامهٔ روش به ترتیب رقم‌های c_n ساخته می‌شوند. ثابت می‌کنیم نقطهٔ $c = 0/c_1c_2c_3\ldots$ که بدین طریق به‌دست می‌آید یک نقطهٔ ماکسیمم است. استدلال به طریق برهان خلف است. فرض می‌کنیم c یک نقطهٔ ماکسیمم نباشد و به تناقض می‌رسیم. اگر $f(c)$ ماکسیمم نباشد، نقطه‌ای d در $[0, 1]$ وجود دارد، $d \neq c$، که:

$$f(d) > f(c) \qquad (1)$$

توجه کنید که هر نقطهٔ غیر از c در یک مرحلهٔ فرایند نصف کردن بالا باید از c جدا شده باشد زیرا فاصله c تا d هرچه قدر کوچک باشد، عددی n وجود دارد $\frac{1}{2^n}$ (یعنی طول بازهٔ I_n، که c همواره در آن است) از فاصله c تا d کوچکتر است و بازهٔ شامل c نمی‌تواند شامل d نیز باشد. فرض کنید n_1 اولین مرحله‌ای است که d در زیربازهٔ کنار گذاشته شده واقع شده است. در این صورت طبق (*) نقطه‌ای d' وجود دارد، در بازهٔ I_{n_1}، که:

$$f(d) \leq f(d') \qquad (2)$$

از (1) و (2) می‌بینیم که $f(d') > f(c)$. حال در مورد d' نیز استدلالی مشابه d انجام می‌دهیم. داریم $d' \neq c$ چون $f(d') \neq f(c)$، پس n_2 را اولین مرحله‌ای می‌گیریم که d' از c جدا شده است، یعنی d' در

$I_{n_۲}$ قرار ندارد. پس طبق (*) عنصری d'' در $I_{n_۲}$ وجود دارد که:

$$f(d') \leq f(d'') \qquad (۳)$$

بدین ترتیب تاکنون داریم $f(d'') \geq f(d') \geq f(d) \geq f(c)$، با ادامه این استدلال، دنباله‌ای $d^{(k)}$ از نقاط $[۰, ۱]$ پیدا می‌کنیم که $d^{(k)} \in I_{n_k}$ و $\cdots > n_۳ > n_۲ > n_۱$. چون طول I_j برابر $\frac{۱}{۲^j}$ است و دنبالهٔ $(n_i)_i$ اکیداً صعودی است، دنبالهٔ I_{n_k} به سوی نقطهٔ c منقبض می‌شود و داریم:

$$d^{(k)} \longrightarrow c \quad \text{وقتی} \quad k \longrightarrow +\infty$$

نشان می‌دهیم این در تناقض با $f(c) < f(d)$ است. اگر $f(d) - f(c) > ۰$ را به e نمایش دهیم، نتیجه می‌شود $\delta > ۰$ وجود دارد که برای هر x با $|x - c| < \delta$ داریم $|f(x) - f(c)| < e$، بالاخص $f(x) - f(c) < e$، یا

$$f(x) < f(c) + e \qquad (۴)$$

چون $d^{(k)} \longrightarrow c$، برای k بزرگ داریم $|d^{(k)} - c| < \delta$، پس

$$f(d^{(k)}) < f(c) + e = f(d)$$

که در تناقض با $f(d) \leq f(d') \leq f(d'') \leq \cdots$ است. این تناقض نشان می‌دهد فرض $f(c) < f(d)$ نادرست است و $f(c)$ باید ماکسیمم تابع f در $[۰, ۱]$ باشد.

استدلال مربوط به می‌نیمم کاملاً مشابه است و به خواننده واگذار می‌شود. □

(۱۲—۲) یادداشت. نکته مهمی در مورد اثبات بالا باید ذکر شود. در اثبات اینکه $f(c)$ ماکسیمم است، تنها استفادهٔ ما از پیوستگی f، استفاده از نامساوی (۴) بود. این در واقع "نصف پیوستگی" است زیرا که طبق پیوستگی f در c، برای $e > ۰$، $\delta > ۰$ وجود دارد که $|x - a| < \delta$ نتیجه می‌دهد $|f(x) - f(c)| < e$. نامساوی اخیر شامل دو حکم است:

$$\begin{aligned} f(x) - f(c) &< e \\ -e < f(x) - f(c) & \end{aligned}$$

در اثبات قبل فقط از نامساوی اول استفاده شد. اگر اثبات وجود می‌نیمم را به طور مشابه دنبال کنیم خواهیم دید که در آن اثبات فقط از نامساوی دوم بالا استفاده می‌شود. تابع‌هایی که فقط یکی از دو نامساوی بالا برایشان برقرار باشد تابع‌های "نیم پیوسته" خوانده می‌شوند. به طور خاص، تابع $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ را نیم‌پیوسته از بالا در نقطهٔ c از دامنه می‌نامیم در صورتی که برای هر $e > \circ$، $\delta > \circ$ وجود داشته باشد که هرگاه $x \in S$ و $|x - a| < \delta$، آنگاه

$$f(x) < f(c) + e$$

به همین ترتیب f نیم پیوسته از پایین در نقطهٔ c خوانده می‌شود اگر برای $e > \circ$، $\delta > \circ$ وجود داشته باشد که هرگاه $x \in S$ و $|x - a| < \delta$، آنگاه:

$$f(x) > f(c) - e$$

f را نیم‌پیوسته از بالا در S (به ترتیب نیم‌پیوسته از پایین در S) می‌نامیم در صورتی که f در همهٔ نقاط S نیم‌پیوسته از بالا (به ترتیب نیم‌پیوسته از پایین) باشد.

بدین ترتیب می‌توان برای بهره‌برداری بیشتر از قضیهٔ ۱۲—۱، قضیه را به دو قسمت تجزیه کرد:

(۱۲—۳) قضیه. تابع $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ داده شده است. (الف) اگر f نیم‌پیوسته از بالا باشد، f دارای ماکسیمم در $[a, b]$ است، (ب) اگر f نیم‌پیوسته از پایین باشد، f دارای می‌نیمم در $[a, b]$ است. $\square$

به زودی کاربرد مهمی از این صورت جامعتر قضیه خواهیم دید، ولی نخست مثال‌هایی ارائه می‌کنیم.

مثال ۱. تابع $f : [\circ, ۱] \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت $f(x) = x - [x]$ در نظر می‌گیریم که مقصود از $[x]$ جزء صحیح x است. در واقع $f(x) = \begin{cases} x & \circ \leq x < ۱ \\ \circ & x = ۱ \end{cases}$. این تابع در همهٔ نقاط به استثنای $x = ۱$ پیوسته است و در $x = ۱$ نیم‌پیوسته از پایین است و نیم‌پیوسته از بالا نیست. فرض کنید $e > \circ$ داده شده است. قطعاً برای هر x داریم:

$$f(x) > f(\circ) - e = -e$$

زیرا که f در $[\circ, ۱]$ نامنفی است. از طرفی دیگر، اگر $e = \frac{۱}{۲}$ را در نظر می‌گیریم، $\delta > \circ$ هرچه باشد برای $x \in [\circ, ۱]$ که $|x - ۱| < \delta$ نمی‌توان حکم کرد که

$$f(x) < f(\circ) + \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

زیرا که اگر x از طرف چپ به ۱ نزدیک باشد، $f(x) = x$ نزدیک ۱ است. ضمناً توجه کنید که این تابع در $[\circ, ۱]$ دارای می‌نیمم است ولی دارای ماکسیمم نیست.

مثال ۲. تابعی که به صورت $f : [\circ, ۱] \longrightarrow \mathbb{R}$، $f(x) = [x] - x$ تعریف می‌شود در نقطهٔ ۱ نیم‌پیوسته از بالا است ولی نیم‌پیوسته از پایین نیست. در واقع داریم $f(x) = \begin{cases} -x & \circ \leq x < ۱ \\ \circ & x = ۱ \end{cases}$. برای $e > \circ$ داده شده، x هر نقطه‌ای که در دامنه باشد، داریم $f(x) < f(\circ) + e = e$ زیرا که مقادیر f نامثبت‌اند، پس نیم‌پیوستگی از بالا برقرار است. بالعکس برای $e = \frac{۱}{۲}$، $\delta > \circ$ هرچه باشد، $|x - ۱| < \delta$، $x \in [\circ, ۱]$، دلالت بر $f(x) > f(۱) - \frac{۱}{۲} = -\frac{۱}{۲}$ نمی‌کند زیرا که برای x نزدیک ۱ از سمت چپ مقدار f نزدیک -۱ است.

اکنون کاربرد مهمی از نیم‌پیوستگی را در رابطه با بحث "پیوستگی یکنواخت" که در پایان بخش ۹ آمد ارائه می‌کنیم. فرض کنید $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته باشد. از گزارهٔ ۹—۴ به یاد می‌آوریم که هرگاه $e > \circ$ داده شده باشد، برای هر نقطهٔ $t \in [a, b]$، عددی $\delta > \circ$ وجود دارد که برای هر دو نقطهٔ $t_۱$ و $t_۲$ از $[a, b]$ که در $]t - \delta, t + \delta[$ قرار گیرند داریم $|f(t_۱) - f(t_۲)| < e$. برای هر $t \in [a, b]$، $\delta(t)$ را برابر کوچکترین کران بالایی $\delta > \circ$ هایی می‌گیریم که در ویژگی بالا صدق می‌کنند ولی سقف $b - a$ را برای $\delta(t)$ منظور می‌کنیم. توجه کنید که به هر حال اگر δ از $b - a$ بزرگتر شود، آنگاه $]t - \delta, t + \delta[$ از بازهٔ $[a, b]$ بزرگتر می‌شود و بزرگتر کردن آن نقاط جدیدی از $[a, b]$ به‌دست نمی‌دهد. بدین ترتیب اگر $\delta < \delta(t)$، آنگاه برای هر دو نقطهٔ $t_۱$ و $t_۲$ که در $]t - \delta_۱, t + \delta_۱[$ باشند، داریم $|f(t_۱) - f(t_۲)| < e$.

(۱۲—۴) لم. برای $e > \circ$ ثابت، تابع $\delta(t)$ که برای $t \in [a, b]$ تعریف شده است، نیم‌پیوسته از پایین است.

برهان. باید ثابت کنیم برای هر $e' > ۰$ داده شده، $\delta' > ۰$ وجود دارد که هرگاه $t' \in]t - \delta', t + \delta'[$، آنگاه $\delta(t') > \delta(t) - e'$. یعنی باید ثابت کنیم که برای این δ'، اگر $|t' - t| < \delta$ و $t_۱$ و $t_۲$ در فاصلهٔ $\delta(t) - e$ از t' قرار گیرند، آنگاه $|f(t_۱) - f(t_۲)| < e$. برای مطلب اخیر، کافی است نشان دهیم که اگر $t_۱$ و $t_۲$ در این بازه باشند، آنگاه $t_۱, t_۲ \in]t - \delta(t), t + \delta(t)[$. قرار می‌دهیم $۰ < \delta' < e'$. بنابراین اگر $t_۱, t_۲$ در $]t' - \delta', t' + \delta'[$ باشند، داریم:

$$i = ۱, ۲ : \quad |t_i - t| \leq |t_i - t'| + |t' - t| < \delta' + \delta(t) - e' < \delta(t)$$

و حکم به اثبات می‌رسد. □

به کمک این لم اکنون می‌توان به سادگی دید که هر تابع پیوسته $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ به طور یکنواخت پیوسته است، یعنی هرگاه $e > ۰$ داده شده باشد، آنگاه $\delta > ۰$ وجود دارد که برای هر دو نقطهٔ $t_۱$ و $t_۲$ از $[a, b]$ با $|t_۱ - t_۲| < \delta$، داریم $|f(t_۱) - f(t_۲)| < e$. به این منظور، برای $e > ۰$ داده شده، برای هر $t \in [a, b]$، $\delta(t)$ را طبق بحث فوق در نظر می‌گیریم δ تابعی است با مقادیر اکیداً مثبت که طبق لم نیم‌پیوسته از پایین است. بنابراین طبق ۱۲—۳، ب، $\delta(t)$ در $[a, b]$ می‌نیمم خود را اتخاذ می‌کند. مقدار این می‌نیمم را به δ نمایش می‌دهیم، پس $\delta \leq \delta(t)$ برای هر t. در نتیجه اگر $|t_۱ - t_۲| < \delta$، آنگاه $t_۲$ در فاصلهٔ کوچکتر یا مساوی $\delta(t_۱)$ از $t_۱$ قرار دارد، بنابراین $|f(t_۲) - f(t_۱)| < e$ و حکم به اثبات می‌رسد:

(۱۲—۵) قضیه. هر تابع پیوسته $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ به طور یکنواخت پیوسته است. □

مفهوم حد

در بخش‌های ۶ تا ۸ مفهوم حد دنباله و سری را بررسی کردیم. در واقع دنباله، تابعی بود که روی یک مجموعهٔ گسسته از نقاط (اعداد صحیح از یک مقدار k به بعد) تعریف شده و مقداری حقیقی یا مختلط می‌گرفت. حد دنباله وقتی وجود داشت که با سیر کردن دامنهٔ تابع، یعنی با گذر به اعداد صحیح بزرگتر و بزرگتر، مقدار تابع به عدد خاصی نزدیک می‌شد. مفهوم حد که در این بخش معرفی خواهیم کرد کاملاً مشابه است با این تفاوت که به جای دنباله، تابع‌هایی را در نظر خواهیم گرفت که دامنهٔ آنها یا یک مجموعه از نوع بازه است یا دست‌کم نقاط دامنه دارای مکان تجمع هستند، برخلاف مجموعه‌های عدد صحیح که عناصرش از فاصله معینی (واحد) به هم نزدیکتر نمی‌شوند. ایدهٔ حد زادهٔ کوشش‌هایی است که طی دو قرن برای دقیق ساختن مفهوم "مشتق"، که خود بیان کنندهٔ آهنگ لحظه‌ای تغییر یک کمیت متغیر است، صرف شد. امروزه مفهوم حد کاربردهایی خارج از محدودهٔ مشتق نیز دارد، بالاخص همچنان که خواهیم دید با مفهوم پیوستگی در رابطهٔ نزدیک است.

فرض کنید S یک زیرمجموعهٔ $\mathbb{R}$ باشد. نقطهٔ $a \in \mathbb{R}$ را یک نقطه حدی S می‌نامیم اگر برای هر $\delta > 0$، در "بازهٔ محذوف شعاع δ حول a"، یعنی

$$]a-\delta, a+\delta[-\{a\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x-a| < \delta\}$$

نقطه‌ای از S موجود باشد. تذکر یکی دو نقطه در مورد این تعریف بجاست:

(الف) اینکه بازه را "محذوف" گرفته‌ایم، یعنی $x = a$ مطرح نیست، بدین معنی است که تعریف مستقل از این است که خود a نقطه‌ای از S باشد یا نباشد، هر دو صورت ممکن است رخ دهد.

(ب) تعریف در واقع نتیجه می‌دهد که در هر بازهٔ محذوف حول a، بی‌نهایت عضو متمایز از S باید

موجود باشد زیرا اگر مثلاً $s_1 \in S$ در بازهٔ محذوف شعاع δ_1 حول a باشد، و δ_2 را طوری بگیریم که $0 < \delta_2 < |s_1 - a|$، آنگاه باید عضو دیگری s_2 از S در بازهٔ محذوف شعاع δ_2 حول قرار داشته باشد. به همین ترتیب اگر δ_3 را کوچکتر از $|s_2 - a|$ و مثبت در نظر بگیریم، نقطهٔ دیگری s_3 از S باید در این بازهٔ محذوف باشد و همین طور با ادامهٔ این روش یک دنبالهٔ (s_n) از نقاط متمایز S به‌دست می‌آید که همه در بازهٔ محذوف شعاع δ_1 حول a قرار دارند.

در واقع با تغییر کوچکی در استدلال بالا می‌توان نشان داد اگر a یک نقطهٔ حدی برای مجموعهٔ S باشد، آنگاه دنباله‌ای (s_n) از نقاط متمایز S وجود دارد که $s_n \longrightarrow a$. اگر در استدلال بالا بگیریم $\delta_1 = 1$، نقطهٔ s_1 به فاصلهٔ کوچکتر از ۱ از a است، اگر بگیریم $0 < \delta_2 < \min\{\frac{1}{2}, |s_1 - a|\}$، آنگاه نقطهٔ s_2 در فاصلهٔ کوچکتر از $\frac{1}{2}$ از a است و $s_1 \neq s_2$. به همین ترتیب با گرفتن $0 < \delta_3 < \min\{\frac{1}{3}, |s_2 - a|\}$، نتیجه می‌شود که s_3 در فاصله کوچکتر از $\frac{1}{3}$ از a قرار دارد و متمایز از s_1 و s_2 است. به طور کلی اگر به استقراء، δ_n را به صورت $0 < \delta_n < \min\{\frac{1}{n}, |s_{n-1} - a|\}$ بگیریم و عضو s_n از S را در بازهٔ محذوف شعاع δ_n حول a اختیار کنیم، نتیجه می‌شود که $|s_n - a| < \frac{1}{n}$ و عناصر $s_1, s_2, \ldots, s_n$ همه متمایزند. دنبالهٔ عناصر متمایز S که به این ترتیب ساخته می‌شود به a همگراست زیرا برای هر $\delta > 0$، اگر N را طوری بگیریم که $\frac{1}{N} < \delta$، آنگاه برای $n > N$ داریم $|s_n - a| < \frac{1}{n} < \frac{1}{N}$.

بالعکس نیز، اگر دنباله‌ای (s_n) از نقاط متمایز S به a میل کند، a یک نقطهٔ حدی S است. برای $\delta > 0$، چون $s_n \longrightarrow a$، N وجود دارد که برای $n > N$ داریم $|s_n - a| < \delta$. به علاوه چون همه نقاط s_n متمایزند، حداقل یکی از آنها باید غیر از خود a باشد، یعنی s_n وجود دارد که $0 < |s_n - a| < \delta$. بدین ترتیب به تعریف معادلی برای نقطه حدی دست یافته‌ایم:

(۱۳–۱) لم. اگر S زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ باشد و $a \in \mathbb{R}$، a یک نقطهٔ حدی برای S است اگر و تنها اگر دنباله‌ای (s_n) از نقاط متمایز S وجود داشته باشد که $s_n \longrightarrow a$. □

(۱۳—۲) چند مثال

(۱۳—۲—۱) فرض کنید S زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{Z}$، یعنی مجموعهٔ اعداد صحیح، است. در این صورت هیچ نقطهٔ $\mathbb{R}$ یک نقطهٔ حدی برای $\mathbb{Z}$ نیست زیرا که اگر بازهٔ محذوفی به شعاع کوچکتر از $\frac{۱}{۲}$ حول این نقطه بگیریم، حداکثر یک نقطهٔ S می‌تواند در این بازه قرار گیرد.

(۱۳—۲—۲) فرض کنید S بازهٔ $]a,b[$ است. در این صورت همهٔ نقاط $[a,b]$، نقاط حدی $]a,b[$ هستند زیرا که در هر بازهٔ محذوف به شعاع مثبت حول $c \in [a,b]$ نقطه‌ای از $]a,b[$ یافت می‌شود. به علاوه اگر $c \notin [a,b]$، c نقطهٔ حدی $]a,b[$ نیست زیرا اگر $c < a$، آنگاه برای $۰ < \delta < a-c$، و اگر $c > b$، برای $۰ < \delta < c-b$، در بازهٔ شعاع δ حول c هیچ نقطه از $]a,b[$ یافت نمی‌شود. به همین ترتیب مجموعهٔ نقاط حدی $[a,b]$، $]a,b]$، $[a,b[$ و $]a,b[$ همهٔ برابر $[a,b]$ هستند.

(۱۳—۲—۳) S را برابر مجموعهٔ $\{\frac{۱}{n} \mid n = ۱,۲,۳,\ldots\}$ می‌گیریم. تنها نقطهٔ حدی S نقطهٔ ۰ است. هر گوی محذوف شعاع δ حول ۰ شامل بی‌نهایت نقطهٔ S است (همهٔ a_n ها که $\frac{۱}{n} < \delta$). برای نقطهٔ $\frac{۱}{n}$، بازهٔ محذوف شعاع $(\frac{۱}{n} - \frac{۱}{n+۱})$ حول این نقطه شامل هیچ نقطهٔ S نیست. برای $a > ۱$، بازه شعاع $\delta = a - ۱$، برای $a < ۰$، بازهٔ شعاع $-a$، و برای $\frac{۱}{n+۱} < a < \frac{۱}{n}$، بازهٔ شعاع $\delta = \min\{\frac{۱}{n} - a, a - \frac{۱}{n+۱}\}$ فاقد نقاط S هستند. اکنون آماده‌ایم تعریف حد را ارائه کنیم.

(۱۳—۳) **تعریف.** فرض کنید S زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ است، a یک نقطهٔ حدی S، و $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع. می‌گوییم حد تابع f وقتی x به a میل می‌کند برابر L است، و می‌نویسیم $\lim_{x\to a} f(x) = L$ در صورتی که برای هر $e > ۰$، وجود داشته باشد $\delta > ۰$ که هرگاه $x \in S$ و $۰ < |x-a| < \delta$، آنگاه $|f(x) - L| < e$.

نکات شباهت و تمایز تعریف حد و تعریف پیوستگی از تعریف مشهودند. در مورد پیوستگی، نقطهٔ a باید در دامنهٔ تعریف f باشد ولی در مورد حد کافی است a یک نقطهٔ حدی مجموعهٔ S باشد و اساساً به دلیل شرط $۰ < |x-a|$، مقدار f در نقطهٔ a اصلاً مطرح نیست. از طرفی دیگر پیوستگی در همهٔ

نقاط دامنهٔ f قابل طرح کردن است، در حالی که برای مطرح ساختن $\lim_{x\to a} f(x)$ لازم است که a یک نقطهٔ حدی دامنه باشد. مثلاً برای تابعی که دامنهٔ آن $\mathbb{Z}$ باشد، حد در هیچ نقطه‌ای تعریف نشده است در صورتی که دیدیم هر تابع با دامنهٔ $\mathbb{Z}$ در همهٔ نقاط دامنه پیوسته است. قرابت حد و پیوستگی را می‌توان در گزاره زیر که نتیجهٔ فوری تعریف است خلاصه کرد:

(۱۳—۴) **گزاره.** فرض کنید S زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ است و a یک نقطهٔ S که نقطهٔ حدی S نیز می‌باشد. در این صورت f در a پیوسته است اگر و تنها اگر $\lim_{x\to a} f(x)$ وجود داشته و برابر $f(a)$ باشد. □

در واقع اگر a یک نقطه حدی S باشد و $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع، حد f وقتی x به a میل می‌کند مقداری است که اگر $f(a)$ را برابر آن تعریف کنیم، تابع f در a پیوسته می‌شود.

گزارهٔ زیر نیز عیناً مانند گزارهٔ مشابه در مورد پیوستگی ثابت می‌شود و اثبات آن را به خواننده واگذار می‌کنیم.

(۱۳—۵) **گزاره.** فرض کنید S زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ باشد، a یک نقطهٔ حدی S، و $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع. در این صورت $\lim_{x\to a} f(x) = L$ اگر و تنها اگر برای هر دنباله (a_n) از عناصر S که $a_n \longrightarrow a$، داشته باشیم $f(a_n) \longrightarrow L$. □

به کمک این گزاره، همچنان که در مورد مجموع، حاصل‌ضرب و خارج قسمت تابع‌های پیوسته عمل کردیم، گزارهٔ زیر نتیجه می‌شود:

(۱۳—٦) **گزاره.** فرض کنید S یک زیرمجموعهٔ $\mathbb{R}$ است، a یک نقطهٔ حدی S، و $f, g : S \longrightarrow \mathbb{R}$ دو تابع که $\lim_{x\to a} f(x) = L_۱$ و $\lim_{x\to a} g(x) = L_۲$. در این صورت:

الف) حد $f + g$ وقتی x به a میل می‌کند وجود دارد و برابر $L_۱ + L_۲$ است.

ب) حد $f \cdot g$ وقتی x به a میل می‌کند وجود دارد و برابر $L_۱ L_۲$ است.

ج) اگر مضافاً $L_۲ \neq ۰$ و a یک نقطهٔ حدی مجموعهٔ $\{x \in S \mid g(x) \neq ۰\}$ باشد، آنگاه حد $\frac{f}{g}$ وقتی

x به a میل می‌کند وجود دارد و برابر $\frac{L_۱}{L_۲}$ است. □

در (ج) توجه کنید که مجموعه $\{x \in S \mid g(x) \neq ۰\}$ در واقع دامنهٔ تعریف $\frac{f}{g}$ است و برای اینکه $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ مطرح شود، لازم است که a یک نقطهٔ حدی این مجموعه باشد. اثبات گزارهٔ بالا که عیناً مانند گزارهٔ مشابه در مورد تابع‌های پیوسته است به خواننده واگذار می‌شود.

(۱۳—۷) چند مثال حد

(۱۳—۷—۱) فرض کنید در مورد وجود، و در صورت وجود، مقدار $\lim_{x\to ۱} \frac{x^n - ۱}{x-۱}$ سؤال شده است که در آن n یک عدد صحیح مثبت است. چون $f(x) = x - ۱$ یک تابع پیوسته است، حد آن وقتی $x \to ۱$ برابر مقدار $f(۱)$، یعنی ۰، است. پس نمی‌توان از قضیهٔ خارج‌قسمت در این مورد استفاده کرد. ولی از آنجا که وجود حد و مقدار آن هیچ‌گونه ارتباطی با مقدار یک تابع در نقطهٔ مورد نظر ندارد، می‌توان با شرط $x \neq ۱$، یعنی در دامنهٔ $S = \mathbb{R} - \{۱\}$، تابع $\frac{x^n-۱}{x-۱}$ را در نظر گرفت. چون $x = ۱$ یک نقطهٔ حدی S است، می‌توان به هر حال $\lim_{x\to ۱} \frac{x^n-۱}{x-۱}$ را مطرح کرد. حال در نقاط دامنه که $x \neq ۱$، داریم $\frac{x^n-۱}{x-۱} = x^{n-۱} + x^{n-۲} + \cdots + ۱$. بنابراین $\lim_{x\to ۱} \frac{x^n-۱}{x-۱} = \lim_{x\to ۱}(x^{n-۱} + \cdots + ۱)$ که چون چندجمله‌ای $x^{n-۱} + \cdots + x + ۱$ یک تابع پیوسته تعریف می‌کند، حد آن وقتی $x \to ۱$ برابر مقدار تابع یعنی n است.

تعداد زیادی از حدهای مقدماتی را می‌توان به روش بالا محاسبه کرد. در واقع همچنان که در بررسی مفهوم مشتق خواهیم دید، تعریف حد و تمایز آن از مقدار تابع، از بررسی عبارت‌هایی که صورت و مخرج هر دو به صفر میل می‌کنند وقتی متغیر به نقطه‌ای حدی از دامنه میل می‌کند، سرچشمه گرفته است.

(۱۳—۷—۲) (دو حد اساسی مثلثاتی) در مورد وجود و مقدار حدهای زیر بحث می‌کنیم:

$$\lim_{\theta\to ۰} \frac{\sin\theta}{\theta} \quad , \quad \lim_{\theta\to ۰} \frac{۱-\cos\theta}{\theta} \qquad (\theta \text{ برحسب رادیان})$$

توجه کنید که دامنه تعریف هر دو تابع بالا، یعنی $\frac{\sin\theta}{\theta}$ و $\frac{۱-\cos\theta}{\theta}$، مجموعهٔ اعداد حقیقی ناصفر،

$\mathbb{R} - \{0\}$ است، و نقطهٔ ۰ نقطهٔ حدی دامنه است، پس مفهوم حد مطرح شدنی است.

برای $\theta \neq 0$، و $|\theta| < \frac{\pi}{2}$، با توجه به شکل ۱ داریم:

$$(\theta > 0) \quad \sin\theta < \theta < \tan\theta$$

$$(\theta < 0) \quad \tan\theta < \theta < \sin\theta$$

بنابراین برای $\theta \neq 0$:

$$1 < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{1}{\cos\theta}$$

در بخش ۱۰ دیدیم که $\cos\theta$ تابعی پیوسته از θ است، پس $\frac{1}{\cos\theta}$ به ۱ میل می‌کند وقتی $\theta \to 0$. تابع ثابت ۱ نیز دارای حد ۱ است وقتی $\theta \to 0$. به سادگی دیده می‌شود که چون $\frac{\theta}{\sin\theta}$ بین ۱ و $\frac{1}{\cos\theta}$ قرار دارد و هردوی این توابع به مقدار واحدی، در اینجا ۱، میل می‌کنند، $\lim_{\theta\to 0}\frac{\theta}{\sin\theta} = 1$. بنابراین طبق گزاره ۱۳—۶، ج، داریم $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$.

از طرفی دیگر $1 - \cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$، پس:

$$\frac{1-\cos\theta}{\theta} = (\sin\frac{\theta}{2})\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}$$

چون تابع سینوس در صفر پیوسته است $\lim_{\theta\to 0}\sin\frac{\theta}{2} = \lim_{\frac{\theta}{2}\to 0}\sin\frac{\theta}{2} = 0$ و نیز $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}} = \lim_{\frac{\theta}{2}\to 0}\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}} = 1$ پس طبق ۱۳—۶، ب، $\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta} = 0$.

(۱۳—۷—۳) آیا می‌توان نوشت $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\frac{1}{\theta}}{\sin\frac{1}{\theta}} = 1$؟ سؤال اساسی در اینجا این است که آیا $\theta = 0$ یک نقطهٔ حدی دامنه تعریف است یا نه؟ اگر چنین باشد، و اگر در دامنهٔ تعریف داشته باشیم $\sin\frac{1}{\theta} \neq 0$، آنگاه با یک تابع ثابت با مقدار ۱ سروکار داریم که حد آن در هر نقطه حدی برابر ۱ خواهد بود. تابع داده شده فقط در نقاطی که مخرج صفر شود قابل تعریف شدن نیست و اینها عبارتند از مقادیر:

$$\theta = 0, \pm\frac{1}{\pi}, \pm\frac{1}{2\pi}, \pm\frac{1}{3\pi}, \ldots$$

بنابراین دامنهٔ تعریف عبارت است از

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0, x \neq \frac{\pm 1}{n\pi}, n = 1, 2, 3, \ldots\}$$

توجه کنید که ۰ یک نقطهٔ حدی S است زیرا که مثلاً دنبالهٔ متمایز نقاط S:

$$a_n = \frac{۱}{n\pi + \frac{\pi}{۲}} \quad , \quad n = ۱, ۲, ۳, \ldots$$

به ۰ میل می‌کند. بنابراین با تعریف ارائه شده از حد می‌توان نوشت $\lim_{\theta \to ۰} \frac{\sin \frac{۱}{\theta}}{\sin \frac{۱}{\theta}} = ۱$. در واقع اگر در همهٔ نقاط $\mathbb{R}$ که خارج از S هستند، مقدار تابع را برابر ۱ تعریف کنیم، تابع ثابت ۱ روی همهٔ $\mathbb{R}$ به‌دست می‌آید.

(۱۳—۷—۴) فرض کنید $f, g : S \longrightarrow \mathbb{R}$ تعریف شده‌اند، a یک نقطهٔ حدی S است، $\lim_{x \to a} f(x) = ۰$ و g یک تابع کراندار است، یعنی عددی $M > ۰$ وجود دارد که $|g(x)| \leq M$ برای هر $x \in S$. در این صورت ادعا می‌کنیم

$$\lim_{x \to a} ((f \cdot g)(x)) = ۰$$

فرض کنید $e > ۰$ داده شده است. چون $\lim_{x \to ۰} f(x) = ۰$، $\delta > ۰$ وجود دارد که هرگاه $x \in S$ و $۰ < |x - a| < \delta$، آنگاه:

$$|f(x) - ۰| < \frac{e}{M}$$

پس با این شرط روی x، داریم $|f(x)g(x)| < e$ و حکم به اثبات می‌رسد.

(۱۳—۷—۵) در مورد $\lim_{x \to ۰} \sin \frac{۱}{x}$ بحث کنید. عبارت $\sin \frac{۱}{x}$ به‌ازای هر $x \neq ۰$ تعریف شده است، پس $x = ۰$ یک نقطهٔ حدی دامنه است و $\lim_{x \to ۰} \sin \frac{۱}{x}$ قابل طرح کردن است. اگر $\lim_{x \to ۰} \sin \frac{۱}{x}$ وجود داشته باشد و برابر L باشد، باید برای هر دنباله (a_n) از اعداد حقیقی ناصفر (داخل دامنه) که $a_n \longrightarrow ۰$، داشته باشیم $\sin \frac{۱}{a_n} \longrightarrow L$. اگر a_n را برابر $\frac{۱}{n\pi}$، $n = ۱, ۲, \ldots$ بگیریم، داریم $\sin \frac{۱}{\frac{۱}{a_n}} = \sin n\pi = ۰ \longrightarrow ۰$، پس اگر حد وجود داشته باشد برابر ۰ است. از طرفی دیگر، اگر بگیریم $a_n = \frac{۱}{۲n\pi + \frac{\pi}{۲}}$، داریم $\sin a_n = \sin(۲n\pi + \frac{\pi}{۲}) = ۱$ و دنبالهٔ ثابت ۱ به ۰ میل نمی‌کند. پس حد وجود ندارد.

(۱۳—۷—۶) علیرغم عدم وجود $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$، چون $\sin\frac{1}{x}$ برای $x \neq 0$ کراندار است، اگر n یک عدد صحیح مثبت باشد، طبق ۱۳—۷—۴ داریم $\lim_{x\to 0} x^n \sin\frac{1}{x} = 0$.

در باقیماندهٔ این بخش تعمیم‌هایی از مفهوم حد را در نظر می‌گیریم. بالاخص به توصیف نمادهایی مانند نمادهای زیر می‌پردازیم:

$$\ldots, \lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty, \lim_{x\to a} f(x) = +\infty, \lim_{x\to -\infty} f(x) = L, \lim_{x\to +\infty} f(x) = L$$

(۱۳—۸) تعریف $\lim_{x\to +\infty} f(x) = L$ کاملاً مشابه تعریف حد دنباله‌ای است با این تفاوت که در مورد دنباله‌ها متغیر x فقط مقادیر عدد صحیح از یک k به بعد را سیر می‌کند، ولی در اینجا دامنهٔ تعریف f، یعنی x های مجاز، یک بازهٔ به شکل $[A, +\infty[$ یا $]A, +\infty[$ را تشکیل می‌دهند. فرض کنید دامنهٔ تعریف f بازه‌ای به شکل $[A, +\infty[$ یا $]A, +\infty[$ باشد. در این صورت $\lim_{x\to +\infty} f(x) = L$ بدین معنی است که برای هر $e > 0$ داده شده، وجود داشته باشد عدد حقیقی M به طوری که برای هر x در دامنهٔ f که $x > M$، داشته باشیم $|f(x) - L| < e$. مشابهاً $\lim_{x\to -\infty} f(x) = L$ برای تابع‌های f تعریف می‌شود که دامنه‌های آنها به شکل $]-\infty, A]$ یا $]-\infty, A[$ باشد و در اینجا $\lim_{x\to -\infty} f(x) = L$ به این معنی است که برای هر $e > 0$، عدد حقیقی M وجود داشته باشد که برای هر x در دامنه f با $x < M$ داشته باشیم $|f(x) - L| < e$.

برای دنبالهٔ اعداد حقیقی (a_n)، می‌نویسیم $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ در صورتی که برای هر $M > 0$، وجود داشته باشد عدد صحیح N که هرگاه $n > N$، آنگاه $a_n > M$. تمرین زیر اثباتی مشابه قضیهٔ متناظر برای حد معمولی دارد.

تمرین. فرض کنید f روی $[A, +\infty[$ تعریف شده است. نشان دهید $\lim_{x\to +\infty} f(x) = L$ اگر و تنها اگر برای هر دنبالهٔ اعداد حقیقی (a_n) که $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ داشته باشیم $\lim_{n\to +\infty} f(a_n) = L$.

(۱۳—۹) حال فرض کنید تابعی f روی دامنه $]a, b[$ تعریف شده است که در آن $b \in \mathbb{R}$ و a می‌تواند یک عدد حقیقی کوچکتر از b یا $-\infty$ باشد. مفهوم $\lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty$ (تابع f

به $+\infty$ میل می‌کند وقتی x از سمت چپ به b میل کند) این است که برای هر $M > 0$، وجود دارد $\delta > 0$ که هرگاه x در دامنه f بوده و در بازه $]b-\delta, b[$ باشد، آنگاه $f(x) > M$. مشابهاً $\lim_{x\to b^+} f(x) = +\infty$، $\lim_{x\to b^-} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to b^+} f(x) = -\infty$ تعریف می‌شوند. وقتی می‌نویسیم $\lim_{x\to b} f(x) = +\infty$ مقصود این است که دامنهٔ تعریف شامل یک بازهٔ محذوف $]x-\rho, x+\rho[$، $\rho > 0$، است و برای هر $M > 0$، $\delta > 0$ وجود دارد که هرگاه x در دامنه f بوده و در بازه محذوف $]x-\delta, x+\delta[-\{x\}$ قرار گیرد، آنگاه $f(x) > M$. به سادگی مشاهده می‌شود که این معادل برقراری دو شرط $\lim_{x\to b^+} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty$ است.

(۱۳—۱۰) بالاخره این تذکر لازم است که مفاهیم حد راست و چپ به طور کلی در چارچوب ارائه شده برای حد قابل بیان است. وقتی می‌نویسیم $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$، یعنی در واقع دامنهٔ تعریف f را به آن x های دامنهٔ f که بزرگتر از a هستند محدود کرده‌ایم و حد تابع محدود شده را بررسی می‌کنیم. فرض کنید D دامنهٔ تعریف f باشد. برای اینکه $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$ قابل طرح شدن باشد اولاً باید a یک نقطهٔ حدی مجموعهٔ $D\cap]a, +\infty[$ باشد. سپس برای هر $e > 0$، باید $\delta > 0$ وجود داشته باشد که برای هر $x \in D$ که $a < x < a+\delta$ داشته باشیم $|f(x) - L| < e$. مفهوم حد چپ نیز به طور مشابه تعریف می‌شود.

مفهوم مشتق

یکی از دو رکن اصلی حساب دیفرانسیل و انتگرال، مفهوم مشتق است. متبلور شدن ایدهٔ مشتق و به‌کارگیری مؤثر آن پاسخگوی چند نیاز ریاضی و علمی ریشه‌دار است. پس از رواج فرمول‌بندی مسایل ریاضی به صورت جبری و به خصوص پیدایش زمینهٔ هندسهٔ تحلیلی، مفهوم مشتق در طی قرن هفدهم میلادی در آثار ریاضیدانان مختلف ظاهر شد و در کارهای ریاضی نیوتن و لایب‌نیتس به صورت‌بندی جامعتری رسید و ارتباط آن با مفهوم "انتگرال" که به اعتباری سابقهٔ تاریخی دیرینه‌تر داشت روشن گردید. تعریف مشتق که در آغاز از دقت ریاضی مرسوم برخوردار نبود، مدت‌ها مورد انتقاد و نارضایتی تعدادی از دانشمندان و فلاسفه قرار داشت و حتی گاهی موجب مناقشات جدی ریاضی می‌شد. این مشکلات به مدت دو قرن همچنان دامنگیر حساب دیفرانسیل و انتگرال بود تا با شکل گرفتن مفهوم حد، صورت امروزی خود را یافت. در زیر ما با استفاده از مفهوم حد، به معرفی مشتق می‌پردازیم. می‌توان نیازهایی را که به پیدایش مفهوم مشتق منجر شد حول دو محور "آهنگ تغییر لحظه‌ای" و "مسالهٔ مماس" مطرح کرد. از نظر تاریخی مسأله مماس بود که منجر به تعریف مشتق شد ولی پس از چندی کاربرد مشتق در تعیین آهنگ تغییر لحظه‌ای نیز معلوم شد و مشتق به عامل تعیین کننده‌ای در رشد علم مکانیک مبدل گردید. جای تعجب است که نیوتن که خود حدود پانزده سال پس از مطالعاتش در حساب دیفرانسیل و انتگرال، مکانیک کلاسیک را نیز پایه گذاشت، در کتاب بزرگ مکانیک خود Principia Mathematica از مفهوم مشتق استفاده نکرده است و به‌کارگیری حساب دیفرانسیل و انتگرال در مکانیک، برخلاف تصوری که طبیعی نیز به نظر می‌رسد، سال‌ها بعد در میان ریاضیدانان سوییس، فرانسه و آلمان رایج شد.

(۱۴—۱) **آهنگ تغییر لحظه‌ای.** شاید ساده‌ترین مثال از این نوع مسأله، صورت‌بندی دقیق مفهوم سرعت یک متحرک است. در ساده‌ترین حالت یک متحرک نقطه‌ای را در نظر بگیرید که روی یک خط راست جهت‌دار و مدرج حرکت می‌کند. مکان متحرک در زمان t به صورت تابعی از زمان، t، $s = f(t)$، داده شده است (شکل ۱).

می‌خواهیم مفهوم "سرعت" (= آهنگ تغییر مکان) را برای این حرکت بررسی کنیم. برای خط راست داده شده جهت قایل شده‌ایم، بدین ترتیب مثلاً حرکت به طرف راست، تغییر مکان در جهت مثبت و حرکت به سمت چپ، تغییر مکان در جهت منفی تلقی می‌شود. سرعت متوسط یا میانگین سرعت متحرک از زمان $t_۱$ تا زمان $t_۲$، به صورت نسبت $\frac{f(t_۲)-f(t_۱)}{t_۲-t_۱}$ تعریف می‌شود که در واقع متوسط مسافت طی شده (با منظور کردن جهت) در واحد زمان است. اگر حرکت به صورت یکنواخت در یکی از دو جهت صورت گیرد، نسبت $\frac{f(t_۱)-f(t_۱)}{t_۲-t_۱}$ همواره مقدار ثابتی است، یعنی نه به زمان شروع اندازه‌گیری، نه به زمان پایان اندازه‌گیری، و نه به طول مدت اندازه‌گیری، بستگی نخواهد داشت. در این وضعیت است که مسافت پیموده شده حاصل‌ضرب این سرعت ثابت (یکنواخت) در طول بازهٔ زمانی حرکت است. موضوع وقتی پیچیده می‌شود که حرکت یکنواخت نباشد، یعنی سرعت متغیر باشد. در این صورت سرعت متوسط در بازهٔ زمانی $[t_۱, t_۲]$ ممکن است اطلاع قابل استفاده‌ای در مورد شیوهٔ حرکت در یک بازهٔ خاص زمانی کوچکتر ندهد به خصوص اگر $[t_۱, t_۲]$ به نسبت بزرگ باشد. برای کسب اطلاع دقیق‌تر در مورد سرعت حرکت در حوالی زمان t بهتر است دو بازهٔ زمانی $t_۱$ و $t_۲$ نزدیک به t در نظر بگیریم که $t_۱ < t < t_۲$ و به سرعت متوسط $\frac{f(t_۲)-f(t_۱)}{t_۲-t_۱}$ نگاه کنیم. هر چه $t_۱$ و $t_۲$ به t نزدیکتر باشند، سرعت متوسط به‌دست آمده انعکاس دقیق‌تری از کیفیت حرکت حوالی زمان t است. آیا می‌توان به "سرعت در لحظه t" معنی دقیقی نسبت داد؟ اگر طول بازهٔ زمانی را صفر بگیریم، یعنی $t_۱ = t = t_۲$، آنگاه $f(t_۱) = f(t_۲)$ و صورت و مخرج کسر $\frac{f(t_۲)-f(t_۱)}{t_۲-t_۱}$ هر دو صفر می‌شوند و این عبارت معنی ندارد. راه گریز این است که سرعت در لحظهٔ t را در واقع یک حد تلقی کنیم، یعنی حد سرعت متوسط وقتی طول بازهٔ زمانی به صفر میل می‌کند. به بیان دیگر، حد زیر، در صورت وجود، به

سرعت متحرک در زمان t تعبیر می‌شود:

$$\lim_{h\to \circ} \frac{f(t+h)-f(t)}{h} \qquad (۱)$$

ممکن است این کسر متقارن به نظر نرسد، یعنی تصور شود که فقط تغییر مسافت در یک طرف بازهٔ زمانی نسبت به t دخیل می‌شود. در واقع چون نزدیک شدن h به $\circ$ هم از طرف راست و هم از طرف چپ منظور می‌شود، تقارن خود به خود اعمال می‌شود. تمرین زیر این ادعا را به طور قاطع‌تر ثابت می‌کند.

تمرین. اگر حد (۱) وجود داشته باشد، ثابت کنید حد زیر نیز موجود است و برابر حد (۱) می‌باشد:

$$\lim_{R\to \circ} \frac{f(t+h)-f(t-h)}{۲h} \qquad (۲)$$

اگر به جای تغییر مکان و مسافت، کمیت متغیر دیگری نسبت به زمان را به $f(t)$ نمایش دهیم، مجدداً می‌توان آهنگ تغییر لحظه‌ای f در زمان t را به صورت (۱) تعریف کرد. از این کلی‌تر، اگر دو کمیت x و y با رابطهٔ تابعی $y=f(x)$ به هم مربوط باشند، آهنگ تغییر y نسبت به x به صورت حد زیر تعریف می‌شود:

$$\lim_{h\to \circ} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad (۳)$$

به شرطی که این حد وجود داشته باشد.

(۱۴ــ۲) مسأله مماس. همهٔ ما ایده‌ای شهودی و کاملاً روشن از تمایز میان مماس بودن و متقاطع بودن دو منحنی داریم ولی بیان دقیق ریاضی این تمایز آسان به نظر نمی‌رسد. در عهد باستان ریاضیدانان خط مماس بر منحنی را برای هر یک از تعداد محدود منحنی‌هایی که در آن دوران مورد بررسی عمیق قرار گرفته بود به کمک ویژگی‌های خاصی تعریف می‌کردند. مثلاً خط L بر دایرهٔ C در نقطهٔ T مماس محسوب می‌شد اگر شعاع OT بر خط L عمود باشد. همین طور خط L بر بیضی E در نقطهٔ T مماس محسوب می‌شد اگر زاویه‌های بین L و خطوط واصل از T به دو کانون بیضی برابر

باشند (اگر بیضی را مقطع یک سطح صیقل تصور کنیم و قانون فیزیکی زاویهٔ تابش = زاویهٔ بازتاب، را اعمال کنیم اشعهٔ نور ساطع از یک کانون پس از برخورد با بیضی از کانون دیگر خواهد گذشت)، و به همین ترتیب خط مماس بر سهمی و هذلولی نیز تعریف می‌شد. این تعریف‌ها همه برخاسته از دانش و شناخت دقیق منحنی‌های خاص بودند و یک تعریف کلی برای مماس بودن یک خط راست بر یک منحنی نامشخص، یا مماس بودن دو منحنی، وجود نداشت. پس از آنکه هندسهٔ تحلیلی امکان ارائه کردن بی‌شمار منحنی متنوع را ممکن ساخت، ضرورت یک تعریف کلی و قابل استفاده از "مماس بودن" در مسایل هندسی نمایان‌تر گردید. راه‌حل زیر برای تعریف خط مماس بر یک منحنی $\mathcal{C}$ در نقطهٔ T از منحنی در قرن هفدهم کاملاً متداول شده بود.

روی منحنی در نزدیکی نقطهٔ T، نقطهٔ متحرکی P را در نظر می‌گیریم که تدریجاً به P نزدیک‌تر می‌شود. در هر وضعیت نقطهٔ P، وقتی هنوز به T نرسیده است، خط راست گذرا از P و T را در نظر می‌گیریم. در شکل ۲، این خط برای وضعیت‌های گوناگون $P_۱$، $P_۲$، $P_۳$، ... از نقطهٔ P نمایش داده شده است. وقتی P به T نزدیک می‌شود اگر این خط راست به وضعیت مشخصی، مانند t در شکل ۲، نزدیک شود، این "وضعیت حدی" را خط مماس بر $\mathcal{C}$ در نقطهٔ T می‌نامیم. برای نوشتن معادلهٔ این خط کافی است شیب آن معلوم شود زیرا که یک نقطهٔ خط، یعنی T، داده شده است. فرض کنید قطعه‌ای از منحنی $\mathcal{C}$ که در نزدیکی P قرار دارد به صورت نمودار تابعی $y = f(x)$ قابل نمایش دادن است و مختصات T به صورت $(x_\circ, y_\circ) = (x_\circ, f(x_\circ))$ می‌باشد. حال اگر مختصات نقطهٔ متحرک P را به $(x, y) = (x, f(x))$ نمایش دهیم، شیب خط گذرا از P و T برابر است با

$$\frac{f(x) - f(x_\circ)}{x - x_\circ} \tag{۴}$$

وقتی P به T میل کند، حد عبارت فوق، در صورت وجود، به

$$\lim_{x \to x_\circ} \frac{f(x) - f(x_\circ)}{x - x_\circ} \tag{۵}$$

نمایش داده می‌شود. توجه کنید که اگر بنویسیم $x = x_\circ + h$، حد بالا را می‌توان به

$$\lim_{h \to \circ} \frac{f(x_\circ + h) - f(x_\circ)}{h} \tag{٦}$$

نمایش داد که از نوع آهنگ تغییر، یعنی (۳)، است. با توجه به شباهت عبارت‌های (۱)، (۳) و (٦)، ارائه و بررسی تعریف زیر کاملاً طبیعی به نظر می‌رسد:

(۱۴—۳) تعریف. فرض کنید $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع است و a یک نقطهٔ درونی S، یعنی $\delta > \circ$ وجود دارد که بازهٔ $]a-\delta, a+\delta[$ در S قرار دارد. در این صورت f را مشتق‌پذیر در a می‌نامیم در صورتی که حد زیر وجود داشته باشد:

$$\lim_{h \to \circ} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \qquad (۷)$$

در صورت وجود، حد بالا را به $f'(a)$ نمایش داده، آن را مشتق f در نقطهٔ a می‌نامیم. تابع f را مشتق‌پذیر می‌نامیم در صورتی که f در همهٔ نقاط دامنهٔ خود مشتق‌پذیر باشد.

(۱۴—۴) یادداشت. در بالا فرض کردیم a یک نقطهٔ درونی بازهٔ تعریف f است. در واقع اگر a یک عضو دامنه و نیز یک نقطهٔ حدی دامنه باشد، بررسی حد (۷) معنی دارد. علت محدود کردن تعریف به نقاط درونی دامنه فقط این است که بیشتر کاربردهای مورد نظر ما به این حالت محدود می‌شوند و لزومی ندارد حالت‌های کلی‌تری که بعضاً پیچیدگی‌های نامطلوبی دارند در اینجا مطرح کنیم. دو مورد استثنایی بعضاً مورد استفاده قرار خواهند گرفت. اگر $\delta > \circ$ وجود داشته باشد که $[a, a+\delta[$ در دامنهٔ تابع قرار گیرد، می‌توانیم h را به مقادیر مثبت محدود کنیم که در این صورت "حد یک‌طرفه" $\lim_{h\to\circ^+}$ بدین معنی است که فقط مقادیر $h > \circ$ در نظر گرفته شده است. حد

$$\lim_{h \to \circ^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \qquad (۸)$$

را مشتق f از راست در نقطهٔ a می‌نامیم و به $f'_+(a)$ نمایش می‌دهیم. به همین ترتیب $f'_-(a) = \lim_{h\to\circ^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ نیز که مشتق f از چپ در نقطهٔ a خوانده می‌شود، مطرح شدنی است.

به تعریف اصلی باز می‌گردیم و مسأله مماس را پیگیری می‌کنیم. فرض کنید تابع f در نقطهٔ a مشتق‌پذیر است. بدین ترتیب نمودار f حول a یک منحنی است که در نقطهٔ $(a, f(a))$ دارای خط

مماس به شیب $f'(a)$ می‌باشد. چون $f'(a)$ یک عدد حقیقی است، در این حالت مماس بر منحنی نمی‌تواند حالت قائم داشته باشد. معادلهٔ خط مماس عبارت است از

$$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a) \tag{۹}$$

(۱۴—۵) چند مثال.

(۱۴—۵—۱) نشان می‌دهیم تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$، $f(x) = Ax + B$، A و B ثابت، مشتق‌پذیر است و مشتق آن را محاسبه می‌کنیم. در نقطهٔ $x_\circ$ از دامنه داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to x_\circ} \frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ} &= \lim_{x\to x_\circ} \frac{(Ax+B)-(Ax_\circ+B)}{x-x_\circ} \\ &= \lim_{x\to x_\circ} \frac{A(x-x_\circ)}{x-x_\circ} \end{aligned}$$

چون حد عبارت فوق وقتی $x \to x_\circ$ مطرح است، مقدار $x = x_\circ$ در نظر گرفته نمی‌شود، پس می‌توان $x - x_\circ$ را از صورت و مخرج حذف کرد و داریم $f'(x_\circ) = A$. البته نمودار f خط راستی با شیب A است و بدین ترتیب خط مماس بر این خط در هر نقطه، خود آن خط می‌شود. بالاخص توجه کنید که مشتق تابع ثابت $f(x) = B$ همه‌جا صفر است.

(۱۴—۵—۲) تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت $f(x) = cx^n$ در نظر می‌گیریم که در آن، c یک عدد حقیقی داده شده است و n یک عدد صحیح مثبت می‌باشد. داریم

$$\begin{aligned} \lim_{x\to x_\circ} \frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ} &= \lim_{x\to x_\circ} \frac{cx^n-cx_\circ^n}{x-x_\circ} \\ &= \lim_{x\to x_\circ} [c\frac{x^n-x_\circ^n}{x-x_\circ}] \end{aligned}$$

مجدداً برای محاسبهٔ حد، $x - x_\circ = \circ$ مطرح نیست، پس

$$\frac{x^n - x_\circ^n}{x - x_\circ} = x^{n-۱} + x^{n-۲}x_\circ + \cdots + xx_\circ^{n-۲} + x_\circ^{n-۱}$$

حال چندجمله‌ای طرف راست تابعی پیوسته نسبت به x تعریف می‌کند، پس حد آن وقتی $x \longrightarrow x_\circ$ برابر می‌شود با $nx_\circ^{n-1}$، و داریم:

$$\lim_{x \to x_\circ} \frac{f(x) - f(x_\circ)}{x - x_\circ} = cnx_\circ^{n-1}$$

(۱۴–۵–۳) می‌خواهیم معادلهٔ خط مماس بر بیضی $\frac{x^۲}{۱۶} + \frac{y^۲}{۹} = ۱$ را در نقطهٔ $(۲, -\frac{۳\sqrt{۳}}{۲})$ بنویسیم. تحقیق کنید که این نقطه روی بیضی قرار دارد. باید جزیی از بیضی شامل نقطهٔ $(۲, -\frac{۳\sqrt{۳}}{۲})$ را به صورت نمودار تابعی $y = f(x)$ بنویسیم و به‌ازای $x = ۲$ مشتق تابع را محاسبه کنیم تا شیب خط مماس به‌دست آید. از معادلهٔ بیضی داده شده داریم:

$$y = \pm \frac{۳}{۴} \sqrt{۱۶ - x^۲}$$

که از آن دو تابع استخراج می‌شود، یکی شاخهٔ بالایی بیضی و دیگری شاخهٔ پایینی آن. نقطهٔ $(۲, -۳\frac{\sqrt{۳}}{۲})$ روی شاخهٔ پایینی قرار دارد، بنابراین از تابع $f(x) = -\frac{۳}{۴}\sqrt{۱۶ - x^۲}$ استفاده می‌کنیم. برای $x_\circ = ۲$ داریم

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_\circ} \frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ} &= \lim_{x \to ۲} \frac{-\frac{۳}{۴}\sqrt{۱۶-x^۲}+\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}}{x-۲} \\ &= \lim_{x \to ۲} (-\frac{۳}{۴}) \frac{\sqrt{۱۶-x^۲}-۲\sqrt{۳}}{x-۲} \end{aligned}$$

وقتی $x \longrightarrow ۲$ صورت و مخرج کسر هر دو به صفر میل می‌کنند، بنابراین سعی می‌کنیم کسر را از عوامل احتمالی مشترک ساده کنیم. در عبارت‌های این گونه معمولاً ضرب کردن صورت و مخرج در "مزدوج" عبارت رادیکالی، در اینجا $\sqrt{۱۶ - x^۲} + ۲\sqrt{۳}$، مؤثر واقع می‌شود. داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_\circ} \frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ} &= \lim_{x \to ۲} (-\frac{۳}{۴}) \frac{(۱۶-x^۲)-۱۲}{(x-۲)(\sqrt{۱۶-x^۲}+۲\sqrt{۳})} \\ &= \lim_{x \to ۲} (+\frac{۳}{۴}) \frac{x+۲}{(\sqrt{۱۶-x^۲}+۲\sqrt{۳})} \end{aligned}$$

حال توجه کنید که صورت و مخرج هر دو تابع‌های پیوسته نسبت به x هستند و برای محاسبهٔ حد به‌ازای $x \longrightarrow ۲$ می‌توان مقدار $x = ۲$ را جایگزین کرد، پس:

$$\lim_{x \to x_\circ} \frac{f(x) - f(x_\circ)}{x - x_\circ} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}$$

نتیجه اینکه معادلهٔ خط مماس عبارت است از $y+3\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}(x-2)$.

(۱۴–۵–۴) تابع $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ را به صورت $f(x)=|x|$ در نظر می‌گیریم و مشتق‌پذیری آن را در نقاط گوناگون $x_\circ$ بررسی می‌کنیم. اگر $x_\circ>\circ$، قطعهٔ کوچکی از نمودار $f(x)=|x|$ بر نمودار $g(x)=x$ منطبق است و از آنجا که مشتق فقط به مقادیر تابع برای x های نزدیک $x_\circ$ (برای مشتق‌گیری) بستگی دارد، مشتق f در نقطهٔ $x_\circ$ برابر مشتق g در نقطهٔ $x_\circ$، یعنی ۱ است. این با انتظار طبیعی که خط مماس بر نمودار به‌ازای $x_\circ>\circ$ باید خط $y=x$ باشد سازگار است.

همین طور برای $x_\circ<\circ$، مشتق تابع برابر ۱− به‌دست می‌آید و خط $y=-x$ بر نمودار در نقطهٔ $(x_\circ,|x_\circ|)$ مماس است. حال نقطهٔ $x_\circ=\circ$ را بررسی می‌کنیم. حد زیر، در صورت وجود، مورد نظر است:

$$\lim_{x\to\circ}\frac{|x|-\circ}{x-\circ}=\lim_{x\to\circ}\frac{|x|}{x}$$

اگر دنباله‌ای از اعداد مثبت مثلاً $x_n=\frac{1}{n}$ در نظر بگیریم که $x_n\longrightarrow\circ$، اگر حد وجود داشته باشد، باید $\frac{|x_n|}{x_n}$ به آن حد میل کند. برای $x_n=\frac{1}{n}>\circ$، داریم $|x_n|=x_n$، پس $\frac{|x_n|}{x_n}=1$، بنابراین حد، در صورت وجود باید برابر ۱ باشد. ولی اگر دنباله‌ای از اعداد منفی، مثلاً $x_n=-\frac{1}{n}$ را در نظر بگیریم که $x_n\longrightarrow\circ$، داریم $\frac{|x_n|}{x_n}=-1$ و دنبالهٔ ثابت (۱−) به ۱+ میل نمی‌کند. بنابراین تابع در $x_\circ=\circ$ مشتق‌پذیر نیست. توجه کنید که در این مثال مشتق راست و مشتق چپ در $x_\circ=\circ$ وجود دارند، $f'_+(\circ)=1$ و $f'_-(\circ)=-1$.

در پیگیری مسأله مماس، سؤال طبیعی دیگری که مطرح است این است که اگر دو منحنی از یک نقطهٔ $(x_\circ,y_\circ)$ گذر کنند، در چه صورتی این دو منحنی را در آن نقطه "مماس" برهم تعریف می‌کنیم؟ در حالتی که هر دو منحنی در نقطهٔ $(x_\circ,y_\circ)$ دارای خط مماس باشند، دو منحنی مماس بر هم تلقی می‌شوند در صورتی که خط مماس آنها یکی باشد. ولی می‌توان وضعیتی مانند شکل ۴ تجسم کرد که دو منحنی فاقد خط مماس در نقطهٔ مشترک $(x_\circ,y_\circ)$ هستند ولی در عین حال به‌نظر می‌آید که باید آنها را مماس بر یکدیگر تلقی کرد. در اینجا کوشش می‌کنیم تعریف جامعتری از مماس بودن ارائه کنیم که در حالت خاص تعریف خط مماس را شامل شود.

وضعیت‌های شکل‌های ۵ (الف) و ۵ (ب) را مقایسه کنید. در هر دو شکل نمودارهای دو تابع f و g از نقطهٔ مشترک $(x_\circ, y_\circ)$ می‌گذرند. در هر دو شکل، چون f و g پیوسته فرض شده‌اند، فاصلهٔ قائم بین دو نمودار وقتی x به $x_\circ$ نزدیک می‌شود به صفر میل می‌کند. برداشت بعدی ما از دو شکل این است که در (الف) نمودارها متقاطع‌اند و در (ب) مماس می‌باشند.

چگونه می‌توان با یک تعریف دقیق ریاضی این دو وضعیت را از هم تمیز داد؟ در ۵ (الف) اگر قطعهٔ کوچکی از دو نمودار حول $(x_\circ, y_\circ)$ تقریباً خط راست فرض کنیم می‌بینیم که طول پاره‌خط‌های محصور میان دو نمودار به نسبت تقریباً ثابتی کوچک شده و به صفر میل می‌کند. در شکل ۵ (ب)، اگر قطعات کوچکی از نمودار حول $(x_\circ, y_\circ)$ خط راست فرض شوند، این دو خط راست را باید بر هم منطبق فرض کرد و در نتیجه فاصلهٔ عمودی بین دو نمودار در نزدیکی $(x_\circ, y_\circ)$ در مقایسه با ۵ (الف) عملاً صفر است. این برداشت شهودی را می‌توان به صورت دقیقی تعریف کرد:

(۱۴—۶) تعریف. فرض کنید $f, g : S \longrightarrow \mathbb{R}$ دو تابع هستند و $x_\circ$ یک نقطهٔ درونی S است. در این صورت می‌گوییم f بر g در $x_\circ$ مماس است در صورتی که دو شرط زیر برقرار باشند:

الف) $f(x_\circ) = g(x_\circ)$.

ب) $\lim_{x \to x_\circ} \frac{f(x)-g(x)}{x-x_\circ} = \circ$.

شرط (الف) فقط بیانگر این است که نمودار دو تابع باید از یک نقطه بگذرد و در مورد نمودارهای متقاطع نیز برقرار است، ولی توضیح خواهیم داد که شرط (ب) در واقع تمیزدهندهٔ وضعیت مماس بودن است. توجه کنید که قدرمطلق $f(x) - g(x)$ فاصلهٔ قائم دو نمودار به‌ازای مقدار x از متغیر است. شرط (ب) بیانگر این امر است که این فاصلهٔ قائم طوری شدید به صفر میل می‌کند که اگر بر کمیت $x - x_\circ$، که خود نیز به ۰ میل می‌کند، تقسیم شود، هنوز نسبت به صفر میل می‌کند. کسر $\frac{f(x)-g(x)}{x-x_\circ}$ نسبت فاصلهٔ دو نمودار به نزدیکی نقطهٔ x از $x_\circ$ است. میل کردن این نسبت به صفر نشانگر این است که فاصلهٔ قائم دو نمودار شدیدتر از $x - x_\circ$ کوچک می‌شود.

مثال. وضعیت شکل ۴ را بررسی می‌کنیم. داریم $f(0) = g(0)$، پس (الف) برقرار است. برای (ب):

$$\frac{f(x) - g(x)}{x - 0} = \frac{x^2|x|}{x^2 + 1} \leq |x|$$

بنابراین وقتی $x \longrightarrow 0$، نسبت $\frac{f(x)-g(x)}{x-0}$ به صفر میل می‌کند. بنابراین f و g در 0 بر هم مماس‌اند و این در حالی است که هیچ‌یک از دو تابع در $x = 0$ مشتق‌پذیر نیست.

(۱۴—۷) مثال اساسی: خط مماس و تقریب خطی

فرض کنید x_0 یک نقطهٔ درونی دامنهٔ تابع $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ باشد. می‌خواهیم خط مماس بر نمودار f در نقطهٔ $(x_0, f(x_0))$ را از دیدگاه جدیدی بررسی کنیم. کلیه خطوط راست غیرقائم گذرا از نقطهٔ $(x_0, f(x_0))$ را در نظر می‌گیریم (خط قائم را مستثنی کرده‌ایم زیرا که این خط نمودار تابعی از x نیست). معادلهٔ کلی این خطوط هست:

$$y = f(x_0) + m(x - x_0)$$

که m ضریب زاویهٔ خط است. طرف راست کلی‌ترین عبارت تعریف‌کنندهٔ یک تابع درجهٔ یک نسبت به x است که نمودار آن از $(x_0, f(x_0))$ می‌گذرد. می‌خواهیم این موضوع را بررسی کنیم که آیا از میان این توابع درجه یک، تابعی هست که به مفهومی "نزدیکترین" به نمودار f در حوالی نقطهٔ $(x_0, f(x_0))$ باشد؟ اگر "نزدیکترین" را به مفهوم مماس بودن طبق تعریف ۱۴—۶ تعبیر کنیم، نشان می‌دهیم که حداکثر یک تابع درجه یک از این امتیاز برخوردار است. می‌نویسیم $g(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$. شرط (الف) برقرار است و برای (ب):

$$\begin{aligned} \frac{f(x)-g(x)}{x-x_0} &= \frac{f(x)-[f(x_0)+m(x-x_0)]}{x-x_0} \\ &= \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - m \qquad (\text{به فرض } x \neq x_0) \end{aligned}$$

برای بررسی حد این عبارت وقتی $x \longrightarrow x_0$، $x = x_0$ مطرح نیست، پس فرض $x \neq x_0$ و ساده کردن $x - x_0$ مجاز است. پس برای m ثابت، $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0$ اگر و تنها اگر $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ وجود داشته و برابر m باشد. بنابراین در صورت وجود مشتق، $f'(x_0)$، خط راست با شیب $f'(x_0)$ یگانه

خط گذرا از $(x_\circ, f(x_\circ))$ است که به تعبیر ۱۴—٦ بر نمودار f مماس است. با توضیحاتی که قبل از تعریف ۱۴—٦ دادیم، فاصلهٔ قائم بین این خط و نمودار تابع سریعتر از فاصلهٔ قائم هر خط راست دیگر به صفر میل می‌کند. بنابراین اطلاق "خط مماس" به $y = f(x_\circ) + f'(x_\circ)(x - x_\circ)$، در صورت مشتق‌پذیری f در $x_\circ$، توجیه تازه‌ای می‌یابد. توجه کنید که به این تعبیر، شرطی لازم و کافی برای مشتق‌پذیری f در نقطهٔ $x_\circ$ وجود خط مماس غیرقائم برای نمودار در نقطهٔ $(x_\circ, f(x_\circ))$ است. معادلاً مشتق‌پذیری f در $x_\circ$ بدین معنی است که یک تابع درجه یک مماس بر f در نقطهٔ $x_\circ$ وجود داشته باشد. این تابع درجه یک، یعنی

$$g(x) = f(x_\circ) + f'(x_\circ)(x - x_\circ) \qquad (۱۰)$$

را تقریب خطی f در $x_\circ$ نیز می‌نامیم. با توجه به توضیحات ارائه شده، در میان همهٔ تابع‌های درجهٔ ۱، تقریب خطی نزدیک‌ترین مقدار به f را در نزدیکی $x_\circ$ دارد. از این ویژگی در جلسات آینده استفاده‌هایی عملی ذکر خواهیم کرد.

این بحث را با گزارهٔ ساده زیر به اتمام می‌رسانیم:

(۱۴—۸) گزاره. اگر f در $x_\circ$ مشتق‌پذیر باشد، f در $x_\circ$ پیوسته است.

برهان. از آنجا که $\frac{f(x)-[f(x_\circ)+f'(x_\circ)(x-x_\circ)]}{x-x_\circ}$ و $(x - x_\circ)$ هر دو به صفر میل می‌کنند، حاصلضرب آنها نیز به صفر میل می‌کند وقتی x به $x_\circ$ میل کند، ولی

$$\lim_{x\to x_\circ} \{f(x) - [f(x_\circ) + f'(x_\circ)(x - x_\circ)]\} = \lim_{x\to x_\circ} (f(x) - f(x_\circ))$$

که صفر بودن این حد بدین معنی است که $\lim_{x\to x_\circ} f(x)$ وجود داشته و برابر $f(x_\circ)$ باشد. $\square$

نتایج اولیهٔ مشتق‌پذیری

در جلسهٔ قبل مفهوم مشتق و مشتق‌پذیری مورد بررسی قرار گرفت. در این جلسه نخست با بیان و اثبات یک گزاره در مورد آمیختن جبری توابع مشتق‌پذیر، چند دسته تابع مشتق‌پذیر معرفی می‌کنیم، سپس به ذکر پاره‌ای خواص ابتدایی مشتق می‌پردازیم.

(۱۵—۱) گزاره. فرض کنید تابع‌های $f, g : S \longrightarrow \mathbb{R}$ در نقطهٔ درونی $x_\circ$ از دامنه مشتق‌پذیرند. در این صورت:

الف) $f+g$ در $x_\circ$ مشتق‌پذیر است و $(f+g)'(x_\circ) = f'(x_\circ) + g'(x_\circ)$.

ب) (قانون لایب نیتس) $f \cdot g$ در $x_\circ$ مشتق‌پذیر است و $(f\cdot g)'(x_\circ) = f'(x_\circ)g(x_\circ) + f(x_\circ)g'(x_\circ)$.

ج) قرار دهید $S' = \{x \in S \mid g(x) \neq \circ\}$. فرض کنید $x_\circ$ یک نقطهٔ درونی S' است. در این صورت تابع $\frac{f}{g} : S' \longrightarrow \mathbb{R}$ در $x_\circ$ مشتق‌پذیر است و

$$(\frac{f}{g})'(x_\circ) = \frac{f'(x_\circ)g(x_\circ) - f(x_\circ)g'(x_\circ)}{g(x_\circ)^{۲}}$$

برهان. (الف) $\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_\circ)}{x-x_\circ} = \frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ} + \frac{g(x)-g(x_\circ)}{x-x_\circ}$ و حکم از این که حد مجموع برابر مجموع حدهاست نتیجه می‌شود.

(ب)

$$\begin{aligned}\frac{(f\cdot g)(x)-(f\cdot g)(x_\circ)}{x-x_\circ} &= \frac{f(x)g(x)-f(x_\circ)g(x_\circ)}{x-x_\circ}\\ &= \frac{f(x)g(x)-f(x_\circ)g(x)}{x-x_\circ}+\frac{f(x_\circ)g(x)-f(x_\circ)g(x_\circ)}{x-x_\circ}\\ &= (\frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ})g(x)+f(x_\circ)(\frac{g(x)-g(x_\circ)}{x-x_\circ})\end{aligned}$$

توجه کنید که طبق گزاره ۱۴—۸، چون g در $x_\circ$ مشتق‌پذیر است، g در $x_\circ$ پیوسته نیز هست، پس $g(x) \longrightarrow g(x_\circ)$ وقتی $x \longrightarrow x_\circ$. حکم از اینکه حد مجموع و حاصل‌ضرب برابر مجموع و حاصل‌ضرب حد است نتیجه می‌شود.

(ج)

$$\begin{aligned}\frac{(\frac{f}{g})(x)-(\frac{f}{g})(x_\circ)}{x-x_\circ} &= \frac{f(x)g(x_\circ)-f(x_\circ)g(x)}{(x-x_\circ)g(x)g(x_\circ)}\\ &= [(\frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ})g(x_\circ)-f(x_\circ)\frac{g(x)-g(x_\circ)}{x-x_\circ}]\frac{1}{g(x)g(x_\circ)}\end{aligned}$$

در اینجا نیز حکم از پیوستگی g در $x_\circ$ و قوانین حد مجموع و حاصل‌ضرب نتیجه می‌شود. □

(۱۵—۲) تابع‌های گویا. نخست یک تابع چندجمله‌ای

$$p(x) = a_\circ + a_1 x + \cdots + a_m x^m \qquad (1)$$

را در نظر بگیرید. در مثال‌های ۱۴—۵—۱ و ۱۴—۵—۲ دیدیم که هر تک‌جمله‌ای $a_k x^k$، $k = \circ, 1, \ldots, m$، مشتق‌پذیر است و فرمولی برای مشتق آن پیدا کردیم. پس با توجه به ۱۵—۱ (الف)، این چندجمله‌ای به‌ازای هر x مشتق‌پذیر است و در واقع

$$p'(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots + m a_m x^{m-1} \qquad (2)$$

حال فرض کنید $q(x) = b_\circ + b_1 x + \cdots + b_n x^n$ یک چندجمله‌ای دیگر باشد. از ۱۵—۱ (ج) نتیجه می‌شود که تابع گویای تعریف شده به صورت $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ روی دامنهٔ $S' = \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq \circ\}$ در همهٔ نقاط دامنهٔ خود مشتق‌پذیر است و می‌توان مشتق آن را به کمک ۱۵—۱ محاسبه کرد. توجه کنید که هر نقطهٔ $x_\circ$ از S' یک نقطهٔ درونی S' است زیرا بنابر پیوستگی q، اگر $q(x_\circ) \neq \circ$، آنگاه برای همهٔ x های نزدیک $x_\circ$ نیز داریم $q(x) \neq \circ$.

(۱۵—۳) تابع‌های مثلثاتی. در گزارهٔ ۱۰—۴ از بخش ۱۰ دیدیم که تابع‌های مثلثاتی $\sin$، $\cos$، $\tan$، $\cot$، sec و csc، هر یک در دامنهٔ تعریف خود پیوسته هستند. اکنون نشان می‌دهیم این تابع‌ها در دامنهٔ تعریف خود مشتق‌پذیر نیز هستند و فرمول‌هایی برای مشتق آنها به‌دست می‌آوریم. با توجه به گزاره ۱۵—۱ کافی است مشتق‌پذیری سینوس و کسینوس ثابت شود زیرا چهار تابع دیگر به صورت خارج قسمت این تابع‌ها تعریف می‌شوند. بدین ترتیب نخست تابع سینوس را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} &= \frac{(\sin x)(\cos h)+(\cos x)(\sin h)-\sin x}{h}\\ &= (\sin x)\frac{\cos h-۱}{h}+(\cos x)\frac{\sin h}{h}\end{aligned}$$

در ۱۳—۷—۲ دو حد اساسی مثلثاتی $\lim_{h\to ۰}\frac{\sin h}{h}=۱$ و $\lim_{h\to ۰}\frac{۱-\cos h}{h}=۰$ را ثابت کردیم. بنابراین

$$\lim_{h\to ۰}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\cos x$$

به بیان دیگر، تابع $\sin$ به‌ازای هر x مشتق‌پذیر است و

$$\sin' x=\cos x \qquad (۳)$$

به همین ترتیب ثابت می‌شود که تابع $\cos$ به‌ازای هر x مشتق‌پذیر است و

$$\cos' x=-\sin x \qquad (۴)$$

حال با استفاده از ۱۵—۱ (ج) ثابت می‌شود که توابع $\tan=\frac{\sin}{\cos}$، $\cot=\frac{\cos}{\sin}$، $sec=\frac{۱}{\cos}$ و $csc=\frac{۱}{\sin}$ به‌ازای هر x در دامنهٔ تعریف (یعنی به‌ازای x هایی که مخرج عبارت تعریف کننده صفر نشود) مشتق‌پذیرند و فرمول‌های زیر به سادگی نتیجه می‌شوند:

$$\tan' x=sec^{۲}x=۱+\tan^{۲}x \qquad (۵)$$

$$\cot' x=-\csc^{۲}x=-(۱+\cot^{۲}x) \qquad (٦)$$

$$\sec' x=(\tan x)(sec\ x) \qquad (۷)$$

$$\csc' x = -(\cot x)(csc\ x) \tag{۸}$$

در باقیماندهٔ این بخش به بررسی دسته‌ای از خواص مشتق می‌پردازیم که به علامت مشتق و اندازهٔ آن بستگی دارند.

(۱۵—۴) علامت مشتق در یک نقطه

فرض کنید $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ در نقطهٔ درونی $x_\circ$ از S مشتق‌پذیر باشد. سه حالت $f'(x_\circ) > \circ$، $f'(x_\circ) < \circ$ و $f'(x_\circ) = \circ$ وجود دارد که هر یک را بررسی می‌کنیم.

نخست فرض کنید $f'(x_\circ) > \circ$. اگر عددی e طوری اختیار کنیم که $\circ < e < f'(x_\circ)$، طبق تعریف حد، $\delta > \circ$ وجود دارد که برای $\circ < |x - x_\circ| < \delta$ داریم:

$$-e < \frac{f(x) - f(x_\circ)}{x - x_\circ} - f'(x_\circ) < e$$

بالاخص

$$\frac{f(x) - f(x_\circ)}{x - x_\circ} > f'(x_\circ) - e > \circ \tag{۹}$$

بنابراین صورت و مخرج کسر سمت چپ باید هم علامت باشند و می‌توان حکم کرد که:

(۱۵—۴—۱) اگر $f'(x_\circ) > \circ$، آنگاه $\delta > \circ$ وجود دارد که اگر $x_\circ < x < x_\circ + \delta$، آنگاه $f(x) > f(x_\circ)$، و اگر $x_\circ - \delta < x < x_\circ$، آنگاه $f(x) < f(x_\circ)$.

به بیان دیگر اگر $f'(x_\circ) > \circ$، آنگاه برای x های نزدیک و بزرگتر از $x_\circ$، مقدار $f(x)$ بزرگتر از $f(x_\circ)$ است و برای x های نزدیک و کوچکتر از $x_\circ$، $f(x)$ کوچکتر از $f(x_\circ)$ می‌باشد. نکتهٔ قابل تذکر این است که این حکم فقط مقدار $f(x_\circ)$ را با مقدار $f(x)$، x نزدیک $x_\circ$، مقایسه می‌کند و دال بر صعودی بودن تابع f در یک بازهٔ کوچک حول $x_\circ$ نیست. شکل ۱ وضعیتی را نشان می‌دهد که حکم ۱۵—۴—۱ برقرار است ($f'(\circ) > \circ$) و لیکن f در هیچ بازهٔ حول $\circ$ صعودی نیست.

در این شکل نمودار تابع در نزدیکی ۰ بی‌نهایت "دندانه" یا شاخهٔ صعودی‌ـ نزولی دارد که دامنهٔ آنها به تدریج کوچک می‌شود ولی هر قدر هم که به ۰ نزدیک شویم هنوز شاخه‌های نزولی و صعودی در دو طرف ۰ وجود دارند. در آینده عبارت صریحی برای تعریف چنین تابعی ارائه خواهیم کرد.

حالت $f'(x_\circ) < \circ$ مشابه است. در اینجا اگر e را طوری بگیریم که $\circ < e < -f'(x_\circ)$، آنگاه $\delta > \circ$ وجود دارد که برای $\circ < |x - x_\circ| < \delta$ داریم:

$$-e < \frac{f(x) - f(x_\circ)}{x - x_\circ} - f'(x_\circ) < e$$

بالاخص

$$\frac{f(x) - f(x_\circ)}{x - x_\circ} < f'(x) + e < \circ \qquad (۱۰)$$

بنابراین صورت و مخرج کسر سمت چپ باید علامت مختلف داشته باشند که از آن نتیجه می‌شود:

(۱۵ـ۴ـ۲) اگر $f'(x_\circ) < \circ$، آنگاه $\delta > \circ$ وجود دارد که اگر $x_\circ < x < x_\circ + \delta$، آنگاه $f(x) < f(x_\circ)$، و اگر $x_\circ - \delta < x < x_\circ$، آنگاه $f(x) > f(x_\circ)$.

در اینجا اگر x نزدیک و بزرگتر از $x_\circ$ باشد، داریم $f(x) < f(x_\circ)$، و اگر x نزدیک و کوچکتر از $x_\circ$ باشد، $f(x) > f(x_\circ)$.

از ۱۵ـ۴ـ۱ و ۱۵ـ۴ـ۲ نتیجه جالب توجهی حاصل می‌شود. برای یک تابع $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$، نقطهٔ درونی $x_\circ$ از S را یک نقطهٔ بیشینه موضعی (به ترتیب نقطهٔ کمینهٔ موضعی) می‌نامیم اگر $\delta > \circ$ وجود داشته باشد که برای هر $x \in S$ که $|x - x_\circ| < \delta$ داشته باشیم $f(x) \leq f(x_\circ)$ (به ترتیب $f(x) \geq f(x_\circ)$). حال فرض کنید تابع f در نقطهٔ بیشینه یا کمینه موضعی $x_\circ$ مشتق‌پذیر است. در این صورت هیچ‌یک از دو وضعیت $f'(x_\circ) > \circ$ و $f'(x_\circ) < \circ$ در $x_\circ$ ممکن نیست زیرا که بنابر ۱۵ـ۴ـ۱ و ۱۵ـ۴ـ۲، مقدار تابع باید در یک طرف $x_\circ$ بزرگتر از $f(x_\circ)$ و در طرف دیگر کوچکتر از $f(x_\circ)$ باشد. بدین ترتیب لاجرم:

(۱۵ـ۴ـ۳) اگر تابع $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ در نقطهٔ درونی $x_\circ$ از S بیشینه یا کمینهٔ موضعی داشته باشد و f در $x_\circ$ مشتق‌پذیر باشد، آنگاه $f'(x_\circ) = \circ$.

بدین ترتیب در نقاط بیشینه و کمینه موضعی درونی که تابع دارای خط مماس باشد، این خط مماس باید لزوماً افقی باشد (شکل ۲).

لازم به ذکر است که افقی شدن خط مماس لزوماً دال بر وجود بیشینه یا کمینهٔ موضعی نیست. در شکل ۲، در نقاط x_1 و x_3 کمینهٔ موضعی موجود است، در x_2 بیشینهٔ موضعی، ولی در x_4 که خط مماس افقی است، نه بیشینه موضعی ظاهر شده است و نه کمینهٔ موضعی. مثال‌های صریح زیر در تأیید این مطلب هستند.

مثال ۱. تابع $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ به صورت $f(x)=x^4-x^3$ تعریف شده است. این تابع به‌ازای هر x مشتق‌پذیر است. نقاطی را که در آن مشتق صفر می‌شود بررسی می‌کنیم. داریم:

$$f'(x)=4x^3-3x^2=x^2(4x-3)$$

پس مشتق در دو نقطهٔ $x=0$ و $x=\frac{3}{4}$ صفر می‌شود. با توجه به علامت یابی $x^4-x^3=x^3(x-1)$ ملاحظه می‌شود که مقدار f برای $x<0$ مثبت و برای $0<x<1$ منفی است، پس $x=0$ نمی‌تواند بیشینه یا کمینهٔ موضعی باشد. چون تابع پیوستهٔ $f(x)=x^4-x^3$ روی $[0,1]$ باید دارای کمینه باشد و مقدار تابع در $]0,1[$ منفی است، مقدار کمینه باید منفی باشد. بنابراین این نقطهٔ کمینه باید یک نقطهٔ درونی $[0,1]$ باشد زیرا که $f(0)=f(1)=0$. از طرفی دیگر مشتق در کمینهٔ درونی باید صفر باشد، پس نقطه $x=\frac{3}{4}$ لزوماً یک کمینه است. نمودار f در شکل ۳ (الف) نمایش داده شده است.

مثال ۲. تابع مشتق‌پذیر $f(x)=x-\sin x$ را در نظر می‌گیریم. داریم $f'(x)=1-\cos x$ که در مضارب صحیح 2π صفر می‌شود. هیچ‌یک از این نقاط بیشینه یا کمینه موضعی برای تابع نیست (شکل ۳ (ب)).

در گام بعدی به بررسی مثبت یا منفی بودن علامت مشتق در سراسر یک بازه می‌پردازیم. حربهٔ مناسب برای این کار "قضیه میانگین" است که کاربردهای بسیار دیگری نیز خواهد داشت. نخست حالت خاصی از این قضیه را که به قضیه رُل معروف است بیان و ثابت می‌کنیم.

(۱۵—۵) قضیه رُل. فرض کنید $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته است که در همهٔ نقاط درونی $[a,b]$ مشتق‌پذیر می‌باشد و $f(a) = f(b) = 0$. در این صورت نقطه‌ای c وجود دارد، $a < c < b$، که $f'(c) = 0$.

برهان. اگر f در سراسر $[a,b]$ صفر باشد که مشتق آن در هر نقطه صفر است و نقطهٔ c مورد نظر وجود دارد. حال فرض کنید نقطه‌ای x در $[a,b]$ وجود دارد که $f(x) \neq 0$، مثلاً فرض کنید $f(x) > 0$. تابع پیوستهٔ f روی $[a,b]$ دارای بیشینه است و از آنجا که f در حداقل یک نقطه مثبت است، مقدار این بیشینه باید مثبت باشد. از طرفی دیگر $f(a) = f(b) = 0$، پس نقطهٔ بیشینه باید یک نقطهٔ درونی بازه باشد، مثلاً c که $a < c < b$. حال طبق ۱۵—۴—۳ داریم $f'(c) = 0$. به همین ترتیب اگر $f(x) < 0$، با استفاده از کمینه، نقطهٔ مورد نظر را پیدا می‌کنیم. □

یک تعبیر قضیهٔ بالا این است که نقطه‌ای c بین a و b وجود دارد که مماس بر نمودار به‌ازای c موازی خط واصل بین دو انتهای نمودار است. قضیهٔ زیر را می‌توان دقیقاً این گونه تعبیر کرد.

(۱۵—٦) قضیهٔ میانگین. فرض کنید $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته است که در همهٔ نقاط درونی $[a,b]$ مشتق‌پذیر می‌باشد. در این صورت نقطه‌ای c وجود دارد، $0 < c < b$، که

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad (۱۱)$$

برهان. خط راست واصل بین $(a, f(a))$ و $(b, f(b))$ معادلهٔ زیر را دارد:

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

اگر مقدار سمت راست را از $f(x)$ کم کنیم در وضعیت قضیهٔ رُل قرار می‌گیریم. به طور دقیق، تعریف کنید

$$g(x) = f(x) - [f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)]$$

تابع g در $[a,b]$ پیوسته و در $]a,b[$ مشتق‌پذیر است زیرا که مجموع دو تابع با این ویژگی‌هاست. از طرفی دیگر:

$$g(a) = ۰ \quad , \quad g(b) = ۰$$

پس طبق قضیهٔ رل نقطه‌ای c وجود دارد $a < c < b$، که $g'(c) = ۰$، یعنی:

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = ۰$$

که حکم قضیه است. □

به یک تعبیر هندسی این قضیه اشاره کردیم. اگر متغیر x را زمان و $y = f(x)$ را مکان یک ذره متحرک در زمان x فرض کنیم، $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ سرعت متوسط ذره در بازهٔ زمانی $[a,b]$ است. طبق این قضیه، زمانی c بین زمان شروع و زمان پایان حرکت وجود دارد که سرعت ذره در آن زمان برابر سرعت متوسط در طول مسیر است. در واقع مهمترین کاربردهای ۱۵—۶ به صورت نامساوی برای تخمین نمو یک تابع خواهد بود که بعداً به آن خواهیم پرداخت ولی فعلاً به چند کاربرد در تکمیل بررسی علامت مشتق می‌پردازیم.

(۱۵—۷) علامت مشتق در یک بازه

فرض کنید I یک بازه باشد و $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته که در نقاط درونی بازه مشتق‌پذیر است.

(۱۵—۷—۱) اگر $f'(x) = ۰$ برای هر نقطهٔ درونی x از I، آنگاه f در سراسر I ثابت است.

برهان. کافی است نشان دهیم برای هر دو نقطهٔ متمایز a و b از I داریم $f(a) = f(b)$. مثلاً فرض کنید $a < b$. طبق قضیهٔ میانگین نقطه‌ای c بین a و b وجود دارد که $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) = ۰$ و حکم به اثبات می‌رسد. □

(۱۵—۷—۲) **نتیجه.** فرض کنید $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ دو تابع پیوسته باشند که در نقاط درونی I مشتق‌پذیر بوده و مشتق برابر دارند. در این صورت $f - g$ یک ثابت است. □

(۱۵—۷—۳) اگر $f'(x) > 0$ برای هر نقطهٔ درونی x از I، آنگاه f در I صعودی است، یعنی برای هر a و b در I که $a < b$، داریم $f(a) < f(b)$.

برهان. طبق قضیهٔ میانگین $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) > 0$، پس $b-a$ و $f(b)-f(a)$ هم علامت هستند. □

(۱۵—۷—۴) اگر $f'(x) < 0$ برای هر نقطهٔ درونی x در I، آنگاه f در I نزولی است، یعنی برای هر a و b در I که $a < b$، داریم $f(a) > f(b)$. □

(۱۵—۸) تخمین نمو تابع. فرض کنید $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ پیوسته و f در نقاط درونی $[a, b]$ مشتق‌پذیر است. اگر $M \geq 0$ وجود داشته باشد که $|f'(x)| \leq M$ برای هر x در $]a, b[$، آنگاه از (۱۱) نتیجه می‌شود که:

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b - a| \qquad (۱۲)$$

از آنجا که $f'(x)$ آهنگ تغییر کمیت $y = f(x)$ در نقطهٔ x محسوب می‌شود. نامساوی (۱۲) بیانگر این واقعیت است که نمو y در بازهٔ $[a, b]$ از حاصل‌ضرب طول بازه در حداکثر آهنگ نمو بیشتر نیست. گاهی نمو x، یعنی $b - a$ را به Δx و نمو y، یعنی $f(b) - f(a)$ را به Δy نمایش می‌دهند. پس با این نمادگذاری:

$$|\Delta y| \leq M|\Delta x| \qquad (۱۳)$$

مثال ۱. نشان دهید برای هر α و β داریم

$$|\sin\alpha - \sin\beta| \leq |\alpha - \beta| \qquad (۱۴)$$

از آنجا که برای $f(x) = \sin x$، داریم $f'(x) = \cos x$ و $|\cos x| \leq 1$، این حکم از (۱۲) نتیجه می‌شود.

مثال ۲. نشان دهید برای هر a و b مثبت داریم:

$$\left|\frac{1}{1+a} - \frac{1}{1+b}\right| \leq |a - b| \qquad (۱۵)$$

تابع $f(x)=\frac{۱}{۱+x}$ را روی $]-۱,+\infty[$ در نظر می‌گیریم. در این بازه تابع تعریف شده، مشتق‌پذیر است، و داریم:

$$f'(x)=\frac{-۱}{(۱+x)^۲}$$

برای $x>۰$، مخرج از ۱ بزرگتر است، پس $|f'(x)|<۱$ و (۱۵) حاصل می‌شود.

قاعدهٔ زنجیره‌ای

یکی از اساسی‌ترین قضایای ابتدایی مربوط به مشتق، مشتق‌پذیر بودن ترکیب دو تابع مشتق‌پذیر و فرمول حاصل برای مشتق ترکیب دو تابع است که به "قاعده زنجیره‌ای" معروف می‌باشد. قبل از بیان این مطلب، مفهوم مشتق‌پذیری را که تاکنون به دو صورت معادل وجود یک حد، و وجود تابع درجه یک مماس، بررسی کرده‌ایم، به صورت معادل سومی ارائه می‌کنیم.

فرض کنید $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ در نقطهٔ درونی a از S مشتق‌پذیر است و مشتق آن برابر $f'(a)$ می‌باشد. در این صورت می‌دانیم که:

$$\lim_{h\to \circ} \frac{f(a+h)-[f(a)+f'(a)h]}{h} = \circ \qquad (۱)$$

که در اینجا $f(a)+f'(a)h$ مقدار تقریب خطی f در نقطهٔ a به‌ازای $x=a+h$ است. اگر بنویسیم

$$\phi(h) = \frac{f(a+h)-[f(a)+f'(a)h]}{h} \qquad (۲)$$

ϕ تابعی است که در یک بازه محذوف حول $\circ$ تعریف شده است، یعنی برای $|h|$ کوچک و $h \neq \circ$، زیرا a یک نقطهٔ درونی S است و برای $|h|$ کوچک $f(a+h)$ تعریف شده است. به علاوه $\phi(h) \longrightarrow \circ$ وقتی $h \longrightarrow \circ$. پس از طرفین ـ وسطین در (۲) می‌توان نوشت

$$f(a+h) = f(a)+f'(a)h+\phi(h)h \qquad (۳)$$

بنابراین اگر f در a مشتق‌پذیر باشد، عددی حقیقی $f'(a)$ وجود دارد و تابعی ϕ تعریف شده به‌ازای $|h|$ کوچک $\neq \circ$، به طوری که $\phi(h) \longrightarrow \circ$ وقتی $h \longrightarrow \circ$ و رابطهٔ (۳) برقرار است. بالعکس فرض کنید

برای تابعی f که a یک نقطهٔ درونی دامنهٔ آن است، عددی حقیقی m وجود داشته باشد و تابعی ϕ تعریف شده برای $|h|$ کوچک $\neq ۰$ که $\phi(h) \longrightarrow ۰$ وقتی $h \longrightarrow ۰$ و داشته باشیم

$$f(a+h) = f(a) + mh + \phi(h)h$$

در این صورت

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} - m = \phi(h)$$

و چون $\phi(h) \longrightarrow ۰$ وقتی $h \longrightarrow ۰$، نتیجه می‌شود که حد $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ وجود دارد وقتی $h \longrightarrow ۰$ و برابر m است. بدین ترتیب می‌توان مشتق‌پذیری f در a را به صورت معادل زیر بیان کرد

(۱۵—۱) گزاره. $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ داده شده است و a یک نقطهٔ درونی S است. در این صورت f در a مشتق‌پذیر است اگر و تنها اگر عددی حقیقی m و تابعی ϕ تعریف شده برای $|h|$ کوچک $\neq ۰$ وجود داشته باشند که $\phi(h) \longrightarrow ۰$ وقتی $h \longrightarrow ۰$ و داشته باشیم

$$f(a+h) = f(a) + mh + \phi(h)h$$

□

البته m را معمولاً به $f'(a)$ نمایش می‌دهیم و مشتق f در نقطهٔ a می‌نامیم. رابطهٔ (۴) یا (۳) را می‌توان به صورت گویای دیگری نیز نوشت. اگر متغیر تابع f را به x و مقدار f را به y نمایش دهیم، $y = f(x)$، تغییر کوچک در مقدار x را گاهی به جای h، به Δx، و تغییر متناظر در y را به جای $f(a+h) - f(a)$ به Δy نمایش می‌دهیم. در این صورت (۴) یا (۳) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\Delta y = f'(a)\Delta x + \Delta x \cdot \phi(\Delta x) \qquad (۴)$$

یا معادلاً

$$\Delta y - f'(a)\Delta x = \Delta x \phi(\Delta x) \qquad (۵)$$

توجه کنید که $f'(a)\Delta x$ مقدار تغییر y روی خط مماس است. بنابراین مشتق‌پذیری f در a را می‌توان بدین صورت تعبیر کرد که خطی وجود دارد گذرا از نقطهٔ $(a, f(a))$ که اختلاف مقدار y روی این خط

و مقدار y تابع، در نزدیکی نقطهٔ a، "بسیار کوچک" است بدین معنی است که حاصل‌ضرب دو کمیت Δx و $\phi(\Delta x)$ می‌باشد که هر یک به صفر میل می‌کنند وقتی $\Delta x \longrightarrow 0$.

(۱۵—۲) قاعدهٔ زنجیره‌ای. فرض کنید $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ و $g : T \longrightarrow \mathbb{R}$ دو تابع هستند، a یک نقطهٔ درونی S است، b یک نقطهٔ درونی T، و $f(a) = b$. اگر تابع f در a و تابع g در b مشتق‌پذیر باشند، آنگاه $g \circ f$ در نقطهٔ a مشتق‌پذیر است و

$$(g \circ f)'(a) = g'(b)f'(a) \qquad (٦)$$

برهان. نخست توجه کنید که دامنهٔ $g \circ f$ عبارت است از

$$S' = \{x \in S \mid f(x) \in T\}$$

برای اینکه مشتق‌پذیری $g \circ f$ در a مطرح شود، a باید یک نقطهٔ درونی S' باشد. البته $a \in S'$ چون $f(a) = b$ عضو T است، ولی باید نشان دهیم برای x های به اندازهٔ کافی نزدیک a نیز داریم $f(x) \in T$. چون b یک نقطهٔ درونی T است، $e > 0$ وجود دارد که $]b - e, b + e[$ به تمامی در T قرار دارد. تابع f در a مشتق‌پذیر است، پس در a پیوسته نیز می‌باشد، بنابراین $\delta > 0$ وجود دارد که هرگاه $x \in S$ و $|a - x| < \delta$، آنگاه $|f(x) - b| < e$، یعنی $f(x)$ در T قرار دارد. چون a یک نقطهٔ درونی S است، می‌توان δ فوق را در صورت لزوم کوچکتر کرد به طوری که برای هر x با $|x - a| < \delta$ داریم $x \in S$. نتیجه اینکه برای x های به اندازهٔ کافی نزدیک به a، $f(x)$ در T قرار می‌گیرد، یعنی a یک نقطهٔ درونی S' است.

حال به اثبات مشتق‌پذیری $g \circ f$ در a و محاسبه مشتق می‌پردازیم. می‌نویسیم $y = f(x)$ و $z = g(y)$. چون f در a مشتق‌پذیر است، تابعی ϕ وجود دارد که برای $|\Delta x|$ کوچک $\neq 0$ تعریف شده است، $\phi(\Delta x) \longrightarrow 0$ وقتی $\Delta x \longrightarrow 0$، و داریم

$$\Delta y - f'(a)\Delta x = \Delta x \phi(\Delta x) \qquad (۷)$$

همچنین چون g در b مشتق‌پذیر است، تابعی ψ وجود دارد که برای $|\Delta y|$ کوچک $\neq 0$ تعریف شده

است، $\psi(\Delta y) \longrightarrow 0$ وقتی $\Delta y \longrightarrow 0$، و داریم

$$\Delta z - g'(b)\Delta y = \Delta y \psi(\Delta y) \tag{8}$$

با جایگزینی (۸) در (۹) حاصل می‌شود

$$\Delta z - g'(b)(f'(a)\Delta x + \Delta x \phi(\Delta x)) = (f'(a)\Delta x + \Delta x \phi(\Delta x))\psi(\Delta y)$$

یا

$$\Delta z - (g'(b)f'(a))\Delta x = \Delta x\{g'(b)\phi(\Delta x) + [f'(a) + \phi(\Delta x)]\psi(\Delta y)\}$$

اگر نشان دهیم عبارت داخل آکلاد { } برای $|\Delta x|$ کوچک $\neq 0$ تعریف شده است و به صفر میل می‌کند وقتی $\Delta x \longrightarrow 0$، حکم به اثبات می‌رسد. در داخل { } کافی است نشان می‌دهیم $\psi(\Delta y)$ برای $|\Delta x|$ کوچک $\neq 0$ تعریف شده است و به صفر میل می‌کند وقتی $\Delta x \longrightarrow 0$، وضعیت سایر جملات روشن است. $\psi(\Delta y)$ برای $|\Delta y|$ کوچک تعریف شده است. چون f در a پیوسته است، اگر $|\Delta x|$ به اندازهٔ کافی کوچک باشد، $|\Delta y|$ نیز به اندازهٔ مورد نظر کوچک خواهد شد، پس $\psi(\Delta y)$ برای $|\Delta x|$ کوچک تعریف شده است. از طرفی دیگر مجدداً بنابر پیوستگی f، اگر $\Delta x \longrightarrow 0$، داریم $\Delta y \longrightarrow 0$، پس $\psi(\Delta y) \longrightarrow 0$ وقتی $\Delta x \longrightarrow 0$، و حکم به اثبات می‌رسد. □

مثال ۱. مشتق تابع $h(x) = (x^2 + x + 1)^{10}$ را به‌دست آورید. البته در اینجا تابع h به وضوح مشتق‌پذیر است زیرا که اگر عبارت $x^2 + x + 1$ در خود ۱۰ بار ضرب شود یک چندجمله‌ای (از درجه ۲۰) به‌دست می‌آید. اگر بنویسیم $f(x) = x^2 + x + 1$ و $g(x) = x^{10}$، داریم $h(x) = (g \circ f)(x)$. چون $f'(x) = 2x + 1$ و $g'(x) = 10x^9$، طبق قاعدهٔ زنجیره‌ای داریم

$$\begin{aligned} h'(x) &= g'(f(x)) \cdot f'(x) \\ &= 10(x^2 + x + 1)^9(2x + 1) \end{aligned}$$

مثال ۲. نشان دهید تابع $h(x) = \sin(\cos x)$ مشتق‌پذیر است و مشتق آن را به‌دست آورید. می‌نویسیم

$f(x) = \cos x$ و $g(x) = \sin x$، پس $h(x) = (g \circ f)(x)$. بنابراین

$$\begin{aligned} h'(x) &= g'(f(x)) \cdot f'(x) \\ &= \cos(\cos x) \cdot (-\sin x) \end{aligned}$$

مثال ۳. تابعی مشتق‌پذیر دارای این ویژگی است که $f(0) = 0$ و $f'(0) = 2$. مشتق تابع $h = f \circ f$ را در $x = 0$ به‌دست آورید. طبق قاعدهٔ زنجیره‌ای داریم

$$h'(0) = f'(f(0)) \cdot f'(0)$$

چون $f(0) = 0$، نتیجه می‌شود که $h'(0) = f'(0)^2$، یا $h'(0) = 4$.

(۱۵ــ۳) نمادگذاری لایب‌نیتس

لایب‌نیتس برای بیان مشتق نمادی ابداع کرد که برای محاسبات طولانی بسیار سودمند است هرچند که بی‌دقتی در استفاده از آن ممکن است موجب گمراهی شود. اگر تابع f را به $y = f(x)$ نمایش دهیم و f مشتق‌پذیر باشد، $f'(x)$ را لایب‌نیتس به $\frac{dy}{dx}$ نمایش داد که در اینجا نماد x در مخرج نمایشگر متغیر و نماد y در صورت، نمایشگر مقدار تابع است. مقدار مشتق در نقطهٔ $x = a$ به این ترتیب به $\frac{dy}{dx}(a)$، $\frac{dy}{dx}|_a$ یا $\frac{dy(f(a))}{dx(a)}$ نمایش داده می‌شود هرچند که نمایش سوم کمتر به‌کار می‌رود. از آنجا که مشتق، حد یک کسر، یعنی حد $\frac{\Delta y}{\Delta x}$، است، این مفهوم از بعضی رفتارهای کسرگونه برخوردار است و گاهی شکل کسری $\frac{dy}{dx}$ احکام درستی را تداعی می‌کند. ولی باید توجه داشت که $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$ بدین معنی نیست که dy حد Δy است و dx حد Δx، زیرا که در چارچوب ما حد Δx و Δy هر دو صفر هستند. تعبیر درستی که در این چارچوب می‌توان از $\frac{dy}{dx}$ به عنوان یک کسر ارائه کرد به صورت زیر است. فرض کنید تابع f در نقطهٔ a مشتق‌پذیر است، یعنی $f'(a)$ وجود دارد. اگر به جای f، تقریب خطی f در نقطهٔ a را در نظر بگیریم که نمودار آن یک خط راست به شیب $f'(a)$ است، این تابع به هر مقدار نمو h از متغیر، مقدار نمو $f'(a)h$ در مقدار تابع را نظیر می‌کند. $dx(a)$ را باید نمو متغیر تابع تقریب خطی و $dy(f(a))$ را نمو مقدار تابع تقریب خطی تلقی کرد، که در این صورت $dy(f(a)) = f'(a) \cdot dx(a)$. بدین ترتیب

پیشوند "d" در dx و dy بدین معنی است که متغیر، مربوط به تقریب خطی است، نه خود تابع. در مورد خود تابع، از Δx و Δy به عنوان نمو متغیر و نمو مقدار تابع استفاده می‌کنیم. شکل ۱ در توضیح این موضوع است.

با استفاده از نمادگذاری لایب‌نیتس، نتیجه قاعدهٔ زنجیره‌ای به شکلی یادماندنی در می‌آید. اگر در ۱۵—۲ بنویسیم $y = f(x)$ و $z = g(y)$، آنگاه $z = (g \circ f)(x)$، و (۷) صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\frac{dz(g(b))}{dx(a)} = \frac{dz(g(b))}{dy(b)} \cdot \frac{dy(b)}{dx(a)} \qquad (۹)$$

یا

$$\frac{dz}{dx}(a) = \frac{dz}{dy}(b) \cdot \frac{dy}{dx}(a) \qquad (۱۰)$$

که به اختصار نوشته می‌شود:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \qquad (۱۱)$$

به این شکل، وقتی تعداد ترکیب‌ها زیاد و محاسبات طولانی است، پیگیری محاسبات سریعتر می‌شود ولی باید همواره در ذهن داشت که $\frac{dy}{dx}$ و $\frac{dz}{dy}$ در نقاط مختلف مطرح هستند، اولی در a و دومی در $b = f(a)$، در حالی که $\frac{dz}{dx}$ در نقطهٔ a مطرح است.

با روش تحریر (۱۰) ممکن است این سؤال پیش آید که چرا قاعدهٔ زنجیره‌ای با حذف $dy(b)$ از صورت و مخرج نتیجه نمی‌شود؟ این کار دو اشکال دارد، اول اینکه تا مشتق‌پذیری $g \circ f$ در نقطهٔ a ثابت نشود، اصلاً $\frac{dz(g(b))}{dx(a)}$ معنی ندارد، و دوم اینکه ممکن است $dy(b)$ صفر باشد که در این صورت حذف آن از صورت و مخرج مجاز نیست.

مثال ۱. ظرفی قیف شکل به ارتفاع $۲۰cm$ و شعاع قاعدهٔ $۱۰cm$ طوری قرار گرفته است که رأس آن در پایین است و محور قیف در راستای قائم قرار دارد. اگر آب به سرعت $۲۰ \frac{cm^۳}{sec}$ در این ظرف ریخته شود، آهنگ افزایش ارتفاع آب را وقتی ارتفاع آب $۶cm$ باشد پیدا کنید.

متغیر زمان برحسب ثانیه را به t، ارتفاع آب در زمان t را به h، و حجم آب در زمان t را به V نمایش می‌دهیم. h و V هر دو تابع t هستند و به فرض مشتق‌پذیری، $\frac{dh}{dt}$ (آهنگ تغییر ارتفاع سطح آب) و $\frac{dV}{dt}$ (آهنگ تغییر حجم آب) معنی دارند. در واقع $\frac{dV}{dt} = ۲$ داده شده است و مجهول مسأله $\frac{dh}{dt}$ است وقتی که $h = ۶$. توجه کنید که می‌توان V را به عنوان تابعی صرفاً از h در نظر گرفت. اگر r شعاع سطح آب در زمان t باشد، به سبب تشابه مثلث‌ها داریم:

$$\frac{r}{h} = \frac{۱۰}{۲۰} = \frac{۱}{۲}$$

پس

$$V = \frac{۱}{۳}\pi r^{۲} h = \frac{\pi}{۱۲} h^{۳}$$

حال طبق قاعدهٔ زنجیره‌ای داریم:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt}$$

از فرمول V برحسب h نتیجه می‌شود که $\frac{dV}{dh} = \frac{\pi}{۴} h^{۲}$، پس با جایگزینی در فرمول بالا داریم:

$$۲ = (\frac{\pi}{۴} h^{۲})(\frac{dh}{dt})$$

مجهول مسأله $\frac{dh}{dt}$ است وقتی $h = ۶$، پس $\frac{dh}{dt} = \frac{۲}{۹\pi} \frac{cm}{sec}$.

مثال ۲. یک منبع نور S در فاصلهٔ ۴ متر از دیواری قرار دارد. این منبع نور در داخل محفظهٔ مدوری به مرکز S قرار دارد که با سرعت زاویه‌ای ثابت $\frac{۱}{۲}$ رادیان بر ثانیه در جهت مثلثاتی می‌چرخد. روی سطح این محفظه سوراخی قرار دارد که نور از آن سوراخ بر دیوار می‌تابد و در نتیجه یک نقطهٔ نورانی روی دیوار حرکت می‌کند. تندی حرکت نقطهٔ نورانی روی دیوار را وقتی این نقطه در فاصلهٔ ۵ متری از S قرار دارد پیدا کنید.

θ را زاویهٔ بین امتداد موازی دیوار از نقطهٔ S به شعاع حامل به سوراخ می‌گیریم. داریم:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{۱}{۲} \quad (\frac{rad}{sec})$$

از طرفی دیگر داریم $x = ۴ \cot \theta$. بنابراین طبق قاعدهٔ زنجیره‌ای:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{۴}{\sin^{۲} \theta} \frac{d\theta}{dt}$$

که $\frac{dx}{dt}$ سرعت حرکت نقطهٔ نورانی روی دیوار است. وقتی فاصله S از دیوار ۵ متر باشد داریم

$$\sin \theta = \cos(\frac{\pi}{۲} - \theta) = \frac{۴}{۵}$$

بنابراین:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{۱۰۰}{۱۶} \cdot \frac{۱}{۲} = -۳/۲۵$$

و چون تندی حرکت، یعنی قدرمطلق سرعت، مورد نظر است، نقطهٔ نورانی وقتی فاصلهٔ آن از S پنج متر است با تندی ۳٫۲۵ متر بر ثانیه حرکت می‌کند.

یکی از کاربردهای قاعدهٔ زنجیره‌ای یافتن مشتق تابع وارون (ترکیبی) است. فرض کنید I یک بازه است و $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پیوستهٔ (اکیداً) صعودی یا (اکیداً) نزولی. می‌دانیم که $f^{-۱}$ نیز پیوسته است. در زیر حالتی را در نظر می‌گیریم که f مضافاً مشتق‌پذیر با مشتق مثبت یا منفی در سراسر درون بازهٔ I است.

(۱۵—۴) قضیه. I یک بازه است، $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی که در نقاط درونی I مشتق‌پذیر است و مشتق آن همه‌جا مثبت یا همه‌جا منفی است. در این صورت تابع وارون ترکیبی، $f^{-۱}$، نیز در همهٔ نقاط درونی دامنهٔ خود مشتق‌پذیر است و به‌ازای هر نقطهٔ درونی $b = f(a)$ از دامنهٔ $f^{-۱}$ داریم:

$$(f^{-۱})'(b) = \frac{۱}{f(a)} \qquad (۱۲)$$

برهان. اگر مشتق‌پذیری $f^{-۱}$ ثابت شود، فرمول بالا به سادگی از به‌کارگیری قاعدهٔ زنجیره‌ای برای $(f^{-۱} \circ f)(x) = x$ نتیجه می‌شود، ولی اثبات مشتق‌پذیری که در زیر خواهد آمد خود این نتیجه را به‌دست می‌دهد. چون مشتق همه‌جا مثبت یا منفی است می‌دانیم که تابع صعودی یا نزولی است، و چون f پیوسته است، می‌دانیم که نقاط درونی بازهٔ I تحت f به نقاط درونی بازهٔ تعریف $f^{-۱}$ نگاشته

می‌شوند و بالعکس. حال فرض کنید a یک نقطهٔ درونی I است، پس $b = f(a)$ یک نقطهٔ درونی دامنهٔ f^{-1} می‌باشد. بنابراین اگر $|k|$ به اندازهٔ کافی کوچک باشد، $b + k$ نیز یک نقطهٔ درونی دامنهٔ تعریف f^{-1} است. ولی دامنهٔ f^{-1} از نقاط $f(x)$ تشکیل شده است که x در دامنهٔ f است، پس داریم $b + k = f(a+h)$ برای h مناسب. بنابراین:

$$\begin{aligned} \lim_{k\to 0} \frac{f^{-1}(b+k)-f^{-1}(b)}{k} &= \lim_{k\to 0} \frac{f^{-1}(f(a+h))-f^{-1}(f(a))}{f(a+h)-f(a)} \\ &= \lim_{k\to 0} \frac{h}{f(a+h)-f(a)} \end{aligned}$$

از آنجا که f^{-1} پیوسته است نتیجه می‌گیریم که وقتی $k \longrightarrow 0$، آنگاه $h \longrightarrow 0$، بنابراین حد بالا برابر است با:

$$\lim_{h\to 0} \frac{h}{f(a+h)-f(a)} = \frac{1}{f'(a)}$$

و حکم مورد نظر به اثبات می‌رسد. □

(۱۵—۵) چند مثال مهم

(۱۵—۵—۱) $\mathbb{R}^+$ را مجموعهٔ اعداد حقیقی مثبت بگیرید و فرض کنید n یک عدد صحیح ناصفر است. تابع $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ که به صورت $f(x) = x^n$ تعریف می‌شود مشتق‌پذیر است و $f'(x) = nx^{n-1}$. برای $x \in \mathbb{R}^+$ داریم $f'(x) > 0$ اگر $n > 0$ و $f'(x) < 0$ اگر $n < 0$. بنابراین تابع $f^{-1} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ که به صورت

$$f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{n}}$$

تعریف می‌شود طبق قضیهٔ بالا مشتق‌پذیر است. از (۱۳) داریم:

$$\begin{aligned} (f^{-1})'(x^n) &= \frac{1}{f'(x)} \\ &= \frac{1}{n}x^{1-n} \end{aligned}$$

و اگر به جای x^n، مقدار x را جایگزین کنیم:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} \qquad (۱۳)$$

پس فرمول $\frac{d(x^p)}{dx} = px^{p-1}$ هم برای اعداد صحیح p و هم برای اعداد به شکل $\frac{1}{n}$ برقرار است. در واقع اکنون نتیجه می‌شود که فرمول برای توان گویا برقرار است زیرا تابع $h : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ ،$h(x) = x^{\frac{m}{n}}$، را می‌توان به صورت ترکیب دو تابع $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ و $g(x) = x^m$ نوشت، $h = g \circ f$، پس طبق قاعدهٔ زنجیره‌ای:

$$\begin{aligned} h'(x) &= g'(f(x)) \cdot f'(x) \\ &= m(x^{\frac{1}{n}})^{m-1} \cdot (\tfrac{1}{n})x^{\frac{1}{n}-1} \\ &= \tfrac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1} \end{aligned}$$

(۱۵—۵—۲) دیدیم که اگر تابع مثلثاتی سینوس را به دامنهٔ $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ محدود کنیم، وارون ترکیبی آن، $\sin^{-1}$، وجود دارد و پیوسته است. حال $\sin' x = \cos x$ در درون بازهٔ تعریف، یعنی در $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ همواره مثبت است، پس $\sin^{-1}$ در $]-1, 1[$ مشتق‌پذیر است. اگر با استفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای از $\sin(\sin^{-1}(x)) = x$ مشتق بگیریم، حاصل می‌شود:

$$\sin'(\sin^{-1} x) \cdot (\sin^{-1})'(x) = 1$$

$$\cos(\sin^{-1} x) \cdot (\sin^{-1})'(x) = 1$$

برای x در $]-1, 1[$، $\sin^{-1}(x)$ در $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ مقدار می‌گیرد، پس $\cos(\sin^{-1}(x)) = \sqrt{1 - x^2}$، در نتیجه:

$$(\sin^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad (14)$$

ضمناً توجه کنید که چون:

$$\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$$

نتیجه می‌شود که:

$$(\cos^{-1})'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad (15)$$

(۱۵ــ۵ــ۳) تابع $\tan^{-1}$ را در نظر می‌گیریم که روی $\mathbb{R}$ تعریف شده است و در $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ مقدار می‌گیرد. از آنجا که $\tan' x = 1 + \tan^2 x > 0$، طبق قضیه، $\tan^{-1}$ مشتق‌پذیر است. به علاوه با استفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای، اگر از $\tan(\tan^{-1}(x)) = x$ مشتق بگیریم حاصل می‌شود:

$$\tan'(\tan^{-1} x) \cdot (\tan^{-1})'(x) = 1$$

$$(1 + \tan^2(\tan^{-1}(x))) \cdot (\tan^{-1})'(x) = 1$$

پس

$$(\tan^{-1})'(x) = \frac{1}{1 + x^2} \qquad (16)$$

مجدداً از اینکه $\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \frac{\pi}{2}$، نتیجه می‌گیریم که

$$(\cot^{-1})'(x) = \frac{-1}{1 + x^2} \qquad (17)$$

تقریب خطی

از بدو بررسی مشتق دیدیم که از میان همهٔ خطوط راستی که از یک نقطهٔ نمودار یک تابع مشتق‌پذیر می‌گذرند، خط مماس به معنایی "نزدیکترین" این خطوط به نمودار تابع است. به طور دقیق، برای نقاط نزدیک نقطهٔ داده شده، تفاضل مقدار y روی نمودار و روی خط مماس آنقدر کوچک است که این تفاضل به سرعت مضاعف (مانند $\Delta x\phi(\Delta x)$) به صفر میل می‌کند. طبیعی است که کوشش کنیم از این نزدیکی برای تقریب مقدار تابع استفاده کنیم چه محاسبهٔ y برای خط راست که معادله درجه یک دارد کاری بسیار ساده است. اگر تابع f در نقطهٔ درونی a از دامنهٔ خود مشتق‌پذیر باشد، تقریب زدن مقدار f در نزدیکی a را به صورت زیر نمایش می‌دهیم

$$f(a+h) \simeq f(a) + f'(a)h \tag{۱}$$

با نوشتن $h = \Delta x$ و $f(a+h) - f(a) = \Delta y$، (۱) به صورت

$$\Delta y \simeq f'(a)\Delta x \tag{۲}$$

نیز نوشته می‌شود. به نماد لایب‌نیتس، اگر نمو متغیر تقریب خطی، یعنی dx، را به‌اندازهٔ Δx بگیریم، (۲) به صورت زیر در می‌آید

$$Dy \simeq dy \tag{۳}$$

در نوشتگان گوناگون ممکن است به هر یک از سه صورت بالا برخورد کنید، که همه یک معنی دارند. چند مثال محاسباتی ارائه می‌کنیم.

مثال ۱. مقداری تقریبی برای $\sqrt[3]{1/012}$ ارائه کنید.

در این نوع مسایل باید تابعی مناسب محاسبهٔ مورد نظر ارائه کنیم، مثلاً در اینجا $f(x) = \sqrt[3]{x}$؛ سپس عددی a، نزدیک متغیر مورد محاسبه که برای آن محاسبهٔ مقدار تابع، یعنی $f(a)$، ساده باشد، در اینجا $a = 1$؛ و بالاخره h را برابر تفاضل عدد داده شده و عدد a بگیریم، در اینجا $h = 0/012$. بدین ترتیب تقریب (۱) در اینجا به شکل زیر در می‌آید

$$\sqrt[3]{1/012} \simeq \sqrt[3]{1} + f'(1)\cdot(0/012)$$

با مشتق‌گیری از $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ داریم $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$، پس $f'(1) = \frac{1}{3}$ و داریم

$$\sqrt[3]{1/012} \simeq 1 + (\frac{1}{3})(0/012) = 1/004$$

مثال ۲. گفته می‌شود که برای مقادیر کوچک $|\theta|$، برحسب رادیان، $\sin\theta \simeq \theta$. نشان می‌دهیم مبنای این ادعا، تقریب خطی است. می‌نویسیم $f(x) = \sin x$، پس $f'(x) = \cos x$، و $a = 0$، پس $f(a) = 0$ و $f'(a) = 1$. بنابراین با قراردادن θ به جای h در (۱) داریم

$$\sin\theta \simeq 0 + 1\cdot\theta = \theta$$

مثال ۳. ظرف قیف شکل طبق شکل ۱ را در نظر می‌گیریم که ارتفاع آن ۲۰ سانتی‌متر و شعاع قاعده آن ۱۰ سانتی‌متر است و طوری قرار گرفته که رأس آن در پایین و محور مخروط در راستای قائم قرار دارد. مقداری آب در این ظرف ریخته شده است و ارتفاع آب از رأس قیف برابر ۶ سانتی‌متر با خطای ممکن $\pm 0/1$ سانتی‌متر اندازه‌گیری شده است. اگر حجم آب موجود در این ظرف را بر اساس ارتفاع اندازه‌گیری شده محاسبه کنیم، خطای ممکن در محاسبه حجم حداکثر چه‌قدر است؟

اگر ارتفاع سطح آب را به h و شعاع سطح آب را به r نمایش دهیم، از تشابه مثلث‌ها داریم $r = \frac{h}{2}$. حال اگر حجم آب را به V نمایش دهیم، داریم

$$V = \frac{\pi}{12}h^3$$

با مشتق‌گیری نتیجه می‌شود که

$$\frac{dV}{dh} = \frac{\pi}{۴}h^{۲}$$

با استفاده از (۲) داریم

$$\Delta V \simeq (\frac{\pi}{۴}(٦^{۲}))\Delta h = (۹\pi)(\Delta h)$$

خطای محاسبهٔ ارتفاع سطح آب $\pm$۰/۱ سانتی‌متر فرض شده است، یعنی $|\Delta h| \leq$ ۰/۱، بنابراین $|\Delta V|$ حدوداً از $\frac{۹}{۱۰}\pi$ یعنی حدوداً ۲٫۸۳ سانتی‌متر مکعب کوچکتر است.

مثال‌های بالا را باید از نظر علمی بدوی تلقی کرد زیرا که در کاربردهای مختلف درجه دقت‌های متفاوت مورد نظر است و تقریبی که در یک کاربرد پذیرفتنی است در کاربردی دیگر ممکن است منجر به خطاهای غیرقابل قبول شود. برای هر روش تقریب باید قاعده‌ای عملی برای تخمین حدود خطا نیز ارائه شود که به کمک آن بتوانیم به یک ارزیابی در مورد قابل قبول بودن روش تقریب دست یابیم. در مورد تقریب خطی به زودی به چنین روشی برای تخمین خطا دست خواهیم یافت ولی در حال حاضر موضوع "خطای نسبی" را مطرح می‌کنیم که از نظر عملی اغلب ضابطه‌ای سودمندتر از خطای مطلق است. به طور کلی، خطای نسبی برابر نسبت خطا به مقدار واقعی تعریف می‌شود. بدین ترتیب اگر نمو کوچک متغیر، یعنی Δx، را به عنوان خطا در اندازه‌گیری مقدار x متغیر فرض کنیم، خطای نسبی $\frac{\Delta x}{x}$ خواهد بود، و نیز خطای نسبی متناظر برای مقدار تابع، $\frac{\Delta y}{y}$ می‌شود.

مثال ۴. در مثال ۳ بالا، اگر ارتفاع آب ٦ سانتی‌متر با خطای نسبی حداکثر یک درصد اندازه‌گیری شده باشد، حداکثر خطای نسبی حاصل در محاسبهٔ حجم متناظر چیست؟

در اینجا داریم $|\frac{\Delta h}{h}| \leq \frac{۱}{۱۰۰}$ و می‌خواهیم کران بالایی برای $|\frac{\Delta V}{V}|$ به‌دست آوردیم. داشتیم

$$\Delta V \simeq f'(a)\Delta h$$

با تقسیم کردن بر V نتیجه می‌شود

$$\frac{\Delta V}{V} \simeq (\frac{\pi}{۴}h^{۲})\frac{\Delta h}{\frac{\pi}{۱۲}h^{۳}} = ۳\frac{\Delta h}{h}$$

بنابراین $|\frac{\Delta V}{V}| \leq \frac{۳}{۱۰۰}$، یعنی خطای نسبی متناظر در محاسبهٔ حجم حداکثر ۳ درصد است.

مثال ۵. مثال بالا را می‌توان به این صورت تعمیم داد. فرض کنید $y = kx^n$ که در آن k ثابت است. اگر در محاسبه یا اندازه‌گیری x حداکثر خطای نسبی r درصد باشد، حداکثر خطای نسبی در محاسبهٔ y چیست؟

داریم $\frac{dy}{dx} = nkx^{n-۱}$، پس

$$\Delta y \simeq nkx^{n-۱}\Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{y} \simeq \frac{nkx^{n-۱}}{kx^n}\Delta x = n\frac{\Delta x}{x}$$

بدین ترتیب اگر کمیت y متناسب با توان nـ ام کمیت x باشد خطای نسبی در y حدوداً n برابر خطای نسبی در x خواهد بود. به یک مثال آشنا در این زمینه توجه کنید. مربعی به ضلع a با خطای $\pm h$ داده شده است. می‌خواهیم خطای احتمالی حادث در محاسبهٔ مساحت مربع را تخمین بزنیم. داریم

$$(a \pm h)^۲ - a^۲ = \pm ۲ah + h^۲$$

اگر h کوچک باشد، $h^۲$ در مقایسه بسیار کوچکتر است و معمولاً "قابل صرف‌نظر" تلقی می‌شود. $h^۲$ برابر مساحت گوشهٔ کوچک هاشورزده در شکل ۲ است. بنابراین داریم

$$(a \pm h)^۲ - a^۲ \simeq \pm ۲ah$$

این دقیقاً برابر نتیجه‌ای است که از تقریب خطی تابع $f(x) = x^۲$ حاصل می‌شود، با تقسیم بر $a^۲$ نتیجه زیر به‌دست می‌آید

$$\frac{(a \pm h)^۲ - a^۲}{a^۲} \simeq \pm ۲\frac{h}{a}$$

در اینجا $\frac{h}{a}$ خطای نسبی در محاسبهٔ طول ضلع مربع است و طرف چپ خطای نسبی در محاسبهٔ مساحت مربع.

اکنون به بررسی تخمین خطا در تقریب خطی می‌پردازیم. چهار نمونهٔ تقریب خطی در نمودارهای شکل ۳ را در نظر بگیرید.

در همه موارد به وضوح مشاهده می‌شود که هر چه $|h|$ کوچکتر باشد، فاصلهٔ بین خط مماس و نمودار تابع کوچکتر است. تفاوت دیگری که میان شکل‌های (الف) و (ب) از یک سو با (ج) و (د) در سوی دیگر وجود دارد این است که با رشد $|h|$ در شکل‌های (الف) و (ب)، میزان خطا، یعنی اختلاف مقدار y میان نمودار تابع و تقریب خطی، به شدت افزایش می‌یابد در حالی که در شکل‌های (ج) و (د)، نمو خطا به نسبت کند است. در (ج) و (د) نمودار تا فاصلهٔ زیادی نسبت $(a, f(a))$ نزدیک به خط راست می‌ماند در حالی که در (الف) و (ب)، انحراف نمودار از "راست بودن" بسیار شدید است. چگونه می‌توان این تفاوت را به صورت ریاضی صورت‌بندی کرد؟ اگر فرض کنیم تابع f در سراسر دامنه، یا دست‌کم در بازه‌ای حول a، مشتق‌پذیر است، یعنی خط مماس بر تابع در همهٔ نقاط نمودار یا دست‌کم نقاط نزدیک به $(a, f(a))$ وجود دارد، آنگاه مشاهده می‌کنیم که شیب مماس در شکل‌های (الف) و (ب) سریعاً تغییر می‌کند در حالی که در شکل‌های (ج) و (د) شیب مماس آهنگ تغییر کندی دارد. ولی شیب مماس برابر مشتق تابع است، پس در شکل‌های (الف) و (ب) آهنگ تغییر مشتق تابع در قدرمطلق بزرگ است، در حالی که در شکل‌های (ج) و (د) آهنگ تغییر مشتق کوچک می‌باشد. بنابراین اگر مشتق تابع f، یعنی f'، را به عنوان یک تابع در نظر بگیریم، و اگر این تابع خود مشتق‌پذیر باشد، از آنجا که آهنگ تغییر به وسیله مشتق سنجیده می‌شود، اندازهٔ مشتق f' باید نشان‌دهندهٔ شدت انحراف نمودار از یک خط راست باشد، مشتق f' را که به f'' نمایش می‌دهند، "مشتق دوم f" می‌نامند. در زیر تعریف دقیق را بررسی می‌کنیم:

(۱۷-۱) $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع است و f در نقاط زیرمجموعه‌ای S' از S مشتق‌پذیر است، یعنی $f' : S' \longrightarrow \mathbb{R}$، تعریف شده است. برای نقطهٔ درونی a از S'، اگر مشتق f' در نقطهٔ a وجود داشته باشد، آن را مشتق دوم f در نقطهٔ a خوانده و به $f''(a)$ نمایش می‌دهیم.

اگر بنویسیم $y = f(x)$، در نمادگذاری لایب‌نیتس، $f''(x)$ به $\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})$ یا اختصاراً $\frac{d^2y}{dx^2}$ نمایش داده می‌شود.

اکنون می‌توانیم به کمک مشتق دوم f، تخمینی برای خطای تقریب خطی ارائه کنیم.

(۱۷—۲) (تخمین خطای تقریب خطی) فرض کنید تابع $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ در یک بازهٔ باز شامل نقطهٔ درونی a از S دارای مشتق‌های مرتبهٔ اول و دوم است. در این صورت اگر نقطهٔ $a+h$ در این بازه باشد داریم

$$f(a+h) - [f(a) + f'(a)h] = \frac{1}{2} f''(c) h^2 \qquad (4)$$

که در آن c نقطه‌ای بین a و $a+h$ است.

توجه کنید که این حکم با انتظارات ما سازگار است. از یک طرف هر قدر $|h|$ کوچکتر باشد، خطای منتظره کوچکتر است (در واقع طرف راست (۴) با مجذور h متناسب است)، و از طرفی دیگر اندازهٔ مشتق دوم بین a و $a+h$ می‌تواند بر مقدار خطا اثر بگذارد. ظهور مجذور h بدین معنی است که در مبنای عددنویسی اعشاری اگر اندازه‌گیری a یک رقم اعشار دقیق‌تر شود، می‌توان انتظار داشت که خطای محاسبه تا دو رقم اعشار کاهش یابد زیرا اگر به جای h از $\frac{h}{10}$ استفاده کنیم، طرف راست (۴) بر ۱۰۰ تقسیم خواهد شد. در اثبات ۱۷—۲ خواهیم دید که حکم آن در واقع همتای قضیهٔ میانگین برای تابع‌های دوبار مشتق‌پذیر است. در واقع اثبات ما به تبعیت از اثبات قضیهٔ میانگین با ارائه همتایی از قضیهٔ رل شروع خواهد شد.

(۱۷—۳) (همتای قضیهٔ رل برای مشتق دوم) I یک بازهٔ باز است، $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی دارای مشتق‌های مرتبهٔ اول و دوم در I، a و b دو نقطهٔ I که $a < b$، $f(a) = f(b) = 0$ و $f'(a) = 0$. در این صورت نقطه‌ای c وجود دارد، $a < c < b$، که $f''(c) = 0$.

برهان. شرایط قضیهٔ رل معمول برای $[a, b]$ برقرار است، پس نقطه‌ای c_1 وجود دارد، $a < c_1 < b$، که $f'(c_1) = 0$.

حال شرایط قضیهٔ رل معمولی برای تابع f' در $[a, c_1]$ برقرار می‌شود زیرا که $f'(a) = f'(c_1) = 0$، پس نقطه‌ای c وجود دارد $a < c < c_1$، که $f''(c) = (f')'(c) = 0$. □

(۱۷—۴) (همتای قضیهٔ میانگین برای مشتق دوم) I یک بازهٔ باز است، $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی دارای مشتق‌های مرتبهٔ اول و دوم در I، a و b و نقطهٔ I که $a < b$. در این صورت نقطه‌ای c وجود دارد، $a < c < b$، که:

$$f(b) - [f(a) + f'(a)(b-a)] = \frac{۱}{۲} f''(c)(b-a)^{۲} \qquad (۵)$$

توجه کنید که اگر قرار دهیم $b = a + h$، (۵) به (۴) تبدیل می‌شود و پس از اثبات ۱۷—۴، صحت ۱۷—۲ نیز نتیجه می‌شود.

برهان ۱۷—۴. مشابه شیوه‌ای که از قضیهٔ رل معمولی، قضیهٔ میانگین را نتیجه گرفتیم، عمل می‌کنیم. در آنجا با کم کردن مقدار y خط واصل از $(a, f(a))$ به $(b, f(b))$ از $y = f(x)$ دیدیم که تفاضل در قضیهٔ رل صدق می‌کند. در اینجا چون شیب خط راست فوق لازم نیست برابر $f'(a)$ باشد، این تفاضل شرط لازم برای مشتق در نقطهٔ آغازی را برآورده نمی‌کند. بنابراین تابعی یک درجه پیچیده‌تر از تابع درجه یک (با نمودار خط راست) باید جستجو کنیم که در نقطهٔ a مقدار تابع و مقدار مشتق آن برابر به ترتیب $f(a)$ و $f'(a)$ باشند، و در نقطهٔ b، مقدار تابع برابر $f(b)$. برای برآورده کردن این سه شرط یک تابع درجه ۲ کفایت می‌کند. تابعی کمکی زیر را در نظر بگیرید:

$$\phi(x) = A + B(x-a) + C(x-a)^{۲}$$

برای اینکه $\phi(a) = f(a)$، باید داشته باشیم $A = f(a)$. اگر یک بار از ϕ مشتق بگیریم حاصل می‌شود:

$$\phi'(x) = B + ۲C(x-a)$$

برای اینکه $\phi'(a) = f'(a)$، باید داشته باشیم $B = f'(a)$، پس

$$\phi(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + C(x-a)^{۲} \qquad (٦)$$

برای تعیین ضریب C، از شرط $\phi(b) = f(b)$ استفاده می‌کنیم:

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + C(b-a)^{۲}$$

یا

$$C = \frac{f(b) - [f(a) + f'(a)(b-a)]}{(b-a)^۲} \qquad (۷)$$

بدین ترتیب با این مقدار برای C، تابع ϕ در (٦) در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$\phi(a) = f(a) \quad , \quad \phi'(a) = f'(a) \quad , \quad \phi(b) = f(b) \qquad (۸)$$

حال تابع g را به صورت

$$g(x) = f(x) - \phi(x)$$

تعریف می‌کنیم. از (۸) نتیجه می‌شود که

$$g(a) = g(b) = ۰ \quad , \quad g'(a) = ۰$$

بنابراین طبق (۱۷—۳) نقطه‌ای c وجود دارد، $a < c < b$، که $g''(c) = ۰$، ولی:

$$g''(c) = f''(c) - ۲C = ۰$$

یا

$$f''(c) = (۲)\frac{f(b) - [f(a) + f'(a)(b-a)]}{(b-a)^۲}$$

و با طرفین ـ وسطین حکم (۵) نتیجه می‌شود. □

بدین ترتیب همان طور که قبل از ارائه برهان اشاره شد، تخمین خطای تقریب خطی، یعنی فرمول (۴) و گزاره ۱۷—۲ از ۱۷—۴ نتیجه می‌شوند.

مثال ٦. تقریب خطی $\sqrt[۳]{۱/۰۱۲} \simeq ۱/۰۰۴$ را که در مثال ۱ آوردیم بررسی می‌کنیم. در این مثال داشتیم $f(x) = \sqrt[۳]{x}$، پس $f'(x) = \frac{۱}{۳}x^{-\frac{۲}{۳}}$ و $f''(x) = -\frac{۲}{۹}x^{-\frac{۵}{۳}}$. بنابراین طبق ۱۷—۲

$$\sqrt[۳]{۱/۰۱۲} - ۱/۰۰۴ = (\frac{۱}{۲})(-\frac{۲}{۹})\frac{۱}{c^{\frac{۵}{۳}}}(\frac{۱۲}{۱۰۰۰})^۲ \qquad (۹)$$

که در اینجا c بین ۱ و ۱٫۰۱۲ است. ۱۷–۲ اطلاع دقیق‌تری در مورد c نمی‌دهد و اصولاً نباید انتظار داشت که بتوان میزان خطا را به راحتی و دقت به‌دست آورد زیرا در این صورت با افزودن این مقدار به مقدار تقریبی، مقدار دقیق به‌دست می‌آمد. آنچه در اینجا مطلوب است یافتن حدود یا یک کران بالایی برای قدرمطلق خطاست. اگر بتوانیم کرانی بالایی برای خطا به‌دست آوردیم که در کاربرد خاص مورد نظر قابل قبول باشد، تقریب مطرح شده نیز پذیرفتنی است. در اینجا چون $1 < c < 1/012$ و c در مخرج طرف راست (۹) است، با قرار دادن $c = 1$، قدرمطلق طرف راست (۹) یک کران بالایی برای قدرمطلق خطا به‌دست می‌دهد:

$$|\sqrt[3]{1/012} - 1/004| < \frac{16}{10^6}$$

بنابراین اگر مثلاً دقت 10^{-4} مورد نظر باشد، تقریب بالا قابل قبول است. اگر از قاعده روند کردن استفاده کنیم، چون $\frac{16}{10^6} < \frac{1}{2}10^{-4}$، تقریب ۱٫۰۰۴۰ تا چهار رقم اعشار درست است. محاسبه با یک ماشین حساب به نسبت قوی می‌دهد $\sqrt[3]{1/012} \simeq 1/0039841$ که اگر به چهار رقم پس از اعشار روند شود به همان ۱٫۰۰۴۰ می‌رسد.

ذکر یکی دو نکته در مورد مثال بالا لازم است. اول اینکه علامت منفی طرف راست (۹) نشانگر این است که تقریب ۱٫۰۰۴ از مقدار واقعی بزرگتر است. در واقع با توجه به علامت منفی $f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$ برای $x > 0$، مشاهده می‌کنیم که $\frac{1}{2}f''(c)h^2 < 0$ و طبق (۴) نمودار تابع همواره زیر خط مماس قرار دارد (شکل ۵).

نکته دوم که از $f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$ و نیز نمودار تابع $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$، $x > 0$، مشاهده می‌شود این است که $|f''(x)|$ به $+\infty$ میل می‌کند وقتی $x \longrightarrow 0^+$، در حالی که $|f''(x)|$ به صفر میل می‌کند وقتی $x \longrightarrow +\infty$. در نمودار این نکته به این صورت ظاهر می‌شود که شیب خط مماس بر نمودار وقتی $x \longrightarrow 0^+$ به شدت تغییر می‌کند در حالی که تغییر شیب وقتی $x \longrightarrow +\infty$ بسیار کندتر است. بنابراین می‌توان انتظار داشت که مثلاً مقداری که تقریب خطی در نقطهٔ $a = 1$ برای $\sqrt[3]{1+h}$ به‌دست می‌دهد، یعنی $1 + \frac{h}{3}$، برای $h > 0$ دقیق‌تر از $h < 0$ با همان $|h|$ باشد. مثلاً برای $h = 0/21$ مقدار تقریبی ۱٫۰۷ به‌دست می‌آید که تا دو رقم اعشار با روند کردن درست است (ماشین حساب به نسبت قوی

مقدار ۱٫۰۶۵۶ را می‌دهد که با روند کردن به ۱٫۰۷ تبدیل می‌شود). این در حالی است که برای $h=-۰/۲۱$ تقریب ۰٫۹۳ با مقدار ارائه شده توسط ماشین حساب به صورت ۰٫۹۲۴۴۳ تا دو رقم پس از اعشار، پس از روند کردن، مطابقت ندارد. برای $|h|$ بزرگتر تفاوت فاحش‌تر می‌شود. برای $h=۱$، اختلاف تقریب خطی $۱+\frac{۱}{۳}=۱/۳۳۳۳۳۳$ با مقدار ۱٫۲۵۹۹۲۱ ماشین حساب حدوداً ۰٫۰۷۳۴۱۲ است در حالی که برای $h=-۱$، تقریب خطی $\frac{۲}{۳}$ با مقدار واقعی ۰، $\frac{۲}{۳}=۰/۶۶۶۶۶۶$ اختلاف دارد.

نمودار تابع و کاربردهای آن

بحث جلسهٔ قبل اهمیت مشتق دوم را در تخمین خطای تقریب خطی نشان داد. در اینجا نخست به بررسی بیشتر کاربردهای مشتق دوم می‌پردازیم. یادآوری می‌کنیم که اگر تابع f در بازهٔ باز I دوبار مشتق‌پذیر باشد و a و $a+h$ در این بازه باشند، آنگاه:

$$f(a+h) - [f(a) + f'(a)h] = \frac{۱}{۲} f''(c)h^{۲} \qquad (۱)$$

که در آن c نقطه‌ای بین a و $a+h$ است. از (۱) بلافاصله نتیجه می‌شود که:

(۱۸—۱) **گزاره.** فرض کنید I یک بازهٔ باز است و $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی دوبار مشتق‌پذیر که مشتق دوم آن در سراسر بازهٔ I مثبت (به ترتیب منفی) است. در این صورت برای هر نقطهٔ درونی a از I، نمودار تابع به‌ازای هر $x \neq a$ در بالا (به ترتیب پایین) خط مماس در نقطهٔ a قرار می‌گیرد. به بیان دیگر:

$$x \neq a \quad : \quad f(x) > f(a) + f'(a)(x-a) \qquad (۲)$$

$$(x \neq a \quad : \quad f(x) < f(a) + f'(a)(x-a) \quad \text{به ترتیب}) \qquad (۳)$$

□

ضمناً در وضعیت $f'' > ۰$، مشتق اول، یعنی شیب مماس، صعودی، و در وضعیت $f'' < ۰$، شیب مماس نزولی خواهد بود. اگر $a < b < c$ طوری باشند که f'' روی $]a, b[$ و $]b, c[$ علامت مختلف داشته باشد، نقطهٔ b را یک نقطه عطف می‌نامند. اگر f'' پیوسته باشد در این نقطه که f'' تغییر علامت

می‌دهد باید داشته باشیم $f''(b) = ۰$. در شکل ۱ (الف) تابعی با $f'' > ۰$، در شکل ۱ (ب) تابعی با $f'' < ۰$، و در شکل ۱ (ج) یک نقطهٔ عطف نمایش داده شده است.

از شکل‌های ۱ (الف) و ۱ (ب) به نظر می‌رسد که وقتی $f'' > ۰$، خط واصل بین هر دو نقطهٔ نمودار باید در بالای نمودار قرار گیرد، و بالعکس وقتی $f'' < ۰$، خط واصل بین دو نقطهٔ نمودار در زیر نمودار تابع واقع می‌شود. این حدس در واقع درست است:

(۱۸—۲) گزاره. I یک بازهٔ باز است و $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی دوبار مشتق‌پذیر. فرض کنید f'' در سراسر I مثبت (به ترتیب منفی) است. در این صورت برای هر دو نقطه a و b از I که $a < b$، خط واصل بین $(a, f(a))$ و $(b, f(b))$ بالای (به ترتیب پایین) نمودار f روی $]a, b[$ قرار می‌گیرد.

برهان. مطلب را برای $f'' > ۰$ ثابت می‌کنیم، حالت $f'' < ۰$ مشابه است و نیز با تعویض f به $-f$ به‌دست می‌آید. توجه کنید که نقاط بازهٔ $[a, b]$ را می‌توان به صورت $(۱ - t)a + tb$ نوشت که در آن $۰ \leq t \leq ۱$. همچنین هر نقطهٔ پاره‌خط واصل بین $(a, f(a))$ و $(b, f(b))$ به صورت $((۱ - t)a + tb, (۱ - t)f(a) + tf(b))$، $۰ \leq t \leq ۱$، نمایش داده می‌شود. در واقع باید ثابت کنیم:

$$۰ < t < ۱ \quad : \quad f((۱ - t)a + tb) < (۱ - t)f(a) + tf(b) \qquad (۴)$$

فرض می‌کنیم به‌ازای یک t، $۰ < t < ۱$، نامساوی (۴) برقرار نیست و به تناقض می‌رسیم. بدین ترتیب فرض کنید t وجود دارد که

$$f((۱ - t)a + tb) \geq (۱ - t)f(a) + tf(b)$$

پس

$$(۱ - t)f((۱ - t)a + tb) + tf((۱ - t)a + tb) \geq (۱ - t)f(a) + tf(b)$$

بنابراین

$$(۱ - t)(f((۱ - t)a + tb) - f(a)) \geq t(f(b) - f((۱ - t)a + tb))$$

اگر دو طرف را بر $t(1-t)(b-a)$ تقسیم کنیم، حاصل می‌شود:

$$\frac{f((1-t)a+tb)-f(a)}{t(b-a)} \geq \frac{f(b)-f((1-t)a+tb)}{(1-t)(b-a)}$$

یا:

$$\frac{f((1-t)a+tb)-f(a)}{(1-t)a+tb-a} \geq \frac{f(b)-f((1-t)a+tb)}{b-((1-t)a+tb)}$$

برای سهولت در نوشتن، نقطهٔ $(1-t)a+tb$ را به c نمایش دهید. پس داریم:

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} \geq \frac{f(b)-f(c)}{b-c}$$

کسر سمت چپ شیب خط واصل بین $(a, f(a))$ و $(c, f(c))$ است. طبق قضیهٔ میانگین نقطه‌ای c_1 بین a و c وجود دارد که کسر سمت چپ برابر $f'(c_1)$ است. به همین ترتیب نقطه‌ای c_2 وجود دارد، $c < c_2 < b$، که $f'(c_2)$ برابر کسر سمت راست است. بنابراین

$$f'(c_1) \geq f'(c_2)$$

ولی چون $f'' > 0$، f' صعودی است، پس $f'(c_1) < f'(c_2)$ و به تناقض مورد نظر رسیده‌ایم. □

به طور کلی تابع‌هایی که برای آنها خط واصل بین دو نقطهٔ نمودار در بالای نمودار تابع قرار گیرد تابع‌های محدب (محدب رو به پایین، یا مقعر رو به بالا)، و تابع‌هایی که برای آنها خط واصل بین دو نقطهٔ نمودار در زیر نمودار تابع قرار گیرد تابع‌های مقعر (مقعر رو به پایین، یا محدب رو به بالا) می‌نامند. بدین ترتیب ثابت کرده‌ایم که:

(۱۸—۳) **نتیجه.** فرض کنید I یک بازهٔ باز و $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ دوبار مشتق‌پذیر است. اگر f'' در سراسر I مثبت (به ترتیب منفی) باشد، تابع f در I محدب (به ترتیب مقعر) است. □

با توجه به این نتیجه می‌توان در رسم نمودار تابع‌ها، با توجه به علامت مشتق دوم بازه‌های تحدب و تقعر تابع را منظور نمود.

حال فرض کنید تابع f در بازه‌ای حول نقطهٔ درونی a از بازهٔ خود مشتق‌پذیر است و در نقطهٔ a دارای مشتق دوم، $f''(a)$، است. آیا علامت $f''(a)$ در تک نقطهٔ a اطلاعی در مورد این نقطه

به‌دست می‌دهد؟ در بخش ۱۵، احکام ۱۵—۴—۱ و ۱۵—۴—۲ نشان دادند که اگر برای تابعی g داشته باشیم $g'(a) > 0$ (به ترتیب $g'(a) < 0$)، آنگاه برای x های نزدیک a و بزرگتر از a داریم $g(x) > g(a)$ (به ترتیب $g(x) < g(a)$)، و برای x های نزدیک و کوچکتر از a داریم $g(x) < g(a)$ (به ترتیب $g(x) > g(a)$). حال اگر به جای g تابع f' را جایگزین کنیم، نتیجه می‌شود که به فرض $f''(a) > 0$ (به ترتیب $f''(a) < 0$)، برای x های نزدیک و بزرگتر از a داریم $f'(x) > f'(a)$ (به ترتیب $f'(x) < f'(a)$)، و برای x های نزدیک و کوچکتر از a داریم $f'(x) < f'(a)$ (به ترتیب $f'(x) > f'(a)$). بالاخص اگر $f'(a) = 0$، یعنی a یک نقطهٔ بحرانی تابع f باشد نتیجه می‌شود که:

- اگر $f''(a) > 0$، برای x های نزدیک و بزرگتر از a داریم $f'(x) > 0$ و برای x های نزدیک و کوچکتر از a داریم $f'(x) < 0$.

- اگر $f''(a) < 0$، برای x های نزدیک و بزرگتر از a داریم $f'(x) < 0$ و برای x های نزدیک و کوچکتر از a داریم $f'(x) > 0$.

پس در وضعیت $f'(a) = 0$ و $f''(a) > 0$، تابع در سمت راست a صعودی، در سمت چپ آن نزولی است، در نتیجه a یک نقطهٔ کمینهٔ موضعی خواهد بود. به همین ترتیب، وقتی $f'(a) = 0$ و $f''(a) < 0$، نقطهٔ a یک بیشینهٔ موضعی است. بنابراین "آزمون مشتق دوم" به شرح زیر ثابت شده است.

(۱۸—۴) آزمون مشتق دوم. فرض کنید تابع f در یک بازه حول نقطه درونی a از دامنهٔ خود مشتق‌پذیر است و در نقطهٔ a، مشتق دوم f، $f''(a)$، وجود دارد. به علاوه فرض کنید $f'(a) = 0$. در این صورت:

الف) اگر $f''(a) > 0$، نقطهٔ a یک کمینه (مینیمم) موضعی است.

ب) اگر $f''(a) < 0$، نقطهٔ a یک بیشینه (ماکسیمم) موضعی است. □

آزمون مشتق دوم نیز در رسم نمودار تابع‌ها گاهی مؤثر واقع می‌شود. اگر علاوه بر $f'(a) = 0$، داشته باشیم $f''(a) = 0$، اطلاعی در مورد ماهیت نقطهٔ a حاصل نمی‌شود. در شکل (۴) چهار نمونه با

$f'(a) = f''(a) = ۰$. نمایش داده شده‌اند که چهار وضعیت مختلف دارند.

چند مثال زیر شکل‌های ۱ و ۳ بخش ۱۵ را توجیه می‌کنند.

مثال ۱. نمودار تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$، $f(x) = x^{۴} - x^{۳}$ را رسم کنید.

داریم $f'(x) = ۴x^{۳} - ۳x^{۲}$، $f''(x) = ۱۲x^{۲} - ۶x$. در جدول زیر علامت تابع و علامت مشتق‌های اول و دوم آن را در بازه‌های گوناگون نمایش داده‌ایم:

x		۰		$\frac{۱}{۲}$		$\frac{۳}{۴}$		۱	
$f(x)$	$+$	۰	$-$	$\vdots$	$-$	$\vdots$	$-$	۰	$+$
$f'(x)$	$-$	۰	$-$	$\vdots$	$-$	۰	$+$	$\vdots$	$+$
$f''(x)$	$+$	۰	$-$	۰	$+$	$\vdots$	$+$	$\vdots$	$+$

با توجه به داده‌های بالا، شکل ۳ (الف) به‌دست می‌آید.

مثال ۲. نمودار تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$، $f(x) = x - \sin x$ را رسم کنید.

داریم $f'(x) = ۱ - \cos x$ و $f''(x) = \sin x$. این تابع صعودی است زیرا که فقط در مجموعه‌ای گسسته از نقاط، یعنی $x = ۲k\pi$ مشتق صفر می‌شود و در سایر نقاط مشتق مثبت است، پس بین هر دو مضرب متوالی ۲π تابع صعودی است. مشتق دوم تابع در مضارب π صفر می‌شود و تغییر علامت می‌دهد، پس این نقاط همه نقاط عطف هستند. ضمناً داریم $f(۰) = ۰$، و از صعودی بودن تابع نتیجه می‌شود که $f(x) > ۰$ برای $x > ۰$ و $f(x) < ۰$ برای $x < ۰$. با در نظر گرفتن علامت f'' در بازه‌های مختلف، شکل ۳ (ب) به‌دست می‌آید.

مثال ۳. نمودار تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ را که به صورت زیر تعریف شده است رسم کنید:

$$f(x) = \begin{cases} x^{۲} \sin \frac{۱}{x} & x \neq ۰ \\ ۰ & x = ۰ \end{cases}$$

برای $x \neq ۰$ تابع داده شده ترکیب و حاصل‌ضرب تابع‌های مشتق‌پذیر است پس برای $x \neq ۰$ مشتق‌پذیر می‌باشد. در $x = ۰$ مشتق‌پذیر بودن تابع را مستقیماً از تعریف تحقیق می‌کنیم:

$$\lim_{h \to ۰} \frac{h^{۲} \sin \frac{۱}{h} - ۰}{h} = \lim_{h \to ۰} (h)(\sin \frac{۱}{h})$$

از آنجا که $|\sin \frac{1}{h}|$ کراندار با کران ۱ است و $\lim_{h\to 0} h = 0$، حد بالا وجود دارد و برابر صفر است، پس خط مماس بر نمودار در $x = 0$ وجود دارد و افقی است. ضمناً فرمول مشتق f به‌ازای $x \neq 0$ از فرمول لایب‌نیتس و قاعدهٔ زنجیره‌ای محاسبه می‌شود:

$$x \neq 0 \quad : \quad f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \qquad (5)$$

ادعا می‌کنیم دنباله‌ای از نقاط (x_n) وجود دارد که $x_n \longrightarrow 0$ و $f'(x_n) = f'(-x_n) = 0$. در واقع با قرار دادن $f'(x) = 0$ داریم:

$$\tan \frac{1}{x} = \frac{1}{2}\frac{1}{x}$$

اگر قرار دهیم $t = \frac{1}{x}$، باید نشان دهیم دنباله‌ای t_n وجود دارد که $t_n \longrightarrow +\infty$ و $\tan t_n = \frac{1}{2} t_n$. این مطلب با توجه به شکل ۴ بدیهی است زیرا که نمودار تابع $\alpha(t) = \frac{1}{2}t$ همهٔ شاخه‌های نمودار تابع تناوبی $\beta(t) = \tan t$ را قطع می‌کند.

با قرار دادن $x_n = \frac{1}{t_n}$ حکم مورد نظر به‌دست می‌آید. ضمناً $f'(x)$ در همهٔ این نقاط تغییر علامت می‌دهد زیرا که اگر بنویسیم

$$f'(x) = (2x \cos \frac{1}{x})(\tan \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\frac{1}{x})$$

در نقاط x_n، پرانتز دوم صفر شده تغییر علامت می‌دهد زیرا که خط راست $\alpha(t) = \frac{t}{2}$ متناوباً در بالا و پایین نمودار $\beta(t) = \tan t$ قرار می‌گیرد و $2x \cos \frac{1}{x}$ در $x = x_n$ تغییر علامت نمی‌دهد. نتیجه اینکه نقاط (x_n) یکی در میان ماکسیمم و مینیمم موضعی هستند. نهایتاً اینکه چون $|\sin \frac{1}{x}| \leq 1$، نمودار تابع $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ بین نمودارهای $y = x^2$ و $y = -x^2$ محصور می‌ماند. این نمودار در شکل ۵ نمایش داده شده است.

توجه کنید که $f'(0) = 0$ ولی نقطهٔ ۰ نه کمینهٔ موضعی، نه بیشینهٔ موضعی و نه نقطهٔ عطف معمولی آن است. در واقع چون تابع f' در ۰ پیوسته نیست (عبارت (۵) حد ندارد وقتی $x \longrightarrow 0$ در حالی که $f'(0) = 0$)، f' نمی‌تواند در ۰ مشتق‌پذیر باشد، یعنی $f''(0)$ موجود نیست.

مثال ۴. شکل ۱ بخش ۱۵ نمودار تابعی f را نشان می‌دهد که $f'(0) > 0$ ولی f در هیچ بازهٔ حول 0 صعودی نیست. با اندک تغییری در مثال ۳ می‌توان فرمولی برای چنین تابعی ارائه کرد. می‌نویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + x^2 \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

از محاسبات مثال ۳ نتیجه می‌شود که f همه‌جا مشتق‌پذیر است و $f'(0) = \frac{1}{2} > 0$. طبق ۱۵—۴—۱، این تابع برای $x > 0$ کوچک مقدار مثبت و برای $x < 0$ با قدرمطلق کوچک، مقدار منفی دارد. برای $x \neq 0$ داریم:

$$f'(x) = \frac{1}{2} + 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

ادعا می‌کنیم دنباله‌ای (x_n) وجود دارد که $x_n \longrightarrow 0$، $f'(x_n) = f'(-x_n) = 0$، و f' در این نقاط تغییر علامت می‌دهد. در واقع چون $2x\sin\frac{1}{x} \longrightarrow 0$ وقتی $x \longrightarrow 0$ و $\cos\frac{1}{x}$ با کوچک شدن x بی‌نهایت نوسان بین -1 و $+1$ دارد، $f'(x) = 0$ بی‌نهایت جواب در نزدیکی 0 دارد. در این نقاط f' تغییر علامت می‌دهد زیرا نمودار $\cos\frac{1}{x}$ خطوط نزدیک ارتفاع $-\frac{1}{2}$ را در گذر بین -1 و $+1$ قطع می‌کند. در شکل ٦ تقاطع نمودارهای تابع با مقدار $2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$ و تابع با مقدار ثابت $-\frac{1}{2}$ به طور تقریبی رسم شده است. بدین ترتیب شکل ۱ بخش ۱۵ توجیه می‌شود.

آنچه تا این مرحله از خواص مشتق اول و دوم آموخته‌ایم ابزاری نیرومند و مؤثر برای صورت‌بندی و حل بسیاری مسایل عملی در اختیار ما قرار می‌دهد. در باقیماندهٔ این بخش و در جلسهٔ آینده چند نمونه از این مسایل را بررسی خواهیم کرد. نخست در این جلسه مثال‌هایی مطرح می‌کنیم در آنها می‌توان به کمک شکل اطلاعات کیفی سودمند کسب کرد و در بخش آینده تعدادی مثال کمی بهینه‌یابی مطرح خواهیم ساخت.

مثال ۱. گلدانی به صورت شکل ۷ (الف) داده شده است. در این گلدان با آهنگ ثابت آب می‌ریزیم تا گلدان پر شود. نمودار تغییر ارتفاع آب در گلدان را برحسب زمان رسم کنید.

زمان را به t و ارتفاع آب را به h نمایش می‌دهیم. هدف در اینجا رسم نمودار h نسبت به t است. ارتفاع‌های حساس، مربوط به برآمدگی‌ها و تورفتگی‌های گلدان را به a، b و c نمایش داده‌ایم و

$h = 0$ را کف گلدان می‌گیریم. قطعاً با ریختن آب در گلدان ارتفاع سطح آب افزایش می‌یابد، پس h تابعی صعودی از t خواهد بود. به فرض مشتق‌پذیری، مشتق اول h نسبت به t مثبت است. عامل دیگری که در شکل نمودار مؤثر است علامت مشتق دوم h نسبت به t است. اگر مشتق اول، یعنی آهنگ افزایش h در زمان، خود صعودی باشد، مشتق دوم مثبت و نمودار محدب است، ولی اگر آهنگ افزایش h نسبت به t، نزولی باشد، مشتق دوم منفی و نمودار مقعر خواهد بود. پس لازم است تغییر ارتفاع را در بازه‌های مختلف بررسی کنیم. در بازهٔ $0 \leq h \leq a$، ضخامت بدنهٔ گلدان رو به افزایش است، بنابراین آهنگ افزایش ارتفاع سطح آب به تدریج کندتر می‌شود، پس مشتق دوم h نسبت به t وقتی $0 < h < a$، منفی است. بالعکس برای $a \leq h \leq b$، تنگ‌تر شدن مقطع گلدان موجب می‌شود که آهنگ افزایش ارتفاع سطح آب فزونی یابد و در نتیجه در $a < h < b$، مشتق دوم h نسبت به t مثبت خواهد بود. و بالاخره در $b \leq h \leq c$، نیز، مانند $0 \leq h \leq a$، آهنگ افزایش ارتفاع سطح آب نزولی است و $h''(t)$ منفی می‌باشد. یکی دو نکتهٔ دیگر در اینجا حائز اهمیت است. در هر دو بازهٔ $0 \leq h \leq a$ و $b \leq h \leq c$، داریم $h'(t) > 0$ و $h''(t) < 0$، ولی شکل مقطع گلدان در دو مورد متفاوت است، این اختلاف شکل گلدان را چگونه می‌توان در نمودار $h(t)$ منعکس کرد؟ اگر فرض کنیم طول بازه‌های $[0, h]$ و $[b, c]$ برابر است و مقطع گلدان در ارتفاع‌های 0 و b برابر و نیز در ارتفاع‌های a و c برابر است، می‌بینیم که حجم گلدان بین 0 و a، به سبب برآمدگی، بیشتر از حجم گلدان بین b و c است. بنابراین، توجه به اینکه آب با آهنگ ثابت وارد گلدان می‌شود، مدت زمان لازم برای پرکردن ارتفاع 0 تا a بزرگتر از مدت زمان لازم برای پرکردن ارتفاع b تا c است. این نکته در نمودار منظور شده است، توجه کنید که بازه $[t_b, t_c]$ کوچکتر از $[0, t_a]$ منظور شده است.

تمرین. همین بررسی را برای گلدان‌های شکل زیر انجام دهید. علاوه بر شکل کیفی، با توجه به داده‌های تصاویر فرمولی برای h برحسب t به‌دست آورید و مشتق‌های اول، دوم و سوم h نسبت به t را مطالعه کنید.

مثال ۲. نمودار مصرف $\frac{\text{لیتر}}{\text{ساعت}}$ بنزین یک نوع اتومبیل برحسب سرعت اتومبیل در شکل ۹ آمده است. چگونه می‌توان سرعتی را پیدا کرد که در آن بهترین راندمان $\frac{\text{لیتر}}{\text{کیلومتر}}$ حاصل می‌شود؟

سرعت اتومبیل را به v نمایش می‌دهیم. برای هر سرعت v، p متناظر در نمودار، مصرف بنزین اتومبیل به لیتر است اگر اتومبیل یک ساعت با سرعت ثابت v حرکت کند، یا به بیان دیگر $p = \frac{\text{مصرف به لیتر}}{\text{زمان برحسب ساعت}}$ اگر اتومبیل با سرعت ثابت v حرکت کند. در شکل می‌بینیم که بهترین راندمان نسبت به زمان، یعنی کمترین مصرف در ساعت، به‌ازای $v = ۵۰$ کیلومتر در ساعت به‌دست می‌آید. مجهولی که مطرح است، بهترین راندمان مصرف بنزین نسبت به مسافت است. اگر $\frac{\text{مصرف به لیتر}}{\text{مسافت به کیلومتر}}$ را به q نمایش دهیم، در سرعت ثابت v داریم:

$$q = \frac{\frac{\text{مصرف به لیتر}}{\text{زمان برحسب ساعت}}}{\frac{\text{مسافت به کیلومتر}}{\text{زمان برحسب ساعت}}} = \frac{p}{v}$$

بنابراین مسأله یافتن مینیمم q مطرح است. توجه کنید که شهوداً نباید انتظار داشت که مینیمم q و مینیمم p لزوماً در یک سرعت حاصل شوند. بهترین راندمان سوخت بنزین در ساعت از نظر حفظ و نگاهداری موتور بهینه است ولی ممکن است برای رسیدن به یک مقصد دوردست کمترین مصرف بنزین را متضمن نباشد. در واقع اگر منحنی p برحسب v، طبق شکل ۹ باشد (این منحنی از آزمایش‌های واقعی گرفته شده است)، هدف ما مینیمم کردن $\frac{p}{v}$ است نه مینیمم کردن p. توجه کنید که برای هر سرعت v، q متناظر برابر شیب خط راستی است که از ۰ به نقطهٔ (v, p) روی نمودار رسم می‌شود. بنابراین باید نقطه‌ای را روی نمودار پیدا کرد که شیب این خط راست برای آن حداقل ممکن باشد. واضح است که این حداقل برای خط مماسی که از ۰ به نمودار رسم شود به‌دست می‌آید و این سرعتی $v_۰$ بالاتر از نقطهٔ مینیمم p به‌دست می‌دهد (در شکل ۹، $v = v_۰$). به عنوان یک تقریب محاسباتی، فرض کنید $p = \frac{۱}{۱۰۰}(v - ۵۰)^۲ + ۵$ که به‌ازای $v = ۵۰$ مینیمم دارد. داریم $\frac{dp}{dv} = \frac{۱}{۵۰}v - ۱$ و

$$\frac{dq}{dv} = \frac{\frac{dp}{dv} \cdot v - p}{v^۲} = \frac{\frac{۱}{۵۰}v^۲ - v - \frac{۱}{۱۰۰}(v - ۵۰)^۲ - ۵}{v^۲}$$

برای یافتن مینیمم q، قرار می‌دهیم $\frac{dq}{dv} = ۰$ (از ماهیت نمودار v روشن است که q باید دارای مینیمم در یک نقطهٔ درونی بازهٔ تعریف باشد) که نتیجه می‌دهد $\frac{۱}{۱۰۰}v^۲ - ۳۰ = ۰$، یا $v \simeq ۵۴/۸$ کیلومتر بر ساعت.

بهینه سازی

یکی ازکاربردهای بسیار معمول مشتق در مسایل بهینه‌سازی است. مقصود از بهینه سازی یافتن ماکسیمم یا مینی‌موم یک تابع با تنظیم مناسب متغیرهای تابع است. در اینجا ما با تابع یک متغیری سروکار داریم یعنی تابعهای به شکل $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ که S زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ است. نمونه‌هایی از مسایل بهینه‌سازی که در عمل به آن بر می‌خوریم مسایل زیرند: یافتن سرعتی که اتومبیل با آن سرعت، بهترین راندمان $\frac{\text{کیلومتر}}{\text{لیتر}}$ را داشته باشد (مثال جلسهٔ قبل)، یافتن میزان تولید یک کالا به‌طوری که سود حاصل از فروش حداکثر ممکن باشد، یافتن مناسبترین ابعاد برای یک قوطی حلبی استوانه شکل با حجم ثابت به‌طوری‌که کمترین مقدار حلبی در ساخت آن به کارگرفته شود، ... معمولاً دامنهٔ تابع f یک بازه از اعداد حقیقی است که بسته به نوع مساله ممکن است یک بازهٔ کراندار یا بی‌کران باشد و نقاط انتهایی بازهٔ کراندار ممکن است مطرح باشند یا نباشند.

نخست حالی را در نظر بگیرید که یک تابع به شکل $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ داده شده است. می‌دانیم که اگر f پیوسته باشد، تابع f دارای ماکسیمم و مینی‌موم روی $[a,b]$ است. در این حالت انجام موفقیت‌آمیز سه‌گام زیر منجر به یافتن ماکسیمم مینی‌موم می‌شود:

(۱۹ـ۱) گامهای یافتن ماکسیمم و مینی‌موم روی $[a,b]$

(الف) محاسبهٔ $f(a)$ و $f(b)$.

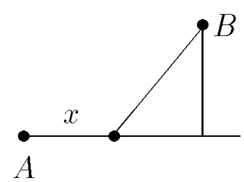
(ب) یافتن مقدار f در نقاط درونی بازه که در آن مشتق وجود دارد و مشتق در آن نقاط صفر است. این نقاط شامل همهٔ نقاط ماکسیمم مینی‌موم موضعی می‌شود که تابع در آن نقاط مشتقپذیر است. این نقاط را نقاط بحرانی می‌نامند.

(ج) یافتن مقدار f در نقاطی که در آن f مشتقپذیر نیست. این نقاط را نقاط تکین می‌نامند.

این سه نوع نقطه همهٔ نامزدهای ممکن برای نقاط ماکسیمم و مینی‌موم را در بر می‌گیرند. با مقایسهٔ مقدار f در این سه دسته نقطه می‌توان ماکسیمم و مینی‌موم تابع f را در $[a,b]$ پیدا کرد.

اگر $a=-\infty$، $b=+\infty$، هردو، و یا اگر باز ۰ به شکل $[a,b[$، $]a,b]$ یا $]a,b[$ باشد، طبیعی است که به جای گام (الف)، باید رفتار تابع را وقتی مقدار متغیر به هر انتهای مشمول نشده در دامنهٔ تعریف f نزدیک می‌شود بررسی کنیم. به هر صورت در مسایل عملی از این نوع، نقطهٔ آغاز حل مساله، طرح دقیق تابع مورد نظر و مشخص کردن دامنهٔ آن است. چنانچه بتوان یک شکل تقریبی از این تابع رسم نمود، معمولاً شکل راهنمای خوبی برای پیشگیری از اشتباه در حل مساله و برخورد با جوابهای نامعقول است.

مثال ۱. برای رسیدن به جزیرهٔ B که در فاصله مستقیم ۳ کیلومتری ساحل قرار دارد، فردی در نقطهٔ A در ساحل که ۵ کیلومتر از نزدیکترین نقطهٔ ساحل به جزیره فاصله دارد و می‌تواند از قایق موتوری و نیز یک اتومبیل برای حرکت در جادهٔ ساحلی استفاده کند.



سرعت قایق موتوری $۲۰km/hr$ و سرعت اتومبیل در جادهٔ ساحلی $۴۰km/hr$ است. تعین کنید که برای رسیدن به جزیره در حداقل زمان ممکن، باید چه مساحتی را نخست با اتومبیل طی کرد و سپس از قایق استفاده نمود.

در این مساله، زمان، t، باید مینی‌موم شود. زمان لازم برای رسیدن به نقطهٔ B مجموع دو زمان $t_۱, t_۲$ است، $t=t_۱+t_۲$، که در آن $t_۱$ زمان استفاده از اتومبیل و $t_۲$ مدت زمان استفاده از قایق می‌باشد. اگر مسافت x کیلومتر نخست در جادهٔ ساحلی با اتومبیل طی شود، داریم:

$$t_۱=\frac{x}{۴۰}, \quad t_۲=\frac{\sqrt{۳^۲+(۵-x)^۲}}{۲۰}$$

بنابراین تابعی که باید مینی‌موم آن پیدا میشود عبارت است از:

$$t = \frac{x}{۴۰} + \frac{\sqrt{۹ + (۵ - x)^۲}}{۲۰}$$

لازم است که دامنهٔ این تابع، یعنی حدود x، نیز مشخص شود. در اینجا $۰ \leq x \leq ۵$ زیرا که اگر فرد مستقیماً از نقطهٔ A به سوی B با قایق حرکت کند داریم $x = ۰$، و از سوی دیگر حداکثر استفادهٔ معقول از اتومبیل راندن تا پای نزدیکترین نقطه ساحل به جزیره، یعنی $x = ۵$، و استفاده از قایق پس از آن است. بنابراین گامهای (الف)، (ب) و (ج) را به‌صورت زیر پیاده می‌کنیم:

(الف) در $x = ۰$ داریم (ساعت)، $t = \frac{\sqrt{۳۴}}{۲۰} \approx ۰/۲۷۵$، و برای $x = ۵$، ساعت $t = ۰/۱۲۵ + ۰/۱۵ = ۰/۲۵$

(ب) و (ج). t به‌عنوان تابع x در داخل بازهٔ $[۰, ۵]$ مشتقپذیر است زیرا تابع جذر فقط در نقطهٔ ۰ مشتقپذیر نیست واینجا زیر رادیکان حداقل ۹ است. بنابراین کافی است گام (ب) اجرا شود، یعنی $\frac{dt}{dx}$ برابر صفر قرار داده شده نقاط بحرانی و مقدار f در آنها مشخص شود. داریم:

$$\begin{aligned}
\frac{dt}{dx} &= \frac{۱}{۴۰} + \frac{-۲(۵ - x)}{۴۰\sqrt{۹ - (۵ - x)^۲}} = ۰ \\
\sqrt{۹ - (۵ - x)^۲} &= ۲(۵ - x) \\
۹ - (۵ - x)^۲ &= ۴(۵ - x)^۲ \\
(۵ - x)^۲ &= \tfrac{۹}{۵} \\
۵ - x &= \pm\frac{۳}{\sqrt{۵}}
\end{aligned}$$

چون $۰ \leq x \leq ۵$ تنها جواب عبارت است از

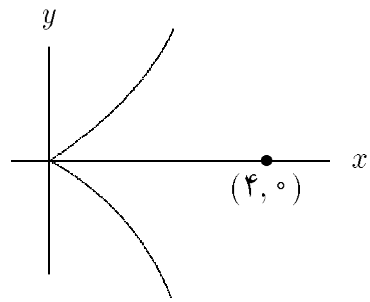
$$x = ۵ - \frac{۳}{\sqrt{۵}} \approx ۳/۶۵۸$$

و در این نقطه:

$$\begin{aligned}
t &= \tfrac{۵ - \frac{۳}{\sqrt{۵}}}{۴۰} + \tfrac{\sqrt{۹ + \frac{۹}{۵}}}{۲۰} \\
&\approx ۰/۰۹۱ + ۰/۱۶۴ = ۰/۲۵۵ \quad (\text{ساعت})
\end{aligned}$$

در مقایسهٔ این مقدار با دو مقدار انتهایی، ملاحظه می‌کنیم که مینی‌موم به‌ازای $x \approx ۳/۶۵۸^{km}$ به‌دست می‌آید.

مثال ۲. می‌خواهیم نزدیکترین نقطهٔ منحنی $y^۲ = x^۳$ را به‌نقطهٔ $(۴, ۰)$ پیدا کنیم. این مسالهٔ ساده را از سه‌راه مختلف حل می‌کنیم، و طبعاً در هر سه راه حل به یک جواب خواهیم رسید ولی مقایسهٔ روشها آموزنده است.



راه اول منحنی داده شده اجتماع نمودارهای دو تابع $y = x^{۳/۲}$ و $y = -x^{۳/۲}$ هر دو با دو با دامنهٔ $[۰, +\infty[$ است. بنابر تقارن دو شاخه نسبت به نقطهٔ $(۴, ۰)$ کافی است مساله را برای یک شاخه حل کنیم و قرینهٔ نقطه به دست آمده در شاخهٔ دیگر را نیز منظورکنیم. بنابراین فقط $y = x^{۳/۲}$ روی $[۰, \infty[$ را در نظر می‌گیریم. فاصلهٔ نقطهٔ $(۴, ۰)$ از نقطه‌ای (x, y) روی این منحنی برابر است با $\sqrt{(x-۴)^۲ + y^۲}$. از آنجاکه مینی‌موم کردن یک کمیت مثبت مطرح است، می‌توان مجذور همین عبارت یعنی $(x-۴)^۲ + y^۲$ را در نظر گرفت که فاقد نماد $\sqrt{\ }$ است و محاسبه با آن سر راست‌تر. ضمناً برای نقاط منحنی، $y^۲ = x^۳$، پس باید مینی‌موم تابع زیر را به‌دست آورد:

$$D(x) = (x-۴)^۲ + x^۳, \quad ۰ \leq x < +\infty$$

در نقطهٔ انتهایی $x = ۰$ داریم $D(۰) = ۱۶$. رفتار تابع وقتی $x \longrightarrow +\infty$ را نیز باید در نظر بگیریم که $D(x) \longrightarrow +\infty$ وقتی $x \longrightarrow +\infty$. تابع D به‌عنوان تابع x در $۰ < x < +\infty$ مشتقپذیر

است، پس باید $\frac{dD}{dx}$ را برابر صفر قرار داده مینی‌مومهای موضعی را پیدا کنیم.

$$\frac{dD}{dx} = ۲(x - ۴) + ۳x^۲$$

معادله $۳x^۲ + ۲x - ۸ = ۰$ دارای ریشه‌های $-۲, \frac{۴}{۳}$ است که -۲ در دامنهٔ تابع ما نیست، بنابراین فقط $x = \frac{۴}{۳}$ نیاز به بررسی دارد. داریم $D(\frac{۴}{۳}) = \frac{۲۵۶}{۲۷}$. با توجه به اینکه $D(\frac{۴}{۳}) < D(۰)$، جواب مساله به‌ازای $\frac{۴}{۳}$ به‌دست می‌آید و نقاط منحنی که حداقل فاصله را می‌دهند عبارتند از $(\frac{۴}{۳}, \pm\frac{۸}{۳\sqrt{۳}})$.

راه دوم. می‌توانیم بجای اینکه y را تابعی از x روی منحنی بگیریم، x را تابعی از y فرض کنیم، $x = y^{۲/۳}$ و در اینصورت به جای تابع D بالاکه برحسب x نمایش داده شده، مجذور فاصله را برحسب y بررسی می‌کنیم:

$$E(y) = (y^{۲/۳} - ۴)^۲ + y^۲, \quad -\infty < y < +\infty$$

توجه کنید که در اینجا فقط یک تابع مطرح است و دامنهٔ آن تمام $\mathbb{R}$ می‌باشد. وقتی $y \longrightarrow \pm\infty$، داریم $E \longrightarrow +\infty$. تابع داده شده در $y = ۰$ مشتق‌پذیر نیست بنابراین باید مقدار تابع را در این نقطه به‌طور جداگانه بررسی کرد. داریم $E(۰) = ۱۶$. در سایر نقاط تابع مشتق‌پذیر است و با قرار دادن $\frac{dE}{dy} = ۰$ نقاط بحرانی را پیدا می‌کنیم. داریم

$$\frac{dE}{dy} = \frac{۴}{۳}\frac{۱}{y^{۱/۳}}(y^{۲/۳} - ۴) + ۲y$$

با قرار دادن $\frac{dE}{dy} = ۰$ مضرب کردن در $\frac{۳}{۲}y^{۱/۳}$ (توجه کنید که $y = ۰$ قبلاً بررسی شد.) نتیجه می‌شود.

$$۳y^{۴/۳} + ۲y^{۲/۳} - ۸ = ۰$$

که یک معادله درجه ۲ برحسب $y^{۲,۳}$ است. از حل این معادله نتیجه می‌شود $y^{۲/۳} = -۲/\frac{۴}{۳}$ که جواب منفی قابل قبول نیست، پس $y^{۲/۳} = \frac{۴}{۳}$، یا $y = \pm\frac{۸}{۳\sqrt{۳}}$ و در نتیجه $x = \sqrt[۳]{y^۲} = \frac{۴}{۳}$. مجدداً $E(\pm\frac{۸}{۳\sqrt{۳}}) < E(۰)$ و همان جواب راه اول نتیجه می‌شود.

راه سوم. وقتی از رابطهٔ $f(x,y)=0$ نتوان یکی از y یا x را به‌صورت تابعی ساده از دیگری نوشت، ممکن است کوشش کنیم هر دو متغیر x, y را برحسب متغیر جدیدی t بنویسیم. با تجسم t به‌عنوان زمان می‌توان فرض کرد که منحنی داده شده مسیر حرکت نقطه‌ای (x,y) برحسب زمان است. برای منحنی $y^2=x^3$، می‌توان نوشت:

$$x=t^2,\ y=t^3,\ -\infty<t<+\infty$$

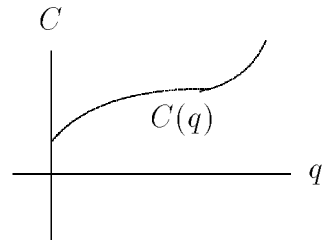
در اینصورت مجذور فاصله (x,y) از $(4,0)$ به‌صورت تابعی از t ارائه می‌شود:

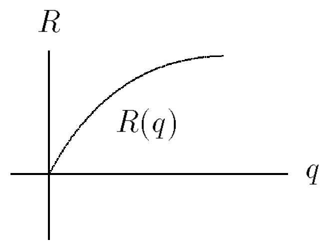
$$F(t)=(t^2-4)^2+t^6,\quad -\infty<t<+\infty$$

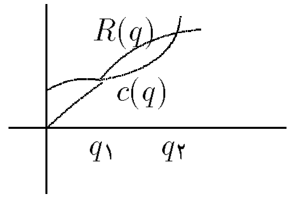
داریم $F(t)\longrightarrow+\infty$ وقتی $Ft\longrightarrow\pm\infty$ به‌عنوان تابعی از t همه‌جا مشتق‌پذیر است، مشتق آن نسبت به t را برابر صفر قرار می‌دهیم که نتیجه می‌شود $6t^5+4t^3-16t=0$، یا $t(3t^2+2t-8)=0$ که جوابهای $t=0$، $t^2=\frac{4}{3}$ و $t^2=-2$ (غیر قابل قبول) را می‌دهد. داریم $F(0)=16$ و $F(\sqrt{\frac{4}{3}})=\frac{256}{37}$ و جواب مساله همان نقاط $(\frac{4}{3},\pm\frac{8}{3\sqrt{3}})$ هستند.

نکته قابل مقایسه در این سه راه حل وضعیت نقطهٔ $(0,0)$ روی منحنی $y^2=x^3$ است که یک ماکسیمم موضعی برای فاصله از نقطه $(4,0)$ می‌باشد. از راه حل اول، این نقطه به‌صورت یک انتهای بازهٔ تابع ظاهر می‌شود، در راه حل دوم به عنوان یک نقطه تکین که در آن تابع مشتق‌پذیر نیست، و در راه حل سوم به‌عنوان یک نقطه که در آن مشتق وجود دارد و صفر است. بنابراین بسته به اینکه مساله چگونه صورتبندی شود، ماهیت یک نقطه ممکن است به صورتهای گوناگون دیده شود.

(۱۹ـ۲) کاربرد در مسایل اقتصاد فرض کنید یک شرکت تولیدی کالایی تولید می‌کند که می‌توان میزان تولید آن کالا را عملاً کمیتی پیوسته فرض کرد. مثلاً تولید شکر برحسب تُن یا کیلوگرم، ولی نه تولید هواپیما یا زیردریایی که در موارد اخیر میزان تولید با عدد صحیح سنجیده می‌شود. هزینه تولید برحسب مقدار تولید نوعاً یک منحنی مانند شکل ۳ است. اگر هزینه تولید q مقدار ازکالا را به $C(q)$ نمایش دهیم (مثلاً برحسب ریال)، شکل نمودار شکل ۳







شکل ۳ شکل ۴ شکل ۵

به‌صورت زیر توجیه می‌شود. برای راه‌اندازی تولید، مقداری سرمایه‌گذاری اولیه لازم است، بنابر در آغاز (یعنی $q = 0$) به هر حال مبلغی هزینه شده است که به صورت $C(0) > 0$ ظاهر می‌شود. با افزایش تولید، چون سرمایه‌گذاری اولیه جدیدی لازم نیست هزینهٔ نسبی تولید کاهش می‌یابد، یعنی $C(q)$ پایین‌تر از یک خط راست خواهد بود. مثلاً در چاپ یک کتاب، هزینه‌ای که صرف تهیهٔ فیلم و زینک می‌شود و به نسبت بالاست تکرار نمی‌شود و هرچه تولید بیشتر باشد هزینهٔ نسبی، یعنی $\frac{C(q)}{q}$ کاهش می‌یابد. این واقعیت به‌صورت تقعر نمودار $C(q)$ تا مقدار قابل ملاحظه‌ای از q نمایش داده شده است. ولی وقتی تولید از حد معینی تجاوز کند ممکن است نیاز به افزایش ماشین‌آلات و نیروی کار باشد که در اینصورت این افزایش برحسب تغییر جهت تقعّر $C(q)$ می‌شود، همچنان که در شکل نمایش داده شده است. برای تولید بعضی محصولات ممکن است این تغییر جهت صورت نگیرد تا خیلی دیر به‌وقوع بپیوندد. در مقابل هزینهٔ تولید، در شکل ۴ درآمد حاصل از فروش q مقدارکالا، $R(q)$، نمایش داده شده است. در اینجا $R(0) = 0$، یعنی قبل از فروش درآمدی وجود ندارد. در آغاز فروش R حدوداً خطی است، یعنی به تناسب فروش q واحد، درآمدی که برابر حاصلضرب q در قیمت فروش یک واحد است حاصل می‌شود. ولی با افزایش تولید نوعاً به سبب برآورده شدن نیاز و اشباع بازار، یا به سبب ظهور واحدهای رقیب و اُفت قیمت، تدریجاً افزایش تولید موجب افزایش متناسب درآمد نمی‌شود و نمودار $R(q)$ رو به‌پایین مقعر می‌شود. در شکل ۵ دو منحنی روی هم قرار داده شده‌اند. روی بازهٔ $]q_1, q_2[$ میزان درآمد از هزینه بالاتر است و برای اینکه تولید سود ده باشد، باید مقدار تولید در بازهٔ $]q_1, q_2[$ بماند. در واقع تولید کننده مایل است که سود خود، یعنی $p(q) = R(q) - C(q)$ را

به‌حداکثر ممکن برساند، یعنی باید میزانی از تولید، q، را در بازهٔ $]q_۱, q_۲[$ انتخاب کند که برای آن $P(q)$ ماکسیمم شود. برای اینکه بتوانیم از ابزار حساب دیفرانسیل استفاده کنیم، فرض می‌کنیم تابعهای $C(q)$، $R(q)$ عملاً علاوه بر پیوسته بودن، مشتق‌پذیر نیز باشند. در اینصورت ماکسیمم سود حتماً در میزانی q از تولید حادث می‌شود که در آن $\frac{dp}{dq} = ۰$. برای درک اقتصادی این مطلب باید برداشتی اقتصادی از مفهوم مشتق ارائه کنیم.

$\frac{dC}{dq}$ و $\frac{dR}{dq}$ چه معنایی دارند؟ طبق تعریف، برای میزان $q_۰$ از تولید، داریم:

$$\frac{dC}{dq}(q_۰) = \lim_{q \longrightarrow q_۰} \frac{C(q) - C(q_۰)}{q - q_۰}$$

پس در واقع برای q نزدیک $q_۰$ داریم:

$$\frac{dC}{dq}(q_۰) \approx \frac{C(q) - C(q_۰)}{q - q_۰}$$

در عمل میزان تولید واقعاً پیوسته نیست، مثلاً برای تولید شکر، حداقل معنی داری از تغییر متغیر، یک تُن شکر است، یا در مورد تولید هر کالای دیگر نیز، یک کوچکترین واحد معنی‌داری به‌عنوان حداقل افزایش یا کاهش تولید مطرح است. بنابراین کوچکترین مقدار مثبت $q - q_۰$ را می‌توان واحد فرض کرد و داریم:

$$\frac{dC}{dq}(q_۰) \approx \frac{C(q_۰+۱) - C(q_۰)}{۱} = C(q_۰ + ۱) - C(q_۰) \quad (۱)$$

به بیان دیگر، تعبیر اقتصادی $\frac{dC}{dq}(q_۰)$ هزینه تولید یک واحد اضافی از کالاست وقتی تولید به $q_۰$ رسیده باشد. در اصطلاح اقتصاد، $\frac{dC}{dq}(q_۰)$ را هزینه نهایی می‌نامند (دلیل استفاده از لغت نهایی را خواهیم دید). با عیناً همین استدلال می‌توان گفت که:

$$\frac{dR}{dq}(q_۰) \approx R(q_۰ + ۱) - R(q_۰) \qquad (۲)$$

یعنی $\frac{dR}{dq}(q_۰)$ درآمد حاصل از فروش یک واحد اضافی از کالاست وقتی تولید به $q_۰$ رسیده باشد. $\frac{dR}{dq}(q_۰)$ را در آمد نهایی می‌نامند.

حال به مسالهٔ ماکسیمم کردن سود باز می‌گردیم. اگر به‌ازای مقدار $q_۰$ در $]q_۱, q_۲[$ ماکسیمم سود حاصل شود، داریم $\frac{dR}{dq}(q_۰) - \frac{dC}{dq}(q_۰) = ۰$، پس بنابر (۱) و (۲):

$$R(q_۰ + ۱) - R(q_۰) \approx C(q_۰ + ۱) - C(q_۰) \qquad (۳)$$

یعنی درجایی ماکسیمم حاصل می‌شود که درآمد ناشی از فروش یک واحد اضافی از کالا برابر هزینهٔ تولید یک واحد اضافی از کالاست. این مطلب را می‌توان به‌طور شهودی نیز توجیه کرد. برای اینکه $q_{\circ}$ یک نقطهٔ ماکسیمم باشد باید برای q نزدیک $q_{\circ}$ و کوچکتر از $q_{\circ}$، تابع $P = R - C$ صعودی باشد یعنی تولید بیشتر، سود بیشتر ایجاد کند، یا به عبارت دیگر در آمد فروش هر واحد بیش از هزینهٔ تولید همان واحد باشد. بالعکس برای q نزدیک $q_{\circ}$ و بزرگتر از $q_{\circ}$، تابع $P = R - Q$ باید نزولی باشد، یعنی تولید بیشتر، سود کمتر ایجاد کند، یا معادلاً درآمد فروش هر واحد بیشتر کمتر از هزینهٔ تولید همان واحد باشد. بنابراین در نقطهٔگذر از صعود به‌نزول P، باید هزینهٔ تولید یک واحد اضافی با درآمد ناشی از فروش آن برابر شود. حال می‌توان به‌دلیل استفاده از لغت نهایی پی‌برد. مقدار $q_{\circ}$ که در آن ماکسیمم سود حاصل می‌شود، در واقع میزان نهایی تولید مطلوب است زیرا که پس از آن سود تولید کاهش خواهد یافت.

به‌عنوان تمرینی در این مفاهیم، به‌عنوان مثال، روشی ترسیمی برای محاسبه هزینهٔ نهایی را که در اقتصاد معمول است ارائه می‌کنیم.

مثال فرض کنید هزینهٔ تولید یک واحد از کالا را وقتی که مقدار تولید کالا q باشد به $a(q)$ نمایش دهیم. در اینصورت داریم:

$$C(q) = q.a(q) \qquad (۳)$$

نمودار $a(q)$ بسیاری اوقات مانند شکل ۶ است، یعنی تولید هرچه بیشتر باشد (تا حد معقولی)، هزینهٔ تولید هر واحد ارزانتر می‌شود. برای یافتن $\frac{dC}{dq}(q_{\circ})$ می‌توان به‌صورت زیر عمل کرد. در نقطهٔ $(q_{\circ}, a(q_{\circ}))$ مماس نمودار $a(q)$ را رسم می‌کنیم تا محور قائم را در نقطهٔ S قطع کند. از S خط راستی با ضریب زاویهٔ دو برابر ضریب زاویه خط مماس فوق رسم می‌کنیم تا خط قائم $q = q_{\circ}$ را در نقطه‌ای T قطع کند. مختصه قائم T برابر $\frac{dC}{dq}(q_{\circ})$ است. توجیه این مطلب یک محاسبهٔ سر راست است. با مشتقگیری از رابطهٔ (۳) داریم.

$$\frac{dC}{dq}(q_{\circ}) = a(q_{\circ}) + q_{\circ}\frac{da}{dq}(q_{\circ}) \qquad (۴)$$

از طرفی دیگر معادلهٔ خط مماس بر نمودار $a(q)$ در نقطهٔ $(q_0, a(q_0))$ هست:

$$y - a(q_0) = \frac{da}{dq}(q_0).(q - q_0)$$

این خط محور قائم، y، را در $q = 0$ قطع می‌کند، پس $S = (0, a(q_0) - \frac{da}{dq}(q_0).q_0)$. معادله خط راست گذرا از S با شیب $2\frac{da}{dq}(q_0)$ هست:

$$y - a(q_0) + \frac{da}{dq}(q_0).q_0 = 2\frac{da}{dq}(q_0).q$$

اشتراک این خط راست با $q = q_0$ با قرار دادن $q = q_0$ حاصل می‌شود که بنابراین مقدار y آن هست:

$$\begin{aligned} y &= a(q_0) - \tfrac{da}{dq}(q_0).q_0 + 2\tfrac{da}{dq}(q_0).q_0 \\ &= a(q_0) + \tfrac{da}{dq}(q_0).q_0 \end{aligned}$$

که در مقایسه با (۴) نتیجه می‌دهد:

$$y = \frac{dC}{dq}(q_0)$$

همانطورکه ادعا شده بود.

چند جمله‌ای تیلور و تقریب‌های مرتبهٔ بالا

یادآوری می‌کنیم که اگر تابع f در نقطهٔ a از دامنهٔ خود مشتق‌پذیر باشد، تقریب خطی f در نقطهٔ a تابعی از درجهٔ یک است، در واقع تابع با مقدار $A(x) = f(a) + f'(a).(x-a)$، که مقدار آن به‌ازای $x = a$ برابر مقدار تابع f در آن نقطه است و وقتی x از a دور می‌شود، $f(x)$ به کُندی از $A(x)$ فاصله می‌گیرد. این نزدیکی ترتیب خطی به تابع اصلی برای xهای نزدیک a ناشی از این است که تقریب خطی در واقع مقدار تابع درجه یک مماس بر تابع f است یعنی نه‌تنها $A(a) = f(a)$، بلکه مشتق A و f نیز در $x = a$ برابرند، $A'(a) = f'(a)$. هدف ما در این بخش ارائه یک دنباله تقریبهای به‌طور فزاینده دقیقتر از یک تابع حول نقطه‌ای a از دامنهٔ تابع است. در مقابل دقیقتر شدن تقریب، محاسبه این توابع تدریجاً دشوارتر می‌شود. به‌طور کلی برای اینکه یک روش تقریب از ارزش و اعتبار برخوردار باشد، شرایط زیر ضروری است:

(۱) محاسبهٔ نامزد تقریب باید ساده‌تر از محاسبهٔ تابع اصلی باشد.

(۲) نامزد تقریب باید واقعاً به‌تابع داده شدهٔ «نزدیک» باشد.

در مورد (۱)، تقریب خطی نمونهٔ بارز تابعی است که محاسبه آن ساده است. پس از تابعهای ثابت، تابعهای خطی که نمودار آنها یک خط راست است ساده‌ترین توابع محسوب می‌شوند. در این بخش تابعهایی که به‌عنوان تقریب مطرح می‌کنیم چند جمله‌ایهای از درجات گوناگون هستند. به‌طور کلی چندجمله‌ایها نیز که از جمع و ضرب اعداد حقیقی به‌دست می‌آیند توابع به‌نسبت ساده محسوب می‌شوند. هر چه درجهٔ چندجمله‌ای کوچکتر باشد، محاسبهٔ چند جمله‌ای ساده‌تر است. چند جمله‌ایهای درجه صفر، توابع ثابت هستند، چند جمله‌ایهای درجه یک به‌عنوان تقریب خطی به کار می‌روند، و غیره.

در مورد (۲)، نزدیک بودن تقریب به تابع را چگونه باید ارزیابی کرد؟ در واقع برای سودمند بودن یک روش تقریب، باید بتوانیم اطمینان خاطر حاصل کنیم که خطای استفاده از این تقریب در حد قابل قبول برای به‌کارگیری در کاربرد مورد نظر است. به این منظور باید یک روش تخمین خطا همراه را با روش تقریب در دست باشد که بتوان به کمک آن یک کران بالایی برای قدر مطلق خطا ارائه کرد. در

مورد تقریب خطی دیدیم که اگر تابع f دوبار مشتقدپذیر باشد، خطا از $\frac{1}{2}M.(x-a)^2$ تجاوز نمی‌کند که در اینجا M یک کران بالایی برای مشتق دوم تابع در بازهٔ بین a و x است. بنابراین با محاسبهٔ $\frac{1}{2}M(x-a)^2$ می‌توان ملاحظه کرد که حداکثر خطای احتمالی در حد قابل قبولی هست یا نیست. به‌همین ترتیب، برای روشهای کلی‌تری که در این جلسه عرضه خواهیم کرد، یک روش تخمین خطا نیز به همراه خواهیم آورد که کرانی برای حداکثر خطای ممکن ارائه می‌کند.

به تعریف مشتق دوم یک تابع باز می‌گردیم. اگر a نقطه‌ای در دامنهٔ تعریف f باشد و اگر مشتق f در سراسر یک بازهٔ باز حول a تعریف شده باشد، آنگاه a یک نقطهٔ درونی بازهٔ تعریف f' است و می‌توان وجود مشتق برای f' در نقطهٔ a را مطرح ساخت، که در صورت وجود آن را به $f''(a)$ یا $f^{(2)}(a)$ نمایش می‌دهیم. همینطور اگر $f''(x)$ در همهٔ نقاط یک بازهٔ باز حول a وجود داشته باشد، می‌توان مشتقپذیری f'' در نقطهٔ a را مطرح ساخت، که در صورت وجود آن را به $f'''(a)$ یا $f^{(3)}(a)$ نمایش می‌دهیم و مشتق سوم f در نقطهٔ a می‌نامیم. به‌طور کلی، اگر مشتق nـام تابع f در سراسر یک بازهٔ باز حول a تعریف شده باشد، می‌توان مشتقپذیری $f^{(n)}$ را در نقطهٔ a مورد بررسی قرار دارد که در صورت وجود آن را به $f^{(n+1)}(a)$ نمایش می‌دهیم و مشتق (مرتبهٔ) $(n+1)$ـام f در نقطهٔ a می‌نامیم. تابع $f: S \longrightarrow \mathbb{R}$ را k بار مشتقپذیر می‌نامیم اگر f در همهٔ نقاط دامنه دارای مشتق از مرتبهٔ kـام باشد. اگر f در یک نقطه a یا در زیر مجموعهٔ T از دامنهٔ خود دارای مشتق از هر مرتبه باشد، f را بینهایت بار مشتقپذیر در نقطهٔ a یا در مجموعهٔ T می‌نامیم.

مثال. یک تابع چند جمله‌ای در نظر بگیرید:

$$p(x) = c_0 + c_1x + \ldots + c_nx^n$$

از آنجا که مشتق p نیز یک چند جمله‌ای است (از درجهٔ یکی پایین‌تر)، مشتق p نیز برای هر x مشتقپذیر است و با ادامهٔ مشتقگیری می‌بینیم که p در سراسر $\mathbb{R}$ بینهایت بار مشتقپذیر است. به‌علاوه توجه کنید که به‌سبب تقلیل درجه در مشتقگیری، برای $k > n$ داریم $p^{(k)}(x) = 0$.

مثال ۲. تابع $\sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. داریم $\sin' = \cos$ و $\sin'' = -\sin$، بنابراین می‌توان مشتقگیری را همواره ادامه داد و پس از چهار بار مشتقگیری تابع سینوس مجدداً ظاهر می‌شود، $\sin^{(۴)} = \sin$. تابع کسینوس وضعیت مشابهی دارد. چهار تابع مثلثاتی دیگر نیز در دامنهٔ تعریف خود بینهایت بار مشتقپذیرند.

مثال ۳. تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} x^n & x \geq ۰ \\ -x^n & x < ۰ \end{cases}$$

در اینجا n یک عدد صحیح مثبت داده شده است. برای $n = ۱$، داریم $f(x) = |x|$ که در هر نقطهٔ $x \neq ۰$ مشتقپذیر است ولی در $x = ۰$ مشتقپذیر نیست. حال $n > ۱$ را در نظر می‌گیریم. اگر $a \neq ۰$، در یک بازهٔ باز حول a، تابع f همان مقدار x^n یا $-x^n$ را دارد که یک چند جمله‌ای است، بینهایت بار مشتقپذیر است، و $f^k(a) = ۰$ برای $k > n$. برای $n > ۱$ داریم

$$f'(x) = \begin{cases} nx^{n-۱} & x > ۰ \\ -nx^{n-۱} & x < ۰ \end{cases}$$

در $a = ۰$ از تعریف استفاده می‌کنیم:

$$\frac{f(۰+h) - f(۰)}{h} = \frac{\pm h^n - ۰}{h} = \pm h^{n-۱}$$

با توجه به $n > ۱$، حد عبارت بالا صفر است، پس $f'(۰) = ۰$ و فرمول (۱) را می‌توان به $x \geq ۰$ یا $x \leq ۰$ تعمیم داد. به‌طور کلی به‌استقرا فرض کنید که برای $k < n$ ثابت کرده‌ایم:

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} n(n-۱)\dots(n-(k-۱))x^{n-k} & x \geq ۰ \\ -n(n-۱)\dots(n-(k-۱))x^{n-k} & x < ۰ \end{cases}$$

آنگاه برای مشتق مرتبهٔ $(k+۱)$ در a کسر زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\frac{f^{(k)}(۰+h) - f^{(k)}(۰)}{h} = \pm n(n-۱)\dots(n-(k-۱))h^{n-k-۱}$$

تا زمانی که $n > k + 1$، حد عبارت بالا همچنان صفر است ولی برای $n = k + 1$، یا $k = n - 1$ داریم

$$\frac{f^{(n-1)}(h) - f^{(n-1)}(0)}{h} = \pm n!$$

که علامت $\pm$ بستگی به این دارد که $h > 0$ یا $h < 0$، بنابراین $f^{(n)}(0)$ وجود ندارد. خلاصه اینکه تابع f در همهٔ نقاط $\mathbb{R}$ به استثنای $x = 0$ بینهایت بار مشتقپذیر است ولی در 0 فقط $(n - 1)$ بار مشتقپذیر با مشتقهای صفر می‌باشد.

(۱ـ۲۰) چند جمله‌ای تیلور درجهٔ k

اکنون آماده‌ایم که تقریب درجهٔ k یک تابع را معرفی کنیم. فرض کنیم I یک بازه است، a یک نقطهٔ درونی بازه، $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی $(k - 1)$ بار مشتقپذیر در سراسر I و k بار مشتقپذیر در نقطهٔ a است، نشان می‌دهیم یک (و تنها یک) چند جمله‌ای $p(x)$ از درجهٔ k وجود دارد که

$$p(a) = f(a),\ p'(a) = f'(a), \dots, p^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) \qquad (۱)$$

یعنی این چند جمله‌ای و مشتقات آن تا مرتبهٔ k با تابع f و مشتقات متناظر آن تا مرتبهٔ k در نقطهٔ a تطابق دارند. چند جمله‌ای درجهٔ k مورد نظر $p(x)$ به شکل $p(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_k x^k$ است. با نوشتن $x = (x - a) + a$ و به‌توان رساندن، می‌توانیم $p(x)$ را به‌صورت زیر مرتب کنیم:

$$p(x) = a_0 + a_1(x - a) + \dots + a_k(x - a)^k \qquad (۲)$$

مشتقات $p(x)$ تا مرتبهٔ kـام به‌صورت زیر در می‌آیند:

(۳)

$$\begin{cases} p'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + \ldots + ka_k(x-a)^{k-1} \\ \vdots \\ p^{(i)}(x) = i!a_i + \ldots + k(k-1)\ldots(k-(i-1)a_k(x-a)^{k-i} \\ \vdots \\ p^{(k)}(x) = k!a_k \end{cases}$$

بنابراین در مقایسهٔ (۲) و (۳) با شرط (۱) داریم:

$$a_0 = f(a),\ \ a_1 = f'(a), a_2 = \frac{1}{2!}f''(a), \ldots, a_k = \frac{1}{k!}f^{(k)}(a)$$

پس ضرایب چند جمله‌ای (۲) از شرط (۱) به‌طور منحصر به‌فرد تعین می‌شوند و داریم:

$$p(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(k)}}{k!}(x-a)^k. \qquad (۴)$$

این چند جمله‌ای یگانه چند جمله‌ای درجه k است که خود و مشتقات آن تا مرتبهٔ k با f و مشتقات آن تا مرتبهٔ k در نقطهٔ a برابرند $p(x)$ را اینک چند جمله‌ای تیلور درجه k تابع f در نقطهٔ a یا تقریب درجهٔ k تابع f در نقطهٔ a می‌نامند. توجه کنید که برای $k = 1$، تقریب خطی f در نقطهٔ a حاصل می‌شود. نکته این است که برابری مشتقات f با مشتقات p در نقطهٔ a، تا مرتبهٔ k، موجب خواهد شد که به معنایی که در زیر خواهد آمد $f(x)$ و $p(x)$ در نزدیکی نقطهٔ a بسیار هم نزدیک باشند.

(۲۰ـ۲) قضیه اگر $p(x)$ چند جمله‌ای تیلور درجهٔ k تابع f در نقطهٔ a باشد داریم:

$$\lim_{x \longrightarrow a} \frac{f(x) - p(x)}{(x-a)^k} = 0 \qquad (۵)$$

توجه کنید که برای $k = 1$، این همان تعریف خط مماس یا تقریب خطی است. هرچه k بزرگتر باشد $(x-a)^k$ سریعتر کوچک می‌شود وقتی $x \longrightarrow a$، بنابراین تقریب درجهٔ k باید به‌تابع خیلی نزدیک باشد که نسبت $\frac{f(x)-p(x)}{(x-a)^k}$ به‌صفر میل کند.

برهان (۲۰ـ۲) حکم را با استقراء روی k ثابت می‌کنیم. همانطورکه اشاره شد، برای $k = ۱$، تعریف مشتقپذیری یا خط مماس حاصل می‌شود. فرض کنید حکم تا مرتبهٔ $(k - ۱)$ ثابت شده است، بدین مفهوم که اگر تابعی g در نقطهٔ a، $(k - ۱)$ بار مشتقپذیر باشد و $q(x)$ چند جمله‌ای تیلور درجه $(k - ۱)$ آن در نقطهٔ a باشد داریم

$$\lim_{x \longrightarrow a} \frac{g(x) - q(x)}{(x - a)^{k-۱}} = ۰$$

به بیان دیگر، هرگاه $e > ۰$ داده شده باشد، $\delta > ۰$ وجود دارد که:

$$|x - a| < \delta \Longrightarrow |g(x) - q(x)| < e.|x - a|^{k-۱} \qquad (۶)$$

اگر صورت کسر (۵) را به $\varphi(x)$ نمایش دهیم، $\varphi(x) = f(x) - p(x)$، داریم

$$\varphi(x) = f(x) - [f(a) + \frac{f'(a)}{۱!}(a)(x - a) + \ldots + \frac{f^k(a)}{k!}(x - a)^k] \qquad (۷)$$

چون f و چند جمله‌ای $p(x)$ مشتقپذیرند، φ نیز مشتقپذیر است و داریم:

$$\varphi'(x) = f'(x) - [f'(a) + \ldots + \frac{f^{(k)}(a)}{(k - ۱)!}(x - a)^{k-۱}] \qquad (۸)$$

چون f در نقطهٔ a، k بار مشتقپذیر است، f' در نقطهٔ a، $(k - ۱)$ بار مشتقپذیر می‌شود. به‌علاوه عبارت داخل کروشه چند جمله‌ای تیلور درجهٔ $(k - ۱)$ تابع f' در a است، پس طبق فرض استقراء، برای $e > ۰$، $\delta > ۰$ وجود دارد که طبق (۶):

$$۰ < |x-a| < \delta \Longrightarrow |\varphi'(x)| = |f'(x)-[f'(a)+\ldots+\frac{f^{(k)}(a)}{(k - ۱)!}(x-a)^{k-۱}]| < e|x-a|^{k-۱}$$

از طرف دیگر طبق قضیهٔ مقدار میانگین برای تابع مشتقپذیر φ داریم:

$$\varphi(x) - \varphi(a) = \varphi'(c).(x - a)$$

ولی طبق (۷)، $\varphi(a) = ۰$،

$$۰ < |x - a| < \delta \Longrightarrow |\varphi(x)| < e|c - a|^{k-۱}|x - a|$$

و چون c بین a و x است، $|c-a|<|x-a|$ و در نتیجه:

$$0<|x-a|<\delta \Longrightarrow |\varphi(x)|<e|x-a|^k$$

بنابراین با کوچک گرفتن $|x-a|$ می‌توان $\frac{|\varphi(x)|}{|x-a|^k}$ به‌دلخواه کوچک کرد و حکم به اثبات می‌رسد. $\square$

قضیهٔ ۲.۲۰ معقول بودن چند جمله‌ای تیلور درجه k به‌عنوان تقریبی برای تابع f برای xهای نزدیک a را توجیه می‌کند. قبل از ادامهٔ بحث به چند مثال توجه می‌کنیم.

مثال ۱ چند جمله‌ایهای تیلور درجهٔ k توابع سینوسی و کسینوسی را در $a=0$ می‌نویسیم. برای سینوس داریم:

$$\sin(0)=0, \sin'(0)=\cos(0)=1, \sin''(0)= \text{و } \sin'''(0)=-\cos(0)=-1$$
$$-\sin(0)=0$$

و چون مشتق چهارم سینوس همان سینوس می‌شود، از این پس مشتقهای ۰، ۱، ۰ و ۱− تکرار می‌شوند، بنابراین اگر $\sum_{j=0}^{k} a_j x^j$ چند جمله‌ای تیلور درجهٔ k سینوس در $a=0$ باشد، داریم:

$$a_j=\begin{cases} 0 & \text{زوج } j \\ \pm 1 & \text{فرد } j \end{cases}$$

مثلاً چند جمله‌ای تیلور درجه ۱ و درجه ۲ سینوس عبارتند از $p(x)=x$، چند جمله‌ای تیلور درجه ۳ و درجه ۴ سینوس برابر $p(x)=x-\frac{1}{3!}x^3$، و چند جمله‌ای تیلور درجه ۵ و درجهٔ ۶ سینوس برابر $x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5$ می‌شوند. به‌همین ترتیب برای کسینوس چند جمله‌ای تیلور زیر در $a=0$ به‌دست می‌آیند:

1 چندجمله‌ای تیلور درجه ۱

$1-\frac{1}{2!}x^2$ چند جمله‌ای تیلور درجه ۲ و ۳

$1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4$ چند جمله‌ای تیلور درجه ۴ و ۵

و غیره.

مثال ۲. چند جمله‌ای تیلور درجه k تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را در $a = 1$ بنویسید. این چند جمله‌ای به‌شکل $\sum_{j=0}^{k} \frac{f^{(j)}(1)}{j!}(x-1)^j$ خواهد بود. برای محاسبه مشتقها داریم $f(x) = x^{-1}$، پس $f'(x) = -x^{-2}$، $f''(x) = 2x^{-3}$، و به‌طور استقرایی می‌بینیم که $f^{(j)}(x) = (-1)^j j! x^{-j-1}$، پس $\frac{f^{(j)}(1)}{j!} = (-1)^j$، و چند جمله‌ای تیلور درجه k تابع در $a = 1$ می‌شود.

$$1 - (x-1) + (x-1)^2 \pm \ldots + (-1)^k (x-1)^k$$

در اینجا این نکته باید تذکر داده شود که نزدیکی چند جمله‌ای بالا به $\frac{1}{x}$ حوالی $a = 1$ معتبر است ولی مثلاً وقتی x به 0 میل کند، $\frac{1}{x}$ بی‌کران می‌شود در حالی که چند جمله‌ای بالا به $(k+1)$ نزدیک می‌شود. همینطور وقتی x به ۲ میل کند، $\frac{1}{x}$ به $\frac{1}{2}$ میل می‌کند ولی چند جمله‌ای بالا بسته به اینکه k فرد یا زوج باشد به ۰ یا ۱ میل می‌کند (که میانگین آنها $\frac{1}{2}$ است!).

مثال ۳ چند جمله‌ای تیلو تابع $f(x) = 1 - x + x^4$ از درجات مختلف را در $a = -1$ بنویسید. وقتی تابع داده شده یک چند جمله‌ای باشد لازم نیست از مشتقگیری استفاده کنیم. اگر به‌جای x قرار دهیم $x = (x-a) + a$ و جملات را به‌توانهای داده شده بسط داده به ترتیب درجه مرتب کنیم، چند جمله‌ایها تیلور درجات مختلف ظاهر می‌شوند. توجه کنید که روش یافتن ضرایب چند جمله‌ای تیلور این بود که چند جمله‌ای تیلور را برحسب توانهای $(x-a)$ مرتب کردیم و با مشتقگیری متوالی دریافتیم که ضریب جمله $(x-a)^j$ همان $\frac{f^{(j)}(a)}{j!}$ است. بنابراین در این مثال:

$$f(x) = 1 - ((x+1) - 1) + ((x+1) - 1)^4$$

$$f(x) = 3 - 5(x+1) + 6(x+1)^2 - 4(x+1)^3 + (x+1)^4 \qquad (9)$$

بنابرای چند جمله‌ایهای تیلور درجه ۱، ۲ و ۳ تابع در $a = -1$ عبارتند از به‌ترتیب $3 - 5(x+1)$، $3 - 5(x+1) + 6(x+1)^2$، و $3 - 5(x+1) + 6(x+1)^2 - 4(x+1)^3$. چند جمله‌ایهای تیلور درجه ۴ به بالای تابع، همان طرف راست عبارت (۹) هستند که دقیقاً برابر خود تابع می‌شوند.

بالاخره برای استفاده از تقریب درجهٔ k، همانطورکه در حالت خاص تقریب خطی عمل کردیم، باید دستوری برای تخمین خطا ارائه کنیم. قضیهٔ زیر تعمیم و ضعیت تقریب خطی است.

(۲۰ـ۳) قضیه فرض کنید تابع f در سراسر بازهٔ باز I، $(k+1)$ بار مشتق‌پذیر است و $a \in I$. اگر $p(x)$ چند جمله‌ای تیلور درجهٔ k تابع f در نقطهٔ a باشد، برای هر x در I داریم:

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}.(x-a)^{k+1} \qquad (10)$$

که در اینجا c نقطه‌ای بین a و x است.

توجه کنید که به‌ازای $k = 1$، دقیقاً تخمین خطای تقریب خطی به‌دست می‌آید. عبارت طرف راست (۱۰) را گاهی باقیماندهٔ لاگرانژ سری تیلور می‌نامند.

اثبات ۲۰ـ۳ دقیقاً مانند حالت $k = 1$ است. نخست تعمیم زیر از قضیهٔ رُل را بیان می‌کنیم که اثبات آن به خواننده واگذار می‌شود:

(۲۰ـ۴) فرض کنید تابع f دربارهٔ I، $(k+1)$ بار مشتق‌پذیر باشد، $a < b$ دو نقطهٔ I باشند، و داشته باشیم:

$$f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(k)}(a) = f(h) = 0$$

در اینصورت نقطه‌ای c وجود دارد، $a < c < b$، که $f^{(k+1)}(c) = 0$. □

حال همانطور که در حالت $k = 1$ عمل کردیم، یک چند جمله‌ای درجه $(k+1)$ در نظر می‌گیریم.

$$Q(x) = c_0 + c_1(x-a) + \ldots + c_k(x-a)^k + c_{k+1}(x-a)^{k+1}$$

که $Q(a) = (a)$، $Q'(a) = f'(a), \ldots, Q^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ و $Q(b) = f(b)$. مقایسه f و Q با مشتقگیری نتیجه می‌دهد که $c_0 = f(a)$، $c_1 = f'(a)$،...،$c_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)$، و $c_{k+1} = \frac{f(b)-p(b)}{(b-a)^{k+1}}$.
حال با به‌کارگرفتن (۲۰ـ۴) در مورد تابع $f(x) - Q(x)$، حکم (۱۰) نتیجه می‌شود: جزئیات کاملاً مشابه اثبات در حالت $k = 1$ است و به‌خواننده واگذار می‌شود.

مثال ۴ اگر برای تقریب $\sin\frac{1}{10}$ (البته $\frac{1}{10}$ به‌رادیان) از تقریب $\sin x \approx x - \frac{1}{3!}x^3$ استفاده کنیم، کرانی بالایی برای خطا به‌دست آورید.

توجه کنید که $x - \frac{1}{3!}x^3$ هم تقریب درجه ۳ و هم تقریب درجه ۴ تابع $\sin$ در $a = 0$ است. اگر این چندجمله‌ای را تقریب درجهٔ ۴ محسوب می‌کنیم تخمین دقیقتری به‌دست خواهد آمد زیرا که در طرف راست (۱۰)، کمیت کوچک $x - a = \frac{1}{10}$ به‌توان بالاتری رسانده می‌شود. طبق (۱۰) داریم:

$$\text{خطا} = \frac{1}{5!}f^{(5)}(c).(\frac{1}{10})^5$$

مشتق پنجم سینوس برابر کسینوس است که در بازه $]0, \frac{1}{10}[$ از ۱ کوچکتر است، پس

$$\text{خطا} = \frac{1}{5!}.10^{-5} = \frac{1}{1/2}10^{-7}$$

اگر از قرار داد روند کردن استفاده کنیم، با توجه به اینکه $\frac{1}{5!}10^{-5} < \frac{1}{2}10^{-6}$، بسط اعشاری تقریب تا ۶ رقم پس از اعشار با مقدار واقعی تطابق دارد.

مثال ۵. فرض کنید می‌خواهیم از چند جمله‌ای تیلور درجه k به‌دست آمده در مثال ۲ برای $\frac{1}{x}$ استفاده کنیم. $\frac{1}{1/01}$ را به صورت

$$1 - \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \ldots + (-1)^k\frac{1}{10^{2k}}$$

تقریب می‌زنیم. خطای این تقریب را تخمین بزنید.

این مثال را از دو طریق بررسی خواهیم کرد. از روش باقیماندهٔ لاگرانژ، طبق (۱۰) داریم:

$$\begin{aligned}\text{خطا} &= \tfrac{1}{(k+1)!}\ f^{(k+1)}(c).(\tfrac{1}{100})^{k+1}\\ &= \tfrac{1}{(k+1)!}(k+1)!(-1)^{k+1}\tfrac{1}{c^{k+2}}.\tfrac{1}{(10)^{2k+2}}\end{aligned}$$

که c بین ۱ و ۱/۰۱ است. برای یافت کران بالایی، c را که در مخرج است برابر ۱ می‌گیریم، پس

$$\text{خطا} < 10^{-2k-2}$$

در این مثال خاص می‌توان خطا را که یک سری هندسی است به‌طور دقیق محاسبه کرد. توجه کنید که

$$\frac{۱}{۱/۰۱} = \frac{۱}{۱ + \frac{۱}{۱۰۰}} = \sum_{j=۰}^{\infty}(-۱)^j \frac{۱}{۱۰۰^j}$$

بنابراین تقریب ارائه شده جملات این سری تا $j = k$ هستند و باقیمانده (=خطا) می‌شود:

$$\begin{aligned}\sum_{j=k+۱}^{\infty}(-۱)^j(۱۰۰)^{-j} &= (-۱)^{k+۱}(۱۰۰)^{-k-۱}\sum_{j=۰}^{\infty}(-۱)^j(۱۰۰)^{-j} \\ &= (-۱)^{k+۱}(۱۰۰)^{-k-۱}\frac{۱}{۱+\frac{۱}{۱۰۰}} \\ &= (-۱)^{k+۱}\frac{(۱۰۰)^{-k}}{۱۰۱}\end{aligned}$$

یا $\frac{(۱۰)^{-۲k-۲}}{۱/۰۱} =$ |خطا| که کمی دقیقتر از کران بالایی به‌دست آمده از باقیماندهٔ لاگرانژ است.

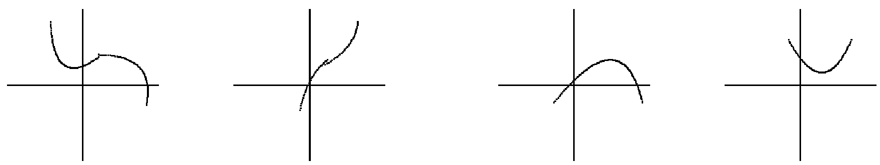
(۲۰ـ۵) کاربرد در بررسی نقاط بحرانی

آزمون مشتق دوم برای بررسی نقاط بحرانی وقتی نتیجه می‌داد که مشتق دوم تابع در نقطهٔ بحرانی ناصفر باشد. در اینجا با استفاده از ۲۰ـ۲ آزمون مشتق دوم را طوری تعمیم می‌دهیم که بسیاری حالاتی که در آن مشتق دوم نیز صفر می‌شود در بر می‌گیرد. نخست با اندکی شرط اضافی مبنای شهودی آزمونی را که ارائه خواهیم کرد ارائه می‌کنیم. فرض کنید تابع $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ در بازهٔ I، $(k+۱)$ بار مشتق‌پذیر است، مشتقات f در نقطهٔ درونی a از بازهٔ I تا مرتبهٔ $(k-۱)$ همه صفر هستند و $f^{(k)}(a) \neq ۰$ در اینصورت چند جمله‌ای تیلور درجهٔ k تابع f در نقطهٔ a به‌شکل $f(a) + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ می‌باشد. عدد $\frac{f^{(k)}(a)}{k!}$ را به α نمایش می‌دهیم طبق (۱۰) داریم:

$$f(x) = f(a) + \alpha(x-a)^k + \frac{f^{(k+۱)}(c)}{(k+۱)!}(x-a)^{k+۱}$$

فرض کنید $|f^{(k+۱)}(c)|$ در نزدیکی نقطهٔ a دارای کرانی M است (اگر $f^{(k+۱)}(x)$ پیوسته باشد، چنین کرانی موجود است). در اینصورت برای مقادیر x نزدیک a که برای آن $|x-a|$ کوچک است. انتظار داریم $(x-a)^{k+۱}$ در قدر مطلق به‌طور قابل ملاحظه‌ای کوچکتر از قدر مطلق $(x-a)^k$ باشد. بنابراین انتظار داریم شکل تقریبی نمودار f در نزدیکی $x = a$ مشابه $f(a) + \alpha(x-a)^k$ باشد. در شکل

۱ وضعیت نمودار $f(a) + \alpha(x-a)^k$ را در چهار حالت ممکن، بسته به این که $\alpha > 0$ یا $\alpha < 0$، k زوج یا فرد نمایش داده‌ایم. توجه کنید که اگر k زوج باشد،تابع در نقطهٔ a ماکسیمم



(الف) $\alpha > 0$، k زوج — (ب) $\alpha < 0$، k زوج — (ج) $\alpha > 0$، k فرد — (د) $\alpha < 0$، k فرد

یا مینی‌موم موضعی دارد بسته به اینکه $\alpha < 0$ یا $\alpha > 0$. وقتی k فرد باشد، نقطهٔ a نه ماکسیمم موضعی است و نه مینی‌موم موضعی زیرا که $(x-a)^k$ در $x = a$ تغییر علامت می‌دهد. در واقع این مطلب را می‌توان بدون شرط اضافی وجود مشتق $(k+1)$ام مستقیماً از ۲۰ – ۲ نتیجه گرفت:

(۲۰ـ۶) آزمون مشتق kـام

فرض کنید تابع f در نقطهٔ درونی a از دامنهٔ تعریف خود دارای مشتق تا مرتبهٔ kـام است ($k \geq 2$)، مشتقات آن در نقطهٔ a تا مرتبهٔ $(k-1)$ همه صفر هستند و $f^{(k)}(a) \neq 0$:

$$f'(a) = \ldots = f^{(k-1)}(a) = 0, \quad f^{(k)}(a) \neq 0$$

در اینصورت:

(الف) اگر k زوج باشد نقطهٔ a یک مینی‌موم یا ماکسیمم موضعی است بسته به‌اینکه $f^{(k)}(a) > 0$ یا $f^{(k)}(a) < 0$.

(ب) اگر k فرد باشد، نقطهٔ a نه ماکسیمم موضعی است و نه مینی‌موم موضعی.

برهان. چند جمله‌ای تیلورد درجهٔ k تابع f در نقطهٔ a هست $f(a) + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$. طبق ۱۰ـ۲:

$$\lim_{x \longrightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}{(x-a)^k} = ۰$$

پس

$$\lim_{x \longrightarrow a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^k} - \frac{۱}{k!} f^{(k)}(a)\right] = ۰$$

جملهٔ $\frac{۱}{k!}f^{(k)}(a)$ مثبت یا منفی است و عددی ثابت است. بنابراین برای x به‌اندازه کافی نزدیک a، $\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^k}$ باید هم‌علامت $f^{(k)}(a)$ باشد. اگر k زوج باشد، $(x-a)^k > ۰$، پس $f(x) - f(a)$ هم‌علامت $f^{(k)}(a)$ است (برای x نزدیک a). در نتیجه اگر $f^{(k)}(a) > ۰$، داریم $f(x) > f(a)$ و a یک نقطهٔ مینی‌موم موضعی است، و اگر $f^{(k)}(a) < ۰$، نتیجه می‌شود که $f(x) < f(a)$ و a یک نقطهٔ ماکسیمم موضعی است. اگر k فرد باشد، $(x-a)^k$ در $x = a$ تغییر علامت می‌دهد، پس $f(x) - f(a)$ نیز باید در $x = a$ تغییر علامت دهد که علامت $\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^k}$ همانند علامت $f^{(k)}(a)$ باقی بماند. بنابراین در یک طرف a، $f(x) < f(a)$، و در طرف دیگر، $f(x) > f(a)$ و a نمی‌تواند ماکسیمم یا مینی‌موم موضعی باشد. □

مثال ۶. وضعیت نقطهٔ $x = ۰$ برای تابع f که به‌صورت $f(x) = x^۶ \cos x - x^۵ \sin x$ تعریف شده است بررسی کنید.

می‌نویسیم $\sin x = x - \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۵}{۵!}\cos c_۱$ که $c_۱$ نقطه‌ای بین ۰ و x است، و نیز $\cos x = ۱ - \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۴}{۴!}\cos c_۲$، که $c_۲$ نقطه‌ای بین $۰, x$ است. داریم:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^۶(۱ - \tfrac{x^۲}{۲!} + \tfrac{x^۴}{۴!}\cos c_۲) - x^۵(x - \tfrac{x^۳}{۳!} + \tfrac{x^۵}{۵!}\sin c_۱) \\ &= (-\tfrac{۱}{۳})x^۸ + x^{۱۰}(\tfrac{۱}{۴!}\cos c_۲ - \tfrac{۱}{۵!}\sin c_۱) \end{aligned}$$

عبارت داخل پرانتز در قدر مطلق از $\frac{۱}{۵!} + \frac{۱}{۴!}$ بیشتر نیست و برای $|x|$ کوچک، جملهٔ $(-\frac{۱}{۳})x^۸$ غالب است. در واقع از تساوی بالا می‌بینیم که مشتقات f تا مرتبهٔ ۷ در $x = ۰$ همه صفر هستند و $f^{(۸)}(۰) = (-\frac{۱}{۳})(۸!) < ۰$. بنابراین f در نقطهٔ صفر یک ماکسیمم موضعی دارد.

مثال ۷. نقاط بحرانی تابع $f(x)=(x^۲-۲x)^{۱۰۰}$ را بررسی کنید.

داریم $f'(x)=۱۰۰(x^۲-۲x)^{۹۹}(۲x-۲)$، پس سه‌نقطهٔ بحرانی $x=۰,۱,۲$ به‌دست می‌آیند. درواقع می‌توان نوشت $f(x)=x^{۱۰۰}(x-۲)^{۱۰۰}$ و از این عبارت واضح است که $x=۰,۲$ مینی‌موم موضعی برای تابع هستند زیرا که مقدار تابع در این نقاط صفر است و در سایر نقاط مثبت. از طرفی دیگر، این تابع، که پیوسته است، باید در $[۰,۲]$ ماکسیمم داشته باشد و در این نقطهٔ ماکسیمم که لزوماً یک نقطهٔ درونی است، مشتق f باید صفر شود. پس لزوماً $x=۱$ نقطهٔ ماکسیمم واقع در $[۰,۲]$ است. به این ترتیب وضعیت هر سه نقطه را می‌توان از ملاحظات ابتدایی روشن ساخت. ولی همین نتایج را اکنون با توجه به آزمون ۲۰ـ۶ به‌دست می‌آوریم. در نقطهٔ $x=۰$ تابع را به‌صورت توانهای x بسط می‌دهیم.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{۱۰۰}(x-۲)^{۱۰۰} = x^{۱۰۰}\left(\sum_{j=۰}^{۱۰۰}\binom{۱۰۰}{j}x^j(-۲)^{۱۰۰-j}\right) \\ &= \sum_{j=۰}^{۱۰۰}(-۱)^j(۲)^{۱۰۰-j}\binom{۱۰۰}{j}x^{۱۰۰+j} \end{aligned}$$

عبارت طرف راست لزوماً چند جمله‌ای تیلور درجه ≥ ۲۰۰ تابع f در نقطهٔ صفر است. از این عبارت می‌بینیم که مشتقات f تا مرتبهٔ ۹۹ در ۰ همه صفر هستند و $f^{(۱۰۰)}(۰)=(۱۰۰!)۲^{۱۰۰}>۰$، پس $x=۰$ یک مینی‌موم موضعی است. همینطور در نقطهٔ ۲:

$$\begin{aligned} f(x) &= ((x-۲)+۲)^{۱۰۰}(x-۲)^{۱۰۰} \\ &= \sum_{j=۰}^{۱۰۰}\binom{۱۰۰}{j}(x-۲)^j ۲^{۱۰۰-j}(x-۲)^{۱۰۰} \\ &= \sum_{j=۰}^{۱۰۰}۲^{۱۰۰-j}\binom{۱۰۰}{j}(x-۲)^{۱۰۰+j} \end{aligned}$$

مجدداً در اینجا مشتقات f تا مرتبهٔ ۹۹ در $x=۲$ صفر می‌شوند و $f^{(۱۰۰)}(۲)=(۱۰۰!)۲^{۱۰۰}$ و

$x = ۲$ یک مینی‌موم موضعی است. بالاخره برای $x = ۱$:

$$\begin{aligned} f(x) &= ((x-۱)+۱)^{۱۰۰}((x-۱)-۱)^{۱۰۰} = ((x-۱)^{۲}-۱)^{۱۰۰} \\ &= \sum_{j=۰}^{۱۰۰} \binom{۱۰۰}{j} (-۱)^{j}(x-۱)^{۲j} \\ &= ۱ - ۱۰۰(x-۱)^{۲} + \ldots \end{aligned}$$

در اینجا مشتق دوم تابع در $x = ۱$ منفی است و یک ماکسیمم موضعی به‌دست می‌آید.

انتگرال یک متغیری

مفهوم انتگرال یکی از ارکان حساب دیفرانسیل و انتگرال است. از نظر قدمت سوابق این ایده بسیار قدیمی‌تر از مفهوم مشتق است و به صورتی در ریاضیات یونان قرون ۳ و ۴ پیش از میلاد زیر عنوان "روش افنا[۱]" یافت می‌شود. هدف این روش یافتن مساحت ناحیه‌های محصور به منحنی‌ها یا احجام محصور به سطوح خمیده است. در این روش ناحیهٔ مورد نظر به صورت اجتماعی نامتناهی از ناحیه‌های محصور به خطوط راست یا صفحات مستوی نمایش داده می‌شود. با یافتن حد مجموع مساحت‌ها یا احجام این ناحیه‌ها عددی به عنوان مساحت یا حجم ناحیهٔ اولیه به‌دست می‌آید.

به عنوان نمونه روش ارشمیدس را برای محاسبهٔ قطاعی از سهمی به طور خلاصه بیان می‌کنیم. سهمی $y = kx^{۲}$ را در نظر بگیرید. مقصود از یک وتر سهمی پاره‌خط واصل بین دو نقطه نمودار است. ناحیه محصور به یک وتر و کمان سهمی که به دو انتهای وتر محصور می‌شود را یک قطاع سهمی می‌نامیم و می‌خواهیم عددی را به عنوان مساحت قطاع تعریف شده توسط وتر AB نسبت دهیم.

شکل ۱

ارشمیدس از خواص هندسی سهمی که در مطالعه علم مخروطات شناخته شده بود بهره می‌گیرد. ما اثبات خواص مورد نیاز را به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم. امروزه با استفاده از هندسه تحلیلی اثبات این خواص سرراست است ولی شایان ذکر است که قدما این گزاره‌ها به روش ترکیبی مانند هندسهٔ کلاسیک استخراج می‌کردند.

حکم ۱. برای هر وتر AB، نقطهٔ منحصر به فردی C روی کمان AB وجود دارد که مماس بر سهمی

[۱] Method of Exhaustion

در آن نقطه موازی AB است. (اثبات: تمرین).

نقطهٔ C را رأس منسوب به وتر AB می‌نامند. حال فرض می‌کنیم D رأس منسوب به وتر AC باشد (شکل ۱). حکم زیر کلید محاسبهٔ ارشمیدس است.

حکم ۲. مساحت مثلث BDC یک هشتم مساحت BCA است. (اثبات: تمرین).

حال توجه کنید که متناظر به وتر BC نیز رأس E پدید می آید و مساحت مثلث AEC نیز یک هشتم مساحت مثلث BCA است. به همین ترتیب نسبت به هر یک از چهار وتر AE، EC، CD و DB یک رأس اختیار می‌شود و چهار مثلث ساخته می‌شوند که مساحت هر یک $(\frac{۱}{۸})^{۲} = \frac{۱}{۶۴}$ مساحت ACB است. روش افنا عبارت از این است که این فرایند را به همین ترتیب ادامه دهیم و هر بار مجموع مساحت‌های مثلث‌های پدید آمده را اضافه کنیم. حد این مجموع‌ها را به عنوان مساحت قطاع سهمی تعریف می‌شود. اگر مساحت مثلث ABC را S بنامیم، مجموع مساحت‌های دو مثلث AEC و CDB برابر $\frac{۱}{۸}S + \frac{۱}{۸}S = \frac{۱}{۴}S$ است. به همین ترتیب در مرحلهٔ بعد مجموع مساحت‌های چهار مثلث برابر می‌شود با $۴ \times \frac{S}{۶۴} = \frac{۱}{۱۶}S$. اگر این فرایند بلا انقطاع ادامه یابد با چنین مجموعی نامتناهی روبرو هستیم:

$$S + \frac{۱}{۴}S + \frac{۱}{۱۶}S + \frac{۱}{۴^{۳}}S + \frac{۱}{۴^{۴}}S + \cdots = S(۱ + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴^{۲}} + \frac{۱}{۴^{۳}} + \cdots)$$

مجموع این سری هندسی برابر است با $\frac{۴}{۳}S$، یعنی مساحت قطاع سهمی که توسط AB تعریف می‌شود $\frac{۴}{۳}$ مساحت مستطیل ACB است که C رأس مربوط به وتر AB می‌باشد.

روشن است که محاسبهٔ بالا مبتنی بر دانش دقیق خواص هندسی سهمی است. مشکل قدما در توسعهٔ این روش وابستگی آن به این اطلاعات خاص بود که از آن اجتنابی تصور نمی‌شد. با ابداع هندسهٔ تحلیلی و بیان منحنی‌ها به صورت اجتماعی از نمودار توابع که تعریف تحلیلی دارند، در قرون ۱۶ و ۱۷ میلادی روش افنا به صورت حساب انتگرال تکامل یافت و رابطهٔ آن با حساب دیفرانسیل تدریجاً کشف شد. رهیافت کلی محاسبه مساحت (و در واقع تعریف آن!) برای یک ناحیهٔ محصور به یک منحنی (مانند شکل ۲) این خواهد بود که ناحیه را به اجزایی تجزیه کنیم که هر جزء عبارت از

ناحیه محصور به نمودار یک تابع، بازهٔ دامنهٔ آن تابع و خطوط راست عمود بر محور

شکل ۲

دامنهٔ تعریف تابع باشد. در شکل ۲ یک بازهٔ موازی محور افقی به عنوان دامنهٔ دو تابع و یک بازهٔ موازی محور y به عنوان بازهٔ تعریف تابع سوم در نظر گرفته شده است. به طور کلی هدف ما این خواهد بود که بتوانیم به ناحیه‌ای مانند ناحیهٔ شکل ۳ که محصور به نمودار $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$، بازهٔ $[a,b]$ و دو خط راست $x=a$ و $x=b$ است. عددی را به عنوان مساحت نسبت دهیم. با این انگیزه به تشریح حساب انتگرال می‌پردازیم.

شکل ۳

بازهٔ بسته و کرانداری $[a,b]$ در نظر می‌گیریم. مقصود از یک افراز $[a,b]$ انتخاب دنباله‌ای متناهی $\mathcal{P}=\{x_۰,x_۱,\ldots,x_n\}$ از نقاط $[a,b]$ است به طوری که

$$a=x_۰\leq x_۱\leq\cdots\leq x_n=b$$

بدین ترتیب هر افراز، بازهٔ $[a,b]$ را به زیربازه‌هایی تجزیه می‌کند که فقط در نقاط انتهایی اشتراک دارند. فرض کنید $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ یک تابع کراندار باشد، یعنی اعداد حقیقی A و B وجود داشته باشند که:

$$A\leq f(x)\leq B \qquad \text{برای هر } x\in[a,b]$$

در این صورت اگر دامنهٔ f را به $[x_{i-۱},x_i]$ محدود کنیم، مقادیر f روی $[x_{i-۱},x_i]$ دارای کران بالایی و کران پایین هستند. بنابراین طبق اصل تمامیت اعداد حقیقی، مجموعهٔ مقادیر f روی $[x_{i-۱},x_i]$ دارای کوچکترین کران بالایی M_i و بزرگترین کران پایینی m_i است. دو مجموع زیر را در نظر بگیرید:

$$L(f,\mathcal{P})=\sum_{i=۱}^{n}(x_i-x_{i-۱})m_i \quad , \quad U(f,\mathcal{P})=\sum_{i=۱}^{n}(x_i-x_{i-۱})M_i$$

$L(f,\mathcal{P})$ را مجموع ریمان پایینی f نسبت به افراز $\mathcal{P}$ و $U(f,\mathcal{P})$ را مجموع ریمان بالایی f نسبت به $\mathcal{P}$ می‌نامیم. وقتی f مثبت باشد، $L(f,\mathcal{P})$ مجموع مساحت‌های مستطیل‌های از بالا محصور به نمودار

f و $U(f,\mathcal{P})$ مجموع مساحت‌های مستطیل‌های از پایین محصور به نمودار f است (شکل ۴). می‌توان $L(f,\mathcal{P})$ را یک تقریب پایینی برای مساحت زیر نمودار و $U(f,\mathcal{P})$ را یک تقریب بالایی برای همین مساحت تصور کرد.

شکل ۴

چون $M_i \leq m_i$، طبعاً داریم:

$$L(f,\mathcal{P}) \leq U(f,\mathcal{P}) \qquad (۱)$$

اگر $\mathcal{P}' = \{x'_0, x'_1, \dots, x'_m\}$ یک افراز دیگر $[a,b]$ باشد، می‌گوییم $\mathcal{P}'$ یک تظریف $\mathcal{P}$ است در صورتی که هر x_i یکی از x'_j ها باشد، $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}'$.

(۱–۱) گزاره. اگر $\mathcal{P}'$ یک تظریف $\mathcal{P}$ باشد داریم:

$$L(f,\mathcal{P}) \leq L(f,\mathcal{P}') \leq U(f,\mathcal{P}') \leq U(f,\mathcal{P}) \qquad (۲)$$

اثبات. فرض کنید S و S' دو زیرمجموعهٔ ناتهی و کراندار از اعداد حقیقی باشند، M و m به ترتیب کوچکترین کران بالایی و بزرگترین کران پایینی برای S، و M' و m' به ترتیب کوچکترین کران بالایی و بزرگترین کران پایینی برای S'. حال اگر $S \subset S'$ نتیجه می‌شود که:

$$m' \leq m \leq M \leq M' \qquad (۳)$$

زیرا که هر کران بالایی برای S' یک کران بالایی برای S است و هر کران پایینی برای S' یک کران پایینی برای S. بنابراین اگر $\mathcal{P}'$ یک تظریف $\mathcal{P}$ باشد، از آنجا که هر زیربازهٔ I' مربوط به $\mathcal{P}'$ زیرمجموعه‌ای از یک زیربازهٔ I مربوط به $\mathcal{P}'$ است، کوچکترین کران بالایی f روی I' کوچکتر یا مساوی کوچکترین کران بالایی f روی I است و بزرگترین کران پایینی f روی I' بزرگتر یا مساوی بزرگترین کران پایینی f روی I است. حکم از این نکته نتیجه می‌شود. □

(۱ — ۲) گزاره. اگر $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ دو افراز $[a,b]$ باشند و $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ یک تابع کراندار، آنگاه

$$L(f,\mathcal{P})\leq U(f,\mathcal{Q}) \tag{۴}$$

اثبات. برای مشاهدهٔ این مطلب الحاق دو افراز $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ را در نظر می‌گیریم که در واقع اجتماع مرتب شده نقاط $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ است، یعنی اگر $\mathcal{P}=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ و $\mathcal{Q}=\{y_0,y_1,\ldots,y_m\}$، الحاق $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$، که به $\mathcal{P}\vee\mathcal{Q}$ نمایش داده می‌شود، اجتماع x_i ها و y_j هاست که به ترتیب صعودی منظم شده باشد. واضح است که $\mathcal{P}\vee\mathcal{Q}$ تظریف $\mathcal{P}$ و نیز تظریف $\mathcal{Q}$ است، پس طبق گزارهٔ (۱ — ۱) :

$$L(f,\mathcal{P})\leq L(f,\mathcal{P}\vee\mathcal{Q}) \quad , \quad U(f,\mathcal{P}\vee\mathcal{Q})\leq U(f,\mathcal{Q})$$

از طرفی دیگر بنابر (۱)، $L(f,\mathcal{P}\vee\mathcal{Q})\leq U(f,\mathcal{P}\vee\mathcal{Q})$، پس حکم نتیجه می‌شود. □

حال مجموعهٔ کلیه مجموع‌های ریمان پایینی برای $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ را نسبت به همهٔ افرازهای ممکن در نظر بگیرید. اگر B یک کران بالایی برای f روی $[a,b]$ باشد، هر یک از این مجموع‌های ریمان از $M(b-a)$ کوچکتر است، پس این مجموعهٔ ناتهی دارای کوچکترین کران بالایی است که آن را به $\underline{\int_a^b} f$ نمایش می‌دهیم و انتگرال پایینی f روی $[a,b]$ می‌نامیم. به همین ترتیب اگر A یک کران پایینی برای f روی $[a,b]$ باشد، $A(b-a)$ یک کران پایینی برای مجموعهٔ کلیهٔ مجموع‌های ریمان بالایی برای f است، پس مجموعهٔ مجموع‌های ریمان بالایی دارای بزرگترین کران پایینی است که به $\overline{\int_a^b} f$ نمایش می‌دهیم و انتگرال بالایی f می‌نامیم. چون طبق (۱ — ۲) هر مجموع ریمان پایین کوچکتر یا مساوی هر مجموع ریمان بالایی است نتیجه می‌شود که:

$$\underline{\int_a^b} f\leq\overline{\int_a^b} f \tag{۵}$$

(دقیقاً چرا؟: تمرین). به تعبیری می‌توان $\overline{\int_a^b} f$ را بهترین تقریب بالایی برای مساحت زیر نمودار و $\underline{\int_a^b} f$ را بهترین تقریب پایینی برای مساحت زیر نمودار f تصور کرد. در صورتی که $\underline{\int_a^b}=\overline{\int_a^b} f$، تابع کراندار $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ را انتگرال‌پذیر (به مفهوم ریمان) می‌نامیم و مقدار مشترک را به $\int_a^b f$ نمایش می‌دهیم.

(۱—۳) گزاره. تابع کراندار $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ انتگرال‌پذیر است اگر و تنها اگر به‌ازای هر $e>0$، افرازی $\mathcal{P}$ از $[a,b]$ وجود داشته باشد که:

$$U(f,\mathcal{P})-L(f,\mathcal{P})<e$$

اثبات. فرض کنید به‌ازای هر $e>0$، افرازی $\mathcal{P}$ با شرط فوق وجود داشته باشد. از آنجا که

$$L(f,\mathcal{P})\leq\underline{\int_a^b}f\leq\overline{\int_a^b}f\leq U(f,\mathcal{P})$$

نتیجه می‌گیریم که برای هر $e>0$ داریم:

$$\overline{\int_a^b}-\underline{\int_a^b}f<e$$

چون $e>0$ را می‌توان به دلخواه کوچک گرفت، تساوی $\underline{\int_a^b}f$ و $\overline{\int_a^b}f$ نتیجه می‌شود.

بالعکس فرض کنید f روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است، یعنی $\underline{\int_a^b}f=\overline{\int_a^b}f$. چون $\underline{\int_a^b}f$ کوچکترین کران بالایی مجموع‌های ریمان پایینی است، برای هر $e>0$، افراز $\mathcal{P}$ وجود دارد که

$$\underline{\int_a^b}f-L(f,\mathcal{P})<\frac{e}{2}$$

به همین ترتیب افرازی $\mathcal{Q}$ از $[a,b]$ یافت می‌شود که:

$$U(f,\mathcal{Q})-\overline{\int_a^b}f<\frac{e}{2}$$

ولی $\overline{\int_a^b}f=\underline{\int_a^b}f$، پس

$$U(f,\mathcal{Q})-L(f,\mathcal{P})<e$$

حال $\mathcal{P}\vee\mathcal{Q}$، الحاق $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$، تظریفی از $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ است، پس طبق گزارهٔ ۱—۱ داریم

$$U(f,\mathcal{P}\vee\mathcal{Q})-L(f,\mathcal{P}\vee\mathcal{Q})<e$$

و حکم به اثبات می‌رسد. □

مثال ۱. تابع $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ را به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x : \text{گویا} \\ 0 & x : \text{ناگویا} \end{cases}$$

اگر $\mathcal{P}$ یک افراز $[0, 1]$ باشد، در هر زیربازه $[x_{i-1}, x_i]$ به طول ناصفر هم اعداد گویا و هم اعداد ناگویا یافت می‌شوند، پس $m_i = 0$ و $M_i = 1$. بنابراین

$$U(f, \mathcal{P}) = 1 \quad , \quad L(f, \mathcal{P}) = 0$$

چون این روابط برای هر افراز $\mathcal{P}$ برقرارند، داریم:

$$\overline{\int_a^b} f = 1 \quad , \quad \underline{\int_a^b} f = 0$$

بدین ترتیب f انتگرال‌پذیر نیست.

مثال ۲. سهمی $y = kx^2$ را روی بازهٔ $[0, c]$، $c > 0$، در نظر بگیرید. افراز $\mathcal{P}_n$ را با تقسیم $[0, c]$ به n بازه با طول‌های برابر در نظر می‌گیریم:

$$\mathcal{P} : 0 = x_0 < x_1 = \frac{c}{n} < x_2 = 2\frac{c}{n} < \cdots < x_n = n\frac{c}{n} = c$$

چون f روی $[0, c]$ صعودی است، برای زیربازهٔ $[x_{i-1}, x_i]$ داریم:

$$m_i = k(\frac{i-1}{n}c)^2 \quad , \quad M_i = k(\frac{i}{n}c)^2$$

پس

$$L(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{c}{n} k (\frac{i-1}{n} c)^2 = \frac{c^3}{n^3} k \sum_{i=1}^{n} (i-1)^2$$

و به همین ترتیب:

$$U(f, \mathcal{P}_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{c}{n} k (\frac{i}{n} c)^2 = \frac{c^3}{n^3} k \sum_{i=1}^{n} i^2$$

بنابراین:

$$U(f, \mathcal{P}_n) - L(f, \mathcal{P}_n) = \frac{c^3 k}{n}$$

حال اگر $e > ۰$ داده شده باشد با بزرگ گرفتن n می‌توان تضمین کرد که $\frac{c^۳k}{n} < e$، پس طبق گزارهٔ ۱—۳، f روی $[۰, c]$ انتگرال‌پذیر است. برای محاسبهٔ $\int_a^b f$، نشان می‌دهیم که $L(f, \mathcal{P}_n)$ و $U(f, \mathcal{P}_n)$ هر دو به یک حد میل می‌کنند وقتی $n \to +\infty$، پس این حد مشترک لاجرم انتگرال f روی $[۰, c]$ است. با استفاده از فرمول $\sum_{i=۱}^{p} i^۲ = \frac{p(p+۱)(۲p+۱)}{۶}$ داریم:

$$L(f, \mathcal{P}_n) = (c^۳k)\frac{(n-۱)n(۲n-۱)}{۶n^۳} \quad , \quad U(f, \mathcal{P}_n) = (c^۳k)\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶n^۳}$$

وقتی $n \to +\infty$، هر دو عبارت بالا به $\frac{۱}{۳}c^۳k$ میل می‌کنند که مقدار $\int_۰^c f$ است. این همان مقداری است که از محاسبهٔ ارشمیدس به‌دست می‌آید زیرا بنابر تقارن مساحت زیر نمودار روی $[-c, c]$ برابر $\frac{۲}{۳}c^۳k$ است، پس حجم قطاع مربوط برابر $۲c^۳k - \frac{۲}{۳}c^۳k = \frac{۴}{۳}c^۳k$ می‌شود که چهار سوم مساحت مثلث با رئوس $(-c, kc^۲)$، $(۰, ۰)$ و $(c, kc^۲)$ است.

انتگرال یک متغیری (۲)

مفهوم انتگرال‌پذیری برای تابع‌های کراندار $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ در جلسهٔ گذشته مورد بحث قرار گرفت. در این جلسه نخست پاره‌ای خواص ابتدایی تابع‌های انتگرال‌پذیر و نتایج فوری تعریف را ثبت می‌کنیم.

(۲—۱) خواص ابتدایی انتگرال

(۲—۱—۱) هر تابع ثابت $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$، $f(x)=c$ برای هر x در $[a,b]$، انتگرال‌پذیر است و $\int_a^b f=c(b-c)$.

اثبات. هر مجموع ریمان بالایی و هر مجموع ریمان پایینی f برابر می‌شود با $c(b-c)$ و حکم نتیجه می‌شود. □

(۲—۱—۲) اگر دو تابع $f,g:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ انتگرال‌پذیر باشند، $f+g$ نیز انتگرال‌پذیر است و $\int_a^b(f+g)=\int_a^b f+\int_a^b g$.

اثبات. فرض کنید $\mathcal{P}:a=x_\circ\leq x_1\leq\cdots\leq x_n=b$ یک افراز $[a,b]$ باشد. اگر کوچکترین کران بالایی $f+g$، f و g روی $[x_{i-1},x_i]$ را به ترتیب M_i، M_i'، M_i''، و بزرگترین کران پایینی $f+g$، f و g را به ترتیب به m_i، m_i' و m_i'' نمایش دهیم، داریم:

$$m_i'+m_i''\leq m_i\leq M_i\leq M_i'+M_i'' \qquad (1)$$

زیرا که $f(x) \leq M'_i$ و $g(x) \leq M''_i$ برای x در $[x_{i-1}, x_i]$، نتیجه می‌دهد $M'_i + M''_i$ یک کران بالایی برای $f+g$ روی $[x_{i-1}, x_i]$ است، بنابراین کوچکترین کران بالایی $f+g$ روی $[x_{i-1}, x_i]$ حداکثر برابر $M'_i + M''_i$ است. استدلال مشابهی برای m_i، m'_i و m''_i برقرار است. بنابراین:

$$L(f, \mathcal{P}) + L(g, \mathcal{P}) \leq L(f+g, \mathcal{P}) \leq U(f+g, \mathcal{P}) \leq U(f, \mathcal{P}) + U(g, \mathcal{P}) \tag{۲}$$

چون f و g انتگرال‌پذیر فرض شده‌اند، می‌توان برای $e > 0$ داده شده، با انتخاب مناسب افرازهای $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ نامساوی‌های زیر را تأمین کرد:

$$U(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{P}) \leq \frac{e}{2} \tag{۳}$$

$$U(g, \mathcal{Q}) - L(g, \mathcal{Q}) \leq \frac{e}{2} \tag{۴}$$

حال برای $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ که تظریف $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ دو نامساوی فوق همچنان برقرار می‌مانند، پس اگر به جای $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$، $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ را در (۳) و (۴) جایگزین کرده و طرف‌های متناظر نامساویها را جمع کنیم:

$$[U(f, \mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) + U(g, \mathcal{P} \vee \mathcal{Q})] - [L(f, \mathcal{P} \vee \mathcal{Q} + L(g, \mathcal{P} \vee \mathcal{Q}] \leq e$$

بنابراین از (۲) نتیجه می‌شود که

$$U(f+g, \mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) - L(f+g, \mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \leq e$$

پس $f+g$ انتگرال‌پذیر است. به علاوه چون بزرگترین کران بالایی طرف راست (۲) و نیز کوچکترین کران بالایی طرف چپ (۲) هر دو برابر $\int_a^b f + \int_a^b g$ هستند، نتیجه می‌شود که انتگرال بالایی و انتگرال پایینی $f+g$ هر دو برابر $\int_a^b f + \int_a^b g$ هستند و حکم به اثبات می‌رسد. $\square$

(۲–۱–۳) اگر $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ انتگرال‌پذیر باشد و $c \in \mathbb{R}$، آنگاه cf انتگرال‌پذیر است و

$$\int_a^b cf = c \int_a^b f$$

اثبات. نخست اگر $c \geq ۰$، و M_i و m_i به ترتیب کوچکترین کران بالایی و بزرگترین کران پایینی f روی یک بازهٔ $[x_{i-۱}, x_i]$ از افراز $\mathcal{P}$ باشند، کوچکترین کران بالایی و بزرگترین کران پایینی cf روی $[x_{i-۱}, x_i]$ به ترتیب برابر cM_i و cm_i خواهد شد و با فاکتورگیری از c می‌توان به سادگی به نتیجه رسید. در حالت $c < ۰$، کوچکترین کران بالایی cf برابر cm_i و بزرگترین کران پایینی آن برابر cM_i می‌شود و مجدداً می‌توان به نتیجه مورد نظر رسید. □

(۲—۱—۴) اگر برای تابع انتگرال‌پذیر $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ داشته باشیم $f(x) \geq ۰$ برای هر x در $[a, b]$، آنگاه $\int_a^b f \geq ۰$.

اثبات. برای چنین تابع f، $۰ \leq m_i \leq M_i$ و همهٔ مجموع‌های ریمان غیرمنفی خواهند بود. پس $\overline{\int}$ و $\underline{\int}$ غیرمنفی می‌شوند و چون f انتگرال‌پذیر است، $\int_a^b f = \overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f \geq ۰$. □

(۲—۱—۵) نتیجه. اگر $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ انتگرال‌پذیر باشند و $f(x) \geq g(x)$ برای هر x در $[a, b]$، آنگاه

$$\int_a^b f \geq \int_a^b g$$

اثبات. تابع $f - g$ طبق (۲—۱—۳) و (۲—۱—۲) انتگرال‌پذیر است و $\int_a^b (f - g) = \int_a^b f - \int_a^b g$، ولی طبق (۲—۱—۴) داریم $\int_a^b (f - g) \geq ۰$، پس حکم نتیجه می‌شود. □

اگر تابع کراندار $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ انتگرال‌پذیر باشد، تعریف می‌کنیم:

$$\int_b^a f = -\int_a^b f \qquad (۵)$$

این قرار داد را می‌توان اینگونه توجیه کرد که در حالت $f \geq ۰$ که $\int_a^b$ تعبیر هندسی مساحت زیر نمودار را دارد، اگر جهت محور دامنه را تعویض کنیم، نقش a و b به عنوان نقاط چپ و راست دامنه تعویض می‌شود و مساحت مورد نظر زیر محور قرار خواهد گرفت. بدین ترتیب باید علامت منفی برای مساحت

منظور کرد.

(۲—۱—۶) برای هر سه نقطهٔ a، b و c در $\mathbb{R}$ داریم:

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c \tag{۶}$$

مشروط بر این که انتگرال‌های فوق تعریف شده باشند. در واقع هرگاه دو انتگرال از سه انتگرال بالا تعریف شده باشند، سومی نیز تعریف شدنی است و تساوی برقرار است.

برای اثبات (۲—۱—۶)، دو لم سودمند بیان و ثابت می‌کنیم.

(۲—۱—۷) لم ۱. اگر $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ انتگرال‌پذیر باشد و $[c,d] \subset [a,b]$، آنگاه تحدید f به $[c,d]$ نیز انتگرال‌پذیر است.

اثبات. تحدید f به زیربازهٔ $[c,d]$ از $[a,b]$ را به $\overline{f}$ نمایش می‌دهیم. برای $e > ۰$، باید افراز $\overline{\mathcal{P}}$ از $[c,d]$ ارائه کنیم که $U(\overline{f},\overline{\mathcal{P}}) - L(\overline{f},\overline{\mathcal{P}}) < e$. چون f انتگرال‌پذیر است افرازی $\mathcal{P}$ از $[a,b]$ وجود دارد که $U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}) < e$. افراز $\mathcal{P}$ را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$a = x_۰ \leq x_۱ \leq \cdots \leq x_n = b$$

چون $[c,d] \subset [a,b]$، اندیس‌های i و j بین ۰ و n وجود دارند که:

$$x_i \leq c \leq x_{i+۱} \quad , \quad x_{j-۱} \leq d \leq x_j$$

افراز $\overline{\mathcal{P}}$ را به صورت زیر برای $[c,d]$ در نظر می‌گیریم:

$$\overline{\mathcal{P}} : c = x'_i \leq x_{i+۱} \leq \cdots \leq x_{j-۱} \leq x'_j = d$$

فرض کنید $M'_{i+۱}$ و $m'_{i+۱}$ کوچکترین کران بالایی و بزرگترین کران پایینی $\overline{f}$ روی $[x'_i, x_{i+۱}]$ باشند. در مقایسه با $M_{i+۱}$ و $m_{i+۱}$ مقادیر متناظر برای f روی بازهٔ $[x_i, x_{i+۱}]$ (احتمالاً) بزرگتر داریم

$$m_{i+۱} \leq m'_{i+۱} \leq M'_{i+۱} \leq M_{i+۱}$$

به همین ترتیب اگر M'_j و m'_j را به $[x_{j-1}, x'_j]$ نسبت دهیم، داریم:

$$m_j \leq m'_j \leq M'_j \leq M_j$$

نتیجه می‌شود که:

$$U(\overline{f}, \overline{\mathcal{P}}) - L(\overline{f}, \overline{\mathcal{P}}) \leq U(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{P}) < e$$

و حکم به اثبات می‌رسد. $\square$

(۲—۱—۸) لم ۲. اگر $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ انتگرال‌پذیر باشد و $[a, b] \subset [A, B]$، تابع $\widetilde{f}: [A, B] \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت

$$\widetilde{f}\,(x) = \begin{cases} f(x) & x \in [a, b] \\ 0 & x \notin [a, b] \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت $\widetilde{f}$ روی $[A, B]$ انتگرال‌پذیر است و $\int_A^B \widetilde{f} = \int_a^b f$.

اثبات. برای $e > 0$، باید افراز $\widetilde{\mathcal{P}}$ برای $[A, B]$ بیابیم که

$$U(\widetilde{f}, \widetilde{\mathcal{P}}) - L(\widetilde{f}, \widetilde{\mathcal{P}}) < e$$

چون f روی $[a, b]$ انتگرال‌پذیر است، افراز $\mathcal{P}$ به صورت زیر برای $[a, b]$ وجود دارد که $U(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{P}) < e$

$$\mathcal{P} : a = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_p = b$$

حال $\widetilde{\mathcal{P}}$ را با افزودن نقاط A و B تعریف می‌کنیم:

$$\widetilde{\mathcal{P}}: A = \widetilde{x}_0 \leq a = x_0 \leq \cdots \leq x_p = b \leq \widetilde{x}_p = B$$

چون تابع تعریف شده $\widetilde{f}$ خارج $[a, b]$ صفر است نتیجه می‌شود که $U(\widetilde{f}, \widetilde{\mathcal{P}}) = U(f, \mathcal{P})$ و $L(\widetilde{f}, \widetilde{\mathcal{P}}) = L(f, \mathcal{P})$ و حکم نتیجه می‌شود.

حال به اثبات ۲—۱—۶ باز می‌گردیم. نخست فرض کنید $a \leq b \leq c$ و f روی $[a, b]$ و $[b, c]$ انتگرال‌پذیر است. تحدید f به $[a, b]$ را f' و تحدید f به $[b, c]$ را به f'' نمایش می‌دهیم. فرض کنید $\widetilde{f}'$

و $\tilde{f}''$ توسعهٔ f' و f'' به همهٔ $[a,c]$ به ترتیب لم ۲ باشند، یعنی بیرون بازهٔ تعریف تابع را برابر صفر قرار دهید. از لم ۲ نتیجه می‌شود که $\tilde{f}'$ و $\tilde{f}''$ انتگرال‌پذیرند. به علاوه چون $f = \tilde{f}' + \tilde{f}''$:

$$\begin{aligned} \int_a^c f &= \int_a^c \tilde{f}' + \int_a^c \tilde{f}'' \\ &= \int_a^b f + \int_b^c f \quad (\text{طبق لم ۲}) \end{aligned}$$

و حکم در حالت $a \leq b \leq c$ به اثبات می‌رسد. حالت‌های دیگر به ترتیب a، b و c نیز از لم ۱ و لم ۲ نتیجه می‌شود.

تاکنون مثالی جز تابع ثابت و سهمی برای تابع انتگرال‌پذیر ارائه نکرده‌ایم و لم ۲ نشان می‌دهد پیوستگی یک شرط لازم برای انتگرال‌پذیری نیست زیرا اگر مقدار f در یکی از دو انتهای بازهٔ $[a,b]$ ناصفر باشد، با توسعهٔ f با مقدار صفر بیرون $[a,b]$ به یک دامنهٔ بزرگتر، تابع به‌دست آمده همچنان انتگرال‌پذیر است ولی در نقاط a و b ممکن است پیوسته نباشد. گزاره زیر نشان می‌دهد که پیوستگی یک شرط کافی برای پیوستگی است.

(۲ـــ۲) گزاره. هر تابع پیوسته $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ انتگرال‌پذیر است.

اثبات این گزاره را به کمک لم زیر ارائه خواهیم کرد ولی اثبات لم را به جلسات آینده وقتی دربارهٔ دنباله‌های اعداد حقیقی صحبت می‌شود موکول می‌کنیم.

(۲ـــ۳) لم. اگر $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته باشد آنگاه ویژگی زیر برقرار است: برای هر $e > 0$، عددی $\delta > 0$ وجود دارد به طوری که هرگاه برای x_1 و x_2 در $[a,b]$ داشته باشیم $|x_1 - x_2| < \delta$، آنگاه $|f(x_1) - f(x_2)| < e$.

در نگاه اول به نظر می‌آید حکم این لم چیزی فرای پیوستگی نباشد ولی کمی دقت تفاوت ظریف آن را مشخص می‌کند. پیوستگی f در $[a,b]$ بدین معنی است که f در همهٔ نقاط $[a,b]$ پیوسته است، یعنی برای هر x_0 در $[a,b]$، عددی $e' > 0$ وجود دارد که هرگاه $|x - x_0| < e'$، x در $[a,b]$، آنگاه $|f(x) - f(x_0)| < e$. نکته این است که اندازهٔ e' به نقطهٔ x_0 وابسته است و ممکن است یک $e' > 0$ واحد وجود نداشته باشد که برای هر x_0 کار کند. طبق لم اگر دامنهٔ تابع پیوستهٔ f یک بازهٔ بسته و

کراندار باشد، آنگاه می‌توان یک $e' > 0$ واحد (که در لم δ خوانده شده است) پیدا کرد که هرگاه دو نقطه در دامنه فاصلهٔشان کوچکتر از این e' باشد، فاصله مقادیر آنها از e کوچکتر است. این وضعیت پیوستگی یکنواخت خوانده می‌شود و ممکن است اگر دامنهٔ یک تابع پیوسته یکی از دو شرط کراندار بودن یا بسته بودن را حایز نباشد برقرار نشود. به عنوان مثال، تابع‌های زیر را در نظر بگیرید:

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2$$

$$h :]0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, h(x) = \frac{1}{x}$$

هر یک از این دو تابع در دامنهٔ خود پیوسته است، ولی نشان می‌دهیم پیوستگی یکنواخت برقرار نیست. نخست تابع g را در نظر می‌گیریم. فرض کنید $e > 0$ داده شده است. برای این که مقدار g در دو نقطهٔ x_1 و x_2، مثلاً $0 \leq x_1 < x_2$، کوچکتر از e باشد، حداکثر فاصله x_1 و x_2 چه‌قدر می‌تواند باشد؟ می‌نویسیم $x_2 = x_1 + d$ که d فاصلهٔ x_1 و x_2 است. داریم:

$$\begin{aligned} |g(x_2) - g(x_1)| &= (x_1 + d)^2 - x_1^2 \\ &= 2dx_1 + d^2 < e \end{aligned}$$

توجه کنید که d هر قدر کوچک (ولی مثبت) گرفته شود، می‌توان با بزرگ کردن x_1، $2dx_1$ را از e بزرگتر ساخت. البته اگر x_1 نخست مفروض باشد، می‌توان d را طوری گرفت که $2dx_1$ و d^2 هر دو کوچکتر از $\frac{e}{2}$ شوند و در نتیجه پیوستگی در x_1 برقرار است. اگر به نمودار g توجه کنیم می‌بینیم که با سوق دادن x به $+\infty$ در دامنه، شیب نمودار به $+\infty$ میل می‌کند. در نتیجه باید d را تدریجاً کوچکتر ساخت تا نامساوی مورد نظر برقرار بماند. در واقع $d \longrightarrow 0^+$ وقتی $x_1 \longrightarrow +\infty$.

شکل ۱

در مورد تابع h، که دامنه‌اش کراندار است، به وضعیت مشابهی برمی‌خوریم. مجدداً اگر $e > 0$ داده شده باشد و x_1 و x_2 در $]0, 1]$ باشند به طوری که $0 < x_1 = x_2 - d$، می‌خواهیم d را آنقدر کوچک بگیریم که $|h(x_1) - h(x_2)|$ کوچکتر از e باشد:

$$\begin{aligned} |h(x_1) - h(x_2)| &= \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_1 + d} \\ &= \frac{d}{(x_1 + d)x_1} < e \end{aligned}$$

در اینجا نیز توجه کنید که هر $d > ۰$ که داده شده باشد، می‌توان $x_۱$ را آنقدر کوچکتر (نزدیکتر به نقطهٔ انتهایی ۰) گرفت که نسبت $\frac{d}{(x_۱+d)x_۱}$ بزرگتر از e شود. در عین حال تابع در $x_۱$ پیوسته است زیرا که اگر $x_۱$ داده شده باشد می‌توان d را متناسباً کوچک گرفت، مثلاً $۰ < d < ex_۱^۲$، به طوری که:

$$\frac{d}{(x_۱+d)x_۱} < \frac{d}{x_۱^۲} < e$$

در این مثال نیز، با نزدیک شدن $x_۱$ به نقطهٔ ۰ (که در دامنهٔ تابع نیست) شیب نمودار به $+\infty$ میل می‌کند و اندازهٔ d لزوماً به صفر میل می‌کند.

طبق لم ۲—۳، هرگاه قلمرو یک تابع پیوسته، یک بازهٔ بسته و کراندار باشد، می‌توان برای هر $e > ۰$ داده شده یک $\delta > ۰$ یکنواخت پیدا کرد که برای هر دو نقطهٔ دامنه در فاصله کوچکتر از δ، فاصله مقادیر از e کوچکتر باشد. حال به کمک این لم، گزاره ۲—۲ را ثابت می‌کنیم. می‌خواهیم ثابت کنیم که هرگاه $e > ۰$ داده شده باشد، افرازی $\mathcal{P}$ از $[a,b]$ وجود دارد که:

$$U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}) < e$$

طبق لم، برای $\frac{e}{b-a}$، عددی $\delta > ۰$ وجود دارد که هرگاه $|x-x'| < \delta$، آنگاه $|f(x)-f(x')| < e$. افراز $\mathcal{P}$ را طوری می‌گیریم که فاصله دو نقطهٔ متوالی افراز از $\delta > ۰$ کوچکتر باشد نتیجه می‌شود که اگر M_i و m_i به ترتیب ماکسیمم و مینیمم f روی یک زیربازهٔ افراز باشند، داریم $M_i - m_i < \frac{e}{b-a}$. بنابراین:

$$\begin{aligned} U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}) &= \sum(x_i - x_{i-۱})M_i - \sum(x_i - x_{i-۱})m_i \\ &= \sum(x_i - x_{i-۱})(M_i - m_i) \\ &< \frac{e}{b-a}\sum(x_i - x_{i-۱}) \\ &= e \end{aligned}$$

و حکم ۲—۲ به اثبات می‌رسد. □

سؤالی که در اینجا طبعاً مطرح می‌شود این است که آیا می‌توان توابع انتگرال‌پذیر را به گونه‌ای ساده مشخص کرد؟ قضیهٔ معروف زیر از لبگ[۱] که اثبات آن فرای این درس است شرطی لازم و کافی به

[۱] H. Lebesgue

این منظور ارائه می‌کند. یک زیرمجموعهٔ Z از $\mathbb{R}$ را یک مجموعهٔ اندازه صفر می‌نامیم در صورتی که برای هر $e > ۰$ دنباله‌ای از بازه‌ها $\{I_n\}_{n=۱}^{\infty}$ وجود داشته باشد به طوری که مجموع سری $\sum_{n=۱}^{\infty} l(I_n)$، $l(I_n) =$ طول بازهٔ I_n، کوچکتر از e باشد.

(۲−۴) قضیهٔ لبگ. تابع کراندار $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ انتگرال‌پذیر است اگر و تنها اگر مجموعهٔ نقاط ناپیوستگی f یک مجموعهٔ اندازهٔ صفر باشد.

هر مجموعهٔ متناهی و در واقع هر مجموعهٔ شمارا یک مجموعهٔ اندازهٔ صفر است. بدین ترتیب تابع‌های کراندار $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ که به جز در تعدادی شمارا نقطه پیوسته باشند انتگرال‌پذیرند.

قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال

بحث این جلسه پیرامون قضیه‌ای است که پل ارتباطی میان حساب دیفرانسیل و حساب انتگرال محسوب می‌شود و "قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال" نام دارد. در جلسه گذشته دیدیم که هر تابع پیوسته انتگرال‌پذیر است. گزاره زیر در مورد انتگرال تابع‌های پیوسته مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

(۳–۱) **قضیه میانگین انتگرال.** اگر $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ پیوسته باشد نقطه‌ای c در $[a, b]$ وجود دارد که

$$\int_a^b f = f(c)(b-a)$$

بدین ترتیب در حالتی که $\int_a^b f > 0$، نقطه‌ای c وجود دارد که مساحت مستطیل به قاعدهٔ $[a, b]$ و ارتفاع $f(c)$ برابر $\int_a^b f$ است.

اثبات. تابع پیوستهٔ f در نقطه‌ای c_1 مینیمم و در نقطه‌ای c_2 ماکسیمم مقادیر خود در $[a, b]$ را می‌گیرد. داریم

$$m \leq f(x) \leq M$$

که در آن M و m به ترتیب مقدار ماکسیمم و مقدار مینیمم f هستند. اگر M و m را به عنوان تابع‌های ثابت با مقدار M و m در نظر بگیریم، داریم:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$$

یا

$$m \leq \frac{\int_a^b f}{b-a} \leq M$$

تابع f در نقطهٔ c_1 مقدار m و در نقطهٔ c_2 مقدار M را می‌گیرد. طبق قضیهٔ مقدار بینی، تابع پیوسته f در نقطه‌ای c بین c_1 و c_2 مقدار $\frac{\int_a^b f}{b-a}$ را می‌گیرد:

$$f(c) = \frac{\int_a^b f}{b-a}$$

که حکم قضیه است. $\square$

(۳—۲) قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال. فرض کنید I یک بازه است و $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته. نقطه‌ای a در I در نظر می‌گیریم و $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت $F(x) = \int_a^x f$ تعریف می‌کنیم. در این صورت F مشتق‌پذیر است و $F' = f$.

اثبات. حد عبارت $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ را بررسی می‌کنیم وقتی $h \longrightarrow 0$. داریم:

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) &= \int_a^{a+h} f - \int_a^x f \\ &= \int_x^{x+h} f \end{aligned}$$

طبق ۳—۱، نقطه‌ای c بین x و $x+h$ وجود دارد که $\int_x^{x+h} f = f(c)h$. پس

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(c)$$

حال وقتی $h \longrightarrow 0$، نقطهٔ c که بین x و $x+h$ قرار دارد به x میل می‌کند و چون f در x پیوسته است، $f(c)$ به $f(x)$ میل می‌کند. $\square$

تابعی F که مشتق آن برابر تابع داده شدهٔ f باشد، یک تابع اولیهٔ f یا یک تابع انتگرال نامعین f خوانده می‌شود. قضیهٔ بالا یک تابع اولیه برای تابع پیوستهٔ f معرفی می‌کند. اگر $G : I \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع اولیهٔ دیگر برای f باشد، مشتق $G - F$ صفر است، بنابراین $G - F$ روی بازهٔ I ثابت است. بالاخص

اگر به جای a، نقطهٔ دیگری b در I در نظر بگیریم، $G(x) = \int_b^x f$ تابع اولیهٔ دیگری برای f است و $G - F$ مقدار ثابت $\int_b^a f$ را داراست.

در اینجا باید توجه داشت که اگر دامنهٔ تعریف یک تابع مشتق‌پذیر یک بازهٔ واحد نباشد، صفر شدن مشتق دلالت بر ثابت بودن تابع نمی‌کند. مثلاً اگر $I_۱$ و $I_۲$ دو بازه باز مجزا باشند و تابع مشتق‌پذیر $f : I_۱ \cup I_۲ \longrightarrow \mathbb{R}$ دارای مشتق صفر باشد، f می‌تواند روی $I_۱$ و $I_۲$ مقادیر ثابت متفاوت داشته باشد.

مثال. می‌خواهیم کلیه تابع‌های اولیه تابع $f : \mathbb{R} - \{۰\} \longrightarrow \mathbb{R}$ را که به صورت $f(x) = \frac{۱}{x}$ تعریف شده است مشخص کنیم. دامنهٔ تعریف f اجتماع دو بازهٔ باز مجزای $]۰, +\infty[$ و $]-\infty, ۰[$ است. روی $]۰, +\infty[$ تابع $\ln x$ یک تابع اولیه برای $\frac{۱}{x}$ است. برای $]-\infty, ۰[$ تابع $\ln(-x)$ را در نظر بگیرید. داریم:

$$\frac{d}{dx}\ln(-x) = \frac{۱}{-x}(-۱) = \frac{۱}{x}$$

پس $\ln(-x)$ یک تابع اولیه برای $\frac{۱}{x}$ روی $]-\infty, ۰[$ است. بنابراین می‌توان $\ln|x|$ را به عنوان یک تابع اولیه $\frac{۱}{x}$ در نظر گرفت ولی نمی‌توان نتیجه گرفت که هر تابع اولیه $\frac{۱}{x}$ به شکل $\ln|x| + c$، برای یک مقدار ثابت c، است زیرا که دامنهٔ تعریف $\frac{۱}{x}$ از دو بازهٔ مجزا تشکیل شده است. کلی‌ترین تابع اولیه $\frac{۱}{x}$ به شکل زیر است:

$$F(x) = \begin{cases} \ln x + C_۱ & x > ۰ \\ \\ \ln(-x) + C_۲ & x < ۰ \end{cases}$$

که در اینجا $C_۱$ و $C_۲$ ثابت‌های دلخواه هستند.

برای تابع پیوستهٔ $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$، I یک بازه، اگر تابع $F(x) = \int_x^a f$ را در نظر بگیریم که در آن a نقطه‌ای در I است، داریم $F'(x) = -f(x)$ زیرا که $\int_x^a = -\int_a^x f$. به طور کلی:

(۳–۳) اگر I یک بازه در I باشد، $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته، و $\alpha, \beta : I \longrightarrow \mathbb{R}$ تابع‌های مشتق‌پذیر، آنگاه تابع $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ که به صورت

$$F(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f$$

تعریف می‌شود مشتق‌پذیر است و

$$F'(x) = f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x) \qquad (۱)$$

اثبات. تابع دو متغیری G با دامنهٔ مربع:

$$\{(u,v) \mid u,v \in I\} \subset \mathbb{R}^۲$$

را به صورت

$$G(u,v) = \int_u^v f$$

تعریف می‌کنیم. اگر c مقداری در I باشد، داریم $G(u,v) = \int_u^c f + \int_c^v f$، پس G مجموع دو تابع مشتق‌پذیر است و خود مشتق‌پذیر می‌باشد. بنابراین $F(x) = G(\alpha(x), \beta(x))$ بنابر قاعدهٔ زنجیره‌ای مشتق‌پذیر است و داریم:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{\partial G}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial G}{\partial v}\frac{dv}{dx} \\ &= -f(\alpha(x))\alpha'(x) + f(\beta(x))\beta'(x) \end{aligned}$$

چنان که حکم بود. $\square$

قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال محاسبهٔ بسیاری انتگرال‌ها را از طریق تابع اولیه ممکن می‌سازد. اگر f روی بازهٔ I پیوسته باشد، $a \in I$، و $F(x) = \int_a^x f$، داریم $F(a) = ۰$، پس

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f \qquad (۲)$$

در واقع برای هر تابع اولیه Φ برای f روی بازهٔ I، چون $\Phi(x) = F(x) + C$، داریم:

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b f \qquad (۳)$$

جدول زیر تعدادی از تابع‌های اولیهٔ ساده را نمایش می‌دهد. در سمت چپ یک تابع f داده شده است و در سمت راست یکی از تابع‌های اولیه f با نماد F مشخص شده است. برای یافتن کلی‌ترین تابع اولیه

باید برای هر بازه در دامنهٔ تعریف یک ثابت دلخواه اضافه کرد. موارد ذکر شده همه از یک مشتق‌گیری ساده نتیجه می‌شوند:

$f(x)$	$F(x)$
$x^n, n \neq -۱$	$\frac{۱}{n+۱}x^{n+۱}$
$\frac{۱}{x}$	$\ln\|x\|$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\sec^۲ x$	$\tan x$
$\sec x \tan x$	$\sec x$
e^x	e^x
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\frac{۱}{۱+x^۲}$	$\tan^{-۱} x$
$\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}$	$\sin^{-۱} x$

از آنجا که مشتق مجموع دو تابع برای مجموع مشتق‌ها است می‌توان تابع اولیهٔ تابع‌های به صورت مجموع توابع سمت چپ را نیز محاسبه کرد. در جلسه آینده نتیجه‌گیری‌های لازم از قانون لایب‌نیتس برای حاصل‌ضرب و قاعدهٔ زنجیره‌ای به عمل خواهد آمد.

(۳—۴) مجموع‌های ریمان کلی. در آغاز بحث انتگرال مجموع‌های ریمان بالایی و پایینی را بررسی کردیم. به طور کلی، برای تابع کراندار $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ و افراز $\mathcal{P} : a = x_۰ \leq x_۱ \leq \cdots \leq x_n = b$، اگر نقطه‌ای x_i^* در $[x_{i-۱}, x_i]$ اختیار کنیم، $i = ۱, \ldots, n$، هر مجموع به شکل:

$$\sum_{i=۱}^{n}(x_i - x_{i-۱})f(x_i^*)$$

یک مجموع ریمان خوانده می‌شود. اگر M_i و m_i به ترتیب کوچکترین کران بالایی و بزرگترین کران پایینی f روی $[x_{i-۱}, x_i]$ باشند، چون $m_i \leq f(x_i^*) \leq M_i$، داریم:

$$L(f,\mathcal{P}) \leq \sum_{i=۱}^{n}(x_i - x_{i-۱})f(x_i^*) \leq U(f,\mathcal{P}) \qquad (۴)$$

طول بزرگترین زیربازهٔ $[x_{i-۱}, x_i]$ از افراز را به $\delta(\mathcal{P})$ نمایش می‌دهیم و ضخامت افراز می‌نامیم. اکنون فرض کنید f پیوسته است. برای هر $e > ۰$ داده شده، دیدیم که $\delta > ۰$ وجود دارد به طوری که اگر $\delta(\mathcal{P}) < \delta$، آنگاه برای هر $i = ۱, \ldots, n$، داریم $M_i - m_i < \frac{e}{b-a}$ و در نتیجه:

$$U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}) < e$$

چون $\int_a^b f$ بین $U(f,\mathcal{P})$ و $L(f,\mathcal{P})$ قرار دارد نتیجه می‌شود که اگر $\delta(\mathcal{P}) < \delta$، آنگاه:

$$|U(f,\mathcal{P}) - \int_a^b f| < e \quad , \quad |\int_a^b f - L(f,\mathcal{P})| < e$$

بنابراین از (۴) نتیجه می‌شود که: برای هر $e > ۰$، $\delta > ۰$ وجود دارد که برای هر افراز $\mathcal{P}$ با ضخامت کوچکتر از δ و هر مجموع ریمان مربوط داریم:

$$|\int_a^b f - \sum_{i=۱}^{n}(x_i - x_{i-۱})f(x_i^*)| < e$$

به این مفهوم گفته می‌شود که $\int_a^b f$ حد مجموع‌های ریمان است وقتی ضخامت افراز به صفر میل کند. گاهی اوقات می‌توان از این مطلب بعضی حدها را محاسبه کرد.

مثال. می‌خواهیم حد زیر را محاسبه کنیم:

$$\lim_{n\to\infty}\{\frac{۱}{n+۱} + \frac{۱}{n+۲} + \cdots + \frac{۱}{n+n}\}$$

توجه کنید که هر جملهٔ داخل آکلاد به صفر میل می‌کند وقتی $n \longrightarrow \infty$، ولی تعداد جملات نیز به ∞ میل می‌کند. می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}\frac{۱}{n+۱} + \cdots + \frac{۱}{n+n} &= \frac{۱}{n}(\frac{۱}{۱+\frac{۱}{n}} + \frac{۱}{۱+\frac{۲}{n}} + \cdots + \frac{۱}{۱+\frac{n}{n}}) \\ &= \sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{n}(\frac{۱}{۱+\frac{i}{n}})\end{aligned}$$

تابع $f(x) = \frac{۱}{x}$ را روی بازهٔ $[۱, ۲]$ در نظر بگیرید. افراز $۱ < ۱ + \frac{۱}{n} < ۱ + \frac{۲}{n} < \cdots < ۱ + \frac{n}{n} = ۲$ از بازهٔ $[۱, ۲]$ را در نظر می‌گیریم. با قرار دادن $x_i^* = ۱ + \frac{i}{n}$، مجموع بالا برابر است با $\sum_{i=۱}^{n} \frac{۱}{n} f(x_i^*)$ و $\frac{۱}{n}$ طول بازهٔ $[۱ + \frac{i-۱}{n}, ۱ + \frac{i}{n}]$ است. بنابراین مجموع یک مجموع ریمان برای تابع $f(x) = \frac{۱}{x}$ روی بازهٔ $[۱, ۲]$ است. وقتی $n \longrightarrow \infty$، ضخامت افراز، $\frac{۱}{n}$، به صفر میل می‌کند و حد عبارت بالا برابر $\int_۱^۲ f$ می‌شود. به عنوان تابع اولیه برای $\frac{۱}{x}$، از $\ln x$ استفاده می‌کنیم، پس حد بالا برابر است با $\ln(۲) - \ln(۱) = \ln(۲)$.

دو قضیهٔ اساسی

در جلسهٔ قبل دیدیم که قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال رابطه‌ای تنگاتنگ میان مفهوم انتگرال و مفهوم تابع اولیه بیان می‌کند. از این رو تابع اولیه گاهی انتگرال نامعین نیز خوانده می‌شود. این ارتباط موجب می‌شود که به‌ازای هر قاعدهٔ مشتقگیری یک قاعدهٔ متناظر انتگرال‌گیری وجود داشته باشد. در این جلسه قواعد انتگرال متناظر با قاعدهٔ مشتق حاصل‌ضرب و قاعدهٔ زنجیره‌ای را که به ترتیب به "قاعدهٔ انتگرال جزء به جزء" و "فرمول تعویض متغیر انتگرال" معروفند بیان و ثابت می‌کنیم.

نخست یک نماد متداول را معرفی می‌کنیم. برای تابع انتگرال‌پذیر $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ انتگرال f روی $[a,b]$ را به $\int_a^b f$ نمایش دادیم. به جای $\int_a^b f$ بسیاری اوقات $\int_a^b f(x)dx$، $\int_a^b f(t)dt$ یا به طور کلی $\int_a^b f(*)d*$ به‌کار می‌رود، که در اینجا مقصود از x، t یا $*$ حرفی است که برای نمایش عناصر $[a,b]$ به‌کار می‌رود. همان‌طور که نماد دیفرانسیل منجر به نمایش سودمند قاعدهٔ زنجیره‌ای به شکل $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{dx}$ قابل استفاده گردید، خواهیم دید که این شیوهٔ نمادگذاری منجر به بیانی به ذهن ماندنی از فرمول تعویض متغیر انتگرال خواهد شد. نکتهٔ قابل تأکید در مورد $\int_a^b f = \int_a^b f(x)dx$ این است که در هر دوی $f(x)$ و dx از یک حرف x برای متغیر استفاده می‌شود. با این نمادگذاری، تابع‌های اولیهٔ f به $\int f(x)dx$ نمایش داده می‌شوند.

حال فرمول لایب نیتس برای مشتق حاصل‌ضرب دو تابع مشتق‌پذیر را یادآوری می‌کنیم:

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \tag{۱}$$

اگر f' و g' روی بازهٔ $[a,b]$ وجود داشته و پیوسته باشند، طبق قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال:

$$\begin{aligned}\int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x) &= \int_a^b \frac{d}{dx}(f(x)g(x))dx \\ &= f(b)g(b) - f(a)g(a)\end{aligned}$$

یا معادلاً:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx \qquad (۲)$$

فرمول (۲) فرمول انتگرال جزء به جزء (برای انتگرال معین) خوانده می‌شود. نخست همین شرایط $f(x)g(x)$ یک تابع اولیه (انتگرال نامعین) برای $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ می‌شود، پس

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx \qquad (۳)$$

که به فرمول انتگرال جزء به جزء برای انتگرال نامعین معروف است. وقتی قلمرو کلیهٔ تابع‌های بالا یک بازهٔ $[a,b]$ باشد، هر یک از انتگرال‌های نامعین فرمول (۳) با تقریب جمع یک عدد ثابت منظور می‌شود. فرمول (۳) بسیاری اوقات حربه نیرومندی برای یافتن تابع‌های اولیه است.

مثال ۱. می‌خواهیم تابع اولیه $\ln x$ روی $x > ۰$ را محاسبه کنیم. در $\int \ln x dx$، می‌نویسیم $f(x) = \ln x$ و $g'(x) = ۱$، بنابراین با گرفتن $g(x) = x$، داریم:

$$\begin{aligned}\int \ln x dx &= x\ln x - \int \frac{۱}{x} x dx \\ &= x\ln x - x\end{aligned}$$

البته با افزودن یک ثابت به $x\ln x - x$ تابع اولیه دیگری روی $x > ۰$ برای $\ln x$ به‌دست می‌آید.

مثال ۲. برای عدد صحیح مثبت n، می‌خواهیم تابع اولیهٔ $x^n e^x$ را به‌دست آوریم. با نوشتن $f(x) = x^n$، $g'(x) = e^x$ و $g(x) = e^x$ داریم:

$$\int x^n e^x dx = x^n e^x - n\int x^{n-۱} e^x dx$$

برای $n = ۱$، انتگرال سمت راست برابر e^x است و نتیجه $xe^x - e^x$ به‌دست می آید. برای $n > ۱$ می‌توان از $\int x^{n-۱}e^x dx$ با فرمول انتگرال جزء به جزء به $\int x^{n-۲}e^x dx$ رسید و به همین ترتیب با n بار استفاده از فرمول جزء به جزء به نتیجه خواهیم رسید.

مثال ۳. می‌خواهیم $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} e^x \sin x dx$ را محاسبه کنیم. با قرار دادن $f(x) = \sin x$، $g'(x) = e^x$ و $g(x) = e^x$ داریم:

$$\begin{aligned} \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} e^x \sin x dx &= e^{\frac{\pi}{۲}} \sin \frac{\pi}{۲} - e^{۰} \sin ۰ - \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} e^x \cos x dx \\ &= e^{\frac{\pi}{۲}} - \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} e^x \cos x dx \end{aligned} \tag{۴}$$

بدین ترتیب از $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} e^x \sin x dx$ به انتگرال $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} e^x \cos x dx$ رسیده‌ایم که از همان نوع است ولی یک بار استفاده دیگر از انتگرال جزء به جزء به طور غیر منتظره منجر به یافتن جواب می‌شود. این بار می‌گیریم $f(x) = \cos x$، $g(x) = g'(x) = e^x$، پس:

$$\begin{aligned} \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} e^x \cos x dx &= e^{\frac{\pi}{۲}} \cos \frac{\pi}{۲} - e^{۰} \cos ۰ + \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} e^x \sin x dx \\ &= -۱ + \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} e^x \sin x dx \end{aligned}$$

پس با جایگزینی در (۴) داریم:

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} e^x \sin x dx = e^{\frac{\pi}{۲}} + ۱ - \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} e^x \sin x dx$$

و در نتیجه:

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} e^x \sin x dx = \frac{۱}{۲}(e^{\frac{\pi}{۲}} + ۱)$$

اکنون به بحث پیرامون "فرمول تعویض متغیر انتگرال" می‌پردازیم.

(۴—۱) فرمول تعویض متغیر در انتگرال (صورت انتگرال نامعین) تابع‌های $\phi : I \longrightarrow \mathbb{R}$، $F : J \longrightarrow \mathbb{R}$، I و J بازه در $\mathbb{R}$، داده شده‌اند به طوری که $\phi(I) \subset J$، ϕ و F مشتق‌پذیر با مشتق

پیوسته‌اند و $F' = f$. در این صورت $F\circ\phi$ یک تابع اولیه برای $(f\circ\phi)\cdot\phi'$ است:

$$\int (f\circ\phi)\cdot\phi' = F\circ\phi \qquad (۵)$$

فرمول (۵) نتیجه مستقیم قاعدهٔ زنجیری است:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(F(\phi(t))) &= F'(\phi(t))\cdot\phi'(t)\\ &= f(\phi(t))\cdot\phi'(t)\end{aligned}$$

در واقع اگر بنویسیم $x=\phi(t)$، فرمول (۵) به صورت زیر نیز نوشته می‌شود:

$$\int f(\phi(t))\cdot\phi'(t)dt = F(x) \qquad (٦)$$

مثال ۱. فرض کنید تابع ϕ در بازهٔ تعریف خود ناصفر با مشتق پیوسته است، در این صورت یک تابع اولیه برای $\frac{\phi'(x)}{\phi(x)}$ تابع $\ln|\phi(x)|$ است. کافی است در (٦) $f(x)=\frac{۱}{x}$ و $F(x)=\ln|x|$ را جایگزین کنیم. به عنوان نمونه تابع اولیه‌ای برای $\tan\theta$، وقتی $\cos\theta\neq ۰$، تابع $\ln|\cos\theta| = -\ln|\cos\theta|$ است.

مثال ۲. به عنوان یک مثال نه چندان واضح، تابع اولیه $\frac{۱}{\sqrt{x^۳+x^۴}}$ را که دامنهٔ تعریف آن $\mathbb{R}-[-۱,۰]$ است محاسبه می‌کنیم. می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}\frac{۱}{\sqrt{x^۳+x^۴}} &= \frac{۱}{x^۲}\cdot\frac{۱}{\sqrt{\frac{۱}{x}+۱}}\\ &= \frac{(\frac{۱}{x}+۱)^{-\frac{۱}{۲}}}{x^۲}\end{aligned}$$

ملاحظه می‌کنیم که $\frac{d}{dx}(\frac{۱}{x}+۱) = -\frac{۱}{x^۲}$، پس اگر در فرمول (۵) جایگزینی‌های زیر را قرار دهیم:

$$\phi(x)=\frac{۱}{x}+۱ \quad , \quad f(x)=x^{-\frac{۱}{۲}} \quad , \quad F(x)=۲x^{\frac{۱}{۲}}$$

نتیجه می‌شود که:

$$\begin{aligned}\int\frac{۱}{\sqrt{x^۳+x^۴}}dx &= -\int f(\phi(x))\phi'(x)dx\\ &= -۲\sqrt{\frac{۱}{x}+۱}\end{aligned}$$

(۴—۲) جایگزینی متداول در عبارت‌های به شکل $\sqrt{\pm x^۲ \pm a^۲}$

در اینجا $a > ۰$ یک عدد حقیقی داده شده است. جایگزینی‌های زیر معمولاً در محاسبهٔ تابع اولیهٔ عبارت‌هایی که شامل $\sqrt{\pm x^۲ \pm a^۲}$ باشند، جوابگو هستند:

الف) $\sqrt{x^۲ + a^۲}$: جایگزینی $x = a\tan\theta$ نتیجه می‌دهد $\sqrt{x^۲ + a^۲} = a|\sec\theta|$، و نیز جایگزینی $x = a\sinh t$ نتیجه می‌دهد $\sqrt{x^۲ + a^۲} = a\cosh t$، که در هر دو حالت علامت $\sqrt{\ }$ از بین می‌رود.

ب) $\sqrt{-x^۲ + a^۲}$: جایگزینی $x = a\sin\theta$ نتیجه می‌دهد $\sqrt{-x^۲ + a^۲} = a|\cos\theta|$.

ج) $\sqrt{x^۲ - a^۲}$: جایگزینی $x = a\sec\theta$ نتیجه می‌دهد $\sqrt{x^۲ - a^۲} = a|\tan\theta|$ و جایگزینی $x = a\cosh t$ نتیجه می‌دهد $\sqrt{x^۲ - a^۲} = a|\sinh t|$.

د) $\sqrt{-x^۲ + a^۲}$ حقیقی نیست و مطرح نمی‌شود.

لازم به ذکر است که هر عبارت درجه دوم $At^۲ + Bt + C$ را می‌توان پس از تکمیل مجذور به یکی از چهار شکل بالا تبدیل کرد.

بالاخره همان‌طور که در آغاز جلسه اشاره کردیم نماد دیفرانسیل در $\int f(x)dx$ به جای $\int f$ این ویژگی جالب توجه را دارد که فرمول تعویض متغیر به نوعی در آن نهفته است. همان‌طور که در (۵) عمل کردیم، اگر بنویسیم $x = \phi(t)$، فرمول (٦) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\int f(\phi(t))\frac{dx}{dt}dt = \int f(x)dx \qquad (۷)$$

به این صورت، اگر محاسبهٔ $\int f(x)dx$ مطرح باشد، با جایگزینی بر حسب t، $x = \phi(t)$، باید به جای dx، $\frac{dx}{dt}dt$ را جایگزین نمود. در بررسی صورت انتگرال معین فرمول تعویض متغیر، به تعبیری هندسی از این فرمول اشاره خواهیم کرد.

(۴—۳) فرمول تعویض متغیر در انتگرال (صورت انتگرال معین) فرض کنید $\phi : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$، مشتق‌پذیر با مشتق پیوسته است، $\phi(\alpha) = a$ و $\phi(\beta) = b$، $\phi[\alpha, \beta] \subset I$، و $F : J \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی

مشتق‌پذیر با مشتق پیوستهٔ f است. در این صورت:

$$\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_a^b f(x)dx \tag{۸}$$

صحت این فرمول را به این طریق مشاهده می‌کنیم: طبق ۴–۱، $F\circ\phi$ یک تابع اولیه برای $(f\circ\phi)\cdot\phi'$ است، پس طبق قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال:

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt &= (F\circ\phi)(\beta)-(F\circ\phi)(\alpha)\\ &= F(b)-F(a)\end{aligned}$$

که طرف راست مجدداً بنابر قضیهٔ اساسی برابر $\int_a^b f(x)dx$ است.

(۴–۴) **تعبیر هندسی فرمول تعویض متغیر در انتگرال معین** برای فرمول (۷) تعبیری هندسی ارائه می‌کنیم که در آینده مبنای درک فرمول تعویض متغیر در انتگرال‌های چند متغیری خواهد بود. برای سهولت نخست فرض کنید $f\geq 0$ و ϕ یک تابع یک به یک است. بدین ترتیب $\int_a^b f(x)dx$ تعبیر مساحت زیر نمودار f را دارد و ϕ بازهٔ $[\alpha,\beta]$ را به طور یک به یک بر بازهٔ $[a,b]$ یا $[b,a]$ می‌نگارد، بسته به این که $a<b$ یا $b<a$. وقتی تابع یک به یک ϕ صعودی باشد (معادلاً وقتی $\phi'>0$)، داریم $\phi[\alpha,\beta]=[a,b]$، و وقتی ϕ نزولی باشد (معادلاً وقتی $\phi'<0$)، داریم $\phi[\alpha,\beta]=[b,a]$ (شکل ۱). حال نمودار تابع‌های $f\circ\phi$ و f را مقایسه می‌کنیم (شکل ۲، برای ϕ صعودی). توجه کنید که ارتفاع

شکل ۱

نمودار $f\circ\phi$ به‌ازای مقدار t از متغیر برابر ارتفاع نمودار f به‌ازای مقدار $x=\phi(t)$ از متغیر f است. اگر ناحیهٔ

شکل ۲

زیر نمودار را به صورت اجتماع پاره‌خط‌های قائم تجسم کنیم، می‌بینیم که یک تناظر یک به یک میان طول پاره‌خط‌ها در دو نمودار وجود دارد. با این حال نمی‌توان حکم کرد که $\int_\alpha^\beta f\circ\phi=\int_a^b f$ زیرا که مثلاً در شکل ۲ همان پاره‌خط‌های قائم روی دو قاعده به طول‌های نابرابر توزیع شده‌اند. خاصیت

ضریب ϕ' در فرمول $\int_\alpha^\beta (f\circ\phi)\cdot\phi' = \int_a^b f$ این است که تغییر طول پایه را با تغییر ارتفاع نمودار خنثی می‌کند به نحوی که مساحت زیر نمودار $f\circ\phi$ روی بازهٔ $[\alpha,\beta]$ برابر مساحت زیر نمودار f روی بازهٔ $[a,b]$ باقی می‌ماند. به طور دقیقتر، اگر $0 < \phi'(t) < 1$، ϕ یک بازهٔ کوچک حول t را به بازه‌ای کوچکتر حول $x = \phi(t)$ می‌نگارد، پس تقلیل ارتفاع $f\circ\phi$ با ضرب کردن در عدد کوچکتر از واحد $\phi'(t)$ موجب می‌شود که مساحت مربوط تغییر نکند. به همین ترتیب وقتی $\phi'(t) > 1$ بازهٔ کوچکی حول t به بازهٔ بزرگتری حول x نگاشته می‌شود و ضرب کردن ارتفاع $f\circ\phi$ در عدد بزرگتر از واحد $\phi'(t)$ بزرگتر شدن قاعده را خنثی می‌کند.

مثال. فرض کنید f تابع ثابت با مقدار ۱ است و $\phi:[0,2]\longrightarrow[0,4]$ به صورت $\phi(t)=t^2$ تعریف می‌شود. در شکل ۳ نمودارهای f روی محور x و $f\circ\phi$ و $(f\circ\phi)\cdot\phi'$ روی محور t و نیز نمودار ϕ نمایش داده شده‌اند. چون f تابع ثابت با مقدار یک است، $\int_0^4 f(x)dx = 4$ و $\int_0^2 f(\phi(t))dt = 2$. داریم $\phi'(t) = 2t$. وقتی $t\in[0,\frac{1}{2}]$، داریم $0 \le \phi'(t) \le 1$، پس ϕ زیربازه‌های $[0,\frac{1}{2}]$ را منقبض می‌کند

شکل ۳

زیرا که طبق قضیهٔ میانگین خواهیم داشت $|\phi(t_1)-\phi(t_2)| \le |t_1-t_2|$ هرگاه t_1 و t_2 در $[0,\frac{1}{2}]$ باشند. کل بازهٔ $[0,\frac{1}{2}]$ به بازهٔ کوچکتر $[0,\frac{1}{4}]$ نگاشته می‌شود. مساحت زیر نمودار f روی بازهٔ $[0,\frac{1}{4}]$ نصف مساحت زیر نمودار $f\circ\phi$ روی بازهٔ $[0,\frac{1}{2}]$ است. ضرب کردن در $\phi'(t)=2t$ برای $0\le t\le\frac{1}{2}$ مساحت مثلثی شکل نمایش داده شده را جایگزین مساحت زیر نمودار $f\circ\phi$ می‌کند که نصف آن مقدار را دارد. برعکس برای t_1، t_2 در $[\frac{1}{2},2]$، داریم $\phi'(t)\ge 1$ و $|\phi(t_1)-\phi(t_2)| \ge |t_1-t_2|$ و مساحت زیر $f\circ\phi$ روی $[t_1,t_2]$ کوچکتر از مساحت زیر f روی $[\phi(t_1),\phi(t_2)]$ است. در اینجا ضرب کردن در $\phi'(t)\ge 1$ مجدداً برابری را برقرار می‌کند.

به بحث کلی باز می‌گردیم. لازم است حالتی که ϕ نزولی است بررسی کنیم. در اینجا ϕ' منفی است پس نمودار $(f\circ\phi)\cdot\phi'$ زیر محور t است و انتظار داریم مقداری منفی برای انتگرال به‌دست آید، ولی اینکه $\phi(\alpha)=a>b=\phi(\beta)$، یعنی حد بالای انتگرال کوچکتر از حد پایین انتگرال است علامت

منفی را خنثی می‌کند. می‌توان در این حالت نوشت:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_{\beta}^{\alpha} f(\phi(t))|\phi'(t)|dt = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

بدین ترتیب در این حالت نیز همان تحلیل حالت ϕ صعودی کارساز است. بالاخره توجه کنید که (۴—۳) بدون فرض یک به یک بودن ϕ برقرار است. چگونه می‌توان این مطلب را برحسب مقایسهٔ مساحت‌ها توجیه کرد؟ در اینجا اتفاقی که رخ می‌دهد این است که مقدار انتگرال روی بازه‌های صعود و نزول ϕ در $\int_{\alpha}^{\beta}(f\circ\phi)\cdot\phi'$ طوری همدیگر را خنثی می‌کنند که نتیجه برابر $\int_{a}^{b} f$ به‌دست می‌آید. مثال زیر موضوع را به خوبی بیان می‌کند.

مثال. فرض کنید $f : [۱,۴] \longrightarrow \mathbb{R}$ تابع ثابت با مقدار ۱ باشد و $\phi : [-۱,۲] \longrightarrow \mathbb{R}$، $\phi(t) = t^{۲}$. داریم $\alpha = -۱$، $\beta = ۲$، $a = ۱$، $b = ۴$ و:

$$\int_{۱}^{۴} f(x)dx = ۳ \quad , \quad \int_{-۱}^{۲} f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_{-۱}^{۲}(۲t)dt = ۳$$

در شکل ۴ می‌بینیم که انتگرال‌های $\int_{-۱}^{۰}(۲t)dt$ و $\int_{۰}^{۱}(۲t)dt$ یکدیگر را حذف می‌کنند که اولی مربوط به نزول تابع ϕ $(\phi' < ۰)$ و دومی مربوط به صعود ϕ $(\phi' > ۰)$ است.

شکل ۳

انتگرال توابع گویا

در این جلسه نشان می‌دهیم که برای هر تابع گویا، یعنی تابعی که مقدار آن به صورت $\frac{P(x)}{Q(x)}$، P، Q چندجمله‌ای باشد، می‌توان تابع اولیه‌ای برحسب توابع مأنوس پیدا کرد. به طور دقیق تابع اولیه آمیزه‌ای از توابع گویا، لگاریتم، توابع مثلثاتی و $\tan^{-1}$ خواهد بود. این که به انواع توابع فوق‌الذکر نیاز خواهد بود از مثال‌های زیر روشن است:

$$\int x^n dx = \begin{cases} \ln|x| & n = -1 \\ \frac{1}{n+1}x^{n+1} & n \neq -1 \end{cases} \qquad \int \frac{1}{(x^2+1)^n} dx = \int \cos^{2n-2}\theta d\theta$$

که انتگرال سمت راست با جایگزین کردن $x = \tan\theta$ به‌دست آمده است. برای $n = 1$ جواب $\tan^{-1} x$ به‌دست می‌آید و برای $n > 1$ مخلوطی از تابع‌های مثلثاتی و $\tan^{-1}$ حاصل می‌شود. خواهیم دید که نوع دیگری تابع برای محاسبهٔ تابع اولیهٔ عبارت‌های گویا مورد نیاز نیست.

بدین ترتیب فرض کنید عبارت گویای $\frac{P(x)}{Q(x)}$ داده شده است. در زیر به طور گام به گام دستور رسیدن به تابع اولیهٔ $\frac{P(x)}{Q(x)}$ را ارائه می‌کنیم.

گام اول. اگر درجهٔ $P(x)$ از درجهٔ $Q(x)$ کوچکتر باشد به گام دوم می‌رویم. در غیر این صورت چندجمله‌ای $P(x)$ را بر چندجمله‌ای $Q(x)$ تقسیم می‌کنیم:

$$P(x) = A(x)Q(x) + R(x) \qquad (1)$$

که در اینجا $A(x)$ و $R(x)$ چندجمله‌ای هستند و درجهٔ $R(x)$ از درجهٔ $Q(x)$ اکیداً کوچکتر است. اگر $P(x)$ بر $Q(x)$ قابل تقسیم باشد که $R(x) = 0$ و $\frac{P(x)}{Q(x)} = A(x)$، یعنی خارج قسمت خود یک

چندجمله‌ای است، مثلاً $A(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k$ که در این صورت

$$\int A(x)dx = a_0 x + \frac{1}{2} a_1 x^2 + \cdots + \frac{1}{k+1} a_k x^{k+1}$$

اگر $R(x) \neq 0$، به گام دوم می‌رویم.

گام دوم. اکنون محاسبهٔ انتگرال نسبت دو چندجمله‌ای $\frac{R(x)}{Q(x)}$ را بررسی می‌کنیم که در آن درجهٔ $R(x)$ از درجهٔ $Q(x)$ اکیداً کوچکتر است ولی $R(x) \neq 0$. برای این کار، توجه به چند واقعیت علم جبر ضروری است.

واقعیت جبری ۱ (قضیهٔ اساسی جبر). برای هر چندجمله‌ای $Q(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n$ با ضرایب مختلط c_i، که $c_n \neq 0$، اعداد مختلط α_1، ... ، α_n وجود دارند که:

$$Q(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n = c_n (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n) \tag{۲}$$

بدین ترتیب $Q(x) = 0$ دارای n ریشهٔ مختلط α_i (احتمالاً بعضی برابر) است. توجه کنید که این یک حکم صرفاً جبری است و روشی برای تجزیهٔ (۲) ارائه نمی‌کند. در واقع هر چند که برای یافتن ریشه‌های $Q(x) = 0$ روش‌های تقریبی بسیار مؤثر وجود دارد، لکن نمی‌توان انتظار داشت که ریشه‌های α_i به سادگی بیان شدنی باشند. در واقع از نظریهٔ گالوا نتیجه می‌شود که برای $n \geq 5$ ریشه‌های فوق را به طور کلی نمی‌توان با چهار عمل اصلی و استخراج ریشه برحسب $c_0, c_1, \ldots, c_n$ بیان کرد، یعنی فرمولی جبری مانند فرمول حل معادلهٔ درجهٔ ۲ یا فرمول کاردانو (برای معادلات درجه ۳) برای معادلات درجه ۵ به بالا وجود ندارد.

واقعیت جبری ۲. برای چندجمله‌ای $Q(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n$، $c_n \neq 0$، اگر همه ضرایب c_i حقیقی باشند، یک تجزیهٔ $Q(x)$ به عوامل درجهٔ ۱ و درجه ۲ وجود دارد:

$$Q(x) = c_n (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_k)(x^2 + a_1 x + b_1) \cdots (x^2 + a_l x + b_l) \tag{۳}$$

که در آن $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ ریشه‌های حقیقی $Q(x)=0$ هستند، a_i ها و b_i ها حقیقی‌اند و $\Delta_i=a_i^2-4b_i<0$ برای $i=1,\ldots,l$.

بدین ترتیب $n=k+2l$ و ریشه‌های غیرحقیقی $Q(x)=0$ همه ریشه‌های چندجمله‌ای‌های درجهٔ دوم $x^2+a_ix+b_i=0$ هستند. این مطلب به سادگی از واقعیت جبری ۱ نتیجه می‌شود. نکتهٔ اصلی این است که اگر عدد مختلط α ریشهٔ $Q(x)=0$ (با ضرایب حقیقی) باشد، آنگاه مزدوج α، یعنی $\overline{\alpha}$، نیز ریشهٔ $Q(x)=0$ است زیرا که اگر

$$c_0+c_1\alpha+\cdots+c_n\alpha^n=0$$

با گرفتن مزدوج و با توجه به حقیقی بودن ضرایب، یعنی $c_i=\overline{c_i}$، داریم:

$$c_0+c_1\overline{\alpha}+\cdots+c_n\overline{\alpha}^n=0$$

بنابراین در تجزیهٔ (۲)، وقتی c_i ها حقیقی باشند، به‌ازای هر فاکتور $x-\alpha$، α غیرحقیقی، فاکتور $x-\overline{\alpha}$ نیز وجود دارد و داریم:

$$(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})=x^2-(\alpha+\overline{\alpha})x+\alpha\overline{\alpha}$$

حال $\alpha+\overline{\alpha}=2Re(\alpha)$ و $\alpha\overline{\alpha}=|\alpha|^2$ حقیقی هستند، پس حاصل‌ضرب $(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})$ به یک عبارت درجه دوم با مبین منفی تبدیل می‌شود.

بالاخره از آنجا که ممکن است ریشه‌های تکراری (معادلاً فاکتورهای تکراری) در تجزیهٔ (۳) وجود داشته باشد، (۳) را به صورت نهایی زیر می‌نویسیم:

$$Q(x)=c_n(x-\beta_1)^{\rho_1}\cdots(x-\beta_r)^{\rho_r}(x^2+A_1x+B_1)^{\sigma_1}\cdots(x^2+A_sx+B_s)^{\sigma_s} \qquad (۴)$$

که در آن β_i ها متمایز و نیز عبارت‌های درجه دوم متمایز هستند، $\rho_i\geq 1$ و $\sigma_i\geq 1$ اعداد صحیح هستند.

اکنون با توجه به تجزیهٔ (۴) می‌توان واقعیت جبری بعدی را بیان کرد:

واقعیت جبری ۳. عبارت گویای $\frac{R(x)}{Q(x)}$ که در آن $R(x) \neq 0$ و درجهٔ $R(x)$ اکیداً کوچکتر از درجهٔ $Q(x)$ است می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = (\frac{1}{c_n})\{\frac{R_1(x)}{Q_1(x)} + \cdots + \frac{R_N(x)}{Q_N(x)}\} \qquad (5)$$

که در آن $\frac{R_i(x)}{Q_i(x)}$ ها، موسوم به کسرهای جزیی، به طریق زیر به‌دست می‌آیند:

الف) به‌ازای هر $(x-\beta)^\rho$ در (۴)، یک مجموع کسرهای جزیی به شکل زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{c_1}{x-\beta} + \frac{c_2}{(x-\beta)^2} + \cdots + \frac{c_\rho}{(x-\beta)^\rho} \qquad (6)$$

ب) به‌ازای هر $(x^2+Ax+B)^\sigma$ یک مجموع کسرهای جزیی به شکل زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{D_1x+E_1}{x^2+Ax+B} + \frac{D_2x+E_2}{(x^2+Ax+B)^2} + \cdots + \frac{D_\sigma x+E_\sigma}{(x^2+Ax+B)^\sigma} \qquad (7)$$

جمع‌بندی گام دوم این است که کسر $\frac{R(x)}{Q(x)}$، $R(x) \neq 0$، درجهٔ $R(x)$ اکیداً کوچکتر از درجهٔ $Q(x)$، را به صورت مجموعی از کسرهای جزیی به صورت (٦) و (۷) می‌نویسیم.

گام سوم (انتگرال‌گیری کسرهای جزیی). با توجه به این که $\frac{R(x)}{Q(x)}$ به صورت مجموعی از کسرهای جزیی در می‌آید، کافی است روشی برای محاسبهٔ تابع اولیهٔ هر کسر جزیی ارائه کنیم که چنین خواهیم کرد.

الف) برای کسرهای جزیی که در (٦) ظاهر می‌شوند:

$$\int \frac{1}{(x-\beta)^i}dx = \begin{cases} \ln|x-\beta| & i=1 \\ \frac{1}{-i+1}(x-\beta)^{-i+1} & i>1 \end{cases}$$

ب) با توجه به این که مبین هر عبارت درجهٔ دوم x^2+Ax+B در (۷) منفی است، می‌دانیم با تکمیل مجذور و تعویض متغیر، هر یک از کسرهای جزیی (۷) به صورت مجموعی از عبارت‌های زیر در می‌آید:

$$c\frac{2t}{(t^2+1)^j} \quad \text{یا} \quad \frac{c'}{(t^2+1)^j}$$

که در آن c و c' ثابت‌های مناسب هستند و $dt = dx$. محاسبهٔ تابع اولیهٔ این عبارت‌ها ساده است:

$$\int \frac{۲t}{(t^۲+۱)^j}dx = \begin{cases} \ln(t^۲+۱) & j=۱ \\ \frac{۱}{-j+۱}(t^۲+۱)^{-j+۱} & j>۱ \end{cases}$$

بالاخره برای $\frac{۱}{(t^۲+۱)^j}$، اگر $j=۱$ که از $\tan^{-۱} t$ استفاده می‌کنیم، و اگر $j>۱$، با جایگزینی $t=\tan\theta$ و $dt = \frac{۱}{\cos^۲\theta}d\theta$، یک انتگرال برحسب توانی از $\cos\theta$ به‌دست می‌آید که می‌توانیم محاسبه کنیم.

روش بالا را با ذکر چند مثال تشریح می‌کنیم.

مثال ۱. می‌خواهیم تابع اولیهٔ $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{-x^۷+x^۵-x^۴+x+۱}{x^۶+x^۴+x^۲}$ را محاسبه کنیم. با تقسیم داریم:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = -x + \frac{۲x^۵ - x^۴ + x^۳ + x + ۱}{x^۶+x^۴+x^۲}$$

حال

$$\begin{aligned} x^۶+x^۴+x^۲ &= x^۲(x^۴+x^۲+۱) \\ &= x^۲(x^۲+x+۱)(x^۲-x+۱) \end{aligned}$$

که دو عبارت درجه دوم بالا هر دو مبین منفی دارند. بنابراین طبق روش کسرهای جزیی داریم:

$$\frac{۲x^۵ - x^۴ + x^۳ + x + ۱}{x^۶+x^۴+x^۲} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^۲} + \frac{Cx+D}{x^۲+x+۱} + \frac{Ex+F}{x^۲-x+۱}$$

راه کلی به‌دست آوردن ضرایب طرف راست این است که از طرف راست مخرج مشترک بگیریم و ضرایب به‌دست آمده برای صورت کسر را برابر ضرایب متناظر در طرف چپ قرار دهیم: در این صورت شش معادله شش مجهولی با جواب منحصر به فرد به‌دست خواهد آمد (در واقع اینکه در حالت کلی همواره n معادلهٔ n مجهولی با جواب منحصر به فرد به‌دست می‌آید توجیه روش تجزیه به کسرهای جزیی است. این اثبات که در اینجا نخواهد آمد دشوار نیست ولی کمی وقت‌گیر است). در حالت موجود داریم

$$\begin{aligned} &\frac{۲x^۵ - x^۴ + x^۳ + x + ۱}{x^۶+x^۴+x^۲} \\ &= \frac{(A+C+E)x^۵ + (B-D+F)x^۴ + (A-C+E)x^۳ + (B+D+F)x^۲ + Ax + B}{x^۶+x^۴+x^۲} \end{aligned}$$

چون این تساوی به‌ازای هر x برقرار است باید ضرایب متناظر برابر باشند، یعنی:

$$\begin{cases} B = 1 \\ A = 1 \\ B + D + F = 0 \\ A - C + E = 1 \\ B - D + F = -1 \\ A + C + E = 2 \end{cases}$$

این دستگاه را می‌توان به سادگی حل کرد و نتایج زیر حاصل می‌شود:

$$A = 1 \; , \; B = 1 \; , \; C = \frac{1}{2} \; , \; D = \frac{1}{2} \; , \; E = \frac{1}{2} \; , \; F = -\frac{1}{2}$$

پس باید انتگرال عبارت‌های زیر را محاسبه کرد:

$$\frac{1}{x} \; , \; \frac{1}{x^2} \; , \; (\frac{1}{2})\frac{x+1}{x^2+x+1} \; , \; (\frac{1}{2})\frac{x-1}{x^2-x+1}$$

تابع اولیهٔ $\frac{x+1}{x^2+x+1}$ را به عنوان نمونه محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x^2+x+1} &= (\frac{1}{2})\frac{(2x+1)+1}{x^2+x+1} \\ &= (\frac{1}{2})\frac{2x+1}{x^2+x+1} + (\frac{1}{2})\frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} \\ &= (\frac{1}{2})\frac{2x+1}{x^2+x+1} + (\frac{2}{3})\frac{1}{(\frac{2x}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}})^2+1} \end{aligned}$$

انتگرال عبارت اول سمت راست برابر $\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)$ است و انتگرال عبارت سمت راست برابر $\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})$ می‌باشد.

مثال ۲. گاهی اوقات روش‌های ساده‌تری برای تجزیه به کسرهای ساده وجود دارد. مثال زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^2+1}{x^3+x^2}$$

طبق روش کسرهای جزیی داریم:

$$\frac{x^۲+۱}{x^۳+x^۲}=\frac{A}{x+۱}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x^۲} \tag{۸}$$

اگر دو طرف را در $(x+۱)$ ضرب کنیم داریم:

$$\frac{x^۲+۱}{x^۲}=A+B\frac{x+۱}{x}+C\frac{x+۱}{x^۲}$$

در طرف راست اگر x به (-۱) میل داده شود ضریب A حاصل می‌شود، پس:

$$A=\lim_{x\to -۱}(\frac{x^۲+۱}{x^۲})=۲$$

با جایگزینی این مقدار در (۸) نتیجه می‌شود که

$$\frac{x^۲+۱}{x^۳+x^۲}=\frac{۲}{x+۱}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x^۲}$$

پس

$$\frac{-x^۲+۱}{x^۳+x^۲}=\frac{B}{x}+\frac{C}{x^۲} \tag{۹}$$

حال اگر دو طرف را در $x^۲$ ضرب کنیم و $\lim_{x\to ۰}$ را محاسبه کنیم، مقدار C حاصل می‌شود:

$$C=\lim_{x\to ۰}\frac{۱-x^۲}{x+۱}=۱$$

بالاخره با جایگزینی در (۹) داریم:

$$\frac{-x^۲-x}{x^۳+x^۲}=\frac{B}{x}$$

که نتیجه می‌دهد $B=-۱$.

یک سؤال اساسی. مثال‌های بالا طوری انتخاب شده بودند که فاکتورگیری مخرج‌ها ساده بود. همان طور که اشاره شد اگر درجهٔ مخرج ۵ یا بزرگتر باشد، ممکن است تجزیه به روش جبری میسر نباشد هر چند که یافتن ریشه‌های مخرج به هر درجهٔ دقت عملی است. حتی فرای این وضعیت، می‌توان به

طور کلی این سؤال را مطرح کرد که اگر تابعی را با یک تابع "نزدیک" جایگزین کنیم، آیا نتیجهٔ انتگرال‌گیری نیز نزدیک به تابع اولیه تابع اصلی خواهد بود؟ به این کلیت سؤال دقیق نیست زیرا که با افزودن یک مقدار ثابت به یک تابع اولیه می‌توان آن را از مقدار اولیه‌اش به دلخواه دور ساخت. سؤال دقیق‌تر، و از نظر کاربرد با اهمیت‌تر، این است که مثلاً اگر دو تابع انتگرال‌پذیر f و g روی بازهٔ $[a,b]$ به هم "نزدیک" باشند، یعنی مثلاً عددی $e > 0$ وجود داشته باشد که

$$|f(x) - g(x)| \leq e \quad \text{برای هر } x \text{ در } [a,b]$$

در این صورت در مورد اندازهٔ $|\int_a^b f - \int_a^b g|$ چه می‌توان گفت؟ داریم $\int_a^b f - \int_a^b g = \int_a^b (f-g)$ پس از

$$-e \leq f(x) - g(x) \leq e \quad \text{برای هر } x \text{ در } [a,b]$$

نتیجه می‌گیریم که

$$(b-a)(-e) \leq \int_a^b (f-g) \leq (b-a)e$$

یا

$$|\int_a^b (f-g)| \leq (b-a)e$$

بدین ترتیب اندازهٔ خطای انتگرال‌گیری، یعنی $(b-a)e$ را می‌توان با نزدیکترین دو تابع، یعنی اندازهٔ e، کنترل کرد.

محاسبهٔ تقریبی انتگرال

در محاسبات علمی به ندرت انتگرال معین از روش‌های یافتن تابع اولیه محاسبه می‌شود هر چند که این روش‌ها ممکن است برای یافتن فرمول‌های مناسب مفید واقع شوند. دو دلیل ساده برای این امر وجود دارد، یکی اینکه بسیاری تابع‌های اولیه را نمی‌توان برحسب تابع‌های شناخته شده بیان کرد و دوم اینکه حتی در صورت دست یافتن به یک عبارت شناخته شده مانند $\sqrt[5]{\tan^{-1}(\sqrt{2}+x)+3x^2}$، این عبارت خود بدون تقریب قابل استفاده نیست. خوشبختانه روش‌های بسیار مؤثر و عملی برای محاسبهٔ تقریبی انتگرال معین وجود دارد که به دقت مورد نیاز قابل بهره‌گیری هستند و نرم‌افزارهای متعددی نیز به این منظور فراهم شده است. روش‌های تقریب بر دو رکن اصلی تکیه دارند:

الف) افراز بازهٔ انتگرال‌گیری به زیربازه‌های کوچکتر.

ب) جایگزینی تابع روی هر بازهٔ کوچکتر با یک تابع که انتگرال آن به سادگی قابل محاسبه است، مانند یک تابع ثابت یا یک چندجمله‌ای.

روشن است که این ایده رابطهٔ نزدیکی با خود تعریف انتگرال (معین) دارد. در زیر چند روش تقریب را معرفی می‌کنیم.

(۶−۱) تقریب چپ و تقریب راست

برای $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$، بازهٔ $[a,b]$ را به n زیربازه با طول مساوی تقسیم می‌کنیم:

$$a=a_0<a_1<a_2<\cdots<a_n \quad , \quad a_i=a+i\frac{b-a}{n}$$

و قرار می‌دهیم:

$$\text{تقریب چپ}: L(n) = \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}) f(a_{i-1}) = \frac{b-a}{n} (f(a_0) + \cdots + f(a_{n-1}))$$

$$\text{تقریب راست}: R(n) = \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}) f(a_i) = \frac{b-a}{n} (f(a_1) + \cdots + f(a_n))$$

بدین ترتیب وقتی $f > 0$، $L(n)$ و $R(n)$ هر دو تقریب $\int_a^b f$ با مجموعی از مساحت‌های مستطیل شکل هستند، که برای $L(n)$ بلندی هر مستطیل به اندازهٔ مقدار f در انتهای چپ زیربازه و برای $R(n)$ بلندی هر مستطیل به اندازهٔ مقدار f در انتهای راست زیربازه است.

(۶—۲) تقریب نقطهٔ میانی

در افراز بالا، اگر به جای استفاده از نقاط چپ یا راست از نقطهٔ میانی هر زیربازه استفاده کنیم، حاصل را تقریب میانی، می‌نامیم:

$$M(n) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{a_{i-1} + a_i}{2}\right)$$

تقریب میانی نیز در حالت $f > 0$، مجموع مساحت‌های n مستطیل است، اگر از نقطهٔ $(\frac{a_{i-1}+a_i}{2}, f(\frac{a_{i-1}+a_i}{2}))$ خط راستی رسم شود، نقاط تقاطع این خط را خطوط قائم $x = a_{i-1}$ و $x = a_i$،

شکل ۱

همراه با دو نقطهٔ a_{i-1} و a_i روی محور x یک ذوزنقه ایجاد می‌کنند که مساحت آن برابر مساحت مستطیل بنا شده به ارتفاع $f(\frac{a_{i-1}+a_i}{2})$ است. بالاخص وقتی f مشتق‌پذیر باشد، می‌توان از خط مماس بر نمودار تابع به‌ازای نقطهٔ میانی $x = \frac{a_{i-1}+a_i}{2}$ استفاده کرد (شکل ۱).

در نگاه اول به نظر نمی‌آید میان سه مقدار $L(n)$، $R(n)$ و $M(n)$، هیچیک به عنوان تقریب ارجحیتی بر دوتای دیگر داشته باشد، یکی نقطهٔ چپ بازه را در نظر می‌گیرد، دومی نقطهٔ میانی و سومی نقطهٔ سمت راست را. برای یک "تابع کاملاً تصادفی" نباید تمایزی میان این سه نقطه به عنوان "نقطهٔ نوعی" دامنهٔ تابع وجود داشته باشد، ولی تابع‌هایی که در عمل مورد استفاده قرار می‌گیرند کاملاً هم تصادفی نیستند. بالاخص اگر تابع مشتق‌پذیر باشد، خط مماس بر یک نقطهٔ نمودار در فاصله‌ای کوچک تقریبی خوب از تابع به‌دست می‌دهد. اگر نقطهٔ تماس نقطهٔ متناظر با نقطهٔ میانی روی نمودار

گرفته شود، میزان انحراف تابع در دو نقطهٔ انتهایی از تقریب خطی، معمولاً کوچکتر از انحراف تابع از مقدارهای ثابت $f(a_{i-۱})$ یا $f(a_i)$ است. بدین ترتیب این انتظار شهودی می‌تواند وجود داشته باشد که برای تابع‌های مشتق‌پذیر، $M(n)$ معمولاً تقریبی بهتر از $L(n)$ یا $R(n)$ باشد. بعداً به طور دقیق‌تر به این مطلب خواهیم پرداخت.

(۶–۳) تقریب ذوزنقه

در این روش مجموع مساحت‌های ذوزنقه‌هایی را که رئوس آنها در نقاط $(x_{i-۱}, ۰)$، $(x_i, ۰)$، $(x_{i-۱}, f(x_{i-۱}))$ و $(x_i, f(x_i))$ هستند به عنوان تقریب مساحت زیر نمودار در نظر گرفته می‌شود:

$$T(n) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{۲}(f(x_{i-۱}) + f(x_i))$$

اکنون به بررسی دقت تقریب‌های $L(n)$، $R(n)$، $M(n)$ و $T(n)$ برای $\int_a^b f$ می‌پردازیم و در مورد حدود خطا در هر مورد تخمین‌هایی ارائه خواهیم کرد.

(۶–۴) تخمین خطای $L(n)$ و $R(n)$

خطای $L(n)$ را در نظر می‌گیریم، ملاحظات مشابهی در مورد $R(n)$ برقرار است. علی‌الاصول میزان انحراف $L(n)$ از $\int_a^b f$ به انحراف تابع f از مقدار ثابت $f(a)$ بستگی دارد. اگر تابع f مشتق‌پذیر باشد، $|f'|$ نمایانگر انحراف تابع از مقدار ثابت است، بنابراین باید انتظار داشت خطای این تقریب به اندازهٔ $|f'|$ وابسته باشد. خطای تقریب، E، را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$E = \int_a^b f - L(n)$$

پس

$$E = \sum_{i=۱}^{n}\left(\int_{x_{i-۱}}^{x_i} f - (x_i - x_{i-۱})f(x_{i-۱})\right)$$

اگر تابع f را پیوسته فرض کنیم، طبق قضیه میانگین انتگرال داریم $\int_{x_{i-۱}}^{x_i} f = (x_i - x_{i-۱})f(x^*_{i-۱})$ برای نقطهٔ مناسبی $x^*_{i-۱}$ در بازهٔ $[x_{i-۱}, x_i]$. بنابراین

$$E = \sum_{i=۱}^{n}((x_i - x_{i-۱})(f(x^*_{i-۱}) - f(x_{i-۱})))$$

حال مضافاً فرض کنید تابع f مشتق‌پذیر است. در این صورت طبق قضیهٔ میانگین نقطه‌ای $c_{i-۱}$ بین $x_{i-۱}$ و $x^*_{i-۱}$ وجود دارد که

$$f(x^*_{i-۱}) - f(x_{i-۱}) = (x_i - x_{i-۱})f'(c_{i-۱})$$

بنابراین

$$E = \sum_{i=۱}^{n}(x_i - x_{i-۱})^۲ f'(c_{i-۱})$$

می‌نویسیم $h = x_i - x_{i-۱} = \frac{b-a}{n}$، پس

$$E = h^۲ \sum_{i=۱}^{n} f'(c_{i-۱})$$

فرض کنید M یک کران بالایی برای $|f'|$ در بازهٔ $[a,b]$ باشد، در این صورت از که $h \cdot n = b - a$، داریم:

$$|E| \leq h \cdot (b-a) \cdot M \tag{۱}$$

طرف راست این تقریب خطا کاملاً گویا است. خطا به سه عامل زیر بستگی دارد: کران بالایی قدرمطلق مشتق که میزان تغییر تابع را نمایش می‌دهد، طول بازه، و طول زیربازه‌های افراز برای بازهٔ ثابت $[a,b]$ و تابع داده شدهٔ f (بنابراین M ثابت). هر چه افراز ظریف‌تر باشد، یعنی h کوچکتر، خطا کوچکتر است. مثلاً برای اینکه تقریب یک رقم اضافی اعشار دقیق‌تر شود، لازم است معمولاً افراز را ۱۰ برابر ظریف‌تر کنیم.

(۶–۵) تخمین خطای $M(n)$ و $T(n)$

در اینجا فرض می‌کنیم تابع f دو بار مشتق‌پذیر است. ادعا می‌کنیم:

$$M(n) \leq \int_a^b f \leq T(n) \qquad \text{اگر } f'' > ۰ \text{ در سراسر } [a,b] \tag{۲}$$

$$T(n) \leq \int_a^b f \leq M(n) \qquad \text{اگر } f'' > ۰ \text{ در سراسر } [a,b] \tag{۳}$$

شکل ۲

در واقع برای یک تابع محدب $(f''>0)$ خط مماس در هر نقطه زیر نمودار تابع قرار می‌گیرد، پس $M(n)<\int_a^b f$ و خط واصل بین هر دو نقطهٔ نمودار بالاتر از نمودار واقع می‌شود عکس این مطلب در مورد تابع‌های مقعر $(f''<0)$ برقرار است. برای تابع‌های مستوی $(f''=0)$، $M(n)$ و $T(n)$ هر دو برابر $\int_a^b$ خواهد بود. اگر خطای تقریب ذوزنقه و تقریب نقطهٔ میانی را به ترتیب به E_T و E_M نمایش دهیم، یعنی $E_T=\int_a^b f-T(n)$ و $E_M=\int_a^b f-M(n)$، می‌توان ثابت کرد که:

$$|E_T|\le\frac{1}{12}h^2\cdot(b-a)\cdot M \qquad (4)$$

$$|E_M|\le\frac{1}{24}h^2\cdot(b-a)\cdot M \qquad (5)$$

که در اینجا M یک کران بالایی برای قدرمطلق مشتق دوم، f''، در بازهٔ $[a,b]$ است. در مقایسه با (۱) به دو تفاوت زیر برمی‌خوریم:

- خطای $L(n)$ و $R(n)$ به اندازهٔ مشتق اول، یعنی میزان رشد تابع، وابسته است، ولی خطای $T(n)$ و $M(n)$ به مشتق دوم تابع، یعنی میزان خمیدگی نمودار، وابسته می‌باشد.
- مقایسه h^2 در فرمول‌های E_T و E_M با h در (۱) نشان می‌دهد که تظریف اثر مضاعفی بر دقت $T(n)$ و $M(n)$ دارد. در مورد $T(n)$ و $M(n)$ با ازدیاد ده برابر نقاط تقسیم، دقت تقریب تا دو رقم اعشار دقیق‌تر می‌شود زیرا که h^2 در $\frac{1}{100}$ ضرب می‌شود. بدین ترتیب می‌توان انتظار داشت که برای تابع‌های دو بار مشتق‌پذیر با $T(n)$ و $M(n)$ معمولاً تقریب‌های بهتری از $L(n)$ و $R(n)$ به‌دست دهند.

نکتهٔ دیگری که در (۴) و (۵) مشاهده می‌شود این است که به نظر می آید نوعاً دقت $M(n)$ دو برابر دقت $T(n)$ باشد. در واقع می‌توان دلیلی شهودی برای این امر ارائه کرد. اگر روی هر بازهٔ $[x_{i-1},x_i]$ شکل نمودار را تقریباً سهمی فرض کنیم، با محاسبهٔ سرراست دیده می‌شود که

$|E_T| = ۲|E_M|$ (تمرین) ضمناً همچنان که در رابطه با جهت تقعر مشاهده کردیم علامت E_T و E_M مخالف یکدیگر است، از این دو مطلب روش دقیق‌تری را برای تقریب انتگرال به ذهن می‌رسد. مجموع $۲M(n) + T(n)$ از یک سو باید حدوداً سه برابر $\int_a^b f$ باشد، ولی با توجه به این که علامت خطای $T(n)$ و $M(n)$ مخالف و قدرمطلق خطای $M(n)$ حدوداً نصف قدرمطلق خطای $T(n)$ است، باید خطای $۲M(n) + T(n)$ کوچک باشد. بنابراین تقریب زیر:

$$S(n) = \frac{۱}{۳}(۲M(n) + T(n)) \qquad \text{تقریب سیمسن}$$

تقریب مناسبی به نظر می‌رسد. در واقع محاسبهٔ سرراست نشان می‌دهد که برای مجموعهٔ سهمی‌های گذرا از سه نقطهٔ $(x_{i-۱}, f(x_{i-۱}))$، $(\frac{۱}{۲}(x_{i-۱}+x_i), f(\frac{۱}{۲}(x_{i-۱}+x_i)))$ ، و $(x_i, f(x_i))$، برای $i = ۱, \ldots, n$، دقیقاً $S(n)$ حاصل می‌شود.

روش سیمسن معمولاً تقریب بسیار خوبی از مقدار انتگرال معین ارائه می‌کند. می‌توان ثابت کرد که اگر تابع f روی بازهٔ $[a, b]$ چهار بار مشتق‌پذیر باشد، آنگاه تخمین زیر برای خطای روش سیمسن، E_S، برقرار است:

$$|E_S| \leq \frac{۱}{۱۸۰}h^۴ \cdot (b-a) \cdot M \qquad (۶)$$

که در آن M یک کران بالایی برای قدرمطلق مشتق چهارم f است. بدین ترتیب برای چندجمله‌ای‌های از درجه ۳ و پایین‌تر، که مشتق چهارم آنها صفر است، روش سیمسن مقدار انتگرال را با دقت کامل ارائه می‌کند. با توجه به اینکه در این روش از سهمی‌ها برای تقریب استفاده کردیم، موضوع برای تابع‌های تا درجهٔ ۲ بدیهی است. اینکه برای تابع‌های درجه سه نیز، $E_S = ۰$، در نگاه اول واضح نیست ولی موضوع را می‌توان با محاسبهٔ مستقیم بدون استفاده از (۶) نیز تحقیق کرد (تمرین). بالاخره توجه کنید که اثر ضریب $h^۴$ در (۶) این است که تظریف ده‌گانه موجب می‌شود که تقریب سیمسن حدوداً چهار رقم اعشار دقیق‌تر شود که این نیز مؤید دقت برتر این روش است.

انتگرال‌های ناسره

مفهوم انتگرال که تاکنون بررسی شد به تابع‌های کراندار روی بازه‌های کراندار محدود بود. در مواردی می‌توان با حذف یکی از این دو محدودیت یا هر دوی آن، به تعمیمی از مفهوم انتگرال دست یافت که به انتگرال ناسره معروف است. در زیر به بررسی دو نوع اساسی از این انتگرال‌ها و ترکیب آنها می‌پردازیم.

(۷—۱) انتگرال ناسره نوع اول: دامنهٔ بی‌کران

در اینجا تابع‌هایی را در نظر می‌گیریم که دامنهٔ آنها به شکل $[a,\infty[$ یا $]-\infty,a]$ است. نخست تابع‌های $f:[a,\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ را در نظر می‌گیریم. ملاحظات مشابهی در مورد تابع‌های $f:]-\infty,a]\longrightarrow\mathbb{R}$ حکمفرماست. فرض کنید به‌ازای هر $A\in\mathbb{R}$، $A>a$، f روی $[a,A]$ انتگرال‌پذیر باشد و $\lim_{A\to\infty}\int_a^A f$ وجود داشته باشد. در این صورت می‌گوییم $\int_a^\infty f$ همگراست و قرار می‌دهیم:

$$\int_a^\infty = \lim_{A\to\infty}\int_a^A f \qquad (۱)$$

نفی همگرایی، واگرایی خوانده می‌شود.

مثال ۱. برای $p>0$ داده شده، همگرایی $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx$ را بررسی کنید. داریم:

شکل ۱

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx = \begin{cases} \frac{1}{-p+1}(A^{-p+1}-1) & p\neq 1 \\ \ln A & p=1 \end{cases}$$

بنابراین $\lim_{A\to\infty}\int_1^A \frac{1}{x^p}dx$ دقیقاً وقتی وجود دارد که $p > 1$. پس شرط لازم و کافی برای همگرایی $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx$ این است که $p > 1$.

مثال ۲. برای $\alpha > 0$ داده شده، همگرایی $\int_0^\infty e^{-\alpha x}dx$ را بررسی می‌کنیم. این مثال نیز با محاسبهٔ سرراست قابل بررسی است:

$$\int_0^A e^{-\alpha x}dx = \frac{-1}{\alpha}(e^{-\alpha A} - 1)$$

برای هر $\alpha > 0$ حد بالا وجود دارد وقتی $A \to \infty$ و برابر $\frac{1}{\alpha}$ است.

مثال ۳. حال کنید $p > 1$ داده شده است. نشان می‌دهیم $\int_0^\infty e^{-x^p}dx$ همگراست. این نتیجه را نمی‌توان با محاسبهٔ مستقیم به‌دست آورد. زیرا مثلاً برای $p = 2$، تابع اولیهٔ e^{-x^2} برحسب تابع‌های شناخته شده قابل بیان نیست. ولی اگر $p > 1$، داریم $x^p \geq x$ برای $x \geq 1$ و $e^{-x^p} \leq e^{-x}$ برای $x \geq 1$، پس

$$\int_1^A e^{-x^p}dx \leq \int_1^A e^{-x}dx$$

چون $e^{-x^p} > 0$ کمیت سمت چپ نسبت به A صعودی است. از طرفی دیگر، طبق مثال قبل، حد طرف راست وجود دارد، پس حد سمت چپ نیز وجود دارد وقتی $A \longrightarrow \infty$، و $\int_1^\infty e^{-x^p}dx$ همگراست. افزودن مقدار ثابت $\int_0^1 e^{-x^p}dx$ نیز اثری بر همگرایی ندارد.

این روش مقایسه با انتگرال ناسرهٔ تابع‌های ساده یا شناخته شده حربهٔ اصلی بررسی همگرایی یا واگرایی انتگرال‌هاست و می‌توان آن را به صورت زیر خلاصه کرد:

(۷–۲) آزمون مقایسه. فرض کنید تابع‌های نامنفی f و g روی $[a,\infty[$ داده شده‌اند که هر یک روی هر بازهٔ $[a,A]$ انتگرال‌پذیر است و فرض کنید $K > a$ وجود دارد که به‌ازای هر $x > K$ داریم $f(x) \leq g(x)$. در این صورت:

الف) اگر $\int_a^\infty g$ همگرا باشد، $\int_a^\infty f$ نیز همگراست.

ب) اگر $\int_a^\infty f$ واگرا باشد، $\int_a^\infty g$ نیز واگراست.

تنها این توضیح اضافی در مورد آزمون بالا لازم است که مقایسهٔ $f(x) \leq g(x)$ فقط برای مقادیر x بزرگتر از یک مقدار ثابت K کافی است زیرا که $\int_a^K f$ و $\int_a^K g$ به هر حال وجود دارند و همگرایی $\int_a^\infty$ معادل همگرایی $\int_K^\infty$ می‌باشد.

(۷–۳) انتگرال ناسرهٔ نوع دوم: تابع بی‌کران در یک انتهای بازهٔ کراندار

در اینجا تابع‌های $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ یا $f :]a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ را در نظر می‌گیریم که وقتی x به انتهای باز بازه نزدیک می‌شود، $f(x)$ به $+\infty$ یا $-\infty$ میل می‌کند. مثلاً برای $p > ۰$ داده شده اگر $f(x) = \frac{۱}{x^p}$ را روی $]۰, ۱]$ در نظر بگیریم، وقتی $x \to ۰^+$، مقدار تابع بی‌کران بزرگ می‌شود. حالت $[a, b[$ را در نظر می‌گیریم، وضعیت $]a, b]$ کاملاً مشابه است. برای $f :]a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ که به‌ازای هر $\varepsilon > ۰$، f روی $[a+\varepsilon, b]$ انتگرال‌پذیر باشد، می‌گوییم $\int_a^b f$ همگراست در صورتی که $\lim_{\varepsilon \to ۰^+} \int_{a+\varepsilon}^b f$ وجود داشته باشد، و در این صورت قرار می‌دهیم:

$$\int_a^b f = \lim_{\varepsilon \to ۰^+} \int_{a+\varepsilon}^b f \qquad (۲)$$

نفی همگرایی مانند گذشته واگرایی خوانده می‌شود.

مثال ۱. برای $p > ۰$ داده شده در همگرایی $\int_۰^۱ \frac{۱}{x^p} dx$ بحث می‌کنیم. برای $\varepsilon > ۰$ داریم:

$$\int_\varepsilon^۱ \frac{۱}{x^p} dx = \begin{cases} \frac{۱}{-p+۱}(۱ - \varepsilon^{-p+۱}) & p \neq ۱ \\ -\ln \varepsilon & p = ۱ \end{cases}$$

وقتی $\varepsilon \to ۰^+$، عبارت سمت راست در صورتی حد دارد که $p < ۱$، بنابراین شرط لازم و کافی برای همگرایی $\int_۰^۱ \frac{۱}{x^p} dx$ این است که $p < ۱$.

مثال ۲. در مورد همگرایی $\int_۱^۲ \frac{x^۲}{\sqrt{x^۵ - ۱}} dx$ بحث می‌کنیم. توجه کنید که $\frac{x^۲}{\sqrt{x^۵-۱}}$ در $]۱, ۲]$ تعریف شده است و وقتی $x \to ۱^+$، تابع بی‌کران می‌شود. برای $۱ < x \leq ۲$ داریم $x^۲ < ۴$ و از طرفی دیگر:

$$x^۵ - ۱ = (x - ۱)(x^۴ + x^۳ + x^۲ + x + ۱) > ۵(x - ۱)$$

پس برای $1 < x \le 2$:

$$0 < \frac{x^2}{\sqrt{x^5 - 1}} < \frac{4}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x - 1}}$$

از طرفی دیگر

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}dt$$

که طبق مثال قبل همگراست، پس انتگرال داده شده در مقایسه همگرا می‌باشد.

در مثال بالا از آزمون مقایسه‌ای کاملاً مشابه ۷—۲ استفاده کرده‌ایم که بیان و اثبات دقیق آن را به خواننده واگذار می‌کنیم.

وقتی بیش از یک ناسرگی در مورد یک انتگرال وجود داشته باشد، انتگرال را با انتخاب نقاط کمکی به صورت مجموع دو یا چند انتگرال می‌نویسیم و در صورتی که همهٔ انتگرال‌های دارای یک ناسرگی، همگرا باشند، انتگرال ناسره را همگرا می‌نامیم. با چند مثال به توضیح این مطلب می‌پردازیم:

مثال ۱. برای $p > 0$ داده شده، در مورد همگرایی $\int_0^\infty \frac{1}{x^p}dx$ بحث کنید.

در اینجا نقطهٔ کمکی $x = 1$ را انتخاب می‌کنیم و همگرایی دو انتگرال $\int_1^\infty$ و $\int_0^1$ را در نظر می‌گیریم. توجه کنید که نقطهٔ خاص $x = 1$ اثری بر نتیجهٔ نهایی نخواهد داشت زیرا که اگر به جای $x = 1$، نقطهٔ $x = c \neq 0$ انتخاب شود، در مورد هر دو انتگرال ناسره، اختلاف در انتگرال معین $\int_1^c$ خواهد بود که به هر حال متناهی است. حال برای $p \le 1$، $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx$ واگراست، پس $\int_0^\infty \frac{1}{x^p}dx$ واگراست، و نیز برای $p > 1$، $\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx$ واگراست، پس برای هر $p > 0$، انتگرال $\int_0^\infty \frac{1}{x^p}dx$ واگراست.

مثال ۲. $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3+x}}dx$ را بررسی می‌کنیم. با در نظر گرفتن نقطهٔ کمکی $x = 1$، وضعیت دو انتگرال $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^3+x}}dx$ و $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3+x}}dx$ را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. برای $x > 0$ داریم $x^3 + x > x^3$، پس $\frac{1}{\sqrt{x^3+x}} < \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ و چون $\int_1^\infty \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}dx$ همگراست، در مقایسه $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3+x}}dx$ همگراست. از طرفی دیگر $x^3 + x > x$، پس $\frac{1}{\sqrt{x^3+x}} < \frac{1}{\sqrt{x}}$ و چون $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ همگراست، $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^3+x}}dx$ همگراست. بنابراین انتگرال $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3+x}}dx$ همگرا می‌باشد.

مثال ۳. انتگرال $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}dx$ را در نظر می‌گیریم. توجه کنید که در اینجا دو ناسرگی وجود دارد. یکی در انتهای چپ $[0,1]$ و دیگری در انتهای راست $[-1,0]$. بنابراین باید همگرایی دو انتگرال $\int_{0}^{1}\frac{1}{x}dx$ و $\int_{-1}^{0}\frac{1}{x}dx$ را بررسی کرد. این دو انتگرال هر دو واگرا هستند، پس $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}dx$ واگرا محسوب می‌شود.

شکل ۲

رهیافت دیگری در مورد مثال بالا به ذهن می‌رسد. اگر بازهٔ متقارن $]-\varepsilon,\varepsilon[$، $0<\varepsilon<1$، را حول 0 حذف کنیم،به سبب تقارن داریم:

$$\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{1}{x}dx+\int_{\varepsilon}^{1}\frac{1}{x}dx=0$$

حال اگر $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}dx$ را حد مجموع $\int_{-1}^{-\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{1}$ فرض کنیم وقتی $\varepsilon\to 0^+$ این حد صفر است، یعنی به اعتباری باید $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}dx$ را همگرا و برابر صفر تلقی کرد. فرض کنید به جای گرفتن یک بازهٔ متقارن حول 0، یک بازه $]-\varepsilon_1,\varepsilon_2[$ در نظر گرفته شود که $\varepsilon_1>0$، $\varepsilon_2>0$ و دو عدد $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ را به صفر میل دهیم. داریم:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{-\varepsilon_1}\frac{1}{x}dx+\int_{\varepsilon_2}^{1}\frac{1}{x}dx &= \ln(-x)|_{-1}^{-\varepsilon_1}+\ln x|_{\varepsilon_2}^{1}\\ &= \ln(\tfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2})\end{aligned}$$

حال وقتی $\varepsilon_1\to 0^+$ و $\varepsilon_2\to 0^+$، حد بالا به طور کلی وجود ندارد، بلکه به نسبت $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$ وابسته است. مثلاً وقتی $\varepsilon_1=(\varepsilon_2)^2$، $\ln(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2})$ به $-\infty$ میل می‌کند، وقتی $\varepsilon_1=\varepsilon_2$، حد صفر است، و وقتی $\varepsilon_1=\sqrt{\varepsilon_2}$، عبارت $\ln(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2})$ به $+\infty$ میل می‌کند. اگر عدد حقیقی r داده شده باشد و بگیریم $\varepsilon_1=e^r\varepsilon_2$، حد $\ln(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2})$ برابر r خواهد شد. پس بسته به این که بازهٔ منقبض شونده حول 0 چگونه اختیار شود، می‌توان عبارت $\int_{-1}^{-\varepsilon_1}\frac{1}{x}dx+\int_{\varepsilon_2}^{1}\frac{1}{x}dx$ را به هر عددی میل داد! برای بعضی کاربردها باید یک بازهٔ متقارن یا بازه‌ای به شکل خاص حول نقطهٔ ناسرگی در نظر گرفت که در این صورت حد خاصی مورد نظر است. این حد خاص را که ویژگی مسأله تحمیل می‌کند مقدار اصلی (کوشی) می‌نامند.

(۷—۴) تابع Γ (گاما). تابعی با دامنهٔ اعداد حقیقی مثبت می‌سازیم که به ازای مقادیر عدد صحیح مقدارهای $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$ را می‌گیرد. به عنوان انگیزه، انتگرال زیر را به‌ازای عدد صحیح نامنفی دادهٔ شدهٔ n در نظر بگیرید:

$$\int_0^\infty t^n e^{-t} dt \qquad (۳)$$

این یک انتگرال ناسره از نوع اول است. از آنجا که $\lim_{x\to\infty} \frac{t^n}{e^{\frac{t}{2}}} = 0$ ، برای t به اندازهٔ کافی بزرگ داریم $t^n < e^{\frac{t}{2}}$، پس $t^n e^{-t} < e^{-\frac{t}{2}}$ برای t بزرگ و چون $\int_0^\infty e^{-\frac{t}{2}} dt$ همگراست، (۳) همگرا می‌باشد. می‌توان به روش انتگرال جزء به جزء مقدار (۳) را محاسبه کرد:

$$\begin{aligned}
\int_0^A t^n e^{-t} dt &= -t^n e^{-t}|_0^A + \int_0^A n t^{n-1} t^{-t} dt \\
&= -\frac{A^n}{e^A} + n \int_0^A t^{n-1} e^{-t} dt
\end{aligned}$$

چون $\lim_{A\to\infty} \frac{A^n}{e^A} = 0$، داریم:

$$\int_0^\infty t^n e^{-t} dt = n \int_0^\infty t^{n-1} e^{-t} dt$$

با ادامهٔ استفاده از انتگرال جزء به جزء نتیجه می‌شود که:

$$\int_0^\infty t^n e^{-t} dt = n! \int_0^\infty e^{-t} dt = n! \qquad (۴)$$

با الهام از این فرمول تابع گاما $\Gamma :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \qquad (۵)$$

وقتی $x \geq 1$ فقط یک ناسرگی از نوع اول وجود دارد و مشابه آنچه در بالا دیدیم، انتگرال ناسره همگراست. برای $0 < x < 1$، انتگرال $\int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt$ نیز ناسرگی نوع دوم را دارد که در اینجا:

$$\frac{e^{-t}}{t^{1-x}} < \frac{1}{t^{1-x}}$$

چون $0 < 1 - x < 1$، $\int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}}dt$ و در نتیجه انتگرال مورد نظر همگراست. پس $\Gamma(x)$ به‌ازای هر $x > 0$ تعریف شده است. با روش انتگرال جزء به جزء مانند محاسبهٔ بالا داریم:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \qquad (6)$$

از آنجا که $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}dt = 1$، نتیجه می‌شود که:

$$\Gamma(n+1) = n! \qquad (7)$$

می‌توان بعضی مقادیر دیگر Γ را نیز محاسبه کرد. مثلاً

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}}e^{-t}dt$$

با تعویض متغیر $t = u^2$ داریم:

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = 2\int_0^\infty e^{-u^2}du$$

در بررسی انتگرال‌های دو متغیری ثابت خواهیم کرد که $\int_0^\infty e^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$، پس $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

نمودار تابع Γ به صورت شکل ۳ است.

شکل ۳

سری تیلور و سری توانی (۱)

در جلسه ۲۰ چندجمله‌ای تیلور را بررسی کردیم. اگر تابع f در نقطهٔ درونی a از دامنهٔ تعریف خود دارای مشتق تا مرتبهٔ n باشد، چندجمله‌ای تیلور درجهٔ n تابع f در نقطهٔ a، یا تقریب درجهٔ n تابع f در نقطهٔ a، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$p_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}}{n!}(x-a)^n \qquad (1)$$

حال فرض کنید تابع f دارای مشتق از هر مرتبه در نقطهٔ a است، پس می‌توان $f^{(k)}(a)$ را به‌ازای هر k در نظر گرفت. بدین ترتیب می‌توان به‌ازای هر عدد x، سری زیر را تشکیل داد:

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots \qquad (2)$$

سری فوق را سری تیلور تابع f در نقطه a می‌نامیم. دو سؤال طبیعی در اینجا به ذهن می‌رسد.

الف) آیا سری (۲) به‌ازای هر x یا بعضی x ها همگراست؟

ب) اگر x در دامنهٔ تعریف f باشد و سری (۲) به‌ازای x همگرا، آیا حد سری برابر $f(x)$ می‌شود؟

توجه کنید که زمینه‌ای معقول برای جواب مثبت به (ب) وجود دارد. به طور کلی دیدیم که با افزایش درجهٔ تقریب تابع، یعنی افزایش n در (۱)، تقریب درجهٔ n در نزدیکی a از تابع دورتر نمی‌شود. بنابراین غیرقابل تصور به نظر نمی‌رسد که با افزایش n، حد (۱)، یعنی سری (۲)، به خود تابع میل کند. مثال‌های زیر تنوع وضعیت‌های ممکن را تا حدی بیان خواهد کرد.

(۱−۳۳) چند مثال

(۱−۱−۳۳) تابع $f(x)=e^x$ را با $a=0$ در نظر می‌گیریم. از آنجا که $f^{(n)}(0)=1$ به‌ازای هر n، سری تیلور تابع در $a=0$ به شکل زیر است:

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \qquad (3)$$

می‌خواهیم همگرایی سری فوق را به‌ازای x های مختلف بررسی کنیم و اینکه اگر به‌ازای یک x این سری همگرا باشد، آیا مجموع سری برابر e^x است؟ در اینجا، و در بسیاری موارد دیگر، هر روشی که برای تخمین خطای تقریب درجهٔ n در اختیار داشته باشیم می‌تواند مفید واقع شود. می‌دانیم که اگر $p_n(x)$ تقریب درجهٔ n تابع f در a باشد، داریم:

$$f(x)=p_n(x)+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \qquad (4)$$

که در اینجا c نقطه‌ای بین a و x (و البته وابسته به n) است جمله دوم سمت را باقیماندهٔ لاگرانژ نامیدیم. اگر برای x داده شده داشته باشیم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}=0$$

آنگاه $\lim_{n\to\infty}(f(x)-p_n(x))=0$، یعنی سری تیلور به‌ازای x به مقدار $f(x)$ میل می‌کند. پس در این صورت به‌ازای چنین مقدار x، جواب (الف) و (ب) هر دو مثبت می‌شود. در مورد تابع $f(x)=e^x$ و $a=0$ داریم:

$$\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}=\frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}$$

که c نقطهٔ نامشخصی بین 0 و x و وابسته به n است. x هرچه باشد می‌توان نوشت $0\le c\le |x|$، پس $e^c\le e^{|x|}$. بنابراین برای x داده شده، چنانچه ثابت کنیم $\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}=0$، باقیماندهٔ لاگرانژ به صفر میل می‌کند و نتیجه خواهد شد که سری تیلور (۳) به e^x همگراست. در واقع برای x داده شده، N را بزرگتر یا مساوی $|x|$ می‌گیریم. در این صورت برای $n>N$ داریم:

$$\begin{aligned}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} &= \frac{|x|^N}{N!}\cdot\frac{|x|}{N+1}\cdot\cdots\cdot\frac{|x|}{n+1}\\ &\le \frac{|x|^N}{N!}\left(\frac{|x|}{N+1}\right)^{n-N}\end{aligned}$$

چون نسبت ثابت $\frac{|x|}{N+۱}$ اکیداً از یک کوچکتر است، وقتی $n \to \infty$، طرف راست بالا به صفر میل می‌کند، پس باقیماندهٔ لاگرانژ به صفر میل می‌کند. بنابراین برای هر x داریم:

$$\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \tag{۵}$$

بدین ترتیب برای این مثال، سری تیلور e^x در $a = ۰$ به‌ازای هر x به خود تابع میل می‌کند. در اثبات بالا دیدیم که برای کوچک کردن باقیمانده لازم بود N را بزرگتر یا مساوی $|x|$ بگیریم. به طور کلی باید انتظار داشت که هرچه x از a دورتر شود، برای نزدیک کردن مجموع سری تیلور به $f(x)$ جملات بیشتری از سری تیلور لازم باشد. در شکل ۱ مجموع‌های ۱، $۱ + x$، $۱ + x + \frac{x^۲}{۲}$ و $۱ + x + \frac{x^۲}{۲} + \frac{x^۳}{۳!}$ به عنوان تقریب‌های e^x نمایش داده شده‌اند. ملاحظه کنید که هرچه $|x|$ بزرگتر شود، تقریب از مقدار واقعی دورتر است هرچند که به‌ازای هر x داده شده، با افزودن جملات سری تیلور می‌توان به e^x به دلخواه نزدیک شد.

?

(۳۳—۱—۲) تابع‌های $\sin x$، $\cos x$، $sinh\ x$ و $cosh\ x$ را در نظر می‌گیریم. سری‌های تیلور این توابع در $a = ۰$ به سادگی محاسبه می‌شوند زیرا که

$$\sin^{(n)}(۰) = \begin{cases} ۰ & n \text{ زوج} \\ ۱ & n = ۴k + ۱ \\ -۱ & n = ۴k + ۳ \end{cases} \qquad \cos^{(n)}(۰) = \begin{cases} ۰ & n \text{ فرد} \\ ۱ & n = ۴k \\ -۱ & n = ۴k + ۲ \end{cases}$$

$$sinh^{(n)}(۰) = \begin{cases} ۰ & n \text{ زوج} \\ ۱ & n \text{ فرد} \end{cases} \qquad cosh^{(n)}(۰) = \begin{cases} ۰ & n \text{ فرد} \\ ۱ & n \text{ زوج} \end{cases}$$

پس سری‌های تیلور این توابع در $a = ۰$ به شرح زیرند:

$$\sin x: \quad x - \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۵}{۵!} - \frac{x^۷}{۷!} + - \cdots$$

$$\cos x: \quad ۱ - \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۴}{۴!} - \frac{x^۶}{۶!} + - \cdots$$

$$sinh\ x: \quad x + \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۵}{۵!} + \frac{x^۷}{۷!} + \cdots$$

$$cosh\ x: \quad ۱ + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۴}{۴!} + \frac{x^۶}{۶!} + \cdots$$

در واقع به سبب شباهت ضرایب این سری‌ها به ضرایب سری تیلور e^x، می‌توان با استفاده از باقیماندهٔ لاگرانژ به روشی مشابه آنچه در مثال قبل گذشت نشان داد که هر یک از این سری‌ها به‌ازای هر x به تابع مربوط میل می‌کند، یعنی به‌ازای هر x داریم:

$$\sin x = x - \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۵}{۵!} - \frac{x^۷}{۷!} + - \cdots \qquad (۶)$$

$$\cos x = ۱ - \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۴}{۴!} - \frac{x^۶}{۶!} + - \cdots \qquad (۷)$$

$$sinh\ x = x + \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۵}{۵!} + \frac{x^۷}{۷!} + \cdots \qquad (۸)$$

$$cosh\ x = ۱ + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۴}{۴!} + \frac{x^۶}{۶!} + \cdots \qquad (۹)$$

به عنوان مثال، چند تقریب متوالی $\sin x$ با چندجمله‌ای‌های تیلور در شکل ۲ نمایش داده شده است.

?

(۳۳—۱—۳) تابع $f:]۰, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ به صورت $f(x) = \frac{۱}{x}$ را در نظر می‌گیریم. سری تیلور این تابع را در نقطهٔ $a = ۱$ از قلمرو بررسی می‌کنیم. داریم $f'(x) = x^{-۲}$، $f''(x) = (-۱)(-۲)x^{-۳}$، و با استقراء $f^{(n)}(x) = (-۱)^n n! x^{-n-۱}$، پس $f^{(n)}(۱) = (-۱)^n n!$ و $\frac{f^{(n)}(۱)}{n!} = (-۱)^n$. بنابراین سری تیلور تابع در $a = ۱$ به صورت زیر است:

$$۱ - (x-۱) + (x-۱)^۲ - (x-۱)^۳ + - \cdots$$

ملاحظه می‌کنیم که این یک سری هندسی با قدر نسبت $-(x-۱)$ است، پس شرطی لازم و کافی برای همگرایی آن این است که $|-(x-۱)| < ۱$، یا $۰ < x < ۲$. از طرفی دیگر از فرمول مجموع سری هندسی همگرا، برای $|-(x-۱)| < ۱$، داریم:

$$۱ - (x-۱) + (x-۱)^۲ - + \cdots = \frac{۱}{۱-(-(x-۱))} = \frac{۱}{x}$$

بدین ترتیب برای تابع $\frac{1}{x}$ و $a = ۱$، نتیجهٔ زیر در مورد (الف) و (ب) حاصل می‌شود: سری تیلور در بازهٔ $]۰, ۲[$ همگراست و در این بازه به خود تابع میل می‌کند. از آنجا که تابع $\frac{1}{x}$ در $x = ۰$ تعریف نشده است، واگرایی سری تیلور به‌ازای $x = ۰$ شاید عجیب به نظر نرسد، ولی برای $x \geq ۲$ تابع $\frac{1}{x}$ تعریف شده است و در عین حال سری تیلور در $a = ۱$ همگرا نیست.

(۳۳-۱-۴) یک تابع چندجمله‌ای در نظر بگیرید:

$$f(x) = a_۰ + a_۱ x + \cdots + a_k x^k$$

داریم $f^{(n)}(x) = ۰$ اگر $n > k$. دیده‌ایم که اگر به جای x، $a + (x - a)$ جایگزین کنیم، نتیجه می‌شود که:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{۱!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

پس در واقع سری تیلور f در نقطه a برابر چندجمله‌ای تیلور تابع در نقطهٔ a و برابر خود تابع است.

(۳۳-۱-۵) تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^۲}} & x \neq ۰ \\ ۰ & x = ۰ \end{cases}$$

برای $x \neq ۰$ با استفاده مکرر از قاعدهٔ زنجیره‌ای می‌توان ملاحظه کرد که این تابع از هر مرتبه مشتق دارد. در واقع ادعا می‌کنیم که به‌ازای $x = ۰$ نیز تابع از هر مرتبه مشتق دارد و $f^{(n)}(۰) = ۰$ برای هر n. اگر این ادعا ثابت شود نتیجه می‌شود که همه ضرایب سری تیلور، $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$، در $a = ۰$ صفر هستند، پس سری تیلور f در $a = ۰$ به صورت:

$$۰ + ۰ \cdot x + ۰ \cdot x^۲ + \cdots$$

است، پس سری تیلور به‌ازای هر x همگراست ولی به‌جای اینکه به تابع f میل کند، به تابع ثابت صفر میل می‌کند! در واقع تقریب درجهٔ n تابع f در صفر، برای هر n، تابع ثابت صفر است. برای اثبات

ادعا، به طور استقرایی ثابت می‌کنیم که

$$f^{(n)}(x)=\begin{cases} \text{مجموع جملات به شکل } c\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^p} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

در عبارت بالا، c یک عدد حقیقی و p یک عدد صحیح مثبت است. نخست توجه کنید که حکم برای $n=1$ درست است زیرا که برای $x\neq 0$ داریم

$$f'(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}\cdot(\frac{2}{x^3})$$

و

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}-0}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}}$$

اگر $\frac{1}{x}$ را برابر t قرار دهیم حد بالا برابر $\lim_{t\to\pm\infty}\frac{t}{e^{t^2}}$ می‌شود که صفر است. حال فرض می‌کنیم حکم تا n ثابت شده است و حکم را برای $(n+1)$ ثابت می‌کنیم. طبق فرض، مشتق nـ‌ام تابع f در $x\neq 0$ مجموع جملاتی هر یک به شکل $c\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^p}=ce^{-x^{-2}}x^{-p}$ است پس مشتق $(n+1)$ـ‌ام در $x\neq 0$ مجموع جملاتی به شکل زیر است:

$$\begin{aligned}\tfrac{d}{dx}(ce^{-x^{-2}}x^{-p} &= c[2e^{-x^{-2}}x^{-p-3}+e^{-x^{-2}}(-p)x^{-p-1}]\\ &= (2c)\tfrac{e^{-x^{-2}}}{x^{p+3}}-p\tfrac{e^{-x^{-2}}}{x^{p+1}}\end{aligned}$$

پس مشتق $(n+1)$ـ‌ام نیز همچنان مجموع جملاتی به شکل مورد نظر است. حال برای مشتق $(n+1)$ـ‌ام در صفر باید حد زیر را محاسبه کنیم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f^{(n)}(x)-0}{x}$$

که در آن $f^{(n)}(x)$ مجموع جملاتی به شکل $ce^{-x^{-2}}x^{-p}$ است. برای هر چنین چندجمله‌ای داریم:

$$\frac{ce^{-x^{-2}}\cdot x^{-p}}{x}=c\frac{e^{-x^{-2}}}{x^{p+1}}=c\frac{t^{p+1}}{e^{t^2}}$$

که در اینجا t را جایگزین $\frac{1}{x}$ کرده‌ایم. وقتی $x\longrightarrow 0$، داریم، $t\longrightarrow\pm\infty$، و حد بالا صفر است. بدین ترتیب ادعا به اثبات می‌رسد.

مثال‌های متنوع بالا نشان داد که اولاً جواب سؤال (الف) ممکن است به‌ازای بعضی x ها منفی باشد، یعنی سری تیلور تابع f در نقطهٔ a از دامنهٔ f ممکن است به‌ازای بعضی x ها همگرا نباشد، و ثانیاً در جواب (ب)، حتی اگر سری تیلور به‌ازای x همگرا باشد، ممکن است مجموع سری برابر خود تابع نشود. در مقابل دیدیم که در مورد بعضی توابع مأنوس و مهم مانند e^x، $\sin x$، $\cos x$، $sinh\ x$ و $cosh\ x$، سری تیلور در $a = 0$ به‌ازای هر x به خود تابع میل می‌کند. برای درک بهتر نظام حاکم بر این امر، به یک بحث جامع‌تر می‌پردازیم.

فرض کنید c یک عدد حقیقی یا مختلط باشد و c_0، c_1، c_2، ... اعداد حقیقی یا مختلط داده شده برای هر z مختلط، سری زیر را در نظر می‌گیریم:

$$c_0 + c_1(z-c) + c_2(z-c)^2 + \cdots \qquad (10)$$

سری (۱۰) را یک سری توانی در c (یا حول c، یا به مرکز c) می‌نامند. از آنجا که مجموعهٔ اعداد حقیقی زیرمجموعه‌ای از اعداد مختلط است، بحث بعدی را در مورد اعداد مختلط انجام خواهیم داد، که در واقع روشن‌کننده‌تر است، ولی خواننده می‌تواند c_i ها، c و z را حقیقی فرض کند و هیچ تغییری در بحث حاصل نخواهد شد. اگر سری بالا به‌ازای z هایی همگرا باشد، مجموع سری تابعی به دامنهٔ این z ها تعریف می‌کند. شباهت (۱۰) را به نمایش اعداد حقیقی در یک مبنا، مثلاً مبنای ۱۰، ملاحظه کنید. هر عدد مثبت را می‌توانیم به صورت:

$$a_0 + a_1\frac{1}{10} + a_2\left(\frac{1}{10}\right)^2 + \cdots \qquad (11)$$

بنویسیم که در آن a_0 یک عدد صحیح مثبت است و a_1، a_2، ... ارقامی از میان ۰ تا ۹. همان طور که اعداد (مثبت) را به صورت (۱۱) نمایش می‌دهیم، جالب خواهد بود اگر بتوانیم تابع‌ها، یا دست‌کم دستهٔ بزرگی از تابع‌ها، را به صورت واحد (۱۰) نمایش دهیم. در این صورت چندجمله‌ای‌ها متناظر کسرهای اعشاری مختومه می‌شوند. قضیهٔ سادهٔ زیر کلید بحث‌های بعدی است.

(۳۳–۲) قضیه. اعداد مختلط c، c_0، c_1، c_2، ... داده شده‌اند. در این صورت ρ وجود دارد، $0 \le \rho \le \infty$، به طوری که:

الف) به‌ازای هر z که $|z-c|<\rho$، سری توانی (۱۰) همگرای مطلق است.

ب) به‌ازای هر z که $|z-c|>\rho$، سری توانی (۱۰) واگراست.

قبل از ارائه اثبات ۳۳–۲، نتایج حکم آن را مختصراً تشریح می‌کنیم. نخست توجه کنید که به‌ازای $z=c$ تمام جملات سری (۱۰) از اندیس ۱ به بعد صفر می‌شوند و سری به c_0 همگراست. اگر $\rho=0$، (الف) مصداقی ندارد و هر $z\neq c$ در $|z-c|>0$ صدق می‌کند، پس سری (۱۰) به‌ازای هر $z\neq c$ واگراست. بالعکس اگر $\rho=+\infty$، حکم (ب) مصداقی ندارد و به‌ازای هر z، سری (۱۰) همگرای مطلق است. در حالت $0<\rho<\infty$، اگر دایرهٔ به شعاع ρ و مرکز c را در نظر بگیریم، طبق حکم قضیه، سری (۱۰) به‌ازای هر z در درون دایره همگرای مطلق و به‌ازای هر z در بیرون این دایره واگراست. قضیه حکمی در مورد نقاط روی دایره ارائه نمی‌کند و در واقع بررسی این نقاط را باید جداگانه در هر مورد خاص انجام داد. بدین ترتیب نظام مشخصی بر مجموعهٔ نقاط همگرایی و واگرایی یک سری مانند (۱۰) حکمفرماست. در حالتی که همهٔ داده‌ها، یعنی c، c_0، c_1، ... حقیقی باشند و نظر خود را فقط به z های حقیقی محدود کنیم، $x=z$، قضیهٔ ۳۳–۲ نتیجه می‌دهد که بازه‌ای به شعاع ρ حول c وجود دارد به طوری که برای هر x در $]c-\rho, c+\rho[$، سری $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-c)^n$ همگرای مطلق است و به‌ازای هر x که $|x-c|>\rho$، سری $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-c)^n$ واگرا می‌باشد. در مورد دو نقطهٔ انتهایی بازه، یعنی $x=c+\rho$ و $x=c-\rho$، قضیه حکمی نمی‌کند و در واقع بستگی به مورد خاص دارد. توجه کنید که سری تیلور یک تابع f در نقطهٔ a، یک سری توانی حول a است. بدین ترتیب دامنهٔ همگرایی سری تیلور نیز از نظام خاص برخوردار است یعنی بازه‌ای متقارن به مرکز a وجود دارد که سری در تمام نقاط داخل این بازه همگرای مطلق و در همهٔ نقاط بیرون بازه واگراست. مثلاً در مثال ۳۳–۱–۳، تابع $\frac{1}{x}$ حول $a=1$، دیدیم که $\rho=1$ و سری تیلور مربوط بیرون $]0,2[$ واگراست هرچند که $\frac{1}{x}$ برای همه $x\geq 2$ تعریف شده است.

برهان ۳۳–۲. کافی نشان دهیم اگر (۱۰) به‌ازای $z=z_1$ همگرا باشد، آنگاه به‌ازای هر z که $|z-c|<|z_1-c|$، یعنی به‌ازای هر z نزدیکتر از z_1 به c، نیز سری همگرا و در واقع همگرای مطلق

است. پس فرض کنید $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z_1-c)^n$ همگراست. در این صورت کرانی K برای قدرمطلق جملات این سری وجود دارد، یعنی عددی $K > 0$ هست که:

$$|c_n(z_1-c)^n| \leq K \quad : \quad \text{برای هر } n$$

حال z را طوری در نظر بگیرید که $|z-c| < |z_1-c|$ و $\frac{|z-c|}{|z_1-c|}$ را برابر σ قرار دهید، که $\sigma < 1$. داریم

$$|c_n(z-c)^n| = |c_n(z_1-c)^n| \cdot |\frac{z-c}{z_1-c}|^n \leq K \cdot \sigma^n$$

مقایسه با سری هندسی $K\sum_{n=0}^{\infty} \sigma^n$، $0 \leq \sigma < 1$ نشان می‌دهد که $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n(z-c)^n|$ همگراست، یعنی $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-c)^n$ همگرای مطلق است و حکم به اثبات می‌رسد. $\square$

عدد ρ را شعاع همگرایی سری (۱۰) می‌نامند و گوی باز $|z-c| < \rho$ (یا در حالت حقیقی بازهٔ باز $]c-\rho, c+\rho[$) ناحیه همگرایی سری خوانده می‌شود. محاسبهٔ ρ بسیاری اوقات ساده است. در واقع می‌توان بر اساس هر آزمون همگرایی مطلق روشی برای محاسبهٔ ρ ارائه کرد. مثلاً آزمون نسبت را در نظر بگیرید. فرض کنید $\lim_{n\to+\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}$ وجود دارد و برابر L است ($0 \leq L \leq +\infty$). در این صورت ادعا می‌کنیم که:

$$\rho = \frac{1}{L} \tag{۱۲}$$

در واقع حد نسبت قدرمطلق دو جملهٔ توانی (۱۰) عبارت است از:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}(z-c)^{n+1}|}{|c_n(z-c)^n|} = \lim_{n\to\infty} (\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}|z-c|) = L \cdot |z-c|$$

اگر این حد کوچکتر از ۱ باشد، یعنی $|z-c| < \frac{1}{L}$، سری همگرای مطلق است، و اگر بزرگتر از ۱ باشد، یعنی $|z-c| > \frac{1}{L}$، سری واگراست، پس $\frac{1}{L}$ شعاع همگرایی سری است.

به همین ترتیب با استفاده از آزمون ریشه، چنانچه $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ وجود داشته و برابر L باشد، مجدداً $\rho = \frac{1}{L}$ شعاع همگرایی $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-c)^n$ خواهد بود.

(۳۳–۳) چند مثال

(۳۳–۳–۱) در مورد سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$، قبلاً دیدیم (مثال ۳۳–۱–۱) به‌ازای هر z حقیقی این سری به e^x میل می‌کند. حال چون هر z مختلط نزدیکتر از یک x حقیقی به ۰ است (مثلاً نزدیکتر از $|z|$۲)، از قضیه نتیجه می‌شود که $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ به‌ازای هر z همگرا (ی مطلق) است. مجموع این سری را به تبعیت از حالت حقیقی e^z یا $\exp z$ می‌نامیم. بدون استفاده از مطالب چندجمله‌ای تیلور و باقیمانده نیز می‌توان شعاع همگرایی این سری را به‌دست آورد. مثلاً از آزمون نسبت، داریم $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$، پس $\rho = +\infty$.

(۳۳–۳–۲) سری‌های توانی طرف راست (۶)، (۷)، (۸) و (۹) را با جایگزینی z مختلط به‌جای x در نظر بگیرید. از آنجا که هر یک از این سری‌ها به‌ازای هر x حقیقی همگراست، از قضیه نتیجه می‌شود که این سری‌ها به‌ازای هر z مختلط نیز همگرا می‌شوند. در واقع $\sin z$، $\cos z$، $sinh\ z$ و $cosh\ z$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad , \quad \cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} \qquad (13)$$

$$sinh\ z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad , \quad cosh\ z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} \qquad (14)$$

سایر توابع مثلثاتی و هذلولوی برای مقادیر مختلط نیز برحسب $\sin z$، $\cos z$، $sinh\ z$ و $cosh\ z$ تعریف می‌شوند. مجدداً می‌توان مستقیماً نشان داد شعاع همگرایی هر یک از سری‌های توانی بالا $+\infty$ است. مثلاً برای $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}$ داریم $c_n = 0$ اگر n فرد باشد و $c_n = \frac{(-1)^k}{(2k)!}$ اگر $n = 2k$. برای n فرد $\sqrt[n]{|c_n|} = 0$ و برای n زوج، $n = 2k$، $a_n = \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$. نشان می‌دهیم $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. چون برای هر عدد صحیح مثبت m، $\sqrt[2k]{m} \geq 1$ ، داریم

$$\frac{1}{\sqrt[2k]{(2k)!}} \leq \frac{1}{\sqrt[2k]{2k}} \cdots\cdots \frac{1}{\sqrt[2k]{k+1}} \leq (\frac{1}{\sqrt[n]{k+1}})^k = \frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

و حد جملهٔ طرف راست صفر است وقتی $k \to +\infty$.

(۳۳–۳–۳) برای سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty}(n!)z^n$، از آنجا که $\frac{(n+1)!}{n!} \longrightarrow +\infty$ وقتی $n \longrightarrow +\infty$، داریم $\rho = 0$.

(۳۳–۳–۴) برای عدد حقیقی و نامنفی داده شدهٔ p، سری توانی p را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^p}$$

از آنجا که $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^p}} = \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{\sqrt[n]{n}})^p$ برابر ۱ است، داریم $\rho = 1$، p هر چه باشد. بدین ترتیب برای هر z با $|z| < 1$ این سری همگرا و به‌ازای هر z با $|z| > 1$ این سری واگراست. برای مقادیر مختلف p، رفتار این سری روی دایرهٔ $|z| = 1$ متفاوت است. برای $p > 1$، چون $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \sum_{n=1}^{\infty} |\frac{z^n}{n^p}|$ همگراست. سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^p}$ به‌ازای هر z با $|z| = 1$ همگراست. برای $p = 1$، سری هارمونیک $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ که به‌ازای $z = 1$ به‌دست می‌آید واگراست و لیکن سری متناوب $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$، برای $z = -1$، همگراست. برای $p = 0$، سری هندسی $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ به‌ازای هر z با $|z| = 1$ واگراست.

سری تیلور و سری توانی (۲)

در جلسه قبل نخست سری تیلور و سپس به طور کلی سری توانی را در نظر گرفتیم. هر سری تیلور یک سری توانی است. یکی از دستاوردهای بحث این جلسه این خواهد بود که هر سری توانی با شعاع همگرایی مثبت، خود سری تیلور تابعی است که در ناحیه همگرایی سری به آن میل می‌کند. در این جلسه بحث را به سری‌های توانی حقیقی محدود خواهیم کرد هر چند که همین ملاحظات در حالت مختلط نیز معتبر است. دلیل محدود کردن بحث این است که مفاهیم مشتق و انتگرال را که در اینجا به‌کار گرفته خواهد شد در حال حاضر فقط برای تابع‌های حقیقی در اختیار داریم. در یکی دو جا اشاراتی به حالت مختلط نیز خواهد شد. بدین ترتیب سری توانی

$$a_۰ + a_۱(x-a) + a_۲(x-a)^۲ + \cdots \qquad (۱)$$

را در نظر می‌گیریم که در آن a، $a_۰$، $a_۱$، $a_۲$، ... اعداد حقیقی داده شده‌اند و x متغیر حقیقی است. طبق قضیهٔ جلسهٔ قبل، ρ وجود دارد، $۰ \leq \rho \leq +\infty$ که سری فوق برای هر x با $|x-a| < \rho$ همگرای مطلق است و برای هر x با $|x-a| > \rho$ واگرا. ρ را شعاع همگرایی سری توانی خواندیم. قضیهٔ اساسی زیر که در اینجا ثابت نخواهیم کرد جمع‌بندی خواص مهم (۱) است:

فرض کنید $\rho > ۰$، پس $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n(x-a)^n$ برای x با $|x-a| < \rho$ به عددی میل می‌کند که آن را $f(x)$ می‌نامیم. بدین ترتیب تابعی $f:]a-\rho, a+\rho[\longrightarrow \mathbb{R}$ تعریف می‌شود. داریم:

(۳۴—۱) قضیه. الف) f در $]a-\rho, a+\rho[$ مشتق‌پذیر است و به‌ازای هر x در این بازه داریم

$$f'(x) = \sum_{n=۱}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-۱} \qquad (۲)$$

ب) به‌ازای هر x در بازهٔ $]a-\rho, a+\rho[$، انتگرال $\int_a^x f$ وجود دارد و:

$$\int_a^x f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1} \qquad (3)$$

تذکر چند نکته در اینجا ضروری است:

(۳۴—۲) یادداشت

(۳۴—۲—۱) توجه کنید که (۲) و (۳) بیانگر این مطلب هستند که برای مشتق‌گیری یا انتگرال‌گیری از f می‌توانیم از تک تک جملات سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ مشتق و انتگرال گرفته و سپس مجموع سری مشتق‌ها یا انتگرال‌ها را در نظر بگیریم. این مطلب ممکن است واضح به نظر برسد، و در واقع برای مجموع‌های متناهی درست است، ولی برای مجموع یک سری (که در واقع یک حد است) به طور کلی درست نیست. به زودی در بررسی سری فوریه خواهیم دید که مجموع یک سری تابع‌های مشتق‌پذیر ممکن است اصلاً پیوسته نباشد. بدین ترتیب قضیه ۳۴—۱ تعمیم قضیه مجموع مشتق = مشتق مجموع، و مجموع انتگرال = انتگرال مجموع، به جملات تشکیل‌دهندهٔ یک سری توانی است.

(۳۴—۲—۲) حکم (الف) نشان می‌دهد که شعاع همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-a)^{n-1}$ دست‌کم ρ (= شعاع همگرایی سری توانی اولیه $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$) است زیرا که برای x در $]a-\rho, a+\rho[$ سری بالا به عدد $f'(x)$ میل می‌کند. در واقع شعاع همگرایی سری مشتق‌ها دقیقاً برابر ρ است زیرا که طبق (ب) شعاع همگرایی سری تابع‌های اولیه نیز دست‌کم ρ است. بدین ترتیب شعاع‌های همگرایی سری‌های توانی $\sum a_n(x-a)^n$، $\sum na_n(x-a)^{n-1}$ و $\sum \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}$ هر سه برابرند. رفتار این سری‌ها در نقاط انتهایی $a \pm \rho$ ممکن است متفاوت باشد همچنان که مثال‌های آینده نشان خواهد داد.

(۳۴—۳) چند مثال

(۳۴—۳—۱) در مثال ۳۱—۱—۳ دیدیم که سری توانی (هندسی) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n$ در

$|x-۱|<۱$، یعنی $۰<x<۲$، به تابع $\frac{۱}{x}$ همگراست:

$$\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n(x-۱)^n=\frac{۱}{x} \quad , \quad ۰<x<۲ \tag{۴}$$

با مشتق‌گیری طبق قسمت (الف) قضیهٔ ۳۴—۱ حاصل می‌شود:

$$\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^n n(x-۱)^{n-۱}=\frac{-۱}{x^۲} \quad , \quad ۰<x<۲ \tag{۵}$$

با مشتق‌گیری مجدد از این سری توانی داریم:

$$\sum_{n=۲}^{\infty}(-۱)^n(n-۱)(x-۱)^{n-۲}=\frac{۲}{x^۳} \quad , \quad ۰<x<۲ \tag{۶}$$

و به این ترتیب می‌توان با مشتق‌گیری مکرر یک نمایش سری توانی برای تابع $\frac{۱}{x^k}$ در $۰<x<۲$ به‌دست آورد.

(۳۴—۲—۲) اگر قسمت (ب) قضیهٔ ۳۴—۱ را در مورد (۴) به‌کار گیریم حاصل می‌شود:

$$\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{n+۱}(x-۱)^{n+۱}=\int_۱^x\frac{۱}{t}dt \quad , \quad ۰<x<۲$$

یا

$$(x-۱)-\frac{(x-۱)^۲}{۲}+\frac{(x-۱)^۳}{۳}-+\cdots=\ln x \quad , \quad ۰<x<۲ \tag{۷}$$

مقایسهٔ (۴) و (۷) در نقاط انتهایی بازهٔ همگرایی قابل توجه است. سری توانی (۴) که یک سری هندسی است در هیچ‌یک از دو نقطهٔ انتهایی $x=۰,۲$ همگرا نیست. سری توانی سمت چپ (۷) در $x=۰$ برابر منفی سری هارمونیک است و همگرا نمی‌باشد ولی به‌ازای $x=۲$ سری متناوب زیر به‌دست می‌آید:

$$۱-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۴}+-\cdots$$

که همگراست. سؤالی که به طور طبیعی مطرح می‌شود این است که آیا مجموع این سری را می‌توان با جایگزینی $x=۲$ در سمت راست (۷) به‌دست آورد، یعنی آیا $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n+۱}}{n}=\ln ۲$؟ قضیهٔ زیر از آبل (که در اینجا ثابت نخواهد شد) گویای این مطلب در حالت کلی است:

(۳۴—۴) قضیه. فرض کنید سری توانی (۱) دارای شعاع همگرایی ρ است، $0 < \rho < +\infty$ و در $|x-a| < \rho$ به تابع f میل می‌کند. اگر به‌ازای نقطهٔ انتهایی $x = a + p$ (به ترتیب نقطهٔ انتهایی $x = a - p$) سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n$ (به ترتیب $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \rho^n$) همگرا باشد، آنگاه داریم

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n = \lim_{x \to (a-\rho)^-} f(x) \qquad \text{(به ترتیب} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \rho^n = \lim_{x \to (a-\rho)^+} f(x)) \tag{8}$$

در مورد مثال بالا، از آنجا که $\ln x$ در $x = 2$ پیوسته است، حد آن همان مقدار $\ln 2$ می‌باشد و

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \cdots = \ln 2 \tag{9}$$

اکنون به بهره‌برداری از قضیهٔ ۳۴—۱ ادامه می‌دهیم. همان طور که در یادداشت ۳۴—۲—۲ و در مثال ۳۴—۳—۱ دیدیم، سری مشتق یک سری توانی، یعنی (۲)، خود در $|x-a| < \rho$ همگراست (به تابع f')، پس با استفاده مکرر از قضیه، می‌توان نتیجه گرفت که تابع $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$، $|x-a| < \rho$، دارای مشتق از هر مرتبه در بازهٔ $]a-\rho, a+\rho[$ است و

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n (x-a)^{n-k} \quad , \quad a - \rho < x < a + \rho \tag{10}$$

در نقطهٔ $x = a$ نتیجه می‌شود که:

$$f^{(k)}(a) = (k!) a_k \tag{11}$$

زیرا که به‌ازای $n > k$ جملات $(x-a)^{n-k}$ صفر می‌شوند. این نتیجه رابطهٔ تنگاتنگ سری توانی (۱) و تابعی را که توسط آن تعریف می‌شود نشان می‌دهد. در واقع می‌توان نوشت:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

یعنی سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ در واقع سری تیلور تابع f در نقطهٔ a است! بدین ترتیب نه تنها هر سری تیلور یک سری توانی است، بلکه هر سری توانی، سری تیلور تابعی است که آن سری توانی در $|x-a| < \rho$ تعریف می‌کند. قضیه زیر آخرین قضیه از دنباله قضایایی است که بدون اثبات به ذکر صورت آن خواهیم پرداخت. ساده‌ترین و طبیعی‌ترین روش اثبات قضایایی که در این جلسه بدون

اثبات ذکر شدند گذر به صفحهٔ مختلط و استفاده از مشتق و انتگرال تابعی مختلط است که این کار زمینه‌سازی قابل توجهی نیاز دارد. می‌توان این قضایا را در محدودهٔ اعداد حقیقی ثابت کرد ولی اثبات‌ها به نسبت دشوارند.

فرض کنید تابع $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ داده شده است. f را در نقطهٔ درونی a از S تحلیلی می‌نامیم در صورتی که f دارای مشتق از هر مرتبه در a باشد و عددی σ وجود داشته باشد که بازهٔ $]a-\sigma, a+\sigma[$ در S بوده و سری تیلور f در a به‌ازای هر x در $]a-\sigma, a+\sigma[$ به $f(x)$ میل کند.

به عنوان مثال، در جلسه قبل دیدیم که توابع e^x، $\sin x$، $\cos x$، $sinh\ x$، $cosh\ x$ در $a = ۰$ تحلیلی هستند (و در واقع $\sigma = +\infty$)، تابع $\frac{1}{x}$ در $a = ۱$ تحلیلی است با $\sigma = ۱$، و تابع

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^{-۲}} & x \neq ۰ \\ ۰ & x = ۰ \end{cases}$$

در $a = ۰$ تحلیلی نیست. حال داریم:

(۳۴—۵) قضیه. فرض کنید $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ در نقطهٔ درونی a از S تحلیلی است و سری تیلور آن در نقطهٔ a، یعنی $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$، در $|x-a| < \sigma$ به $f(x)$ میل می‌کند. در این صورت برای هر b در $]a-\sigma, a+\sigma[$، تابع f در b نیز تحلیلی است و شعاع همگرایی سری تیلور f به تابع f در b دست‌کم به اندازهٔ حداقل فاصلهٔ b از دو انتهای $]a-\sigma, a+\sigma[$ است. □

(۳۴—٦) چند مثال

(۳۴—٦—۱) در مورد پنج تابع e^x و سینوس و کسینوس مثلثاتی و هذلولوی، دیدیم که تابع‌ها در $a = ۰$ تحلیلی هستند و $\sigma = +\infty$. پس به‌ازای هر b حقیقی، تابع‌ها در b تحلیلی هستند و سری تیلور در b به‌ازای همهٔ مقادیر x به تابع میل می‌کند. در مورد این پنج تابع، به سبب سادگی ضرایب، می‌توان موضوع را مستقیماً بدون استفاده از قضیهٔ بالا تحقیق کرد و این کار را به خواننده واگذار می‌کنیم. در اینجا سری تیلور e^x و $\sin x$ را در نقاطی غیر از $a = ۰$ می‌نویسیم. برای e^x، نقطهٔ دلخواه a را در نظر

بگیرید. داریم

$$\frac{d^n}{dx^n}(e^x)|_{x=a} = e^a$$

پس سری تیلور e^x در نقطهٔ a به شکل زیر است:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^a}{n!}(x-a)^n \qquad (12)$$

البته این فرمول، با فاکتورگیری از e^a، چیزی جز $e^x = e^a \cdot e^{x-a}$ نیست.

سری تیلور $\sin x$ را در $x = \frac{\pi}{2}$ می‌نویسیم. داریم

$$\frac{d^n}{dx^n}(\sin x)|_{x=\frac{\pi}{2}} = \begin{cases} 0 & n \text{ فرد} \\ (-1)^k & n \text{ زوج} \end{cases}$$

بنابراین

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}(x-\frac{\pi}{2})^{2k} \qquad (13)$$

می‌توان (۱۲) را از بسط $\sin((x-\frac{\pi}{2})+\frac{\pi}{2})$ و سری تیلور $\cos x$ در $a = 0$ نیز نتیجه گرفت.

(۳۴ـ۶ـ۲) نشان می‌دهیم تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ در هر نقطهٔ $a \neq 0$ تحلیلی است و سری تیلور آن در شعاع $|x-a| < |a|$ به خود تابع میل می‌کند. در حالت $a = 1$، این همان مثال ۳۳ـ۱ـ۳ جلسهٔ قبل است. داریم:

$$\frac{1}{x} = (\frac{1}{a})\ \frac{1}{1+\frac{x-a}{a}}$$

برای $|\frac{x-a}{a}| < 1$، یا $|x-a| < |a|$، کسر $\frac{1}{1+\frac{x-a}{a}}$ برابر مجموع سری هندسی $\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{x-a}{a})^n$ است پس:

$$|x-a| < |a| \quad , \quad \frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^{n+1}}(x-a)^n \qquad (14)$$

با مشتق‌گیری متوالی از این عبارت می‌توان سری تیلور $\frac{1}{x^k}$، برای عدد صحیح مثبت k، را در $a \neq 0$ نوشت. توجه کنید که نمی‌توان انتظار داشت شعاع همگرایی سری از $|a|$ تجاوز کند زیرا نقطهٔ O که در آن f تعریف نشده است در فاصله $|a|$ از a قرار دارد.

(۳۴–۶–۳) به روال مثال قبل، با استفاده از سری هندسی، سری تیلور $\frac{1}{1+x}$ را در $|x| < 1$ داریم:

$$|x| < 1 \quad , \quad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + - \cdots \tag{15}$$

در اینجا نیز چون تابع سمت چپ در $x = -1$ تعریف نشده است. شعاع همگرایی سری توانی سمت راست نمی‌تواند از ۱ تجاوز کند. ولی برای $|x| < 1$، داریم $|x^2| < 1$، پس با جایگزینی:

$$|x| < 1 \quad , \quad \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + - \cdots$$

نکتهٔ جالب توجه در مورد این سری اینکه طرف راست، که یک سری هندسی است، فقط در $|x| < 1$ همگراست، ولی طرف چپ به‌ازای هر x تعریف شده است و در واقع می‌توان نشان داد در هر نقطه a تحلیلی است. در اینجا شعاع همگرایی سری تیلور $\frac{1}{1+x^2}$ در $a = 0$ برابر ۱ است در حالی که تابع در سراسر $\mathbb{R}$ تعریف شده است. در پس این مطلب اعداد مختلط نهفته‌اند. توجه کنید که $\frac{1}{1+z^2}$ به‌ازای $z = \pm i$ تعریف شده نیست، بنابراین شعاع همگرایی سری تیلور $\frac{1}{1+z^2}$ حول $a = 0$ نمی‌تواند از $\rho = 1$ تجاوز کند!

(۳۴–۶–۴) فرض کنید $a > 0$. با انتگرال‌گیری از (۱۴)، سری تیلور $\ln x$ را در a به‌دست می‌آوریم:

$$|x-a| < a \quad , \quad \ln x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)a^{n+1}}(x-a)^{n+1} \tag{16}$$

این سری را قبلاً به‌ازای $a = 1$ دیده‌ایم. با قرار دادن $a = 1$ و $t = x - 1$، شکل معمول‌تری از (۱۶) حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} |t| < 1 \quad , \quad \ln(1+t) &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} t^n \\ &= 1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{3} - + \cdots \end{aligned} \tag{17}$$

(۳۴–۶–۵) انتگرال‌گیری از (۱۵) نتیجه می‌دهد:

$$|x| < 1 \quad , \quad \tan^{-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - + \cdots \tag{18}$$

در دو نقطهٔ انتهایی بازهٔ همگرایی، یعنی $x = \pm ۱$، سری‌های متناوب همگرا حاصل می‌شوند و طبق قضیهٔ آبل داریم:

$$\frac{\pi}{۴} = ۱ - \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۵} - \frac{۱}{۷} + - \cdots \qquad (۱۹)$$

سری تیلور و سری توانی (۳)

یکی از پر استفاده‌ترین نمایش‌های تابعی به صورت سری تیلور، نمایش تابع $f(x) = (1+x)^{\alpha}$، $|x| < 1$، α عدد حقیقی دلخواه، است. این نمایش را نیوتن در آغاز تحقیقات خود در حساب دیفرانسیل و انتگرال کشف کرد و تعمیمی از اتحاد $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ است.

(۳۵–۱) سری دوجمله‌ای فرض کنید α یک عدد حقیقی داده شده است. تابع:

$$f(x) = (1+x)^{\alpha} = \exp(\alpha \ln(1+x))$$

برای $x > -1$ تعریف شده است و ترکیب بالا نشان می‌دهد که در این دامنه دارای مشتق از هر مرتبه است. نخست سری تیلور f را در $a = 0$ می‌نویسیم و سپس نشان می‌دهیم این سری در $|x| < 1$ به خود تابع همگراست. مشتقات f به سادگی محاسبه می‌شوند:

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}, \ldots, f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k} \qquad (1)$$

بنابراین سری تیلور f در $a = 0$ به صورت زیر است:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots \qquad (2)$$

ضریب $\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$ را گاهی به $\binom{\alpha}{n}$ نمایش می‌دهند زیرا که در واقع برای عدد صحیح $\alpha > n$، داریم $\frac{\alpha!}{n!(\alpha-n)!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$. شعاع همگرایی سری توانی (۲) را محاسبه می‌کنیم. از آزمون نسبت داریم:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\binom{\alpha}{n+1}|}{|\binom{\alpha}{n}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|\alpha-n|}{n+1} = 1$$

پس شعاع همگرایی برابر ۱ است. مجموع سری فوق را در $|x| < ۱$ به $g(x)$ نمایش می‌دهیم. باید ثابت کنیم $g(x) = f(x)$. برای این کار از روشی غیر مستقیم استفاده می‌کنیم که در موارد مشابه دیگر نیز گاهی مورد استفاده قرار می‌گیرد. طبق قضیهٔ (۳۴−۱)، قسمت (الف)، می‌توان از g در $]-۱,۱[$ جمله به جمله مشتق گرفت و داریم:

$$g'(x) = \alpha + \alpha(\alpha-۱)x + \frac{\alpha(\alpha-۱)(\alpha-۲)}{۲!}x^۲ + \cdots$$

$$xg'(x) = \alpha x + \alpha(\alpha-۱)x^۲ + \frac{\alpha(\alpha-۱)(\alpha-۲)}{۲!}x^۳ + \cdots$$

پس با جمع جملات هم مرتبه داریم:

$$\begin{aligned}(۱+x)g'(x) &= \alpha + \alpha((\alpha-۱)+۱)x + \alpha\left(\frac{(\alpha-۱)(\alpha-۲)}{۲!} + (\alpha-۱)\right)x^۲ + \cdots \\ &= \alpha[۱ + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-۱)}{۲!}x^۲ + \cdots] \\ &= \alpha g(x)\end{aligned}$$

بدین ترتیب تابع g در معادلهٔ دیفرانسیل زیر صدق می‌کند:

$$|x| < ۱ \quad , \quad (۱+x)g'(x) = \alpha g(x) \qquad (۳)$$

اگر بنویسیم $y = g(x)$، با توجه به اینکه در $|x| < ۱$، $۱ + x \neq ۰$، می‌توان نوشت:

$$|x| < ۱ \quad , \quad \frac{dy}{dx} = \alpha\frac{y}{۱+x} \qquad (۴)$$

طبق قضیهٔ اساسی وجود و یگانگی جواب معادلهٔ دیفرانسیل عادی، این دستگاه به‌ازای شرط آغازی ($x = ۰$ ،$y = ۱$) جواب یگانه دارد. از طرفی دیگر تابع $f(x) = (۱+x)^\alpha$ واجد این شرط آغازی است و با مشتق‌گیری ملاحظه می‌شود که در (۴) صدق می‌کند، پس در واقع ثابت کرده‌ایم که:

$$|x| < ۱ \quad , \quad g(x) = (۱+x)^\alpha$$

یعنی سری تیلور تابع $f(x) = (۱+x)^\alpha$ در $|x| < ۱$ به خود تابع میل می‌کند.

(۳۵–۲) چند مثال

(۳۵–۲–۱) اگر $\alpha = p$ یک عدد صحیح مثبت باشد، برای $f(x) = (1+x)^p$ مشتقات از مرتبهٔ بزرگتر از p صفر می‌شوند و در واقع بسط دوجمله‌ای مأنوس

$$(1+x)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} x^k$$

به‌دست می‌آید. این نمایش در واقع برای هر x حقیقی برقرار است.

(۳۵–۲–۲) برای $\alpha = -p$، n عدد صحیح مثبت، داریم

$$|x| < 1 \quad , \quad \begin{aligned} \frac{1}{(1+x)^p} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{n+p-1}{n} x^n \end{aligned} \tag{۵}$$

که $\binom{n+p-1}{n} = \frac{(n+p-1)!}{(p-1)!n!}$. سری (۵) در محاسبهٔ تقریبی عبارتی به صورت $\frac{1}{(a+h)^p}$ که در آن $|h|$ نسبت به $|a|$ کوچک است مؤثر واقع می‌شود. برای $|h| < |a|$ داریم $|\frac{h}{a}| < 1$، پس:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(a+h)^p} &= \left(\frac{1}{a^p}\right) \frac{1}{(1+\frac{h}{a})^p} \\ &= \left(\frac{1}{a^p}\right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{n+p-1}{n} \left(\frac{h}{a}\right)^n \end{aligned}$$

یا:

$$|h| < |a| \quad , \quad \frac{1}{(a+h)^p} = \frac{1}{a^p} - \frac{ph}{a^{p+1}} + \frac{p(p+1)h^2}{2a^{p+2}} - + \cdots \tag{۶}$$

برای $|h|$ بسیار کوچک، حتی تقریب خطی

$$\frac{1}{(a+h)^p} - \frac{1}{a^p} \simeq \frac{ph}{a^{p+1}} \tag{۷}$$

برای بسیاری مقاصد بسنده می‌کند.

لازم به ذکر است که این مثال خاص، یعنی $\alpha = -p$، را می‌توانستیم از مشتق‌گیری مکرر سری هندسی مربوط به تابع $\frac{1}{1+x}$ نیز به‌دست آوریم.

(۳۵—۲—۳) حالت $\alpha = -\frac{۱}{۲}$ را در نظر می‌گیریم:

$$|x| < ۱ \quad , \quad \frac{۱}{\sqrt{۱+x}} = ۱ - \frac{۱}{۲}x + \frac{(-\frac{۱}{۲})(-\frac{۲}{۳})}{۱ \times ۲}x^۲ + \frac{(-\frac{۱}{۲})(-\frac{۲}{۳})(-\frac{۵}{۲})}{۱ \times ۲ \times ۳}x^۳ + \cdots$$

با جایگزینی $-x$ به جای x داریم:

$$|x| < ۱ \quad , \quad \frac{۱}{\sqrt{۱-x}} = ۱ + (\frac{۱}{۲})x + \frac{(۱ \times ۳)}{(۲ \times ۴)}x^۲ + \frac{(۱ \times ۳ \times ۵)}{(۲ \times ۴ \times ۶)}x^۳ + \cdots$$

و اگر $x^۲$ را جایگزین x کنیم

$$|x| < ۱ \quad , \quad \frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}} = ۱ + (\frac{۱}{۲})x^۲ + \frac{(۱ \times ۳)}{(۲ \times ۴)}x^۴ + \frac{(۱ \times ۳ \times ۵)}{(۲ \times ۴ \times ۶)}x^۶ + \cdots \qquad (۸)$$

حال با استفاده از انتگرال‌گیری جمله به جمله، قضیهٔ ۳۴—۱، ب، داریم:

$$|x| < ۱ \quad , \quad \sin^{-۱} x = x + (\frac{۱}{۲})\frac{x^۳}{۳} + (\frac{(۱ \times ۳)}{(۲ \times ۴)})\frac{x^۵}{۵} + \cdots \qquad (۹)$$

که سری تیلور $\sin^{-۱} x$ در $a = ۰$ است.

در اینجا لازم است به عملیات جبری بین سری‌های توانی اشاره‌ای داشته باشیم. فرض کنید دو سری توانی حول a، $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n(x-a)^n$ به شعاع همگرایی $\rho_۱$ و $\sum_{n=۰}^{\infty} b_n(x-a)^n$ به شعاع همگرایی $\rho_۲$ داده شده باشند. فرض کنید سری اول در $|x-a| < \rho_۱$ به $f(x)$ و سری دوم در $|x-a| < \rho_۲$ به $g(x)$ میل می‌کند. برای $\rho = \min\{\rho_۱, \rho_۲\}$ و $|x-a| < \rho$، هر دو سری همگرا هستند، پس با توجه به اینکه سری مجموع جملات متناظر دو سری همگرا، به مجموع حد دو سری میل می‌کند، داریم:

$$|x-a| < \rho \quad , \quad \sum_{n=۰}^{\infty}(a_n + b_n)(x-a)^n = f(x) + g(x) \qquad (۱۰)$$

برای به‌دست آوردن یک سری توانی که به $f(x)g(x)$ میل کند به طریق زیر عمل می‌کنیم. توجه کنید که برای اینکه حاصل‌ضرب دو جملهٔ سری‌های توانی داده شده از درجهٔ n باشد لازم و کافی است که مجموع اندیس‌های ضرایب برابر n شود. تعریف می‌کنیم:

$$c_۰ = a_۰b_۰, c_۱ = a_۰b_۱ + a_۱b_۰, \ldots, c_n = a_۰b_n + a_۱b_{n-۱} + \cdots + a_nb_۰ \qquad (۱۱)$$

سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ را حاصل‌ضرب کوشی دو سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n$ می‌نامند.

(۳–۳۵) گزاره. برای $|x-a| < \rho$، که $\rho = \min\{\rho_1, \rho_2\}$، حاصل‌ضرب کوشی به $f(x)g(x)$ همگراست.

برهان. داریم $|c_n| \le |a_0||b_n| + \cdots + |a_n||b_0|$، پس:

$$|c_0| + |c_1||x-a| + \cdots + |c_n||x-a|^n \le (|a_0| + \cdots + |a_n||x-a|^n)(|b_0| + \cdots + |b_n||x-a|^n)$$

از طرفی دیگر سری‌های $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n$ به‌ازای $|x-a| < \rho$ همگرای مطلق هستند، پس طرف راست نامساوی بالا کراندار است. نتیجه اینکه مجموع‌های جزیی $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ نیز به طور مطلق همگرا هستند. بنابراین می‌توان مجموع جملات $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ را جابجا کرد بدون اینکه در مجموع تغییری حاصل شود. □

می‌توان ثابت کرد که اگر $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ در $|x-a| < \rho_1$ و $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n$ در $|x-a| < \rho_2$، و $g(x) \neq 0$ به‌ازای هر x در $|x-a| < \rho_2$، آنگاه $\rho > 0$ وجود دارد که $\frac{f(x)}{g(x)} = h(x)$ در $|x-a| < \rho$ تحلیلی است. در این صورت با نوشتن $h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x-a)^n$ و با استفاده از حاصل‌ضرب کوشی، می‌توان با مقایسهٔ ضرایب دو طرف $f(x) = g(x)h(x)$، ضرایب c_n را محاسبه کرد. این مطلب را با یک مثال نشان می‌دهیم.

مثال. فرض کنید می‌دانیم $\tan x$ در $a = 0$ تحلیلی است، چند ضریب اول سری تیلور آن را در $a = 0$ محاسبه کنید. محاسبهٔ مستقیم از طریق مشتق‌گیری و محاسبهٔ ضرایب $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ به سرعت افزایش n پیچیده می‌شود. به جای آن می‌نویسیم

$$\sin x = (\cos x)(\tan x)$$

پس اگر $\sum_{n=0}^{\infty} t_n x^n$ بسط تیلور $\tan x$ در $a = 0$ باشد داریم:

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \cdots = (1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \cdots)(t_0 + t_1 x + t_2 x^2 + \cdots)$$

با محاسبهٔ حاصل‌ضرب کوشی طرف راست و برابر قرار دادن ضرایب آن با ضرایب متناظر طرف چپ داریم:

$$\begin{aligned}
0 &= t_0 \\
1 &= t_1 \\
0 &= t_2 - \tfrac{1}{2}t_0 \\
-\tfrac{1}{6} &= t_3 - \tfrac{1}{2}t_1 \\
0 &= t_4 - \tfrac{1}{2}t_2 + \tfrac{1}{4!}t_0 \\
\tfrac{1}{120} &= t_5 - \tfrac{1}{2}t_3 + \tfrac{1}{4!}t_1 \\
\vdots &\ \ \vdots\ \ \vdots
\end{aligned}$$

می‌توان این دستگاه را از بالا به پایین حل کرد و متوالیاً ضرایب t_n را به‌دست آورد:

$$t_0 = 0\ ,\ t_1 = 1\ ,\ t_2 = 0\ ,\ t_3 = \frac{1}{3}\ ,\ t_4 = 0\ ,\ t_5 = \frac{2}{15}\ ,\ \ldots$$

توجه کنید که چون $\tan x$ یک تابع فرد است، مشتقات آن از مرتبهٔ زوج همه فرد هستند و در $a = 0$ برابر صفر می‌شوند، بنابراین در سری تیلور $\tan x$ در $a = 0$ فقط جملات درجهٔ فرد ظاهر می‌شوند. در بالا ضرایب را تا درجهٔ ۵ محاسبه کردیم:

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots \qquad (12)$$

(۳۵—۴) محاسبهٔ حد به کمک سری تیلور

بسیاری از محاسبات حدی که در مباحث مقدماتی از طریق استفادهٔ مکرر از روش‌هایی مانند قاعدهٔ هوپیتال حل می‌شوند می‌توان به سادگی با توجه به سری تیلور انجام داد. به مثال زیر توجه کنید

مثال. می‌خواهیم $\lim_{x\to 0} \frac{x^6\cos x - x^5\sin x}{x^8}$ را محاسبه کنیم. محاسبه این حد از طریق قاعدهٔ هوپیتال هشت بار مشتق‌گیری می‌طلبد ولی توجه کنید که:

$$\begin{aligned} x^6\cos x - x^5\sin x &= x^6(1 - \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^4}{4!} - + \cdots) - x^5(x - \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^5}{5!} - + \cdots) \\ &= (-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{6})x^8 + (\text{جملات توان } 10 \text{ در } x \text{ به بالا}) \end{aligned}$$

بنابراین برای $x \neq 0$ داریم:

$$\frac{x^6\cos x - x^5\sin x}{x^8} = (-\frac{1}{3}) + (\text{جملات توان } 2 \text{ در } x \text{ به بالا})$$

بنابراین حد عبارت بالا وقتی x به 0 میل کند برابر $-\frac{1}{3}$ است.

سری فوریه

تا این مرحله با چندجمله‌ای‌های تیلور به عنوان حربهٔ تقریب توابع و سری تیلور به عنوان روش نمایشی برای خانوادهٔ بزرگی از توابع آشنایی پیدا کرده‌ایم. هر یک از این دو، از مجموع عناصر ساختی $(x-a)^n$ با ضرایب مناسب تشکیل شده‌اند. یک خصوصیت مهم تقریب به وسیلهٔ چندجمله‌ای تیلور "موضعی" بودن آن است بدین معنی که هرچه x به a نزدیک‌تر باشد، تقریب دقیق‌تر است و با دور شدن x از a باید معمولاً تعداد جملات را به شدت افزایش داد تا تقریب معقولی حاصل شود. روش‌های تقریب و روش‌های نمایش دیگری نیز برای توابع موجود است که در اینجا به مهمترین آنها موسوم به چندجمله‌ای فوریه و سری فوریه می‌پردازیم. دو ویژگی متمایزکنندهٔ این روش در مقابل روش چندجمله‌ای و سری تیلور به این شرح‌اند:

یکی اینکه تقریب به وسیله چندجمله‌ای‌های فوریه به نوعی سرتاسری است یعنی معمولاً هیچ نقطهٔ خاصی از دامنه، "مرکز تقریب" نیست، بلکه فاصلهٔ عمومی بین نمودار تابع و نمودار تقریب به مفهومی که ذکر خواهد شد کوچک می‌شود، و نکته دوم اینکه این روش حربهٔ مهمی برای بررسی پدیده‌های تناوبی و تقریباً تناوبی مانند پدیده‌های موجی است.

فرض کنید $T > \circ$ داده شده است، قرار می‌دهیم $\omega = \frac{۲\pi}{T}$. تابع‌های $\sin m\omega x$ و $\cos m\omega x$، m: عدد صحیح، همه دورهٔ تناوب T دارند. اگر $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع با دورهٔ تناوب T باشد، هدف ما نمایش f به صورت یک سری با عناصر ساختی $\sin n\omega x$ و $\cos n\omega x$. مقصود از یک سری مثلثاتی با دورهٔ تناوب T، عبارتی به شکل زیر است:

$$\frac{a_\circ}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty} (a_m \cos m\omega x + b_m \sin m\omega x) \qquad (۱)$$

جملهٔ ثابت را به جای $a_\circ$ به $\frac{a_\circ}{۲}$ نمایش داده‌ایم که بعداً هماهنگی کاملی در فرمول محاسبهٔ a_m ها ایجاد شود. فرض کنید بتوان مقدار تابع f را به صورت مجموع بالا نمایش داد:

$$f(x) = \frac{a_\circ}{۲} + \sum_{m=۱}^{\infty} (a_m \cos m\omega x + b_m \sin m\omega x) \qquad (۲)$$

سعی می‌کنیم با یک "بحث اکتشافی" رابطهٔ a_m ها و b_m ها را با f مشخص کنیم. از فرمول‌های انتگرالی زیر که به سادگی از فرمول‌های مثلثاتی حاصل‌ضرب سینوس با سینوس، سینوس با کسینوس و کسینوس با کسینوس نتیجه می‌شوند استفاده خواهیم کرد:

$$\int_{-\frac{T}{۲}}^{\frac{T}{۲}} (\cos m\omega x)(\sin n\omega x) dx = \circ \qquad (۳)$$

$$\int_{-\frac{T}{۲}}^{\frac{T}{۲}} (\cos m\omega x)(\cos n\omega x) dx = \begin{cases} \circ & m =\neq n \\ \frac{T}{۲} & m = n \end{cases} \qquad (۴)$$

$$\int_{-\frac{T}{۲}}^{\frac{T}{۲}} (\sin m\omega x)(\cos n\omega x) dx = \begin{cases} \circ & m =\neq n \\ \frac{T}{۲} & m = n \end{cases} \qquad (۵)$$

توجه کنید که اگر به‌جای بازهٔ انتگرال‌گیری $[-\frac{T}{۲}, \frac{T}{۲}]$ از هر بازهٔ دیگر به طول دورهٔ تناوب، مثلاً $[\circ, T]$، نیز استفاده کنیم همان نتایج (۳)، (۴) و (۵) به‌دست می‌آیند. استفاده از بازهٔ متقارن $[-\frac{T}{۲}, \frac{T}{۲}]$ این حسن را دارد که در موارد خاص که بعداً به تابع‌های فرد یا زوج برمی‌خوریم بعضاً انتگرال‌گیری ساده‌تر می‌شود. همچنین توجه کنید که داریم:

$$\int_{-\frac{T}{۲}}^{\frac{T}{۲}} \cos m\omega x dx = \circ \quad , \quad \int_{-\frac{T}{۲}}^{\frac{T}{۲}} \sin m\omega x dx = \circ \qquad (٦)$$

محاسبهٔ a_m ها و b_m ها را اکنون بدین طریق پیش می‌بریم. نخست از دو طرف (۲) روی بازهٔ $[-\frac{T}{۲}, \frac{T}{۲}]$ انتگرال می‌گیریم:

$$\int_{-\frac{T}{۲}}^{\frac{T}{۲}} f(x) dx = \frac{a_\circ}{۲} T + \int_{-\frac{T}{۲}}^{\frac{T}{۲}} (\sum_{n=۱}^{\infty} a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x) dx$$

در طرف راست بالا انتگرال مجموع یک سری مطرح است. همان طور که قبلاً در بحث سری‌های تیلور بحث شد، به طور کلی نمی‌توان نوشت $\int_a^b f_n \sum_{n=1}^{\infty} = \int_a^b (\sum_{n=1}^{\infty} f_n)$ ولی در اینجا چون فقط یک بحث اکتشافی را دنبال می‌کنیم، این جابجایی انتگرال و مجموع نامتناهی را انجام می‌دهیم. نهایتاً قضیه‌ای ذکر خواهیم کرد که نتیجهٔ به‌دست آمده را توجیه می‌کند. بنابراین نتیجه می‌گیریم که:

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx = \frac{a_0}{2}T + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos n\omega x + b_n \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin n\omega x)dx)$$

طبق (٦) مقدار هر یک از انتگرال‌های سمت راست صفر است، پس:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx \qquad (7)$$

چون طول بازهٔ $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ برابر T است، اگر این محاسبه توجیه‌پذیر باشد، نتیجه گرفته‌ایم که جملهٔ ثابت یعنی $\frac{a_0}{2}$، برابر میانگین تابع f در یک دوره تناوب است. این نتیجه را با مقدار جملهٔ ثابت سری تیلور مقایسه می‌کنیم. در مورد سری تیلور $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$، جملهٔ ثابت، یعنی a_0 برابر $f(a)$ است. تمایز بین سری تیلور و سری فوریه در همین گام آشکار می‌شود. در مورد سری تیلور، a_0 به عنوان تقریب درجه ٠ تابع، فقط به مقدار تابع در نقطهٔ a توجه دارد، در حالی که در مورد سری فوریه، جملهٔ ثابت میانگین همهٔ مقادیر تابع در یک بازهٔ به طول T (دورهٔ تناوب f) می‌باشد.

با همین روش به مقادیری آزمایشی برای سایر ضرایب دست می‌یابیم. اگر برای $n > 0$ ثابت، دو طرف (٢) را در $\cos n\omega x$ ضرب کرده و روی $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ از دو طرف انتگرال بگیریم، مجدداً با جابجایی انتگرال و $\sum_{m=1}^{\infty}$ داریم:

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos n\omega x dx &= \frac{a_0}{2}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos n\omega x dx + \sum_{m=1}^{\infty}(a_m \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (\cos m\omega x)(\cos n\omega x)dx) \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty}(b_m \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (\sin m\omega x)(\cos n\omega x)dx)\end{aligned}$$

با توجه به فرمول‌های (٣)، (۴) و (٦) نتیجه می‌شود که

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos n\omega x dx = a_n \cdot \frac{T}{2}$$

یا معادلاً

$$a_n = \frac{۲}{T}\int_{-\frac{T}{۲}}^{\frac{T}{۲}} f(x)\cos n\omega x dx \qquad (۸)$$

توجه کنید که (۷) حالت خاص (۸) به‌ازای $n = ۰$ است. به این دلیل بود که جمله ثابت را به $\frac{a_۰}{۲}$ نمایش دادیم. همین طور اگر دو طرف (۲) را در $\sin n\omega x$ ضرب کرده و روی $[-\frac{T}{۲}, \frac{T}{۲}]$ انتگرال‌گیری کنیم، با جابجایی مشابه و با استفاده از فرمول‌های (۳)، (۵) و (۶)، نتیجه می‌گیریم که

$$b_n = \frac{۲}{T}\int_{-\frac{T}{۲}}^{\frac{T}{۲}} f(x)\sin n\omega x dx \qquad (۹)$$

قضیه‌ای در زیر خواهیم آورد، که اثبات آن از بحث ما خارج است، ولی تحت شرایط مناسب صحت فرمول‌های (۸) و (۹) را توجیه می‌کند. تابع $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ را **قطعه قطعه** $C^۱$ می‌نامیم در صورتی که شرط زیر برقرار باشد: افرازی $a = a_۰ < a_۱ < \cdots < a_k = b$ وجود دارد که تحدید f به هر $]a_{i-۱}, a_i[$ مشتق‌پذیر با مشتق پیوسته است و به علاوه در هر a_i، تابع f و مشتق آن، تابع f'، دارای حد چپ و راست هستند (در نقطهٔ $a = a_۰$ فقط حد راست، و در نقطهٔ $b = a_k$، فقط حد چپ مطرح است).

(۳۶–۱) قضیه. فرض کنید $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ تناوبی با دورهٔ تناوب T و در بازهٔ تناوب خود قطعه قطعه $C^۱$ است و $\omega = \frac{۲\pi}{T}$، در این صورت سری:

$$\frac{a_۰}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty}(a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x)$$

که در آن a_n و b_n طبق فرمول‌های (۸) و (۹) تعریف شده‌اند دارای ویژگی زیر است.

الف) در هر نقطهٔ x که تابع f پیوسته باشد، مجموع سری بالا برابر $f(x)$ است.

ب) در هر نقطهٔ ناپیوستگی x برای تابع f، مجموع سری بالا برابر میانگین حد چپ و راست تابع f است. □

سری بالا را **سری فوریهٔ** تابع f می‌نامند. مجموع متناهی

$$\frac{a_۰}{۲} + \sum_{n=۱}^{N}(a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x) \qquad (۱۰)$$

تقریب فوریهٔ مرتبهٔ N تابع f خوانده می‌شود.

(۳۶–۲) چند مثال

(۳۶–۲–۱) تابع زیر را در نظر می‌گیریم

$$f(x)=\begin{cases} ۱ & ۲k\pi < x < (۲k+۱)\pi, k\in\mathbb{Z} \\ ۰ & (۲k-۱)\pi < x < ۲k\pi, k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

در هر $x=m\pi$، $m\in\mathbb{Z}$، مقدار $f(x)$ را برابر مقدار ثابت دلخواهی c قرار می‌دهیم. این مقدار اثری بر بحث نخواهد داشت. این تابع تناوبی با دورهٔ ۲π است و در شکل ۱ نمایش داده شده است:

?

در این مثال داریم $T=۲\pi$ و $\omega=۱$. نقاط ناپیوستگی f و f' مضارب π هستند (f' در این نقاط تعریف نشده است). ضرایب a_n و b_n را از (۸) و (۹) محاسبه می‌کنیم:

$$a_n=\frac{۲}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx=\frac{۱}{\pi}\int_{۰}^{\pi}\cos nx dx=\begin{cases} ۱ & n=۰ \\ ۰ & n>۰\end{cases}$$

و

$$\begin{aligned} b_n &= \tfrac{۲}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx=\tfrac{۱}{\pi}\int_{۰}^{\pi}\sin nx dx=-\tfrac{۱}{n\pi}\cos nx|_{۰}^{\pi} \\ &= -\tfrac{۱}{n\pi}((-۱)^n-۱)=\begin{cases} ۰ & \text{زوج } n \\ \tfrac{۲}{n\pi} & \text{فرد } n\end{cases}\end{aligned}$$

بنابراین سری فوریه تابع f بدین صورت است:

$$\frac{۱}{۲}+\frac{۲}{\pi}(\sin x+\frac{\sin ۳x}{۳}+\frac{\sin ۵x}{۵}+\cdots)$$

توجه کنید که هر یک از تابع‌های تشکیل‌دهندهٔ سری بالا پیوسته (در واقع بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر) است ولی مجموع سری در بعضی نقاط پیوسته نیست! طبق قضیه در هر نقطهٔ $x\neq n\pi$، مجموع سری بالا برابر ۱ یا ۰ است (بسته به این که انتهای چپ بازه مضرب زوج یا فرد π باشد) و در $x=n\pi$ برابر میانگین حد راست و چپ، یعنی $\frac{۱}{۲}$ می‌باشد. مطلب اخیر را می‌توان با توجه به اینکه $\sin n\pi=۰$ مستقیماً مشاهده کرد. اینکه چگونه مجموع بالا به یک تابع ناپیوستهٔ پله‌ای میل می‌کند می‌توان با رسم

تقریب‌های فوریهٔ متوالی f مشاهده کرد (شکل ۲).

?

(۳۶−۲−۲) تابع $\phi : [-۱, ۱] \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت $\phi(x) = |x|$ در نظر می‌گیریم و آن را به طور تناوبی با دورهٔ تناوب ۲ به تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ادامه می‌دهیم (شکل ۳).

?

در اینجا $T = ۲$ و $\omega = \pi$. تابع f زوج است، پس برای هر n، $f(x)\sin n\pi x$ فرد است و انتگرال آن روی بازهٔ $[-۱, ۱]$ برابر صفر می‌شود، پس $b_n = ۰$ برای هر n. برای محاسبهٔ a_n ها داریم:

$$a_n = \frac{۲}{۲}\int_{-۱}^{۱} |x| \cos n\pi x dx = ۲\int_{۰}^{۱} x\cos n\pi x dx$$

برای $n = ۰$، داریم $a_۰ = ۱$، برای $n > ۰$ از انتگرال جزء به جزء استفاده می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
\int_۰^۱ x\cos n\pi x dx &= \tfrac{۱}{n\pi} x \sin n\pi x|_۰^۱ - \int_۰^۱ \tfrac{۱}{n\pi}\sin n\pi x dx \\
&= \tfrac{۱}{n^۲\pi^۲}\cos n\pi x|_۰^۱ \\
&= \tfrac{۱}{n^۲\pi^۲}((-۱)^n - ۱) \\
&= \begin{cases} ۰ & n > ۰ \text{ زوج} \\ -\frac{۲}{n^۲\pi^۲} & n \text{ فرد} \end{cases}
\end{aligned}$$

بنابراین سری فوریه به شکل زیر است:

$$\frac{۱}{۲} - \frac{۴}{\pi^۲}(\cos x + \frac{\cos ۳x}{۹} + \frac{\cos ۵x}{۲۵} + \cdots)$$

چون این تابع پیوسته است، مجموع سری بالا همه جا برابر $f(x)$ است. بالاخص در $x = ۰$ داریم:

$$۰ = \frac{۱}{۲} - \frac{۴}{\pi^۲}(۱ + \frac{۱}{۹} + \frac{۱}{۲۵} + \cdots)$$

یا

$$۱ + \frac{۱}{۹} + \frac{۱}{۲۵} + \frac{۱}{۴۹} + \cdots = \frac{\pi^۲}{۸} \qquad (۱۱)$$

تمرین. از (۱۱) نتیجه بگیرید که $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ و $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$.

همان طور که در مثال بالا مشاهده کردیم اگر تابع f زوج باشد همهٔ ضرایب b_n صفر هستند. به همین ترتیب برای تابع فرد، همهٔ ضرایب a_n صفر می‌شوند. مقصود از یک **سری فوریه کسینوسی** سری فوریه‌ای است که همه b_n های آن صفر باشند، و یک **سری فوریهٔ سینوسی**، سری فوریه‌ای است که در آن $a_n=0$ برای هر n.

بحث ما تا این لحظه ممکن است این تصور را القاء کرده باشد که کاربرد سری فوریه فقط در مورد تابع‌های تناوبی است. در واقع اگر $\phi:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ تابعی **قطعه قطعه** C^1 باشد، می‌توان سری فوریه را در مورد آن به‌کار برد. شیوهٔ عمل این است که ϕ را بیرون $[a,b]$ به طور تناوبی ادامه می‌دهیم تا تابعی تناوبی $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ به‌دست آید و f را به صورت مجموع یک سری فوریه می‌نویسیم. اگر دامنهٔ این سری به $[a,b]$ محدود شود مجموع آن به صورت حکم قضیهٔ (۳۶—۱) نمایش ϕ است. در واقع ϕ را می‌توان به شیوه‌های گوناگون به طور تناوبی ادامه داد. به عنوان مثال:

(۳۶—۳) سری‌های فوریه سینوسی و کسینوسی $\phi:[0,A]\longrightarrow\mathbb{R}$

فرض کنید ϕ روی $[0,A]$ **قطعه قطعه** C^1 باشد. اگر برای $x\in[-A,0[$ تعریف کنیم

$$\phi(x)=\phi(-x) \qquad (12)$$

تابعی زوج روی $[-A,A]$ به‌دست می‌آید. این تابع را با دورهٔ تناوب $T=2A$ روی $\mathbb{R}$ ادامه می‌دهیم و تابع حاصل را f می‌نامیم. f تابعی زوج است و دارای ضرایب فوریهٔ زیر می‌باشد:

$$b_n=0 \quad , \quad a_n=\frac{2}{A}\int_0^A\phi(x)\cos\frac{\pi}{A}nx\,dx \qquad (13)$$

سری فوریهٔ حاصل شده در $[0,A]$ نمایش ϕ است (با منظور کردن میانگین حدهای راست و چپ در نقاط ناپیوستگی).

به همین ترتیب، اگر به جای (۱۲)، تداوم ϕ به $[-A,0[$ را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\phi(x)=-\phi(-x) \qquad (14)$$

و مقدار ϕ را در ۰ نادیده بگیریم (که به هر حال اثری بر مقادیر انتگرال ندارد) ما ادامه ϕ با دورهٔ تناوب $T = ۲A$ به سرتاسر $\mathbb{R}$ یک تابع فرد به‌دست می‌آید. برای ضرایب فوریه داریم:

$$a_n = ۰ \quad , \quad b_n = \frac{۲}{A}\int_{۰}^{A} \phi(x)\sin\frac{\pi}{A}nx\,dx \qquad (۱۵)$$

سری فوریهٔ با این ضرایب در $[۰, A]$ نمایش ϕ است (البته در مضارب A، مجموع سری فوریه برابر صفر می‌شود. چرا؟). **تمرین.** برای $\sin x$ یک سری فوریهٔ کسینوسی روی $[۰, \pi]$ بنویسید و برای $\cos x$، یک سری فوریهٔ سینوسی روی $[۰, \pi]$.

در آغاز اشاره کردیم به این که چندجمله‌ای‌های فوریه نوعی تقریب سرتاسری برای تابع ارائه می‌کنند. در این زمینه قضایای متعددی وجود دارد که یکی از ساده‌ترین آنها را ذکر می‌کنیم. مجموع متناهی (۱۰) را به ϕ_N نمایش دهید. تحت شرایط قایل شده در قضیهٔ (۳۶—۱) برای تابع f، می‌توان ثابت کرد که:

$$\lim_{N\to\infty}\left(\int_{-\frac{T}{۲}}^{\frac{T}{۲}} |f(x) - \phi_N(x)|^{۲}\,dx\right) = ۰ \qquad (۱۶)$$

این مطلب گویای این واقعیت است که در یک دورهٔ تناوب، مساحت بین نمودار f و نمودار تقریب‌های فوریهٔ آن به تدریج کوچکتر شده و به صفر میل می‌کند.