www.iebest.ir

فیزیک

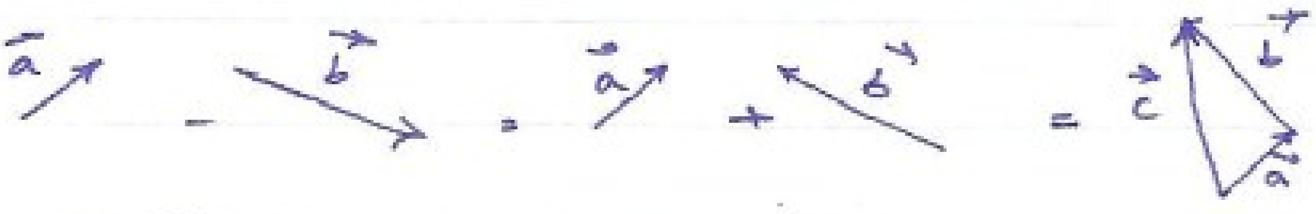
7/5

کمیت‌های فیزیکی:

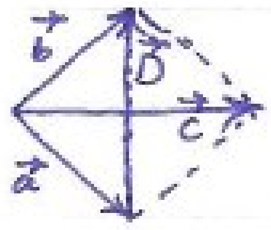
برداری: دارای جهت و اندازه هستند و عملیات جبری روی آنها از قوانین خاصی پیروی می‌کنند. مثل: سرعت.

اسکالر: فقط دارای اندازه هستند. برای نشان دادن آن از اعداد استفاده می‌کنیم. مثل: جرم (kg)، زمان (s)

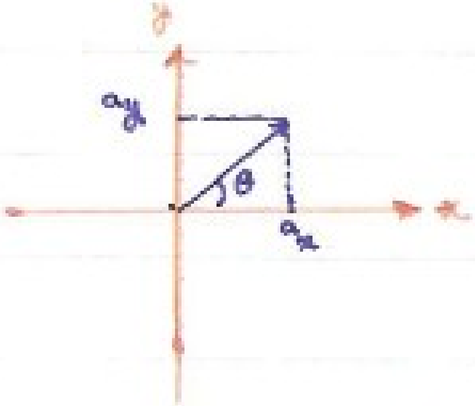
$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$



$\vec{c} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{a} - \vec{b}$



$|\vec{c}| = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta}$ $|\vec{D}| = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}$



hat ، اندازه یک

$\vec{c} = (a_x + b_x)\vec{i} + (a_y + b_y)\vec{j}$

$a_x = a\cos\theta$, $a_y = a\sin\theta$ $tg\theta = \frac{a_y}{a_x}$

$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + (-11)^2} = 5\sqrt{5}$

a-b جهت بردار $= tg^{-1}\left(\frac{-11}{-2}\right) = tg^{-1} 5.5 = 79.7$

ضرب برداری:

۱. ضرب یک کمیت اسکالر در یک بردار:

$3 \times (2i - 4j) = 6i - 12j$

۲. ضرب نرده‌ای دو بردار: حاصل یک عدد است و علامت آن یک نقطه است. طبق تعریف حاصل ضرب نرده‌ای ۲ بردار حاصل ضرب اندازه‌ی بردار اول در بردار دوم در Cos زاویه بین ابتدای دو بردار است.

$a \cdot b = |a||b|\cos\theta$ (I)

eg: $i \cdot i = ?$, $i \cdot j = ?$ $i \cdot i = 1 \times 1 \times \cos 0 = 1$, $i \cdot j = 1 \times 1 \times \cos 90 = 0$

$\vec{a} = a_x\vec{i} + b_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$

www.iebest.ir

www.iebest.ir

$$a \cdot b = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (II)$$

$$(I), (II) \Rightarrow |a||b| \cos\theta = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \Rightarrow \cos\theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} + \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

eg: $\angle$ $a = 3i + 2j - k$, $b = i + j + k$

$$\cos\theta = \frac{a \cdot b}{|a||b|} = \frac{3+2-1}{\sqrt{14}+\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{14}+\sqrt{3}} \Rightarrow \theta = \cos^{-1} \frac{4}{\sqrt{14}+\sqrt{3}}$$

ضرب برداری ۲ بردار: حاصل یک بردار است. علامت آن $(\times)$ است و طبق تعریف: $|\vec{c}| = |\vec{a} \wedge \vec{b}| = ab\sin\theta$

* $\vec{c}$ طبق قاعده‌ی دست راست بدست می‌آید و عمود بر صفحه‌ی $a \times b$ است.

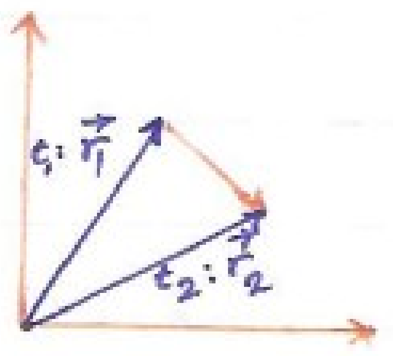
* $\vec{t} = \vec{r} \times \vec{F}$

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad , \quad \vec{a} \wedge \vec{b} = -(\vec{b} \wedge \vec{a})$$

eg: $a = 3i + j - 2k$, $b = i + j - k$, $c = i + j$ $\Rightarrow a \cdot (b \wedge c) = ?$

$$a \cdot (b \wedge c) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-3) - (-5) = 2$$

حرکت در یک بعد:



۱. سرعت متوسط: جابجایی در واحد زمان

$$\Delta r = r_2 - r_1$$
$$\Delta t = t_2 - t_1$$
$$\bar{v} = \frac{\Delta r}{\Delta t}$$

* راستای $\vec{v}$ هم جهت با $\vec{\Delta r}$ است.

eg: اتومبیلی مسافتی که از سمنان به تهران می‌رود را ۳ ساعت و مسافتی که از تهران به سمنان می‌آید در 2.5 ساعت طی می‌کند سرعت متوسط آن چقدر است؟

$$\bar{v} = \frac{\Delta r}{\Delta t} = 0$$

۲. سرعت لحظه‌ای: سرعت یک ذره در هر لحظه را گویند.

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{dr}{dt}$$

www.iebest.ir

www.iebest.ir

شتاب: اگر سرعت ذره چه از نظر اندازه و چه از نظر جهت (مثل حرکت دایره‌ای) تغییر کند جسم دارای شتاب می‌شود.

7/11

تندی متوسط $\vec{S}_{avg} = \frac{\text{مسافت طی شده}}{\text{زمان سپری شده}}$

شتاب متوسط: $\vec{a}_{avg} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \; m/s^2$ شتاب هم جهت با $\Delta\vec{v}$ است.

شتاب لحظه‌ای $a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \; m/s^2$

حرکت یک بعد:

if: $t_1 = 0 \;,\; v_1 = v_0 \;,\; t_2 = t \;,\; v_2 = v$

$$\bar{v} = \frac{1}{2}(v + v_0) \;,\; v = at + v_0 \;,\; x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \;,\; v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x$$

eg: تیری قبل از رها شدن از کمان در یک فاصله $60\,cm$ شتاب می‌گیرد اگر سرعت تیر در لحظه رها شدن $60\,m/s$ باشد شتاب وارد بر تیر چقدر است؟

$v_0 = 0 \qquad v = 60^{cm} \qquad \Delta x = .6^{m}$

$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \qquad a = \frac{(60)^2}{2 \times .6} = 3000 \; m/s^2$

eg: دو قطار یکی با سرعت $15\,m/s$ و دیگری با $20\,m/s$ به سوی هم حرکت می‌کنند وقتی فاصله دو قطار به $1000\,m$ می‌رسد ترمز می‌کنند. اگر شتاب کند شونده دو قطار $2\,m/s^2$ باشد آیا برخورد صورت می‌گیرد؟ برخورد نمی‌کند.

- شتاب‌های تند شونده با علامت (+)
- شتاب‌های کند شونده با علامت (-)

سقوط آزاد: برای یافتن معادلات سقوط آزاد از همان معادلات حرکت مستقیم الخط حساب می‌کنیم با این تفاوت که بجای x، y و بجای a، -g را قرار می‌دهیم.

$v_y = v_{0y} - gt$

$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t + y_0$

$v_y^2 - v_{0y}^2 = -2gy$

نقطه اوج: $v_y = 0$

$h_{\text{اوج}} = \frac{v_{0y}^2}{2g}$

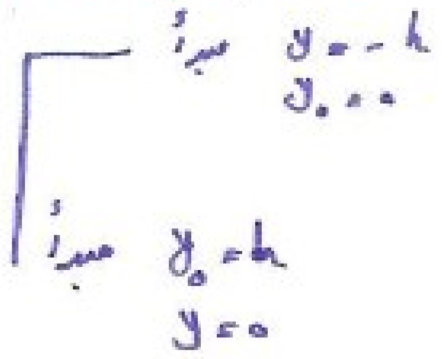
www.iebest.ir

www.iebest.ir

eg: جسمی از روی پل به پایین پرتاب می‌شود هم‌زمان با آن یک کامیون به طول 12^m و سرعت $20\,m/s$ از زیر پل رد می‌شود پل چه ارتفاعی از سطح کامیون داشته باشد تا جسم در انتهای کامیون بیفتد.

$t=\frac{12}{20}$ $\quad y=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t+y_0 \Rightarrow y=-\frac{1}{2}\times10\times\left(\frac{12}{20}\right)^2+0$

$=1{,}8$



eg: دو جسم به فاصله زمانی 5s از حالت سکون رها می‌شوند. چه مدت پس از رها شدن جسم اول فاصله میان دو جسم 20^m می‌شود.

$y_1=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t+y_0=-\frac{1}{2}gt^2+y_0$

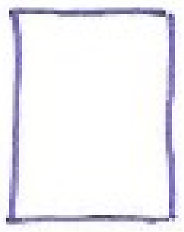
$y_2=-\frac{1}{2}gt^2+y_0$

$t_2=t_1-5 \Rightarrow y_1=-\frac{1}{2}gt_1^2 \quad y_2=-\frac{1}{2}g(t_1-5)^2$

$\Rightarrow t_1=2.9$

eg: آسانسوری با شتاب رو به بالای $1{,}2\,m/s^2$ صعود می‌کند در لحظه‌ای که سرعت رو به بالای آن $2{,}4\,m/s$، پیچی از سقف آسانسور که 2.7^m فاصله بالاتر از کف آن جدا می‌شود:

1. زمان حرکت پیچ از سقف تا کف آسانسور
2. مسافتی که پیچ طی می‌کند.



$2{,}7^m$ 1) $\quad v_{0e}=v_{0T}$

پیچ $y_{0T}=y_{0e}+2.7$

$y_e=+\frac{1}{2}at^2+v_0t+y_{0e}$

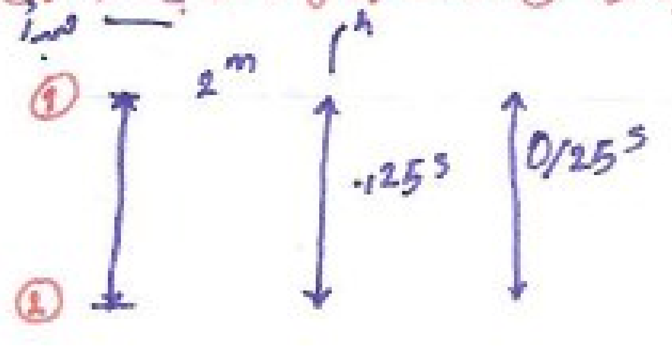
$y_T=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t+y_{0T}$

$\Rightarrow +\frac{1}{2}at^2+v_0t+y_{0e}=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t+y_{0T}$ $\qquad t=.75$

$\frac{1}{2}(1{,}2)t^2=-\frac{1}{2}(9.8)t^2+2{,}7$

2) $\quad \Delta y=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t \Rightarrow \Delta y=-\frac{1}{2}(9.8)(0.75)^2+2.4(0.79)=0.7^m$

eg: شخصی از پنجره‌ای به طول 2^m توپی را می‌بیند که به طرف بالا می‌رود و سپس پایین می‌آید اگر کل مدت زمانی که توپ در معرض دید شخص بوده 0.5^s باشد توپ تا چه ارتفاعی از لبه‌ی بالای پنجره بالا می‌رود.



$y=-h \quad v_0=0 \quad ①\ y=-\frac{1}{2}gt_1^2 \Rightarrow -h=-\frac{1}{2}gt_1^2$

$h=\frac{1}{2}gt_1^2$ (I)

$②\ y=-(h+2),\ v_0=0 \Rightarrow ②\ \cancel{v_0=\frac{1}{2}}\ -(h+2)=-\frac{1}{2}gt^2=-\frac{1}{2}g(t+0.25)^2$

جایگذاری
از ①

$2+\frac{1}{2}gt_1^2=\frac{1}{2}g(t_1+0.25)^2 \Rightarrow 2=\frac{1}{2}g(0.25)^2+g(0.25)t_1 \Rightarrow t_1=0.691$

از معادله ①: $\quad h=\frac{1}{2}gt_1^2=\frac{1}{2}(9.8)(0.691)^2=2.34\ m$

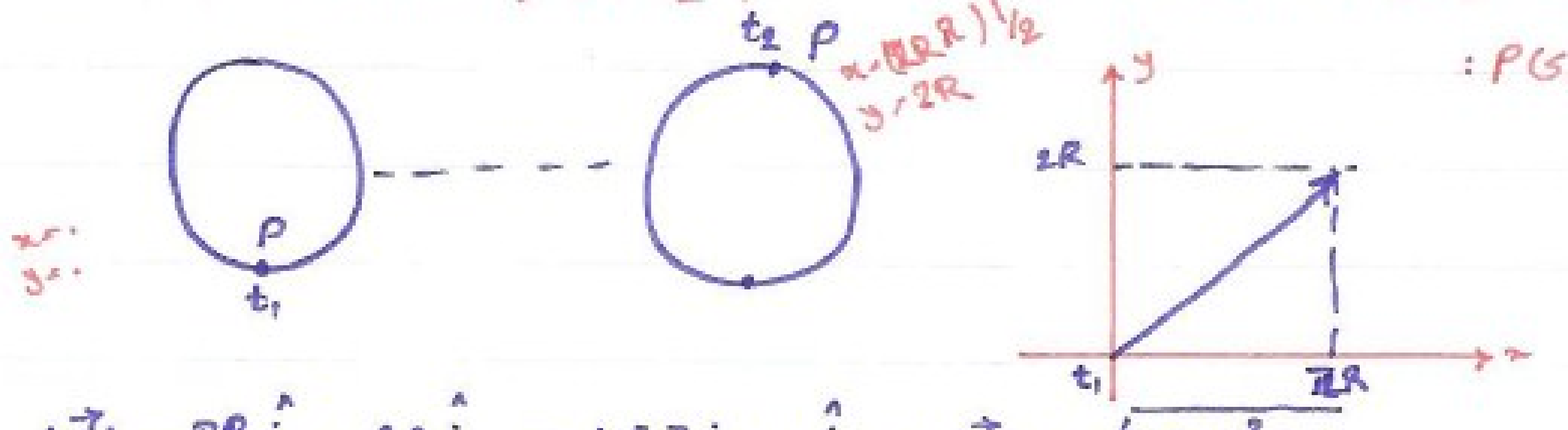
راه دوم: $y=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t \Rightarrow 2=-\frac{1}{2}(9.8)(0.25)^2+(0.25)V_0 \Rightarrow V_0=9.225\ m/s$

$V^2-V_0^2=-2gH \Rightarrow -(9.2)^2=-2(9.8)H \Rightarrow H=4.34 \Rightarrow h=4.34-2=2.34m$

www.iebest.ir

www.iebest.ir

eg: چرخی به شعاع 50^{cm} روی یک سطح افقی می غلتد نقطه P در لحظه‌ی t_1 در تماس با زمین و t_2 نیم دور می‌زند مطلوب است:
بزرگی و زاویه‌ی جابجایی نقطه‌ی P:



$$|\vec{r}| = \pi R\hat{i} + 2R\hat{j} = 1.57i + 1\hat{j} \Rightarrow |\vec{r}| = \sqrt{(1.57)^2+1}$$

$$tg\,\theta = \frac{r_y}{r_x} = \frac{1}{1.57} \Rightarrow \theta = tg^{-1}\left(\frac{1}{1.57}\right)$$

فصل ۴: حرکت در صفحه:

$$if:\ \vec{r}_1 = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k} \qquad \vec{r}_2 = x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}$$

$$\vec{\Delta r} = (x_2-x_1)\hat{i} + (y_2-y_1)\hat{j} + (z_2-z_1)\hat{k} = \Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j} + \Delta z\hat{k}$$

سرعت متوسط $= \vec{v}_{avg} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\hat{k}$

سرعت لحظه‌ای $= v_{avg} \longrightarrow v_{\text{سرعت لحظه}} \quad \Delta t \to 0 \Rightarrow v = \frac{dr}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}$

شتاب متوسط $= \vec{a}_{avg} = \frac{\Delta v}{\Delta t}\hat{i} + \frac{\Delta v}{\Delta t}\hat{j} + \frac{\Delta v}{\Delta t}\hat{k}$

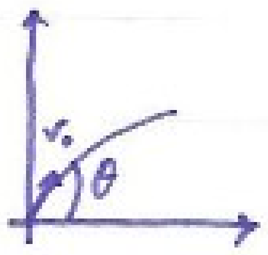
شتاب لحظه‌ای $= a = \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$

$$v_x = v_{0x} + at \qquad v_y = v_{0y} + at$$

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} \qquad \vec{v} = (v_{0x} + a_xt)\hat{i} + (v_{0y} + a_yt)\hat{j}$$

$$= \underbrace{v_{0x}\hat{i} + v_{0y}\hat{j}}_{\vec{v}_0} + \underbrace{(a_x i + a_y j)}_{\vec{a}}t = at + v_0$$

حرکت پرتابی: در این حرکت جسم هیچ شتابی در راستای x ندارد و تنها در راستای y شتاب دارد.



$$v_{0x} = v_0 \cos\theta \qquad v_{0y} = v_0 \sin\theta$$

$$a_x = 0 \qquad a_y = -g$$

$$v = at + v_0 \Rightarrow \begin{cases} v_x = v_0 \cos\theta \\ v_y = -gt + v_0 \sin\theta \quad (I) \end{cases}$$

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \Rightarrow \begin{cases} x = v_0 \cos\theta\, t \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\theta\, t + y_0 \end{cases} \xrightarrow[\text{مستقل از t}]{\text{حذف}} y = \frac{-gx^2}{2v_0^2\cos^2\theta} + x\cdot tg\,\theta$$

www.iebest.ir

www.iebest.ir

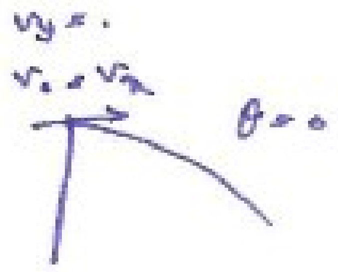
نکته ۱: پرتابه در بالاترین نقطه مسیرش هیچ مولفه ی سرعت در راستای y ندارد.

$$(I) \quad 0 = -gt + v_0 \sin\theta \Rightarrow t = \frac{v_0 \sin\theta}{g}$$

$$\text{اوج}\ h = y_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g} \qquad \text{برد}\ R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

نکته ۲: سرعت‌ها در ارتفاعات مساوی برابرند.

نکته ۳. زمان در نقطه ی اوج نصف کل زمان سپری شده برای پرتابه است.



نکته ۴. پرتابه ای که بصورت افقی پرتاب می شود دارای $v_y = 0$ و $v_x = v_0$ است.

$$\begin{cases} x = v_0 \cos\theta\, t = v_0 t \\ y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin\theta\, t = -\frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

eg: توپی از روی میزی با ارتفاع یک متر به پایین می افتد و در نقطه ی 2^m از پایه ی میز به زمین می خورد: سرعت آن در لحظه ی جدا شدن از میز چقدر است؟

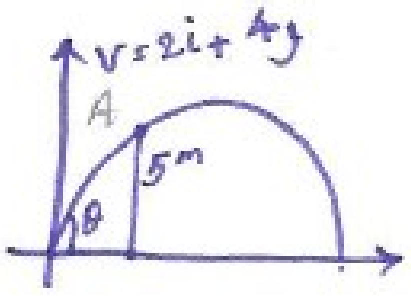
$$y = \frac{-g x^2}{2 v_0^2 \cos^2\theta} + x \tan\theta \Rightarrow -1 = \frac{-(9.8)4}{2 v_0^2} \Rightarrow v_0 = 4.42$$

eg: توپی پرتاب می شود در ارتفاع 5m سرعت از رابطه $v = 2\hat{i} + 4\hat{j}$ بدست می آید:

۱. ارتفاع اوج

۲. برد

۳. سرعت در لحظه برخورد به زمین.



$$1: v_{y_A}^2 - v_{0y_0} = -2gh$$

$$10^2 - v_0^2 = 2(9.8)5 \Rightarrow v_0 y = 10.6$$

$$v_y = -gt + v_0 \sin\theta \Rightarrow v_x = v_0 \cos\theta = 2$$

$$v_0 = \sqrt{v_0 y^2 + v_0 x^2} = 10.8$$

$$\theta_0 = tg^{-1} \frac{v_0 y}{v_0 x} = tg^{-1} \frac{10.6}{2} = tg^{-1} 5.3 = 72^\circ$$

$$h = \frac{(v_0 \sin\theta)^2}{2g} = \frac{(10.8 \sin\theta)^2}{2(9.8)}$$

$$2: R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{2g}$$

$$3: v_y^2 - v_0 y^2 = -2gh \Rightarrow v_y = \pm v_0 y$$

نزولی

دلیل صعودی

$$v = \sqrt{v_0 x^2 + v_0 y^2} \Rightarrow v_0 x = 2$$

www.iebest.ir

www.iebest.ir

7/12

eg: یک خازن با مشخصات زیر الکترونی با سرعت $2\times10^{8}\ \frac{cm}{s}$ وارد می‌شود اگر داخل خازن شتابی برابر با $2\times10^{15}\ \frac{cm}{s^2}$ به طرف پایین به الکترون می‌دهد؟

1: جابجایی قائم الکترون

2: سرعت الکترون هنگام خروج

$(I)\ x = v_0 t \quad , \quad y = \frac{1}{2}at^2 + \cancel{v_{0y}t}^{\,0}$

$v_{0x} = v_0$

$$y = \frac{ax^2}{2v_0^2} = \frac{2(1)\times2\times10^{15}}{2\times(2\times1.^{8})^2} = \frac{1}{4}\times10^{-1} = .25\times1.^{-1} = 25\times1.^{-3}\ \text{cm}$$

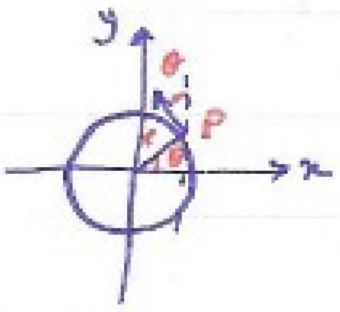
$v_{0x} = 2\times10^{8}$ $\quad (I)\ v_y = at = 2\times1.^{15}\times\left(\frac{x}{v_0}\right) = 2\times1.^{15}\times\frac{1}{2\times10^{8}} = 10^{7}\ \text{cm/s}$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(2\times10^{8})^2 + (10^{7})^2} = \cancel{2\times1.}^{15}\ \text{cm/s}$$

حرکت دایره‌ای یکنواخت:

1. بردار سرعت مماس بر مسیر حرکت است.

2. جهت شتاب همواره به سمت مرکز دایره است (مرکزگرا)



$$v = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} = -v\sin\theta\,\hat{i} + v\cos\theta\,\hat{j} = -v\frac{y_p}{r}\hat{i} + v\frac{x_p}{r}\hat{j}$$

$$a = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{v}{r}\frac{dy_p}{dt}\hat{i} + \frac{v}{r}\frac{dx_p}{dt}\hat{j} \quad (I)$$

$$(II)\begin{cases}\dfrac{dy_p}{dt} = v_y = v\cos\theta \\[2ex] \dfrac{dx_p}{dt} = v_x = -v\sin\theta\end{cases} \xrightarrow{I,\ II} a = \left(\frac{-v^2}{r}\cos\theta\right)\hat{i} - \left(\frac{v^2}{r}\sin\theta\right)\hat{j}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \frac{v^2}{r}$$

نکته: در حرکت پرتابی یا مستقیم چون شتاب ثابت بود از معادلات حرکت استفاده می‌کردیم اما در حرکت دایره‌ای به علت تغییر جهت شتاب نمی‌توانیم از آن معادلات استفاده کنیم.

نکته: در مسائلی که صحبتی از v نشده و تناوب و تکرار مطرح است معلوم است که از سرعت زاویه‌ای که با دوره‌ی تناوب متناسب است استفاده شود و v از ω سرعت زاویه‌ای بدست می‌آید.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad v = r\omega \qquad a = \frac{v^2}{r} = r\omega^2 = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

eg: ستاره‌ای در هر ثانیه یک دور می‌زند اگر شعاع این ستاره 20^{km} باشد شتاب جسمی که روی استوا است چقدر است؟

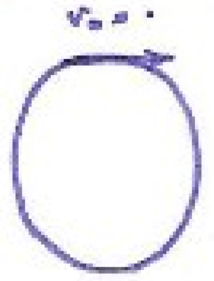
$$\vec{a} = r\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = 20\times10^{3}\left(\frac{2\pi}{1}\right)^2 = 7.9\times10^{5}$$

در جاهای دیگر: $R = r\cos\theta$

www.iebest.ir

www.iebest.ir

مث: شخصی سنگی را با انتهای ریسمانی به طول 1m بسته شده بر روی یک دایره افقی در ارتفاع 2m زمین می چرخد در اثر پاره شدن این ریسمان در راستای افقی پرتاب می شود و 10m دورتر از زمین پرتاب می شود. شتاب مرکزگرای سنگ در حرکت دایره ای چقدر است؟

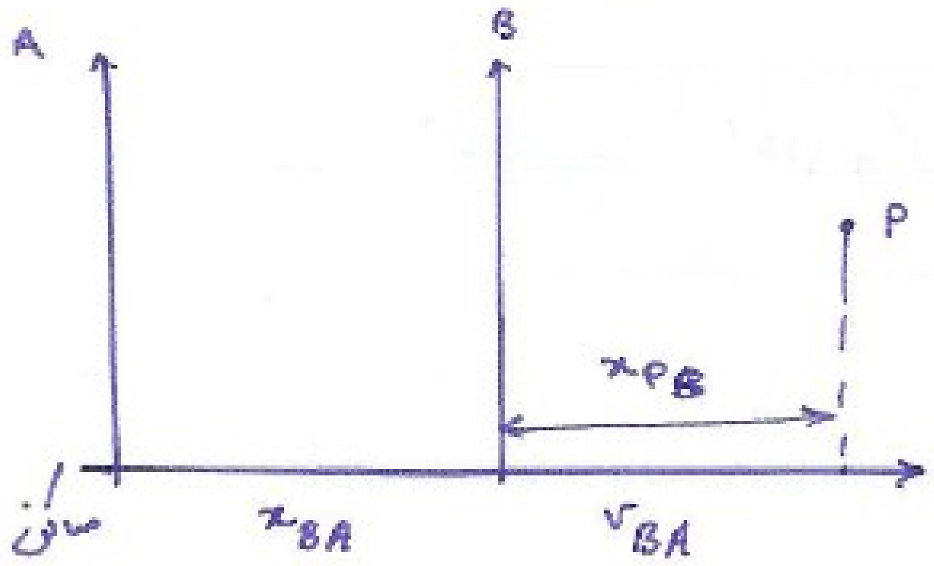


$$y = \frac{-gx^2}{2v_0^2\cos^2\theta} + x\cancel{tg\theta} \Rightarrow v_0 = 5\sqrt{10}\ m/s = 15.6\ m/s$$

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{250}{1} = 250\ m/s^2$$

* دوره تناوب $= T = \frac{x}{v} = \frac{2\pi r}{v}$

حرکت نسبی در یک بعد:



در صورتی که دستگاه مختصات B با سرعت ثابت نسبت به دستگاه A در حرکت باشد.

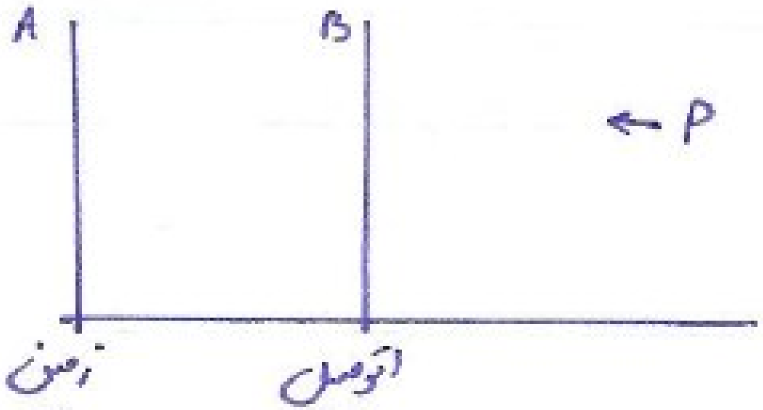
مکان: $x_{PA} = x_{BA} + x_{PB}$

سرعت: $\frac{dx_{PA}}{dt} = \frac{dx_{BA}}{dt} + \frac{dx_{PB}}{dt} \Rightarrow v_{PA} = v_{BA} + v_{PB}$

شتاب: $\frac{dv_{PA}}{dt} = \underset{0}{\cancel{\frac{dv_{BA}}{dt}}} + \frac{dv_{PB}}{dt} \Rightarrow a_{PA} = a_{PB}$

اگر نکته برقرار باشد دو دستگاه متحرک نسبت به هم شتابهای مساوی را اندازه گیری می کنند.

مث: پرنده ای با سرعت 3 m/s به سمت منفی محورها حرکت می کند اتومبیلی هم با سرعت 10 m/s به سمت مثبت محور در حرکت است. ناظر اتومبیل سرعت پرنده را چقدر اندازه گیری می کند؟



$v_{PA} = v_{BA} + v_{PB}$

$(-3) = 10 + v_{PB} \Rightarrow v_{PB} = -13\ m/s$

نکته: برای محاسبه شتاب در یک دستگاه مختصات باید از همان سرعتهایی که ناظر همان دستگاه مستقر در آن دستگاه ملاحظه می کند استفاده کنیم.

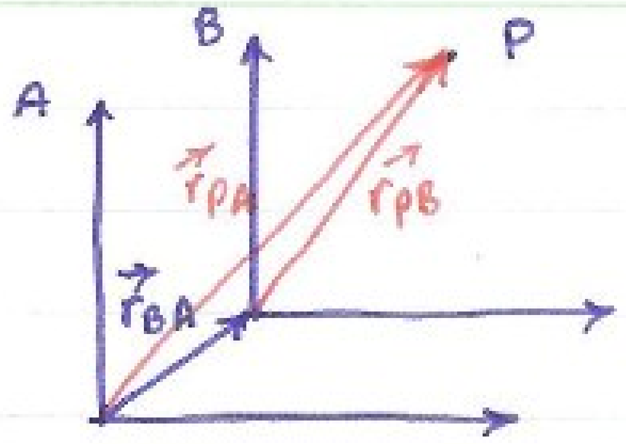
مث: هرگاه پرنده در 5s بایستد شتاب آن در دو دستگاه چقدر است.

دستگاه: $a_A = \frac{v - v_0}{t} = \frac{0-(-3)}{5} = 3/5 \qquad a_B = \frac{-10-(-13)}{5} = 3/5$

www.iebest.ir

www.iebest.ir

حرکت نسبی دو بعدی:



$$\vec{r}_{PA} = \vec{r}_{BA} + \vec{r}_{PB}$$

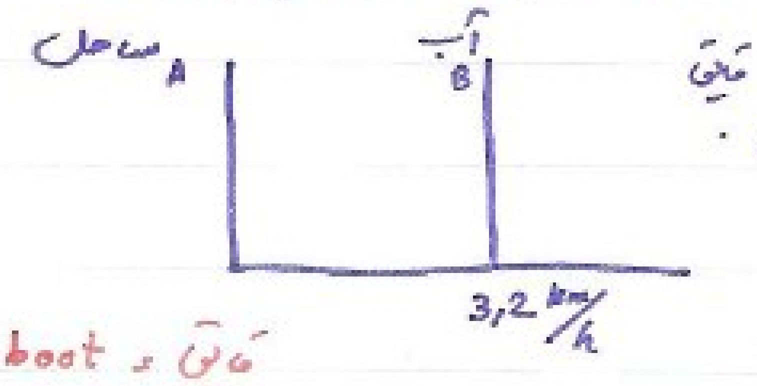
$$\xrightarrow[\text{زمان}]{\text{مشتق نسبت به}} \frac{d\vec{r}_{PA}}{d_t} = \frac{d\vec{r}_{BA}}{d_t} + \frac{d\vec{r}_{PB}}{d_t}$$

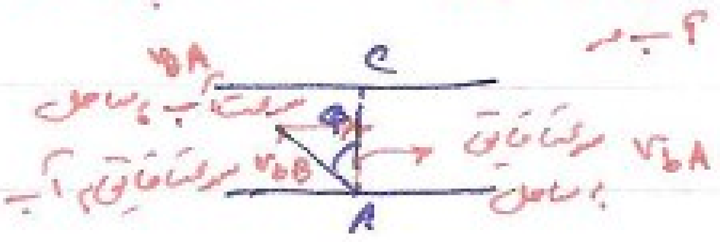
$$\vec{v}_{PA} = \vec{v}_{BA} + \vec{v}_{PB}$$ سرعت دستگاه B نسبت به A ثابت است.

$$\xrightarrow[\text{زمان}]{\text{مشتق نسبت به}} \quad \vec{a}_{PA} = \vec{a}_{PB}$$

eg: شخصی می‌تواند با پارو زدن قایق را با سرعت 6.4 km/h براند:

1. اگر او بخواهد از رودخانه‌ای که سرعت آب آن 3.2 km/h است عبور کند و به نقطه مقابل برسد قایق را باید در چه جهتی براند.





boot = قایق

$$\sin\varphi = \frac{v_{BA}}{v_{bB}} = \frac{3.2}{6.4} = 1/2 \Rightarrow \varphi = \pi/6 = 30^\circ$$

2. اگر پهنای رودخانه 6.4 km باشد چقدر طول می‌کشد قایق از آن عبور کند.

$$t = \frac{D}{v_{bA}} = \frac{D}{v_{bB}\cos\varphi} = \frac{6.4}{6.4\times\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{3}/3 = 1.15\,h$$

3. چقدر طول می‌کشد تا شخص 3.2 km در جهت آب پارو بزند و برگردد.

رفت: $v_{bA} = \underset{v_{BA}}{3.2} + \underset{v_{bB}}{6.4} = 9.6$

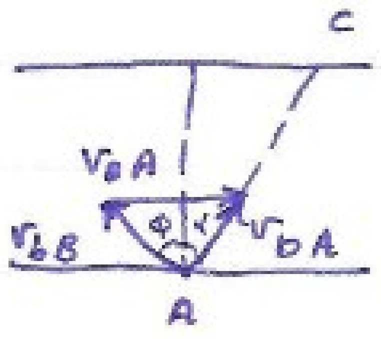
$$t_{\text{رفت}} = \frac{\Delta r_{\text{رفت}}}{v_{\text{رفت}}} = \frac{3.2}{9.6} = 0{,}33\,h$$

برگشت: $v_{bA} = 3.2 - 6.4 = -3.2$

$$t_{\text{برگشت}} = \frac{\Delta r_{\text{برگشت}}}{v_{\text{برگشت}}} = \frac{-3.2}{-3.2} = 1\,h$$

$$t_{tot} = 1 + 0.33 = 1.33$$

4. در کمترین زمان ممکن از رودخانه عبور کند باید قایق را در چه جهتی براند؟



$$t = \frac{AC}{v_{bA}}$$

$$\left\{\begin{array}{l} AC\cos\alpha = D \\ \quad \div \\ v_{bA}\cos\alpha = v_{bB}\cos\varphi \end{array}\right. \Rightarrow \frac{AC}{v_{bA}} = \frac{D}{v_{bB}\cos\varphi}$$

$$t = \frac{D}{v_{bB}\cos\varphi} \Rightarrow \cos\varphi = 1$$

$$\Rightarrow \varphi = 0$$

www.iebest.ir

www.iebest.ir

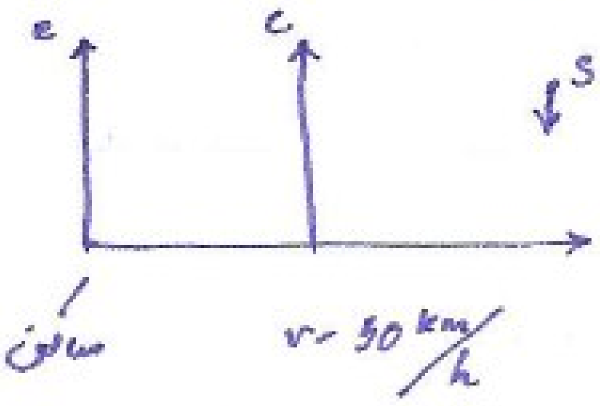
$$t_{min} = \frac{D}{V_{bB}\cancel{\cos(0)}} = \frac{6.4}{6.4} = 1\,h$$

7/18

eg: برف در راستای قائم و با سرعت $8\,m/s$ می‌بارد. به نقطه راننده‌ای که در جاده مستقیم با سرعت $50\,km/h$ حرکت می‌کند ذرات برف:

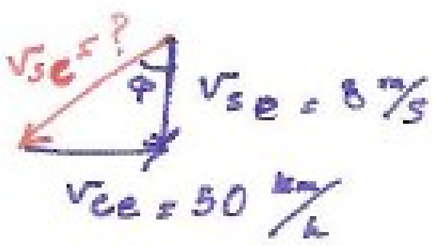
1. تحت چه زاویه‌ای نسبت به امتداد قائم
2. با چه سرعتی سقوط می‌کند.

$\vec{V}_{se} = \vec{V}_{ce} + \vec{V}_{se}$



$V_{ce} = 50\,\frac{km}{h} \times \frac{1}{3.6} = 13.89\,\frac{m}{s}$

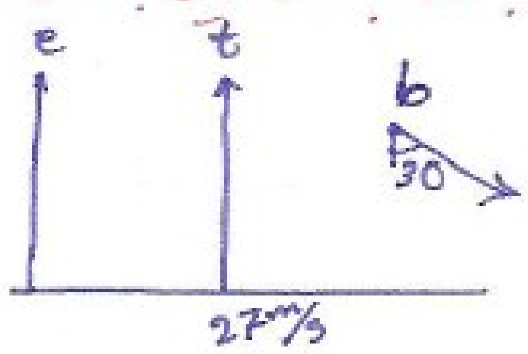
$\tan\varphi = \frac{V_{ce}}{V_{se}} = \frac{13.89}{8} \Rightarrow \varphi = 60^\circ$

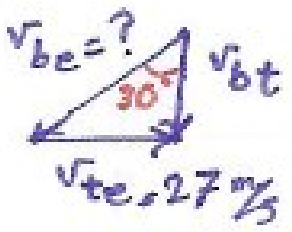


$V_{sc}^2 = V_{se}^2 + V_{ce}^2 \Rightarrow V_{se}^2 = 8^2 + (13.89)^2 \Rightarrow V_{sc} = 16\,m/s$

eg: قطاری با سرعت $27\,m/s$ در زیر بارانی که بدون وزش باد متمایل به جنوب است حرکت می‌کند. از دید ناظر زمین باران با زاویه 30° نسبت به قائم می‌بارد ولی ناظری که در قطار نشسته قطره‌های باران را بر شیشه قائم می‌بیند. سرعت قطره‌های باران نسبت به زمین چقدر است؟

$\vec{V}_{be} = \vec{V}_{te} + \vec{V}_{rT}$





$\Rightarrow \sin 30 = \frac{V_{te}}{V_{be}} \Rightarrow V_{be} = 54$

فصل 5: دینامیک ذره:

قوانین نیوتون:

1. هر جسم که در حال سکون یا حرکت است تمایل دارد حالت خود را حفظ کند مگر آنکه در اثر نیروهای خارجی مجبور به تغییر حالت آن شود. (اصطکاک)

2. نیروی برآیند وارد بر یک جسم برابر است با حاصل ضرب جرم جسم در شتاب آن.

3. برای هر کنش یک واکنش وجود دارد مساوی و در خلاف جهت آن.

* برای حل مسائل: اگر جسم ساکن بود برآیند نیروهای وارد بر آن را برابر صفر می‌گیریم و اگر جسم متحرک بود برابر با ma می‌گیریم.

انواع نیروها: 1. کشش طناب: اگر طناب بدون جرم باشد کشش در دو سر آن برابر است.

$T_1 = T_2$

2. کشش فنر: $F = kx$ (k ثابت فنر)

3. نیروی وزن: $F = W = mg$

4. نیروی عکس‌العمل سطح: (N) نیروی وارد از طرف سطح بر جسم.

5. نیروی اصطکاک: 1. نیروی اصطکاک ایستایی: $F_s = \mu_s N$

μ_s: ضریب اصطکاک ایستایی

2. نیروی اصطکاک جنبشی: $f = \mu_k . N$

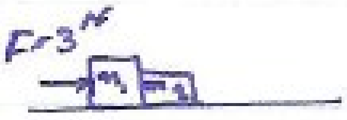
μ_k: ضریب اصطکاک جنبشی

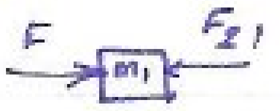
$\mu_s > \mu_k$

www.iebest.ir

www.iebest.ir

eg: دو جسم روی میز بدون اصطکاک قرار گرفتن و باهم در تماس اند. $m_1=2kg$ و $m_2=1kg$ نیروی $F=3^N$ به جسم سنگین تر وارد می شود نیروی تماس بین این دو را بیابید.



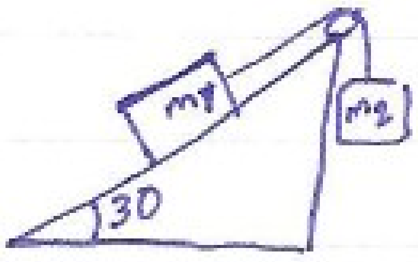


$$F=(m_1+m_2)a \Rightarrow a=1\,^m/_{s^2}$$

$$F_{12}=m_2a \Rightarrow F_{12}=1\times1=1^N$$

eg: جسمی به جرم $m_1=3kg$ روی سطح شیبدار صیقلی با زاویه $30°$ قرار دارد و با جسمی به جرم $m_2=2kg$ مطابق شکل متصل است.

1. شتاب هر یک از دو جسم؛
2. نیروی کشش طناب.



$$m_1: m_1g\sin30=15^N$$

$m_2 - m_2g = 20^N \Rightarrow$ حرکت ثابت را .

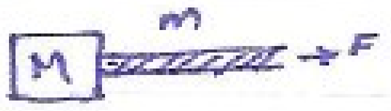
$$m_2g - m_1g\sin30=(m_1+m_2)a$$

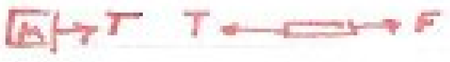
$$20-15=5a \Rightarrow a=1\,^m/_{s^2}$$

$$\Rightarrow m_2g-T=m_2a \Rightarrow 20-T=2\times1 \Rightarrow T=18^N$$

eg: جسمی به جرم M توسط طنابی به جرم m با نیروی F کشیده می شود:

1. شتاب جسم و طناب.
2. نیرویی که طناب به جسم وارد می کند.
3. نیروی کشش در وسط طناب.





$$a=\frac{F}{M+m} \quad , \quad T=Ma \quad :M$$

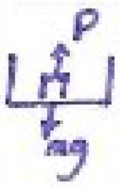
$$F-T=ma \quad :m$$

$T=M.a=M\left(\frac{F}{M+m}\right)$ وسط $T' = F-(\frac{m}{2}a) = (m+M)a-\frac{m}{2}a=(M+\frac{m}{2})a$

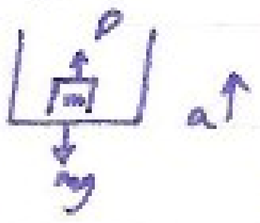
وزن واقعی: مقاومت جسم در مقابل حرکت یا همان $W=mg$

وزن ظاهری: نیرویی که از طرف سطح در امتداد قائم بر جسمی که روی آن قرار دارد وارد می شود. (P).

1. $P=W$: جسم هیچ شتابی در راستای بالا ندارد مثلاً جسم در آسانسوری است که با سرعت ثابت حرکت می کند.



$$\Sigma F=0 \Rightarrow P-W=0 \Rightarrow P=W$$



2. $P\neq W$: در این حالت جسم دارای شتاب در راستای محور بالا است.

$$P-mg=ma \Rightarrow P=m(g+a)$$

نکاتی در مورد شتاب آسانسور:

1. با شتاب تند شونده بالا می رود: a مثبت
2. با شتاب کند شونده بالا می رود: a منفی
3. با شتاب تند شونده پایین می رود: a منفی
4. با شتاب کند شونده پایین می رود: a مثبت.

www.iebest.ir

eg: جسمی به جرم 5kg در آسانسوری قرار دارد. وزن ظاهری آن:

1. با شتاب تند شونده $2 m/s^2$ بالا می‌رود.
2. با شتاب کند شونده $2 m/s^2$ بالا می‌رود.
3. " " تند " $2 m/s^2$ پایین می‌رود.
4. " " کند " $2 m/s^2$ " ".

$p = m(g+a) = 5(9.8+2) = 59$

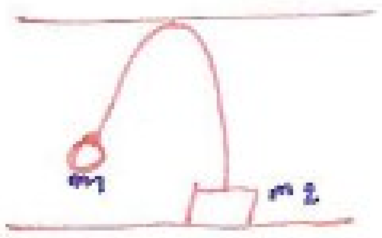
$p = m(g-a) = 5(9.8-2) = 39$

$p = m(g-a) = 5(9.8-2) = 39$

$p = m(g+a) = 5(9.8+2) = 59$

eg: میمونی به جرم 10kg از طناب بدون جرمی که به صندوقی به جرم 15kg وصل است بالا می‌رود.

1. کمترین شتاب میمون برای آنکه صندوق بالا می‌رود. $(N=0)$
2. وقتی صندوق بالا رفت او از حرکت می‌ایستد در این حالت کشش طناب چقدر است؟



الف) $T - m_1g = m_1a$

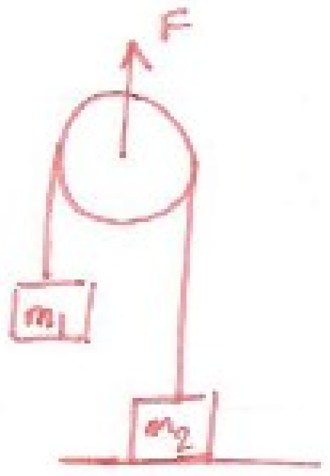
$T = m_2g = 15\times9.8 = 147^N \Rightarrow 147 - 10\times9.8 = 10a \Rightarrow a = 4.9$

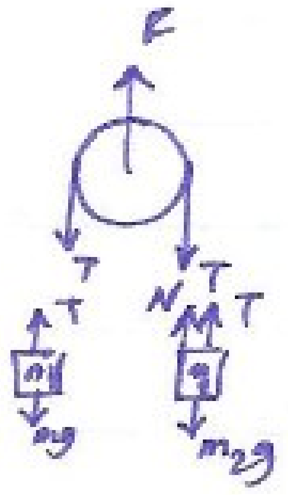
ب) $(m_1 - m_2)g = (m_1+m_2)a' \Rightarrow -5\times9.8 = 25a' \Rightarrow a' = -1.96$

$T' - m_2g = m_2a' \Rightarrow T' - 15\times9.8 = 1.96\times15 \Rightarrow T' = 120^N$

eg: دو جسم m_1 و m_2 از قرقره‌ای آویزانند. جسم m_2 متصل به زمین است. وقتی قرقره را با نیروی F بالا می‌کشیم:

1. بیشترین مقدار F چقدر باشد تا m_2 روی زمین ساکن باشد.
2. شتاب جسم دیگر.





$F = 2T$

$m_1g - T = m_1a$

$m_2g - T - \cancel{N} = m_2\cancel{a} \Rightarrow T = m_2g$

الف: $F = 2m_2g$ ب: $T - m_1g = m_1a \Rightarrow m_2g - m_1g = m_1a$

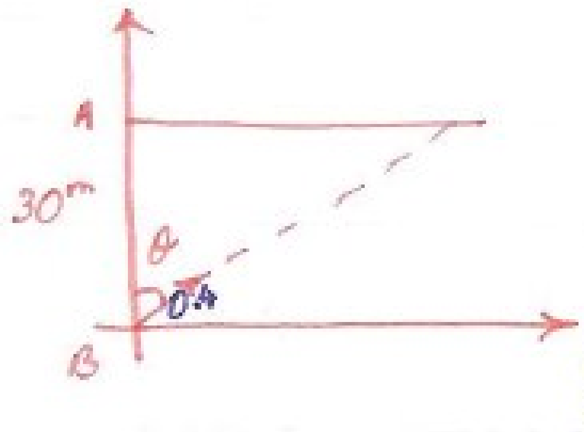
$\Rightarrow a = \frac{(m_2 - m_1)g}{m_1}$

eg: دو قطار با سرعت $30 km/h$ به سوی هم حرکت می‌کنند. در لحظه‌ای که 60km با هم فاصله دارند پرنده‌ای از یکی از قطارها به دیگری می‌پرد. کل زمانی که پرنده سیر می‌کند و مسافت طی شده توسط آن را بیابید.

$v = 60 km/h$

$v_{نسبی} = 60 km/h$ ، $x = 60km \Rightarrow x = vt \Rightarrow t = 1h$

eg: ذره‌ی A با سرعت $3 m/s$ روی خط $y = 30^m$ در حرکت است. ذره‌ی B با سرعت صفر و شتاب $0.4 m/s^2$ و تحت زاویه θ پرتاب می‌شود (شروع می‌شود). θ چقدر باشد تا دو ذره برخورد کنند.



$x_A = x_B$, $y_A = y_B$

$a = 0.4 m/s^2 \Rightarrow a = 0.4 \cos\theta \hat{j} + 0.4 \sin\theta \hat{i}$

$$\begin{cases} x_A = 30t & (I) \\ x_B = \frac{1}{2} a_{x_B} t^2 = \frac{1}{2}(0.4\sin\theta)t^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_A = 30 & (II) \\ y_B = \frac{1}{2} a_{y_B} t^2 = \frac{1}{2}(0.4\cos\theta)t^2 \end{cases}$$

www.iebest.ir

$$3t = 0.2\sin\theta t^2 \Rightarrow t = \frac{15}{\sin\theta} \ (I) \Rightarrow (II) \ 30 = \frac{1}{2}(0.4 \cos) t^2$$

$$30 = 0.2 \cos\left(\frac{15}{\sin\theta}\right)^2$$

$$= 0.2 \frac{15^2}{1-\cos^2\theta} = 30$$

$$\Rightarrow 30 - 30\cos^2\theta = 45\cos\theta \Rightarrow 2 - 2\cos^2\theta - 3\cos\theta = 0 \Rightarrow 2u^2 + 3u - 2 = 0 \quad \Delta = ?$$

$$\Rightarrow u = \pm[\ ] \Rightarrow [\ ] = \cos\theta \Rightarrow \theta = \cos^{-1}$$

$$\theta = 60°$$

مث: شخصی به جرم 85kg بوسیله طنابی که از روی قرقره بدون اصطکاک عبور کرده و به یک کیسه شن به جرم 65kg متصل است و از ارتفاع 10m به پایین می‌آید اگر شخص از حال سکون شروع به حرکت کرده باشد سرعت آن در لحظه‌ی برخورد به زمین؟

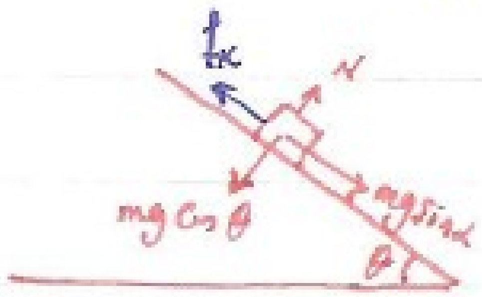
$$m_1 g - m_2 g = (m_1 + m_2)a \Rightarrow a = 4/3 \qquad v^2 - v_0^2 = 2a\Delta y$$

$$\Rightarrow v = 5.16 \ m/s$$

فصل ششم ، دینامیک ذره 2:

1. اصطکاک ایستایی : نیروی اصطکاک بین دو جسم ساکن $\quad f_s = \mu_s . N$

2. اصطکاک جنبشی : نیروی اصطکاک بین دو جسم متحرک $\quad f_k = \mu_k . N$



بدون اصطکاک :

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N = mg\cos\theta$$

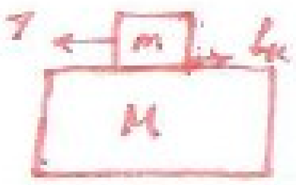
$$\sum F_x = mga \Rightarrow mg\sin\theta = ma \Rightarrow a = g\sin\theta$$

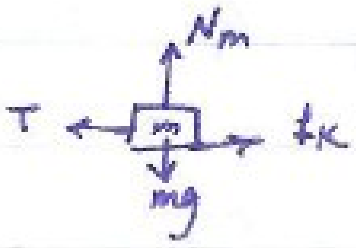
با اصطکاک :

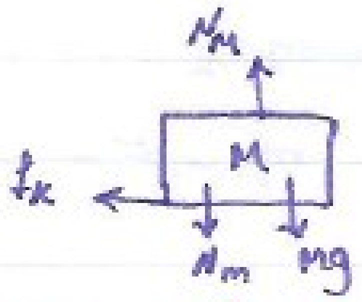
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N = mg\cos\theta$$

$$\sum F_x = mg\sin\theta - \mu_k . mg\cos\theta = ma \Rightarrow a = g\sin\theta - \mu\cos\theta$$

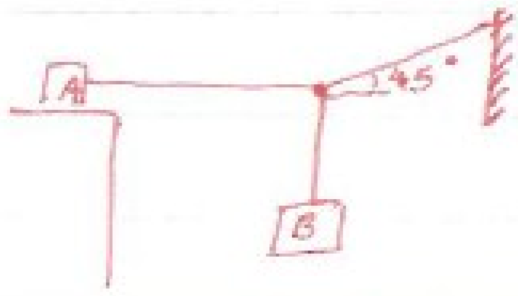
تفکیک نیروها برای دو جسم که روی هم قرار گرفتند :







مث: جسم A به جرم 5kg روی میزی با ضریب اصطکاک 0.5 قرار دارد. بیشینه‌ی جرم جسم B برای آنکه دستگاه در حال تعادل باشد چقدر است؟



$$T\cos 45 = \mu m_A g$$

$$T\sin 45 = m_B g \Rightarrow \mu m_A g = m_B g$$

$$\Rightarrow m_B = 5 \times 0.5 = 2.5 \ kg$$

www.iebest.ir

www.iebest.ir

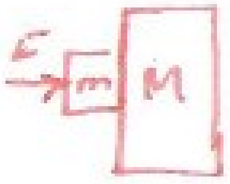
eg: سنگی از بام ساختمانی به ارتفاع 60^m از حال سکون رها می‌شود سنگ 1.2s پیش از رسیدن به زمین چه ارتفاعی دارد؟

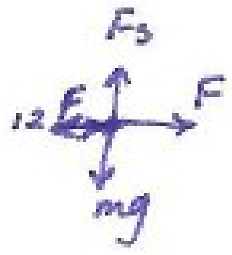
$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + y_0 \Rightarrow -60 = -\frac{1}{2} \times 9.8 \times t^2 \Rightarrow t = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow t_{چ} = 2\sqrt{3} - 1,2 \quad \Rightarrow y = -\frac{1}{2}g(t_{چ})^2 \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \times 9.8 \times (2\sqrt{3} - 1.2)^2 = 25.11 m$$

$$\Rightarrow y_{چ} = 60 - 25.11 = -34.89$$

eg: دو جسم $m_1 = 5kg$ و $m_2 = 10kg$ مطابق شکل دارای ضریب اصطکاک $\mu_s = 0.5$ می‌باشند کمترین میزان نیروی F چقدر باشد تا جسم کوچکتر نیفتد؟





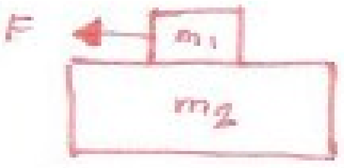
$F = (m+M)a$ $\quad F = (M+m)a \Rightarrow a = \frac{F}{m+M}$ $\quad , \; f_s = \mu_{mg} N = \mu_s \cdot F_{12} = mg$

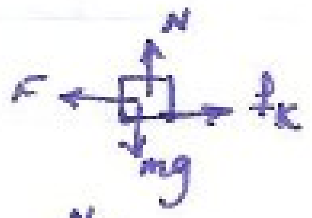
$\mu_s \cdot N = mg$ $\quad M: F_{12} = ma = M\left(\frac{F}{m+M}\right)$

$\mu_s (F_{Mm} - F) = mg \Rightarrow \mu_s (ma) = mg$ $\quad \Rightarrow \mu_s \cdot M\left(\frac{F}{m+M}\right) = mg \Rightarrow F = \frac{mg}{\mu_s M}(m+M)$

$\mu_s \left(\frac{F}{m+M}\right) = g \Rightarrow F = \frac{(m+M)g}{\mu_s}$ $\quad \Rightarrow F = \frac{5 \times 9.8}{0.5 \times 10} \times (15) = 147^N$

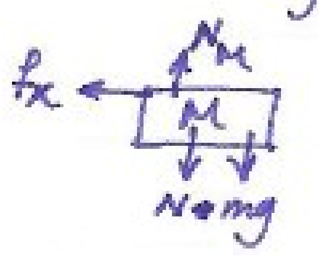
eg: جسم $m_1 = 10kg$ روی جسم $m_2 = 20kg$ قرار دارد و $\mu_k = 0.5$. جسم $m_1(10kg)$ با نیروی 100^N کشیده می‌شود شتاب جسم m_1 و m_2 ؟



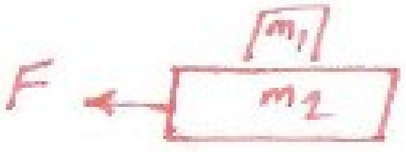


$F - f_k = ma_1 \Rightarrow 100 - 0.5 \times 100 = 10a$

$\Rightarrow a_1 = 5 m/s^2$



$\Rightarrow f_k = 50 = 20a_2 \Rightarrow a_2 = 2.5 m/s^2$



$\mu_s = .7$

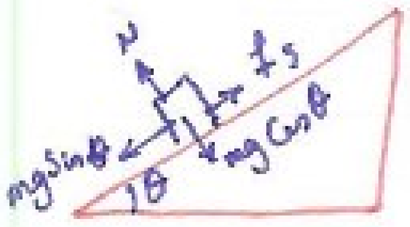
$\mu_k = 0.5$ $\quad F \cancel{-f_k} = (m_1 + m_2)a_1 \Rightarrow 100 = 30a \Rightarrow a = 10/3$

$\cancel{f_k = m_1 a_2}$

$\mu_s = 0.7$ $\quad ma = F = 10 \times \frac{10}{3} = 100/3 \quad , \; f_{s_{max}} = 70^N$

محاسبه μ_s در سطح شیبدار:

برای جسمی که با سرعت ثابت حرکت می‌کند.



$\Sigma F_y = \cancel{ma} \Rightarrow N = mg \cos\theta$

$\Sigma F_x = \cancel{ma} \Rightarrow mg \sin\theta = f_s = \mu_s \cdot N \Rightarrow \mu_s = \tan\theta$

www.iebest.ir

www.iebest.ir

نیروی پس کشی و سرعت حدی:

نیروی مقاوم در برابر حرکت جسم در شاره می گویند. $\vec{D}$

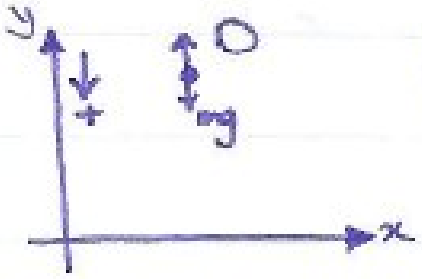
1. ضریب کشش C ، 2. چگالی شاره ρ ، 3. سطح مقطع موثر جسم A ، 4. سرعت جسم v

$$D = \frac{1}{2}\rho A C v^2$$

سرعت حدی یا v_t: اگر جسم از ارتفاع زیاد سقوط داشته باشد در جایی سرعت جسم ثابت می شود این سرعت را سرعت حدی گویند.

$v = v_t \Rightarrow a = 0$

$D = mg$



$\vec{D} - mg = ma$

$$\frac{1}{2}\rho A C v_t^2 = mg \Rightarrow v_t = \sqrt{\frac{2mg}{\rho A C}}$$

eg: سرعت حدی یک شیرجه رونده در دو حالت $160 \, km/h$ و $310 \, km/h$ است. او این حالت ها را با تغییر در مساحت خود ایجاد کرده است با فرض ثابت بودن C مطلوبست $\frac{A_{\text{کندتر}}}{A_{\text{تندتر}}}$ ؟

$$\left(\frac{31}{16}\right)^2 = \frac{A_{\text{کند}}}{A_{\text{تند}}} = \left(\frac{v_{t\,\text{تند}}}{v_{t\,\text{کند}}}\right)^2$$

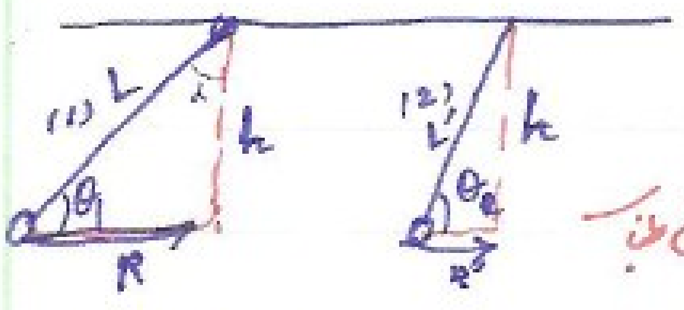
دینامیک حرکت دورانی:

سرعت ثابت بر جهت مماس بر مسیر حرکت و $a = \frac{v^2}{r}$ بجهت مرکز است.

eg: جسم m روی میز بدون اصطکاک قرار دارد و توسط ریسمان بر جسم M متصل است میزان r و v را طوری تعیین کنید که جسم M ساکن بماند.

$$T = Mg = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow \frac{v^2}{R} = \frac{Mg}{m}$$

eg: دو آونگ مخروطی با طول های مختلف از سقفی آویزان شده اند و طوری دوران می کنند که فاصله ی گلوله ها از سقف یکی است نشان دهید دوره ی تناوب دو آونگ برابر است.



$R = L\cos\theta$

$R' = L'\cos\theta$

$2\pi\sqrt{\frac{L\cos\theta}{g}}$

(1)

$T\cos\theta = \frac{mv^2}{R}$

کشش نخ $T\sin\theta = mg$

$$\Rightarrow \cot g\theta = \frac{v^2}{Rg} \Rightarrow v = \sqrt{Rg \cdot \cot g\theta}$$

$$T = \frac{2\pi R}{\sqrt{Rg\cdot\cot g\theta}} = \frac{2\pi L\cos\theta}{\sqrt{L\cos\theta\cdot g\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}} = \frac{2\pi L}{\sqrt{\frac{Lg}{\sin\theta}}}$$

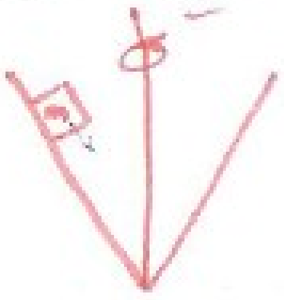
$$= \frac{\sqrt{\sin\theta}\cdot 2\pi L}{\sqrt{Lg}} = \frac{2\pi\sqrt{L\sin\theta}}{\sqrt{g}} = \frac{2\pi\sqrt{h}}{\sqrt{g}}$$

برای هر دو ثابت است پس T ها با هم برابرند.

www.iebest.ir

www.iebest.ir

۵۶ : مکعب کوچکی به جرم m داخل مخروطی که با بسامد (ν) می‌چرخد قرار گرفته است بیشترین و کمترین مقدار ν چقدر باشد تا مکعب نسبت به مخروط حرکت نکند. ضریب اصطکاک μ_s.



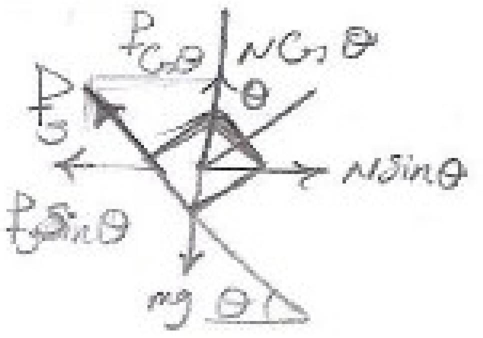
بیشترین:

$$mg\sin\theta = F\cos\theta + \mu(F\sin\theta + mg\cos\theta)$$

$$mg\sin\theta = mr\omega^2\cos\theta + \mu(mr\omega^2\sin\theta + mg\cos\theta)$$

$$g\sin\theta = r\omega^2(\cos\theta + \mu\sin\theta) + \mu_s g\cos\theta$$

$$\Rightarrow \nu = \sqrt{\frac{g(\sin\theta - \mu\cos\theta)}{4\pi^2(\cos\theta + \mu\sin\theta)}}$$



راه حل درست:

$$N\sin\theta - \mu_s N\cos\theta = mr\omega^2 \quad I$$

کمترین:

$$N\cos\theta + \mu_s \cdot N\sin\theta = mg \Rightarrow N(\cos\theta + \mu_s\sin\theta) = mg \quad II$$

$$\xrightarrow{I} N(\sin\theta - \mu_s\cos\theta) = mr\omega^2 \xrightarrow{II} \frac{(\sin\theta - \mu_s\cos\theta)g}{r(\cos\theta + \mu_s\sin\theta)} = \omega^2$$

$$\Rightarrow \nu_{min} = \sqrt{\frac{g(\sin\theta - \mu_s\cos\theta)}{4\pi^2 r(\cos\theta + \mu_s\sin\theta)}}$$

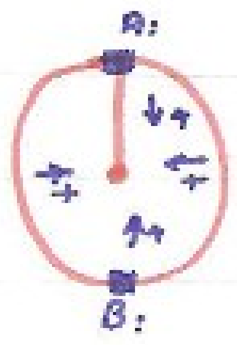
در بیشترین مقدار ν باید μ_s را رو به پایین در نظر بگیریم یعنی حالتیکه جسم می‌خواهد از قیف خارج شود.

www.iebest.ir

www.iebest.ir

8/9

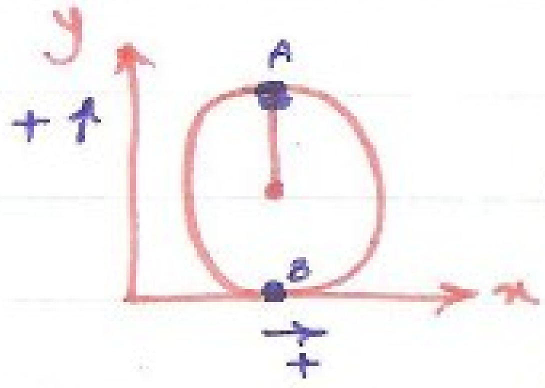
تعیین جهت در حرکت های دایره ای :



$A:\quad mg+T=\frac{mv^2}{R}$

$B:\quad T-mg=\frac{mv^2}{R}$

روش اول: جهت مثبت را در جهت نیروی مرکزگرا قرار می دهیم بدین صورت که نیروهایی که در جهت مرکز هستند، با علامت مثبت و نیروهایی که خلاف جهت نیروی مرکزی هستند با علامت منفی قرار می دهیم.



$A:\quad -mg-T=-\frac{mv^2}{R}$

$B:\quad T-mg=\frac{mv^2}{R}$

روش دوم: جهت مثبت را هم جهت با مثبت x و y انتخاب می کنیم بدین صورت که نیروهایی که در جهت x و y بودند با علامت مثبت و نیروهایی که در خلاف جهت x و y بودند با علامت منفی قرار می دهیم.

eg: وزن ظاهری شخصی به جرم 50kg در بالا ترین نقطه ی چرخ و فلک 400^N است وزن ظاهری او در پایین ترین نقطه چقدر است .

$mg-N=\frac{mv^2}{R} \Rightarrow 50\times9.8-400=90=\frac{mv^2}{R}$

$N'-mg=\frac{mv^2}{R} \Rightarrow N'-9.8\times50=90 \Rightarrow N'=580^N$

eg: وزن ظاهری شخصی به جرم 67kg در بالا ترین نقطه ی چرخ و فلک 550^N است. وزن ظاهری او اگر سرعت چرخ فلک 2 برابر شود وزن ظاهری او در بالا ترین نقطه چقدر می شود .

$mg-N=\frac{mv^2}{R} \Rightarrow 67\times9.8-550=\frac{mv^2}{R}=106.6$

$\Rightarrow v'=2v \Rightarrow \frac{mv'^2}{R}=426.4=mg-N$

$\Rightarrow 67\times9.8-N=426.4 \Rightarrow N=230.2^N$

eg: جسمی به فنری با ثابت k متصل است طول فنر در حالت عادی L_0 است و اگر جسم با بسامد ν بچرخد R و F را تعیین کنید.

$F=k\Delta L=k(R-L_0)=\frac{mv^2}{R}$

$\nu=R\omega \Rightarrow k(R-L_0)=mR\omega^2$

$\Rightarrow k(R-L_0)=mR4\pi^2\nu^2$

$\Rightarrow R(k-m4\pi^2\nu^2)=kL_0$

$\Rightarrow R=\frac{kL_0}{k-m4\pi^2\nu^2}$

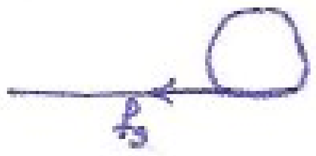
$F=k\Delta L=k(R-L_0)=k\left(\frac{kL_0}{k-m4\pi^2\nu^2}-L_0\right)=\left(\frac{L_04m\pi^2\nu^2}{k-m4\pi^2\nu^2}\right)k$

www.iebest.ir

www.iebest.ir

eg: زاویه عرضی یک پیچ در یک جاده برای سرعت $64\ km/h$ و شعاع $120\ m$ چقدر است!
اگر شیب عرضی نداشته باشد مقدار مینیمم ضریب اصطکاک لازم چقدر است؟

$$N\sin\theta = mv^2/R$$
$$N\cos\theta = mg \Rightarrow \tan\theta = v^2/Rg = 0.268 \Rightarrow \theta = 15^\circ$$



$$f_s = mv^2/R \Rightarrow \mu_s . N = mv^2/R \Rightarrow \mu_s = v^2/Rg = 0.268$$

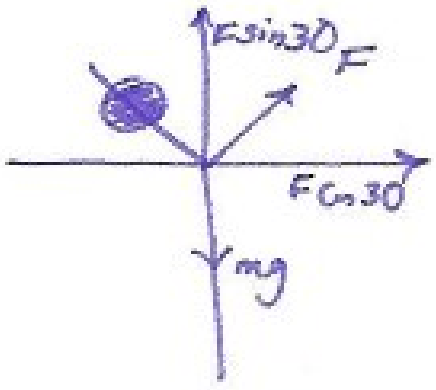
eg: جسمی روی یک سطح شیبدار که با افق زاویه 20° می‌سازد با سرعت ثابت در حال لغزیدن است. اگر زاویه سطح شیبدار 30° شود شتاب جسم چقدر است.

I $mg\sin\theta = \mu_k mg\cos\theta$

$\theta = 20 \Rightarrow \mu_k = \tan 20$

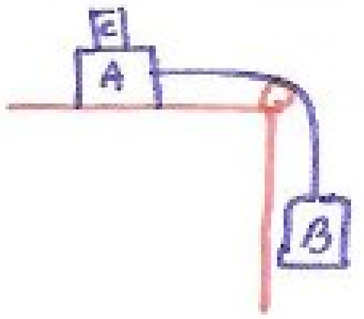
II $mg\sin\theta - \mu_s mg\cos\theta = ma \Rightarrow g(\sin\theta - \tan 20\cos\theta) = a \Rightarrow a = 9.8(\sin 30 - \tan 20\cos 30)$

eg: هواپیمایی با سرعت $360\ km/h$ روی دایره‌ای افقی پرواز می‌کند اگر زاویه بال‌ها هواپیما نسبت به افق 30° باشد حساب شعاع دایره پرواز چقدر است؟ (نیروی بالابرنده عمود بر بال‌ها در نظر بگیرید)



$$F\sin 30 = mg \Rightarrow F = 2mg$$
$$F\cos 30 = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow \sqrt{3}mg = \frac{mv^2}{R}$$
$$\Rightarrow R = \frac{v^2}{\sqrt{3}g}$$

eg: جسمی به وزن $W_A = 44^N$ و $W_B = 22^N$ است کمینه وزن C چقدر باشد تا جسم A نلغزد. $\mu_s = 0.3$



eg: با جسم C ناگهان برداشته می‌شود اگر $\mu_k = 0.2$ شتاب جسم A چقدر است.

$$m_B g = \mu_s . (m_A g + m_C g)$$
$$\Rightarrow m_C g = 29.3^N$$

$$m_B g - f_k = (m_A + m_B)a \Rightarrow m_B g - \mu_k m_A g = (m_A + m_B)a$$

$$a = \frac{m_B g - \mu_k m_A g}{m_A + m_B} = \frac{22 - 0.2 \times 44}{\frac{22 + 44}{9.8}} = 1.96\ m/s^2$$

www.iebest.ir

www.iebest.ir

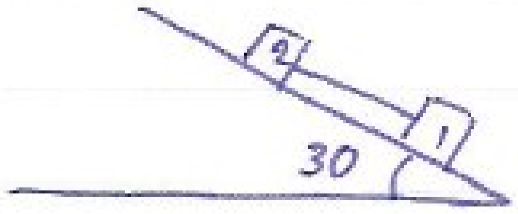
eg: دو جسم $m_1=3kg$ و $m_2=7kg$ به وسیله‌ی ریسمانی به هم متصلند و از سطح شیب‌دار 30° می‌لغزند. $\mu_{k_1}=0.1$ و $\mu_{k_2}=0.2$

شتاب دو جسم را در دو حالت زیر بیابید.

۱. جسم m_1 پایین m_2 باشد

۲. جسم m_2 پایین m_1 باشد

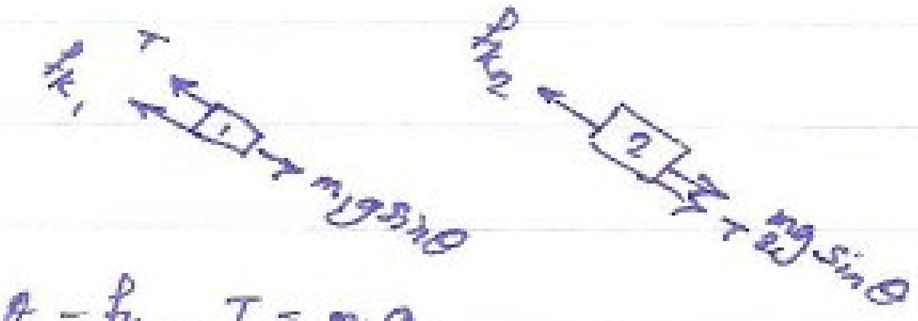
۳. کشش ریسمان در دو حالت بالا



$a = g(\sin\theta - \mu_k \cos\theta)$

(I) $a_1 = 4.05$ $a_2 = 3.2$ (II)

الف) ابتدا شتاب هر یک جسم ها را پیدا می‌کنیم هنگامی که جسم اول جسم پایینی و جسم دو بالا است. به علت اینکه شتاب m_1 بزرگتر است جسم m_1، جسم m_2 را به دنبال خود می‌کشد در این حالت کشش T وجود دارد و دو جسم با یک شتاب مشترک سر می‌خورند.



$$\left.\begin{array}{l} * \; m_1 g\sin\theta - f_{k_1} - T = m_1 a \\ T + m_2 g\sin\theta - f_{k_2} = m_2 a \end{array}\right\}^{+} \Rightarrow (m_1+m_2)g\sin\theta - f_{k_1} - f_{k_2} = (m_1+m_2)a$$

$$9.8\times\frac{1}{2}\times10 - 0.1\times3\times9.8\times\frac{\sqrt{3}}{2} - 0.2\times7\times9.8\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 10a \Rightarrow a = 3.4\ {}^{m}/_{2^2}$$

$\Rightarrow$ با جایگذاری در * ، T بدست می‌آید.

ب) در حالت دوم که جسم m_2 پایین و m_1 بالا است به علت اینکه شتاب m_2 کمتر از شتاب m_1 است جسم m_1 سریعتر از جسم m_2 حرکت می‌کند تا جایی که اگر طول سطح شیب‌دار به اندازه کافی بزرگ باشد دو جسم به هم می‌رسند. در این حالت هر یک از دو جسم با شتاب مستقل از یکدیگر یعنی همان روابط (I و II) به پایین می‌لغزند. در این حالت کشش طناب صفر است.

فصل هفتم: انرژی جنبشی و کار:

انرژی جنبشی مربوط به حرکت جسم است: $k = \frac{1}{2} m v^2$

کار (W): انرژی‌ای است که با وارد کردن نیرو به یک شیء به آن داده می‌شود یا گرفته می‌شود. کار مربوط به انرژی داده شده مثبت و کار مربوط به انرژی گرفته شده منفی است.

$W = F.d$

www.iebest.ir

رابطه کار و انرژی جنبشی: اگر ذره‌ای تحت تأثیر نیروی F قرار گیرد و به اندازه‌ی d جابجا شود کار انجام شده روی جسم:

$W = \Delta K = F.d\cos\theta \Rightarrow \frac{1}{2} m (V_2^2 - V_1^2) = F.d\cos\theta$

θ: زاویه بین نیرو و جابجایی.

برای استفاده از روابط بالا نکات زیر را مد نظر قرار می‌دهیم:

نکته 1. نیروی F ثابت است یعنی با گذشت زمان یا مکان تغییر نمی‌کند

نکته 2. جسم مورد نظر یک جسم صلب است یعنی در حین حرکت تمام اجزای آن حرکت می‌کند.

بسته به زاویه‌ی θ رابطه‌ی بین نیرو و جابجایی به حالتهای مختلف نمایش داده می‌شود.

1. نیرو و جابجایی در یک جهت باشند. $W = F.d$

2. نیرو و جابجایی در جهت مخالفند. $W = -F.d$

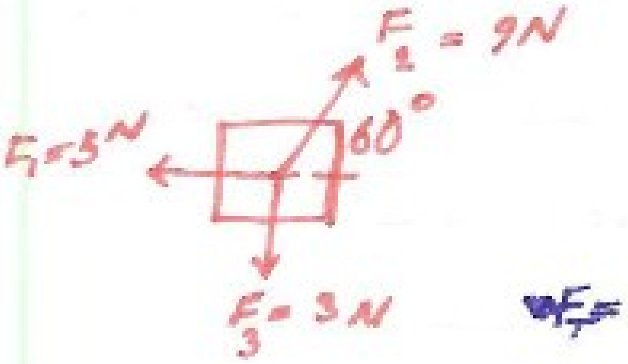
3. نیرو و جابجایی عمود بر هم باشند. $W = F.d \cos 90 = 0$

برای محاسبه‌ی کار از این دو روش استفاده می‌کنیم:

1. کار تک تک نیروها را بدست می‌آوریم و در نهایت تک تک کارهای محاسبه شده را با هم جمع می‌کنیم.

2. ابتدا نیروی برایند چند نیرو را بدست می‌آوریم و سپس کار نیروی برایند را حساب می‌کنیم.

eg: سه نیرو مطابق شکل به جسمی وارد می‌شود و آن را به اندازه 3^m به طرف چپ جابجا کند!



1. کار خالص انجام شده توسط نیروها چقدر است؟

2. تغییرات انرژی جنبشی؟

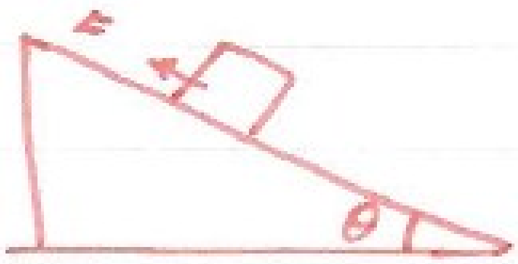
$F_T = F_1 - F_2\cos\theta = 5 - 9/2 = 0.5^N$

$W = F_T.d = 0.5 \times 3 = 1.5^N$

$\Delta K = W = 1.5^N$

www.iebest.ir

49: جسمی به وزن 450^N از سطح شیبداری به طول 1.5^m و ارتفاع 0.9^m به پایین می‌آید نیروی F باعث می‌شود تا جسم با سرعت ثابت به پایین آید اگر $\mu_k = 0.1$:



1. نیروی چقدر است؟
2. کار نیرو چقدر است؟
3. کار نیروی گرانش چقدر است؟
4. کار سطح شیبدار چقدر است؟
5. تغییر انرژی جنبشی.

$\sin\theta = \frac{\text{روبرو}}{\text{وتر}} = \frac{0.9}{1.5} = 3/5 = 0.6 \rightarrow \theta = 36.87°$

$\sum F = 0 \quad F + f_k = mg\sin\theta \rightarrow F + \mu_k mg\cos\theta = mg\sin\theta$ (الف

$\rightarrow F + 0.1 \times 450 \times 0.8 = 450 \times 0.6$

$\rightarrow F = 234^N$

ب) $W_F = \vec{F}.\vec{d} = -F.d = -234 \times 1,5 = -351^N$

ج) $W = \vec{F}.\vec{d}\cos\theta = mg.d\cos\theta = 405^N$

$L = mg.d\sin\theta$ [illegible] $= 450 \times 0.6 \times 1.5 = 405^N$

د) $W = \vec{F}.\vec{d}$

کار انجام شده از طرف سطح شیبدار

$mg\sin\theta - F - f_k = 0 \rightarrow mg\sin\theta = F + f_k$ (نیاز نیست فقط N و f_k)

$W = -\mu_k.mg\cos\theta.d = -0.1 \times 450 \times 1.5 \times 8 = -54j$

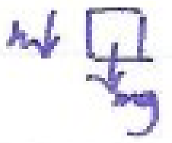
ه) $\Delta k = W \rightarrow W_T = -351 + 405 - 54 = 0$

کار انجام شده توسط نیروی گرانش:

1. جسم به اندازه h به بالا می‌رود:

$W = F.d = mgh\cancel{\cos\pi}_{-1} = -mgh$

2. جسم به اندازه h پایین می‌آید:



$W = F.d = mgh\cos(0) = mgh$

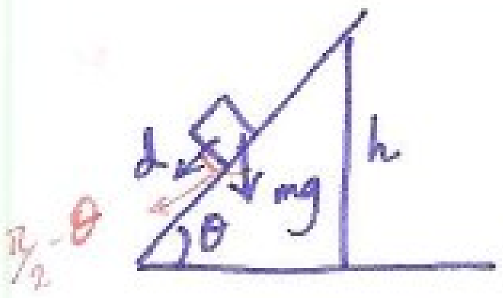
3. جسم به اندازه‌ی d روی سطح شیبدار به بالا می‌رود.

$W_{mg} = F_g.d = mgd\cos(\pi/2 + \theta) = -mgd\sin\theta = -mgh$

www.iebest.ir

www.iebest.ir

۴. جسم به اندازه d از سطح شیبدار پایین می آید.

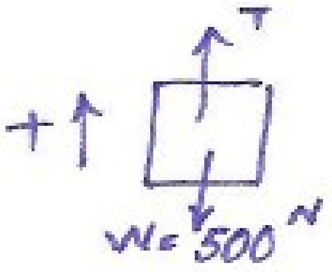


$$W_{mg} = \vec{F}_g . \vec{d} = mgd \cos(\pi/2 - \theta) = mgd \sin\theta = mgh$$

مثال: هلیکوپتری جسم 50^{kg} را بوسیله کابل تا ارتفاع 15^m با شتاب $g/10$ بالا می کشد. کار انجام شده توسط هلیکوپتر و نیروی گرانش روی جسم چقدر است.

2. انرژی جنبشی جسم:

3. سرعت جسم هنگام رسیدن به هلیکوپتر



$$T - mg = ma = m\,g/10 \Rightarrow T = 11/10 \times 500 \times 9.8$$

$$\Rightarrow T =$$

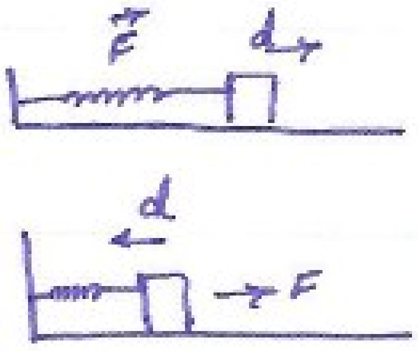
$$W_T = T d \cos 0 = 11/10 \times 50 \times 9.8 \times 15^m = 8085$$

$$W_{mg} = -mgh = -50 \times 9.8 \times 15 = -7350$$

$$\Delta K = W_T = W_T + W_{mg} = 8085 - 7350 = 735$$

$$1/2\, mv^2 - 1/2\, m v_0^2 = 1/2\, m(v^2 - v_0^2) = 735$$

$$\Rightarrow v^2 = 735/25 \Rightarrow v = \sqrt{733/25} = 4.9\ m/s$$



نیروی فنر: یک نیروی بازگرداننده است.

$F = -kx$ قانون هوک

1. فنر بدون جرم باشد.

2. فنر از قانون هوک پیروی کند.

کار نیروی متغیر:

چون نیروی فنر یک نیروی متغیر است نمی توان از رابطه مستقیم W=F.d استفاده کرد.

$$\Delta W_i = F_i \Delta x_i$$

$$\Delta W_T = \sum \Delta W_i = \sum F_i \Delta x_i$$

اگر Δx_i آن قدر کوچک بگیریم که F تقریبا در بازه ها مساوی فرض کنیم.

$$W = \sum F_i \Delta x_i \xrightarrow{\Delta x = 0} W = \lim_{\Delta x \to 0} \sum F \Delta x \qquad \Delta x \to 0 , \sum \to \int$$

$$W = \int F . dx , F = -kx \Rightarrow W = \int_{x_i}^{x_f} -kx\, dx = -1/2\, kx^2 \Big]_{x_i}^{x_f}$$

$$= -1/2\, k(x_f^2 - x_i^2)$$

www.iebest.ir

www.iebest.ir

مثال: جسمی به جرم m روی فنر با ثابت k افتاده و آن را به اندازه d متراکم می کند. کار فنر روی جسم؟ کار نیروی گرانش؟ سرعت جسم در لحظه برخورد با فنر؟ اگر سرعت اولیه دو برابر شود میزان تراکم چه قدر است؟

$$W_F = -\frac{1}{2}kx^2 = -\frac{1}{2}kd^2$$

$$W_g = mgh = mgd$$

$$W_T = mgd - \frac{1}{2}kd^2 = \Delta K = \frac{1}{2}m(\overset{0}{\cancel{v^2}} - v_0^2)$$

$$\Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2mgh \mp kd^2}{m}}$$

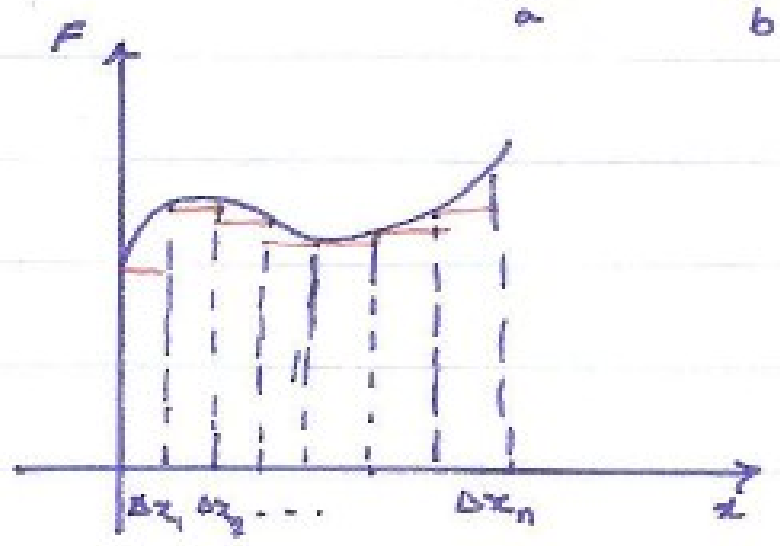
$$v_0' = 2v_0 \Rightarrow K' = 4K$$

$$K' = W_T' = W_g' + W_F' = mgd' - \frac{1}{2}kd'^2 = 4K$$

$$\Rightarrow mgd' - \frac{1}{2}kd'^2 = -2mv_0^2 \Rightarrow d' = ?$$

$$\Rightarrow \underbrace{-\frac{1}{2}k}_{a}d'^2 + \underbrace{mg}_{b}d' + \underbrace{2mv_0^2}_{c} = 0$$ حل معادله درجه 2

کار نیروی متغیر در حالت کلی:



$$\Delta W_i = F_{i_{avg}} \Delta x_i$$

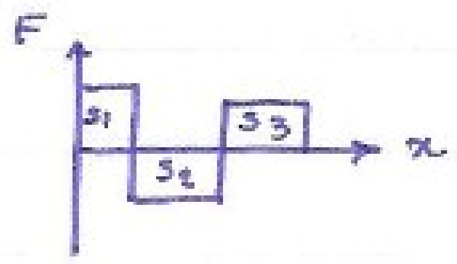
$$W_T = \sum \Delta W_i = \sum F_{i_{avg}} \Delta x_i$$

فرض می کنیم Δx ها به سمت صفر میل کند می توان F را مساوی فرض کرد.

$$W_T = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} F_{i_{avg}} \Delta x_i \qquad \Delta x \to 0 \quad \text{یعنی} \quad \sum \to \int$$

$$\Rightarrow W = \int_{x_i}^{x_f} F.d_x$$

$F\Delta x$ مساحت هر یک از مستطیل ها است و کار برابر است با مجموع
$F\Delta x$ ها پس کار برابر است با مساحت کل مستطیل ها
یا کار برابر است با مساحت زیر نمودار (F-x)

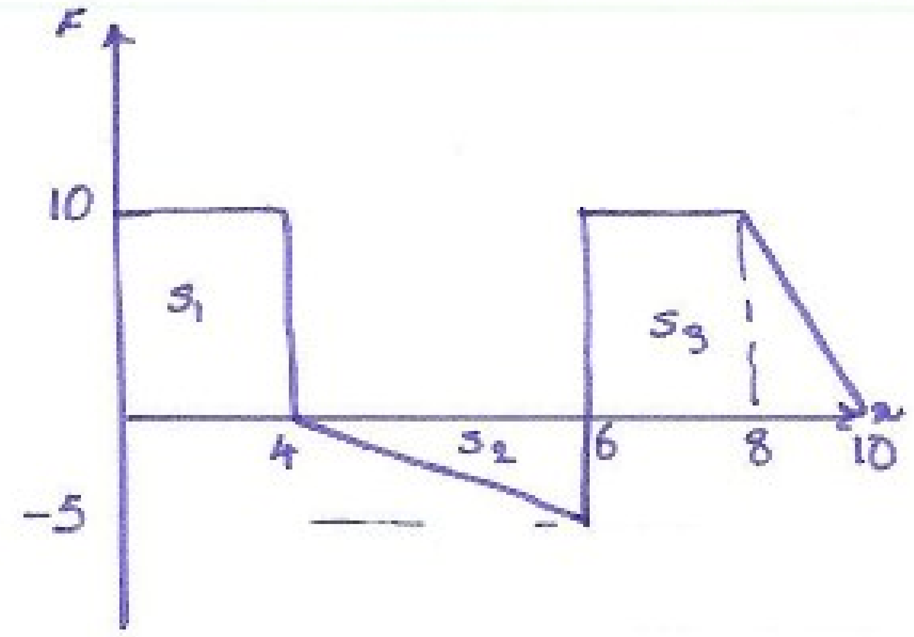


نکته: اگر جایی از نمودار علامت منفی وارد شد علامت آن در محاسبه کار تاثیر می دهیم.

$$W = S_1 - S_2 + S_3$$

www.iebest.ir

eg: در شکل مقابل کار انجام شده را بدست آورید:



$$W_T = S_1 - S_2 + S_3 = (4 \times 10) - (2 \times 5/2) + \left(\frac{(2+4)10}{2}\right) = 65\,J$$

در مثال بالا اگر سرعت جسم که 2kg وزن دارد در x = 0 برابر 1m/s باشد انرژی جنبشی آن در x = 6 چقدر است.

$$W_{0<x<6} = \Delta K \Rightarrow 35 = \frac{1}{2} m (v^2 - v_0^2)$$

$$\Rightarrow 35 = \frac{1}{2} \times 2 (v^2 - 1) \Rightarrow \boxed{v = 6\,m/s} \text{ و } \boxed{K = 36\,J}$$

توان:

آهنگ زمانی انجام کار توسط نیرو را توان گویند (P : $\overset{\text{وات}}{W}$)

توان متوسط: $P_{avg} = W/\Delta t$

توان لحظه ای: $P = \frac{dW}{dt}$

$$W = \vec{F} \cdot \vec{r} = F . r \cos\theta \Rightarrow P = \frac{d}{dt} F r \cos\theta = F \cos\theta \frac{dr}{dt}$$

$$\Rightarrow P = F . V . \cos\theta = \vec{F} . \vec{V}$$

نیرو با چه آهنگی کار انجام می دهد = توان

اگر P برحسب t معلوم باشد می توان کار را محاسبه کرد.

$$W = \int dW = \int P . dt$$

روش های محاسبه کار از طریق $W = \int F . dr$

۱. حالتی که بتوان F و r و θ برحسب [illegible] بهم نوشت.

$$W = \int F \cos\theta \, dr$$

۲. F و dr به صورت مولفه ای داده شوند.

$$\left.\begin{aligned} \vec{F} &= F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k} \\ \vec{dr} &= dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k} \end{aligned}\right\} \Rightarrow W = \int \vec{F} . \vec{dr} = \int F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

$$\Rightarrow W = \int F_x dx + \int F_y dy + \int F_z dz$$

www.iebest.ir

eg: جسمی به جرم 2kg از حالت سکون حرکت می کند پس از 3s تندیش به 10 m/s می رسد:

1. کار این نیروی

2. توان لحظه ای

3. توان متوسط

$W = \frac{1}{2} m(v^2 - v_0^2) \Rightarrow W = \frac{1}{2} \times 2(100-0) = 100\ J$

$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v} = 20/3 \times 10 = 67^W$

$F = ma \Rightarrow F = 2 \times \frac{10}{3} = \boxed{\frac{20}{3}}$

$P_{avg} = W/t = \frac{100}{3} = 33^W$

eg: جسمی تحت تاثیر نیروی $F = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ قرار دارد و سرعتش به [illegible] $v = -i - j$ می رسد

$\vec{F}\cdot\vec{v}$

$P_{لحظه‌ای} = -1-1+0 = -2^W$

آهنگ انجام کار چقدر است.

eg: انرژی جنبشی دونده ای نصف انرژی پسر بچه ای است که جرمش نصف جرم دونده است دونده سرعتش را به اندازه 1 m/s افزایش می دهد در نتیجه انرژی جنبشی هر دو برابر می شود.

$k_2 = \frac{1}{2} k_1$ (I) $k_2 =$ دونده

$m_1 = \frac{1}{2} m_2$ $k_1 =$ پسر بچه

1. سرعت اولیه دونده؟

2. سرعت اولیه بچه؟

~~$\frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{4} m_1 v_1^2$~~

$v_2' = v_2 + 1 \Rightarrow k_2 = k_1$ (II)   (II, I) $\overset{v_2}{k_2} = 2\overset{v_1}{k_2} \Rightarrow (v_1+1)^2 = 2v_1^2$

ح: $\frac{1}{2} MV^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} mv^2\right) \Rightarrow \frac{1}{2}(2m)V^2 = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} mv^2 \Rightarrow V^2 = \frac{v^2}{4}$ ح $V = \frac{v}{2}$ (I)

$\frac{1}{2} M(V+1)^2 = \frac{1}{2} mv^2 \Rightarrow \frac{1}{2}(2m)(V+1)^2 = \frac{1}{2} mv^2 \Rightarrow (v+1)^2 = v^2/2$ (II)

A = دونده   B = پسر بچه

$2K_A = K_B , 2m_A = m_B$ $V_A = V_B/2$ (I) $V_A' = V_A + 1$ (II),(I) $\Rightarrow \frac{v^2}{4} + v + 1 = \frac{v^2}{2}$

$2\left(\frac{1}{2} m_A V_A^2\right) = \frac{1}{2} m_B V_B^2$ $\frac{1}{2} \cancel{m_A}(V_A+1)^2 = \frac{1}{2} \cancel{m_B} V_B^2$

$2\left(\frac{1}{2} 2\cancel{m_B} V_A^2\right) = \frac{1}{2} \cancel{m_B} V_B^2$ $2(V_A+1)^2 = V_B^2 \Rightarrow V_A = \frac{\sqrt{2}}{2} V_B - 1 \Rightarrow v = 4.83 \Rightarrow V = 2.41$

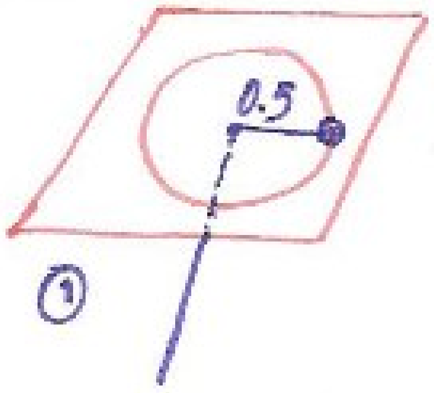
eg: جسمی 0.675kg روی میز متصل به طناب حرکت دایره ای انجام می دهد شعاع 0.5m و سرعت جسم 10 m/s

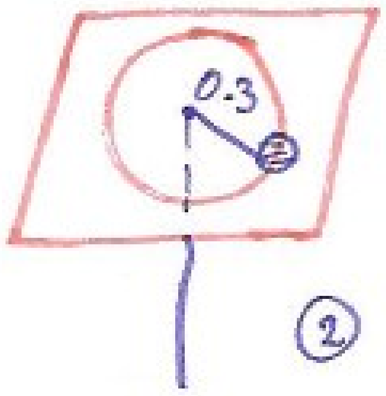
1) T=?

2) اگر ریسمان به اندازه 0.2 پایین کشیده شود کشش ریسمان 4.63 برابر کشش اولیه می شود کل کار انجام شده توسط ریسمان.

www.iebest.ir

www.iebest.ir





$T = \frac{mV^2}{R} \Rightarrow T = \frac{0.675 \times 100}{0.5} = 135^N$

$W = F.d\,Co = T.d = \frac{mv^2}{R}.d$

$4.63 \times 135 \times 0.2 = 125.01\,\text{J}$

فصل هشتم

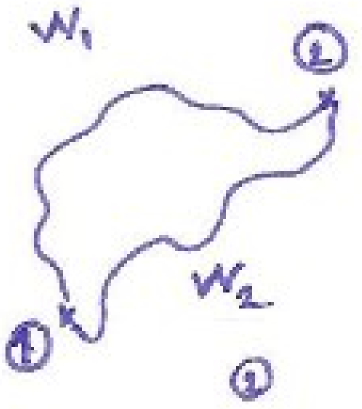
انرژی پتانسیل و پایستگی انرژی:

انرژی پتانسیل: انرژی است که بین اجسامی است که بین آنها نیروی پایستار وجود دارد.

نیروی پایستار:

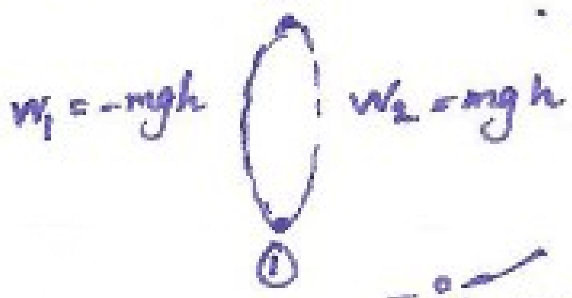
1. کار انجام شده روی جسم توسط آن نیرو به مسیر طی شده بستگی ندارد.

مثل: نیروی وزن، کشش فنر



$W_1 = W_2$

2. کار خالص انجام شده روی یک ذره در یک مسیر بسته صفر است.



$W_T = W_1 + W_2 = -mgh + mgh = 0$

3. کار انجام شده در نیروی پایستار در مسیر رفت برابر با منفی مقدار آن در مسیر برگشت.

4. در نیروی پایستار انرژی از بین نمی رود.

$E_1 = E_2 \Rightarrow \Delta E = 0$

$k_1 + U_1 = k_2 + U_2 \Rightarrow \Delta K = -\Delta u \Rightarrow W = -\Delta u$

- تغییرات انرژی پتانسیل برابر با منفی کار انجام شده روی جسم است.

$W = -\Delta U = \vec{F}.\vec{r}$ نیرو ثابت باشد

$W = -\Delta U = \int \vec{F}.d\vec{r}$ نیرو متغیر باشد

نیرو فنر $W = -\frac{1}{2}k(x_f^2 - x_0^2)$ $\quad x_i = 0$

$\Delta u = \frac{1}{2}k(x_f^2 - x_0^2) \Rightarrow \underset{\text{فنر}}{U_{(x)}} = \frac{1}{2}kx^2 \qquad \underset{\text{وزنی}}{U_{(y)}} = mgy$

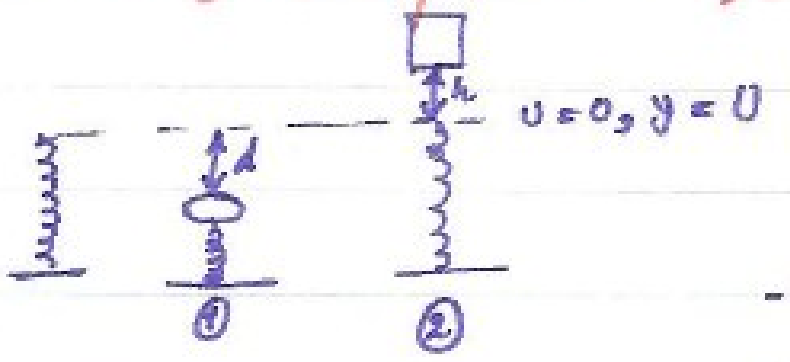
www.iebest.ir

اصل پایستگی انرژی: اگر در یک دستگاه منزوی نیروهای پایستار وجود داشته باشد انرژی مکانیکی تغییر نمی کند.

$E_1 = E_2 \rightarrow \Delta E_{mec} = 0 \Rightarrow k_1 + U_1 = k_2 + U_2 \rightarrow \Delta k + \Delta U = 0$

در حل مسائل جایی را به عنوان سطح $U=0$ و $y=0$ قرار می‌دهیم و ارتفاعات را نسبت به آن مبدأ می‌سنجیم یعنی y ها بالای $y=0$ را مثبت و y ها پایین $y=0$ را منفی قرار می‌دهیم.

eg: یک سکه ی 2gr روی فنر قائمی به پایین فشرده می‌شود و به اندازه 1cm متراکم می‌شود اگر $k=40$ و سکه رها شود تا چه ارتفاعی بالا می‌رود؟



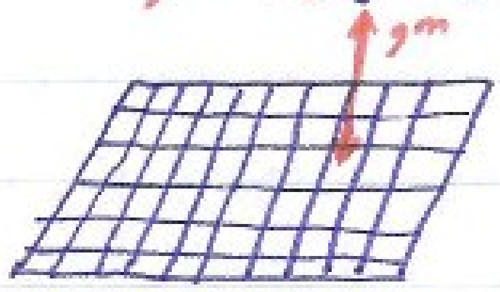
$E_1 = E_2$

$-mgd + \frac{1}{2}kd^2 = mgh$

$-2\times10^{-3}\times1\times10^{-2}\times9.8 + \frac{1}{2}\times40\times(10^{-2})^2 = 2\times10^{-3}\times9.8\times h$

$h = 9.2^{cm}$

eg: شخصی به وزن 900N از ارتفاع 9m به داخل تور نجات می‌پرد و این تور را با متوقف کردن شخص به اندازه 1.8 کشیده می‌شود. انرژی پتانسیل تور کشیده شده؟

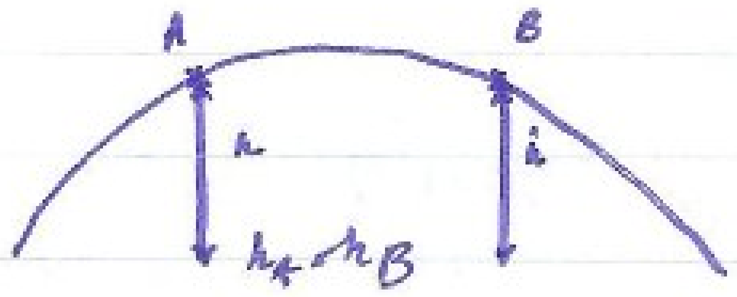


$E_1 = E_2$

$mgh_1 = U_F - mgh_2$

$900\times9 = U_F - 900\times1.8 \rightarrow U_F = 900\times10.8 = 9720 j$

eg: نشان دهید سرعت در ارتفاعات مساوی بر تپه با هم برابر است.

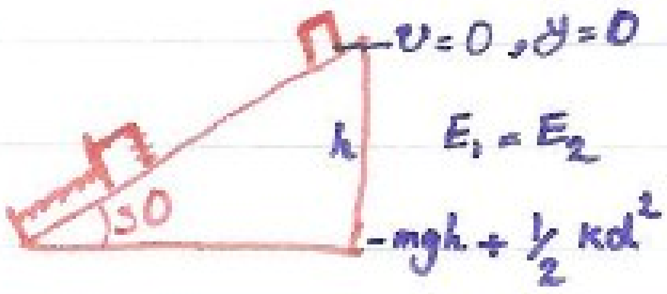


$E_A = E_B$

$\cancel{mgh_A} + \frac{1}{2}\cancel{m}v_A^2 = \cancel{mgh_B} + \frac{1}{2}\cancel{m}v_B^2$

$|v_A| = |v_B|$

eg: فنری با ثابت $K=100$ در پایین سطح شیب‌داری بدون اصطکاک که با افق زاویه 30° می‌سازد قرار دارد. جسم $M=10kg$ از حالت سکون از بالای سطح شیب‌دار رها می‌شود و بعد از متراکم کردن فنر به اندازه 2m متوقف می‌شود. ۱) این جسم پیش از رسیدن به سکون چقدر را می‌لغزد. ۲) سرعت آن در لحظه رسیدن به فنر



$E_1 = E_2$

$-mgh + \frac{1}{2}kd^2 = 0$

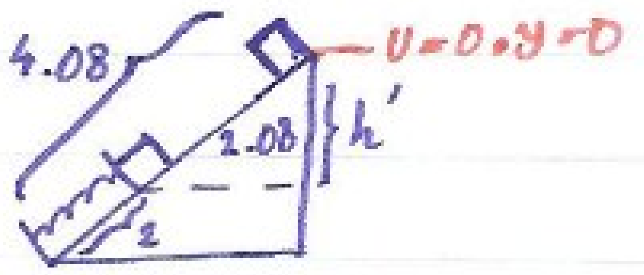
$-10\times9.8h + \frac{1}{2}\times100\times4 = 0 \Rightarrow h = \frac{200}{9.8} = 2.04m \Rightarrow h = L\sin30$

$\Rightarrow L = 2\times2.04 = 4.08m$

www.iebest.ir

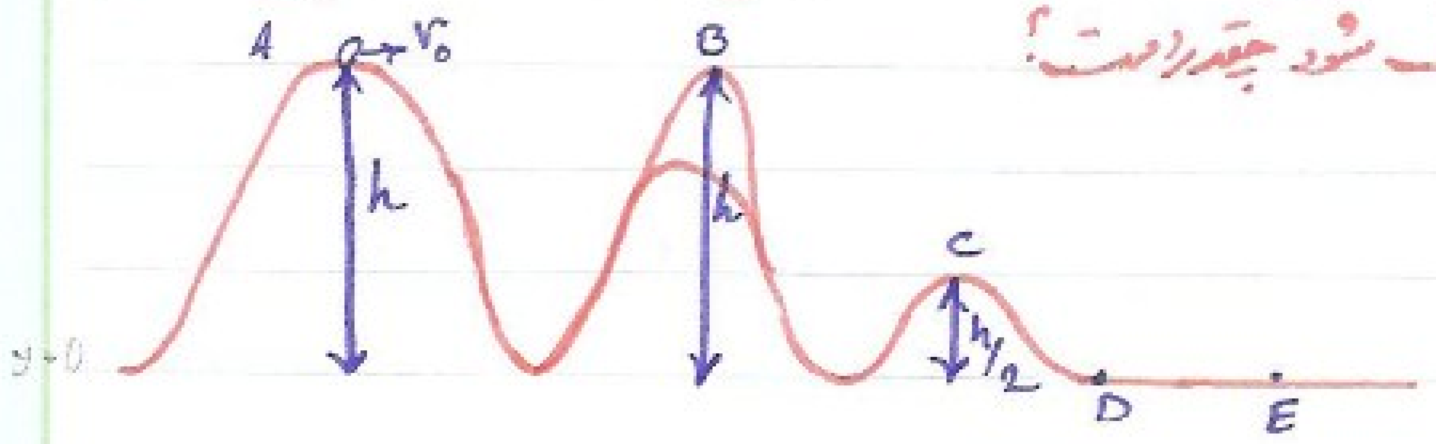
2) $-mgh' + \frac{1}{2}mv^2 = 0 \Rightarrow -10 \times 9.8 \times 1.04 = -\frac{1}{2} \times 10 \times v^2$

$\Rightarrow v = 4.5 \, m/s$



مثال: جسمی از ارتفاع h با سرعت v_0 رها می‌شود و روی سطح بدون اصطکاکی مطابق شکل شروع به حرکت می‌کند

۱) سرعت گلوله در نقاط B و C چقدر است؟ اگر گلوله در نقطه D تحت تأثیر نیروی کندکننده‌ای قرار بگیرد شتاب کندشونده برای اینکه در نقطه E متوقف شود چقدر است؟



$\boxed{E_A = E_B} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}mv_B^2$

$\Rightarrow \frac{1}{2}|v_A| = |v_B$

$\boxed{E_A = E_C}$ $\frac{1}{2}mv_A^2 = -mgh_c + \frac{1}{2}mv_c^2$

$\frac{1}{2}mv_A^2 = -mg\frac{h}{2} + \frac{1}{2}mv_c^2$

$\Rightarrow mg\frac{h}{2} + \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}mv_c^2$

$\Rightarrow v_c = \sqrt{gh + v_A^2}$

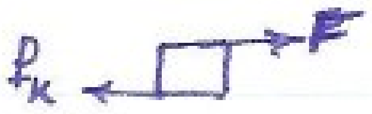
$\boxed{E_A = E_D} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}mv_D^2 - mgh_D$

$\Rightarrow$ ~~$v_D = \sqrt{}$~~ $\frac{1}{2}mv_A^2 + mgh_D = \frac{1}{2}mv_D^2$

$\Rightarrow v_D = \sqrt{v_A^2 + 2gh}$

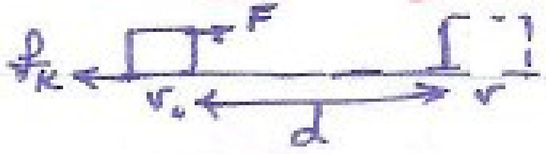
[redacted] $\Rightarrow v_E^2 - v_D^2 = 2a\Delta x_{DE} \Rightarrow a = \frac{\overset{0}{\cancel{v_E^2}} - v_D^2}{2\Delta x_{DE}} = \frac{-(\sqrt{v_A^2 + 2gh})^2}{2\Delta x_{DE}} = \frac{-(v^2 + 2gh)}{2\Delta x_{DE}}$

بحث در مورد انرژی در حضور نیروهای ناپایستار (اصطکاک):



$\Sigma F = ma$

$F - f_K = ma \quad (I)$



$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x = 2ad \Rightarrow a = \frac{v^2 - v_0^2}{2d} \quad (II)$

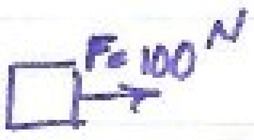
$I, II \Rightarrow F - f_K = m\left(\frac{v^2 - v_0^2}{2d}\right) \Rightarrow Fd - f_K d = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$

$\Rightarrow F.d = \underbrace{\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2}_{\Delta K} + f_K d \Rightarrow F.d = \Delta E_{mec} + f_K.d = \underset{\text{مکانیکی}}{\Delta E_{mec}} + \underset{\text{درونی}}{\Delta E_{th}}$

www.iebest.ir

www.iebest.ir

eg: شخصی جسمی را با نیروی 100^N به اندازه‌ی 5^m جابجا می‌کند و سپس متوقف می‌شود:



$W = \vec{F}\cdot\vec{d} = F.d\cos 0 = 100\times5 = 500j$

ΔE_{th} (3 ΔE_{mec} (2 W (1

$\Delta E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 + mg\overset{0}{h} - \frac{1}{2}mv_0^2 = 0$ درهر دو حالت متوقف است

$\Delta E_{th} = W - \Delta E_{mec} = 500 - 0 = 500j$

eg: جسمی به جرم 10kg با نیروی 100^N به اندازه‌ی 5^m جابجا می‌شود و سرعت آن از $2\,m/s$ به $1\,m/s$ می‌رسد؟

ΔE_{th} (3 ΔE_{mec} (2 W (1

$W = \vec{F}\cdot\vec{d} = 100\times5 = 500j$

$\Delta E_{mec} = \Delta K + \underset{0}{\Delta U} = \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2) = \frac{1}{2}\times10(4-4) = -15j$

$\Delta E_{th} = W - \Delta E_{mec} = 100 + 15 = 115j$

فصل نهم: مرکز جرم

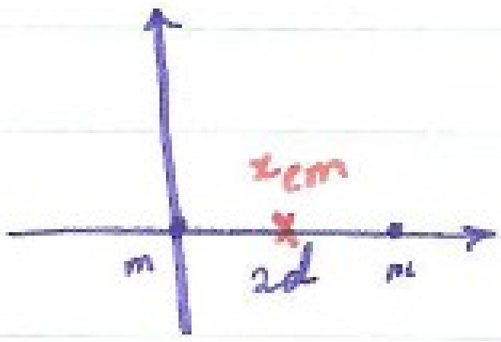
برای ساده‌سازی حساب مرکز جرم را تعریف می‌کنیم.

مرکز جرم در حالت گسسته:

$$x_{com} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}$$

center of mass

$$* \; x_{com} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}$$



$$x_{cm} = \frac{m(0) + m(2d)}{m+m} = d$$

$$x_{cm} = \frac{-md + md}{m+m} = 0$$

مختص x_{cm} نسبت به دو ذره تغییری نکرد.

www.iebest.ir

www.iebest.ir

x_{cm} برای n ذره :

$$M = m_1 + m_2 + \dots + m_n$$

$$\Rightarrow x_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i$$

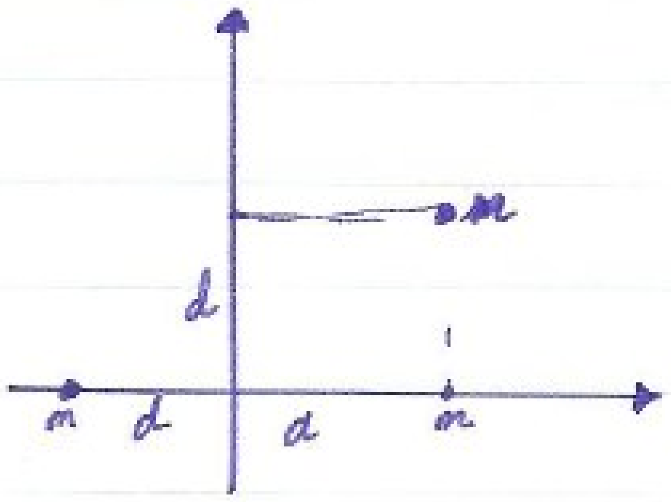
$$\Rightarrow y_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i \qquad \Rightarrow \vec{r}_{cm} = x_{cm}\hat{i} + y_{cm}\hat{j} + z_{cm}\hat{k}$$

$$\Rightarrow z_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i z_i \qquad \Rightarrow \vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} x_i m_i + \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} y_i m_i + \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} z_i m_i$$

$$\Rightarrow \vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i x_i + \sum_{i=1}^{n} m_i y_i + \sum_{i=1}^{n} m_i z_i\right)$$

$$\Rightarrow \vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i r_i$$

eg: مرکز جرم را در دستگاه زیر بیابید:



راه حل اول :

$$x_{cm} = \frac{m(-d) + m(d) + md}{m+m+m} = d/3$$

$$y_{cm} = \frac{m(0) + m(0) + md}{m+m+m} = d/3$$

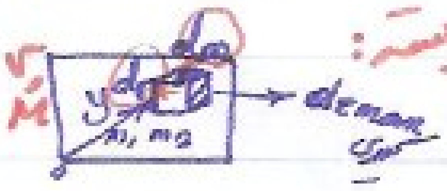
$$\vec{r}_{cm} = x_{cm}\hat{i} + y_{cm}\hat{j} = d/3\,\hat{i} + d/3\,\hat{j}$$

راه حل دوم :

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i \Rightarrow \vec{r}_{cm} = \frac{m(-d)\hat{i} + m(d)\hat{i} + m(d\hat{i} + d\hat{j})}{3m}$$

$$\Rightarrow \vec{r}_{cm} = \frac{md\hat{i} + md\hat{j}}{3m} = d/3\,\hat{i} + d/3\,\hat{j}$$

مرکز جرم در حالت پیوسته :



$$x_{cm} = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i \qquad m = dm \Rightarrow \Sigma \to \int$$

حالت حجمی :

$$\begin{cases} x_{cm} = \frac{1}{M}\int x\,dm \\ y_{cm} = \frac{1}{M}\int y\,dm \\ z_{cm} = \frac{1}{M}\int z\,dm \end{cases} \qquad \rho = \frac{m}{v} = \frac{dm}{dv} \Rightarrow dm = \frac{M}{v}dv$$

$$\Rightarrow x_{cm} = \frac{1}{M}\int x\frac{M}{v}dv = \frac{1}{v}\int x\,dv$$

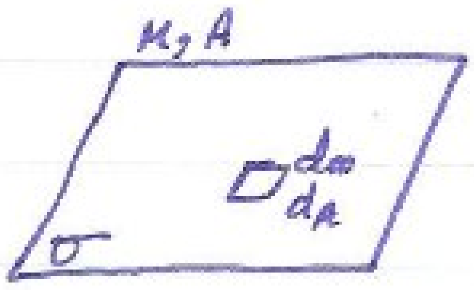
$$y_{cm} = \frac{1}{M}\int y\frac{M}{v}dv = \frac{1}{v}\int y\,dv$$

$$z_{cm} = \frac{1}{M}\int z\frac{M}{v}dv = \frac{1}{v}\int z\,dv$$

www.iebest.ir

www.iebest.ir

اگر جسم به صورت یک سطح باشد چگالی سطحی تعریف می شود.



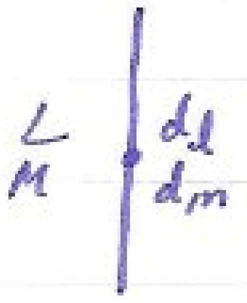
چگالی سطحی σ : جرم واحد سطح

$$\sigma = \frac{M}{A} = \frac{d_m}{d_A}$$

$$\rightarrow d_m = \frac{M}{A} d_A$$

$$x_{cm} = \frac{1}{A}\int x d_A$$
$$y_{cm} = \frac{1}{A}\int y d_A$$
$$z_{cm} = \frac{1}{A}\int z d_A$$

اگر جسم به صورت میله باریک باشد:



$$\lambda = \frac{M}{L} = \frac{d_m}{d_l}$$

چگالی طولی با λ : جرم واحد طول

$$\rightarrow d_m = \frac{M}{\ell} d_l$$

$$x_{cm} = \frac{1}{L}\int x d_l$$
$$y_{cm} = \frac{1}{L}\int y d_l$$
$$z_{cm} = \frac{1}{L}\int z d_l$$

d_l : المان های طولی یا خطی

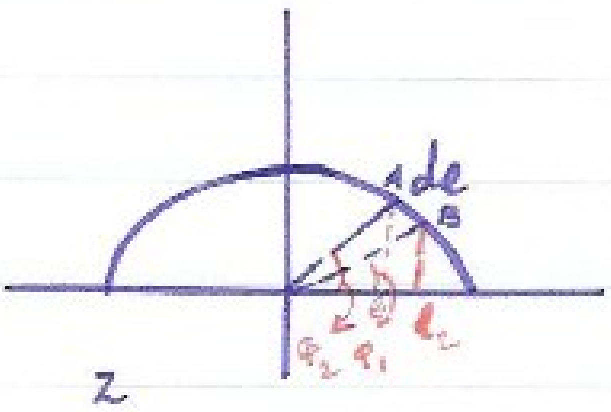
d_A : المان های سطحی

d_V : المان هاحجمی

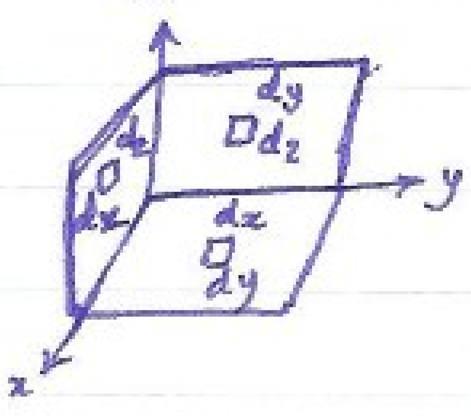
المان های خطی :

۱. در دستگاه مختصات دکارتی $d_l = d_x$ یا dy یا d_z

۲. اگر میله به صورت دایره ای باشد:



$$\Delta l = l_2 - l_1 = d_l$$
$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = d\varphi$$
$$\overset{\frown}{AB} = r\varphi$$
$$\rightarrow d_l = r d_\varphi \qquad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$



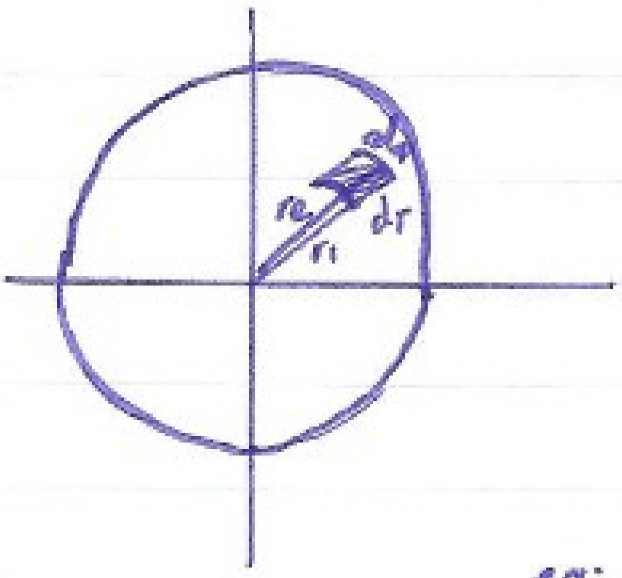
المان های سطحی:

۱. در مختصات دکارتی، $d_A = dx \cdot dy\,,\ dy \cdot dz\,,\ dx \cdot d_z$

www.iebest.ir

www.iebest.ir

2. اگر سطح مقطع دایره ای باشد.



$$d_A = dr\,d\varphi\,r = r\,dr\,d\varphi$$

$$0 \leqslant r \leqslant a \quad , \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$$

eg: $A = \int d_A = \int_0^a \int_0^{2\pi} r\,dr\,d\varphi = \int_0^a r\,dr \int_0^{2\pi} d\varphi$

$$= \frac{r^2}{2}\Big]_0^a \varphi\Big]_0^{2\pi} = \frac{a^2}{2} \cdot 2\pi = \pi a^2$$

3. اگر سطح یک کره باشد:

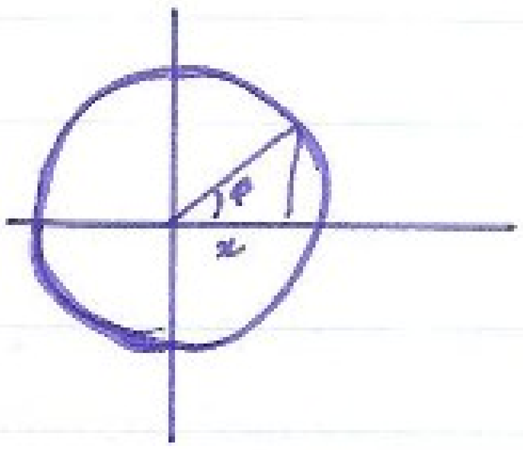
$$d_A = a^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$$
$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$$

المان های حجمی:

1. دکارتی $\quad d_v = dx\,dy\,dz$

2. کروی $\quad d_v = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dr$

e.g:



$$x_{cm} = \frac{1}{L}\int x\,dl$$

$$dl = r\,d\varphi \Rightarrow x_{cm} = \frac{1}{L}\int x\,r\,d\varphi$$

$$\overset{x = r\cos\theta}{}$$

$$x_{cm} = \frac{1}{L}\int_0^{2\pi} r\cos\varphi\, r\,d\varphi = \frac{r^2}{L}\int_0^{2\pi}\cos\varphi\, d\varphi = \frac{r^2}{L}\sin\varphi\Big]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{r^2}{L}(\sin 2\pi - \sin 0) = 0$$

$$y_{cm} = \frac{1}{L}\int y\,dl$$

$$d_l = r\,d\varphi \Rightarrow y_{cm} = \frac{1}{L}\int y\,r\,d\varphi$$

$$y = r\sin\theta$$

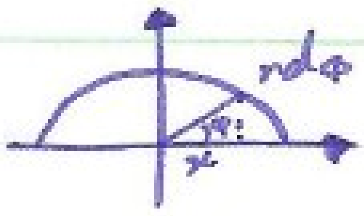
$$\Rightarrow y_{cm} = \frac{1}{L}\int_0^{2\pi} r\sin\theta\, r\,d\varphi = \frac{r^2}{L}\int_0^{2\pi} \underset{\sin\varphi}{\cancel{\cos\varphi}}\, d\varphi = \frac{-r^2}{L}\cos\varphi\Big]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{-r^2}{L}(\cos 2\pi - \cos 0) = 0$$

www.iebest.ir

www.iebest.ir

eg:



$$x_{cm} = \frac{1}{L}\int x\,d\ell = \frac{1}{L}\int_0^{\pi} r\cos\varphi\, r\,d\varphi$$

$$= \frac{r^2}{L}\int_0^{\pi}\cos\varphi\,d\varphi = \frac{r^2}{L}\sin\varphi\Big]_0^{\pi} = 0$$

$$y_{cm} = \frac{1}{L}\int y\,d\ell = \frac{1}{L}\int_0^{\pi} r\sin\varphi\, r\,d\varphi = \frac{r^2}{L}(-\cos\varphi)\Big]_0^{\pi} =$$

$$\frac{r^2}{L}(-\cos\pi + \cos 0) = \frac{2r^2}{L} \quad , \quad L = \frac{1}{2}(2\pi r) = \pi r$$

$$\Rightarrow y_{cm} = \frac{2r^2}{\pi r} = \frac{2r}{\pi}$$

eg: محاسبه ی مرکز جرم نیم قرص دایره ای:

$$x_{cm} = \frac{1}{A}\int x\,d_A$$

$$d_A = r\,d\varphi\,d_r = r\,d_r\,d\varphi$$

$$0 \leq r \leq a \quad , \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$$

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow x_{cm} = \frac{1}{A}\int r\cos\varphi\, r\,d_r\,d\varphi$$

$$\Rightarrow x_{cm} = \frac{1}{A}\int_0^{a} r^2 d_r \int_0^{\pi}\cos\varphi\,d\varphi$$

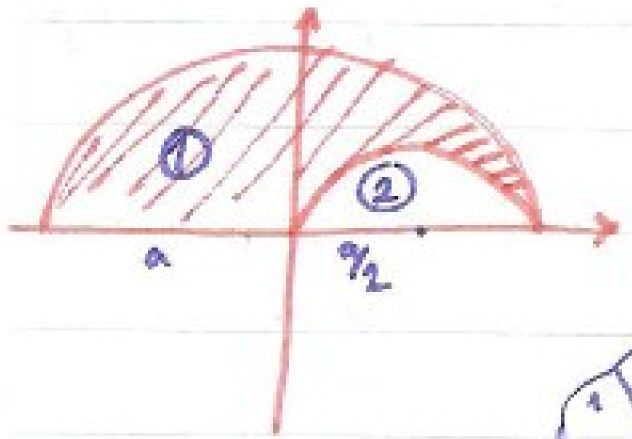
$$\Rightarrow x_{cm} = \frac{1}{A}\left(\frac{r^3}{3}\Big]_0^{a}\right)\left(\cancelto{0}{\sin\varphi\Big]_0^{\pi}}\right) = 0$$

$$y_{cm} = \frac{1}{A}\int y\,d_A$$

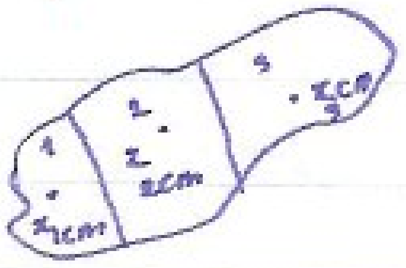
$$y_{cm} = \frac{1}{A}\int r\sin\varphi\, r\,d_r\,d\varphi = \frac{1}{A}\int_0^{a} r^2 d_r \int_0^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi$$

$$= \frac{1}{A}\cdot\frac{r^3}{3}\Big)_0^{a} \quad -\cos\varphi\Big)_0^{\pi} = \frac{a^3}{3}(-\cos\pi + \cos 0) = \frac{2a^3}{3A}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2}(\pi a^2) \quad \Rightarrow y_{cm} = \frac{2a^3}{\frac{3}{2}\pi a^2} = \frac{4a}{3\pi}$$



eg ، مرکز جرم سطح هاشور خورده در کجا قرار دارد؟



مرکز جرم یک جسم مرکب برابر با مرکز جرم تک تک شکل.

$$x_{Acm} = \frac{m_1 x_{1cm} + m_2 x_{2cm} + m_3 x_{3cm}}{m_1 + m_2 + m_3}$$

www.iebest.ir

www.iebest.ir

مرکز جرم نیم قرص به شعاع a = $\frac{4a}{3\pi}$

$$y_{A_{cm}} = \frac{m_1 y_{1cm} + m_2 y_{2cm}}{m_1 + m_2}$$

مرکز جرم نیم قرص به شعاع $\frac{a}{2}$: $y_2 = \frac{4(a/2)}{3\pi}$

$$\frac{4a}{3\pi} = \frac{m_1 y_{1cm} + m_2 y_{2cm}}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 y_{1cm} + m_2 (\frac{2a}{3\pi})}{m_1 + m_2}$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 \Rightarrow \frac{m_1}{A_1} = \frac{m_2}{A_2} \Rightarrow \frac{m_1}{A - A_2} = \frac{m_2}{A_2} \Rightarrow \frac{m_1}{\frac{1}{2}(\pi a^2) - \frac{1}{2}\pi(\frac{a}{2})^2} = \frac{m_2}{\frac{1}{2}\pi(\frac{a}{2})^2}$$

$$\Rightarrow \frac{m_1}{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{m_2}{\frac{a^2}{4}} \Rightarrow m_1 = 3m_2$$

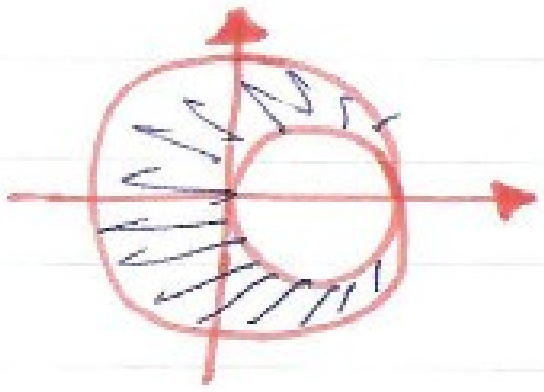
A_1 = کل جسم

A_2 = نیم قرص درون جسم

$$\frac{4a}{3\pi} = \frac{m_2(3y_1 + \frac{2a}{3\pi})}{4m_2} \Rightarrow 3y_1 + \frac{2a}{3\pi} = \frac{16a}{3\pi}$$

$$\Rightarrow 3y_1 = \frac{14a}{3\pi} \Rightarrow y_1 = \frac{14a}{9\pi}$$

e.g

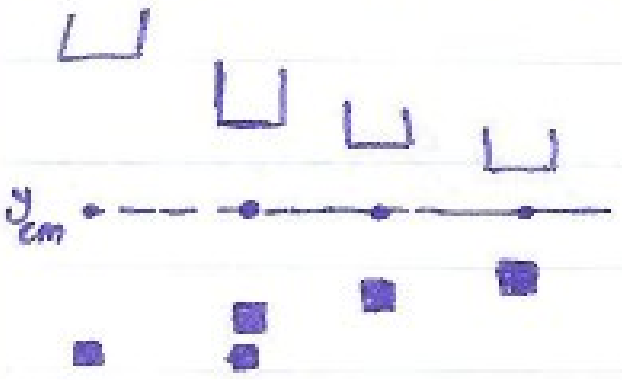


تمرین: مرکز جرم x_{cm} را بدست آورید.

نکته: اگر جسم ساکن باشد سپس مرکز جرم هم ساکن بوده است.

اگر هیچ نیرویی خارجی به جسم وارد نشود مرکز جرم همچنان ساکن می ماند اگرچه ممکن است در اثر نیروهای داخلی اجزای داخلی جسم حرکت کنند.

eg: شخصی به جرم m و بالونی به جرم M در هوا ساکنند اگر شخص با سرعت v نسبت به بالون از نردبان بالا برود بالون با چه سرعتی حرکت می کند؟ بدلیل اینکه هیچ نیرویی خارجی وجود ندارد پس مرکز جرم جابجا نمی شود یعنی $v_{cm}=0$



$$v_{cm} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \quad (I)$$

سرعت شخص نسبت به زمین = سرعت بالن نسبت به زمین + سرعت شخص نسبت به بالن

$$v_1 = v_2 + v$$

$$I \Rightarrow v_{cm} = 0 \Rightarrow m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0$$

$$\Rightarrow v_2 = \frac{-m_1 v_1}{m_2} = \frac{-m_1}{m_2}(v_2 + v) = \frac{-m_1 v_2}{m_2} - \frac{m_1 v}{m_2}$$

که v_1 = سرعت شخص نسبت به زمین

m_1 = جرم شخص

m_2 = جرم بالن

v_2 = سرعت بالن نسبت به زمین

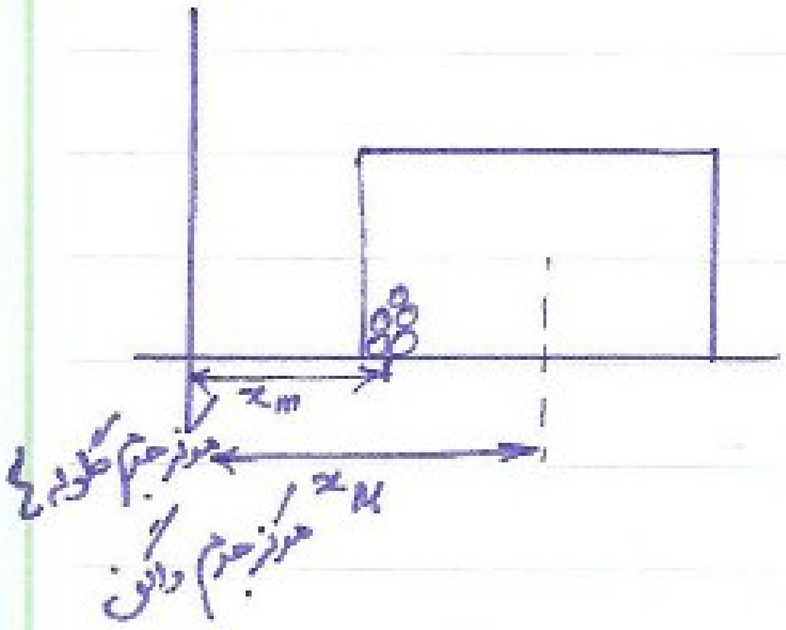
v_{cm} = سرعت مرکز جرم

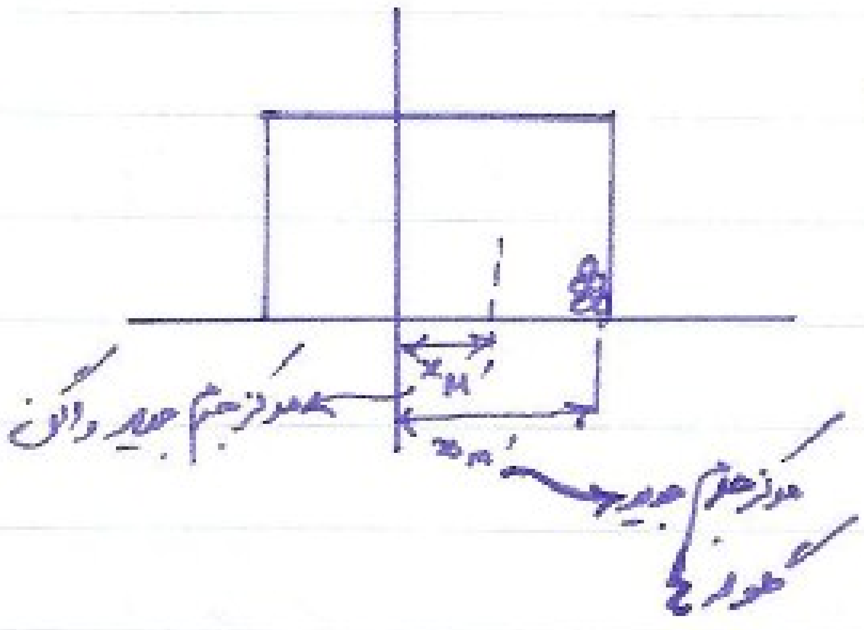
www.iebest.ir

www.iebest.ir

$$\Rightarrow \left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)v_2 = -\frac{m_1}{m_2}v \quad \Rightarrow v_2 = \frac{-m_1 v}{m_1+m_2} \quad \Rightarrow \text{If: } m_1 \gg m_2 \quad v_2 \simeq -v$$

eg: گلوله‌هایی با جرم m در داخل واگنی به طول L و جرم M قرار دارند گلوله‌ها به انتهای واگن شلیک می‌شوند و در انتهای واگن جمع می‌شوند. اگر واگن در ابتدا ساکن باشد نشان دهید گلوله‌ها به هر نحوی شلیک شوند واگن نمی‌تواند بیشتر از طول خودش L جابجا شود.





$$x_m' = x_m + L - L'$$
$$x_M' = x_M - L'$$

$$x_{cm} = x_{cm}'$$
$$\frac{Mx_M + mx_m}{M+m} = \frac{Mx_M' + mx_m'}{M+m}$$

$$M(x_M - L') + m(x_m + L - L') = mx_m + Mx_M$$
$$\cancel{Mx_M} - ML' + \cancel{mx_m} + mL - mL' = \cancel{mx_m} + \cancel{Mx_M}$$

$$L' = \frac{m}{m+M}L \quad \Rightarrow L' < L$$

پایستگی تکانه خطی:

اگر برایند نیروهای خارجی صفر باشد $F_{ext}=0$ در آن صورت تکانه برداری کل دستگاه ثابت می‌ماند

$$p = mv \xrightarrow[t\ \text{به}]{\text{مشتق نسبت}} \frac{d}{dt}p = \frac{d}{dt}mv \quad \Rightarrow \frac{dp}{dt} = m\frac{dv}{dt} = ma = F_{ext}$$

$$\xRightarrow{F_{ext}=0} \frac{dp}{dt} = 0 \Rightarrow P = Constant$$: ثابت

$$\Rightarrow P_1 + P_2 + \cdots + P_n = P_0 = Const$$

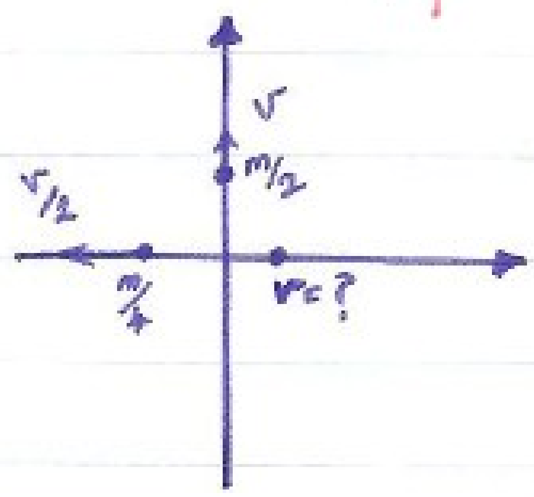
eg نکته: ممکن است تکانه تک تک ذرات تغییر کند اما تکانه کل ثابت می‌ماند [در صورت عدم وجود نیروهای خارجی]

نکته: اگر جسم سقوط آزاد دارد در راستای $\left\{ \begin{matrix} z \\ x\,y \end{matrix} \right.$ پایستگی تکانه نداریم اما در دو بعد دیگر بخاطر $F_{ext}=0$ پایستگی تکانه وجود دارد.

www.iebest.ir

www.iebest.ir

eg: جسمی ساکن در اثر انفجار به ۳ قطعه تقسیم می‌شود. با توجه به شکل سرعت قطعه سوم چقدر است؟



$m_3 = m/4$

$$\vec{P_1} + \vec{P_2} + \vec{P_3} = 0$$

$$\frac{m}{2}\vec{v}\,\hat{j} + \frac{m}{4}\left(\frac{-\vec{v}}{2}\right)\hat{i} + \frac{m}{4}\,\vec{v} = 0$$

$$\frac{m}{2}\left(\frac{-v}{4}\,\hat{i} + \vec{v}\,j\right) = -\frac{m}{2}\left(\frac{\vec{v}}{2}\right)$$

$$-\frac{v}{4}\,\hat{i} + \vec{v}\,j = \frac{-\vec{v}}{2} \Rightarrow \vec{v} = \frac{v}{2}\,\hat{i} - 2\vec{v}\,\hat{j}$$

p یک بردار است و به صورت برداری نوشته می‌شود. مولفه‌های x با هم و مولفه‌های y با هم در حالت‌های اولیه و نهایی برابرند.

فصل دهم: برخورد:

۱. حضور یک دستگاه یا چند جسم لازم است.

2. دو یا چند جسم نیروهایی را در زمان کوتاه به هم وارد می‌کنند.

3. این نیروها نیروهای داخلی هستند.

ضربه و تکانه:

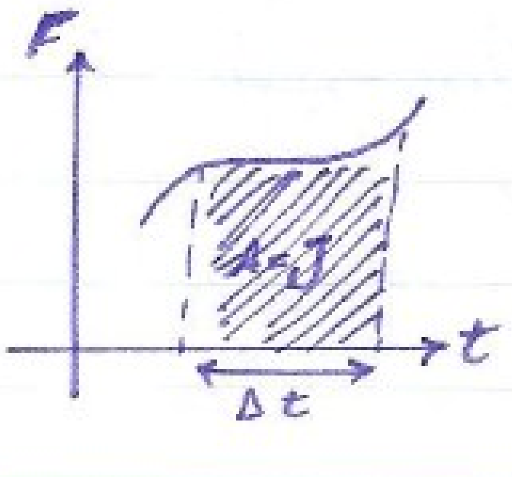
اگر دو جسم با یکدیگر برخورد داشته باشند و نیرویی F(t) را به یکدیگر وارد کنند این نیرو تکانه خطی دو جسم را تغییر می‌دهد.

رابطه‌ی تغییر تکانه با نیرو: $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}(t)$

$$\int_{\vec{p}_i}^{\vec{p}_f} \frac{d\vec{p}}{dt} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t)\,dt \Rightarrow P_f - P_i = \int_{t_i}^{t_f} F(t)\,dt$$

به حاصل انتگرال $J = \int \vec{F}(t)\,dt$ ضربه گویند.

$$\Delta p = P_f - P_i = J$$

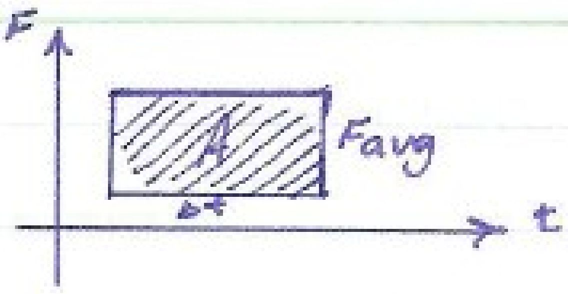


ضربه برابر است با مساحت زیر نمودار F برحسب t

www.iebest.ir

www.iebest.ir

$A = J = F_{avg} \Delta t$



برخورد کشسان: انرژی جنبشی قبل از برخورد و بعد از برخورد تغییر نمی کند eg: برخورد دو توپ بیلیارد.

برخورد ناکشسان: انرژی جنبشی قبل و بعد از برخورد تغییر می کند eg: دو خودرو که با هم برخورد می کنند و ساکن می شوند

eg: توپی 1.2kg روی سطحی رها می شود با سرعت $V_1 = 25 \, m/s$ برخورد کرده و با $V_2 = 10$ بالا می آید.

1. چه ضربه ای وارد شده است.

2. در تماس 0.025 توپ چه نیرویی به سطح وارد کرده است.

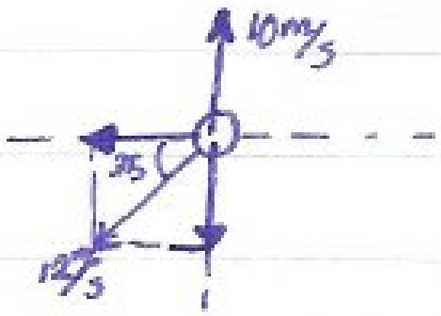
$\Delta P = P_f - P_i = m(V_f - V_i) = 12(10+25) = +42 \; kg.m/s$

$J = F_{avg} \Delta t \Rightarrow 42 = F_{avg} \times 0.02 \Rightarrow F_{avg} = 2100 \, N$

نکته: برداری بودن P:

$$\vec{\Delta P} = \vec{J}$$
$$\vec{P}_{fx} - \vec{P}_{ix} = \vec{J}_x$$
$$\vec{P}_{fy} - \vec{P}_{iy} = \vec{J}_y$$
$$\vec{P}_{fz} - \vec{P}_{iz} = \vec{J}_z$$

eg: یک توپ بیسبال 0.3kg در لحظه ی برخورد با چوب دارای سرعت $12 \, m/s$ تحت زاویه 35° با افق است که 2ms بعد با سرعت قائم $10 \, m/s$ از چوب جدا می شود. مقدار نیروی متوسط را بیابید.



$\Delta p = m \Delta v = F_{avg} \Delta t$

$0.3(12 \cos 35 \hat{i} + 12 \sin 35 + 10 \hat{j}) = F_{avg} \times 2 \times 10^{-3}$

$V_x = V . \cos 35 = 12 \times 0$

$V_y = V \sin 35 = 12 \times 0$

راه اول:

$0.3(12 \times 0.81 \hat{i} + 16.88 \hat{j}) = F_{avg} \times 2 \times 10^{-3}$

~~[illegible]~~

www.iebest.ir

$$P_{2x} - P_{1x} = mV_{2x} - mV_{1x} = m(\overset{0}{\cancel{V_{2x}}} - V_{1x})$$

در بعد از برخورد سرعت فقط در راستای y بوده و V_{2x} صفر است .

$$= \underset{0.3}{m}(-(-12\cos 35) = 2.95$$

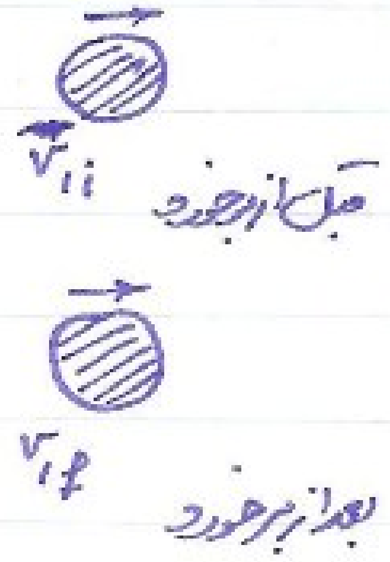
$$P_{2y} - P_{1y} = mV_{2y} - mV_{1y} = m(V_{2y} - V_{1y})$$

$$= m(10-(-12)\sin 35) = 5.06\ kg\,m/s$$

$$\vec{J} = 2.95\hat{i} + 5.06\hat{j}$$

$$|\vec{J}| = 5.86\left(kg\,m/s^2\right)^N$$

برخوردهای ناکشسان یک بعدی:



$$m_1V_{1i} + m_2V_{2i} = m_1V_{1f} + m_2V_{2f}$$

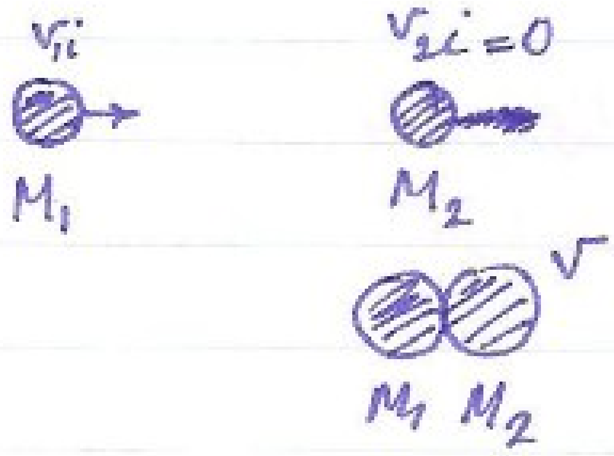
پایستگی تکانه برقرار است زیرا هیچ نیروی خارجی به سیستم وارد نمی‌شود با تقسیم رابطه بالا بر m_1+m_2 ⇐ $V_{icm} = V_{fcm}$

$$\frac{m_1V_{1i} + m_2V_{2i}}{m_1+m_2} = \frac{m_1V_{1f} + m_2V_{2f}}{m_1+m_2}$$

⇐ سرعت مرکز جرم قبل و بعد از برخورد یکسان است .

برخورد ناکشسان کامل:

اگر دو جسم بعد از برخورد به یکدیگر بچسبند با سرعت برابر بعد از برخورد حرکت می‌کنند .



$$m_1V_{1i} + m_2\overset{0}{\cancel{V_{2i}}} = (m_1+m_2)V$$

$$\Rightarrow V = \frac{m_1V_{1i}}{m_1+m_2}$$

مث : گلوله‌ای 10gr با تندی 1000 m/s به یک چوب 5kg ساکن برخورد می‌کند و با تندی 400 m/s از آن خارج می‌شود چوب چه مقدار به بالا پرتاب می‌شود .

~~$V = \frac{10\times10^{-3}\times1000}{5.01} \approx 1.99$~~ [illegible]

$$m_1V_{1i} + m_2V_{2i} = m_1V_{1f} + m_2V_{2f}$$

$$10^{-2}\times1000 = 10^{-2}\times400 + 5V_{2f} \rightarrow V_{2f} = 1.2\ m/s$$

$$V^2 - V_0^2 = 2g\Delta y$$

$$1.44 = 2\times9.8\,\Delta y$$

$$\Delta y = 0.07m$$

www.iebest.ir

e.g: جسم $m_1 = 2kg$ روی میز بدون اصطکاک با تندی $10 m/s$ می لغزد و جسم $m_2 = 5kg$ متصل به یک فنر $k = 1120$ با تندی $3 m/s$ هم جهت با جسم m_1 در حرکت است. جسم m_1 با آن برخورد می کند. بیشینه مقدار تراکم فنر چقدر است.

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

$$= (m_1 + m_2) v$$

$$\Rightarrow 2 \times 10 + 5 \times 3 = 7 v \Rightarrow \boxed{v = 5 m/s}$$

$$+\frac{1}{2} k d^2 = -\Delta K$$ ~~[illegible]~~

~~$\frac{1}{2} \times 1120 d^2$ [illegible]~~

$$\Delta K = K_2 - K_1 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v^2 - \left(\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}(7) 25 - \left(\frac{1}{2} \times 2 \times 100 + \frac{1}{2} \times 5 \times 9\right)$$

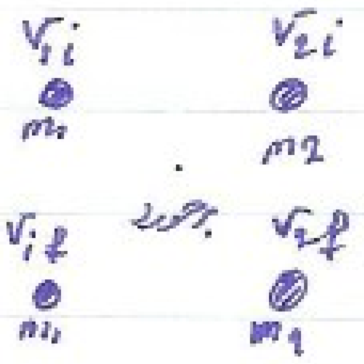
$$= 875 - (100 + 22.5) = 35$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} k d^2 = 35 \Rightarrow d^2 = 0.06 \Rightarrow \boxed{d = 0.24^m}$$

انواع برخوردها:

۱. کشسان: انرژی جنبشی قبل و بعد از برخورد یکسان است

کشسان یک بعدی: اما انرژی جنبشی هر تک ذره ممکن است تغییر کند.



$$\frac{1}{2} m \underline{v_{1i}}^2 + \frac{1}{2} m \underline{v_{2i}}^2 = \frac{1}{2} m \underline{v_{1f}}^2 + \frac{1}{2} m \underline{v_{2f}}^2$$

معلوم   مجهول

$$P_i = P_f \Rightarrow m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_2 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

www.iebest.ir

www.iebest.ir

الف : v_{1i} وجود دارد و $v_{2i}=0$

$$\begin{cases} m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \\ \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \end{cases}$$

از حل دستگاه :

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

ب) هر دو جسم دارای سرعت اولیه باشند :

$$\begin{cases} m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \\ \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \end{cases}$$

از حل دستگاه :

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i}$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{2i}$$

2. ناکشسان : کامل | یک بعدی

بحث در مورد سرعتهای ثانویه حالت الف:

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

1. $m_1 \gg m_2 \Leftarrow$ $v_{1f} = v_{1i}$

$v_{2f} \simeq 2v_i$

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

2. $m_1 \ll m_2 \Leftarrow$ $v_{1f} = -v_{1i}$ (اگر جسم 2 سنگین تر باشد جسم m_1 برمی گردد)

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_2} v_{1i}$$

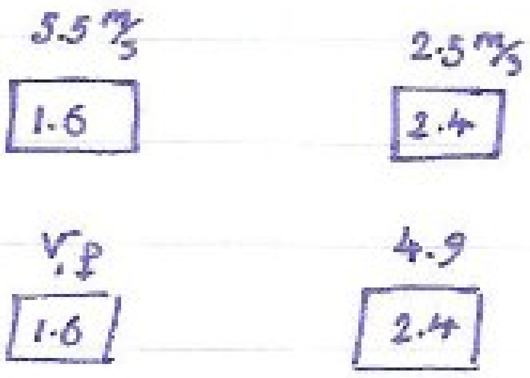
www.iebest.ir

www.iebest.ir

3. $m_1 = m_2$ $v_{1f} = 0$ جسم اول متوقف شده و جسم دوم حرکت می کند.

$v_{2f} = v_{1i}$

eg: مطابق شکل سرعت جسم 1.6kg پس از برخورد چقدر است؟ آیا برخورد کشسان است یا نه؟



$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i}$$

در صورتی از این فرمول استفاده می کنیم در برخورد کشسان باشد.

$$P_i = P_f$$

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

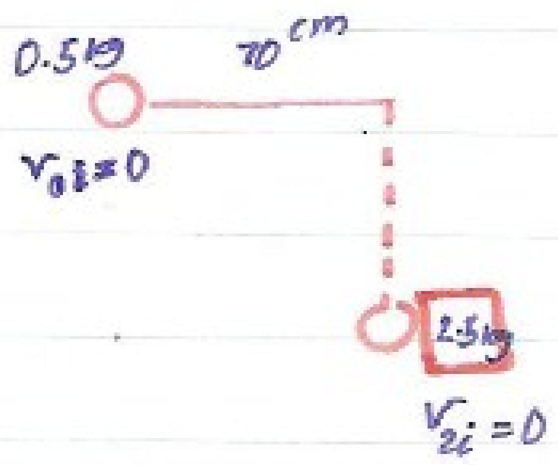
$$(1.6)(5.5) + (2.4)(2.5) = (1.6) v_{1f} + (2.4)(4.9) \Rightarrow v_{1f} = 1.9 \text{ m/s}$$

ب: $K_i \overset{?}{=} K_f$ $K_i = \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = 31.7 j$

برخورد کشسان است. ⇒

$$K_f = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 = 31.7 j$$

باید دید که برآیند نیروهای خارجی صفر هست یا نه ⇐ پایستار بودن یک نیرو.



eg: مطابق شکل مقدار v_{1f} و v_{2f} را بیابید.

$$E_1 = E_2$$

$$mgh = \frac{1}{2} m v_{1i}^2$$

$$\Rightarrow v_{1i} = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9.8 \times 0.7} = 3.7 \text{ m/s}$$

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \underbrace{\frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i}}_{\text{صفر}} = -2.5 \text{ m/s}$$

گلوله به سمت بالا برمی گردد.

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} + \underbrace{\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{2i}}_{\text{صفر}} = 1.2 \text{ m/s}$$

www.iebest.ir

www.iebest.ir

مثال: جسمی به جرم 2kg با جسم دیگری که در حال سکون است به طور کشسان برخورد کرده و در همان جهت با تندی $\frac{1}{4}$ تندی اولیه‌اش ادامه می‌دهد.

1. جرم جسم دیگر چقدر است.

2. اگر $v=4$ باشد سرعت مرکز جرم چقدر است.

$p_i = p_f$

$v_{2f} = \frac{1}{4} v_{1i}$

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} \Rightarrow m_2 = 0.4kg$$

$$v_{cm} = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}'}{m_1 + m_2} = \frac{8}{2.4}$$

برخورد دوبعدی:

$P_i = P_f$

$P_{xi} = P_{xf}$

$P_{yi} = P_{yf}$

$$\Rightarrow (m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} \cos\theta_1 + m_2 v_{2f} \cos\theta_2)\hat{i}$$

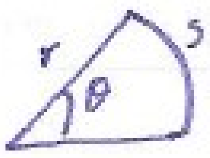
$$m_2 v_{2f} \sin\theta_2 \hat{j} + m_1 v_{1f} \sin\theta_1 \hat{j} = 0$$

فصل 11 - دوران:

شرایط حرکت دورانی:

1. جسم صلب باشد
2. محور دوران ثابت باشد
3. مقدار زاویه جاروب شده توسط هر نقطه جسم یکسان است.

1. مکان زاویه‌ای: اگر طولی از کمان s باشد آنگاه:



$\theta = \frac{s}{r}$ برحسب رادیان

2. جابجایی زاویه‌ای:

$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$

www.iebest.ir

www.iebest.ir

*جابجایی زاویه‌ای در جهت ساعتگرد منفی و در جهت پادساعتگرد مثبت است.

3. سرعت زاویه‌ای:

$$\omega_{avg} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$ متوسط

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$ لحظه‌ای $\left(\frac{Rad}{s}\right)$

4. شتاب زاویه:

$$a_{avg} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$ متوسط

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$ $\left(\frac{Rad}{s^2}\right)$ لحظه‌ای

*معادلات مربوط به حرکت با شتاب زاویه‌ای ثابت:

$$\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t + \theta_0$$

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\Delta\theta$$

$$\omega = \alpha t + \omega_0$$

$$\Delta\theta = \left(\frac{\omega + \omega_0}{2}\right)t$$

eg: قرصی در ابتدا در حالت دوران با تندی $120 \frac{Rad}{s}$ با شتاب زاویه‌ای $4 \frac{Rad}{s^2}$ کند می‌شود:

1. پس از چه مدت متوقف شده است؟

$$\omega = \alpha t + \omega_0$$

$$\Rightarrow t = \frac{-120}{-4} = 30s$$

2. قرص در این مدت چند دور زده است؟

$$\Delta\theta = \frac{\omega + \omega_0}{2} t \Rightarrow \Delta\theta = \frac{120}{2} \times 30 = 1800 \, Rad \Rightarrow n = \frac{1800 \, Rad}{2\pi}$$

رابطه‌ی میان متغیرهای خطی و دورانی:

$s = r\theta$, $v = r\omega$

$a_t = r\alpha$ شتاب مماسی , $a_r = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$

www.iebest.ir

eg: چرخ ماشینی با سرعت $150\frac{rev}{min}$ می چرخد و پس از ترمز در مدت 3min متوقف می شود.

1. شتاب زاویه ای
2. تا توقف چند دور زده است.
3. در لحظه ای که چرخ با سرعت $100\frac{rev}{min}$ می چرخد شتاب نقطه ای در فاصله 10^{cm} از محور [illegible] دوران چقدر است؟

$\omega = \alpha t + \omega_0$

$\alpha = \frac{-150}{3} = -50\frac{rev}{min^2}$

$\Delta\theta = \frac{\omega+\omega_0}{2}t \Rightarrow \Delta\theta = \frac{150}{2}\times 3 = 225\ rev \times 2\pi$

~~$a_t = r\alpha \rightarrow a_t = 0.1\times -100 = -10$~~

~~$a_r = \frac{v^2}{r}$~~

$a_t = r\alpha = 0.1\times -50 = -5$

$a_r = r\omega^2 = 0.1\times 100 = 1000$

$a = \sqrt{(1000)^2+(5)^2}$

انرژی جنبشی دورانی:

$K = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \dots + \frac{1}{2}m_nv_n^2$

$v_i = r_i w \qquad K = \sum_i \frac{1}{2}m_iv_i^2 = \sum \frac{1}{2}m_ir_i^2w^2 = \frac{1}{2}\sum m_ir_i^2w^2$

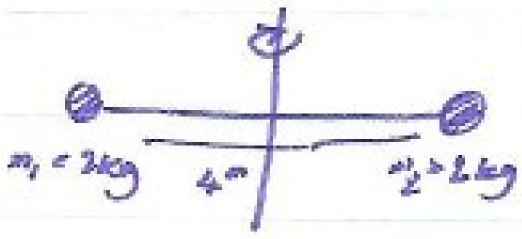
به کمیت $I = \sum m_ir_i^2$ گشتاور لختی یا لختی دورانی می گویند. (در حالت گسسته)

گشتاور لختی I: چگونگی توزیع جرم جسم حول محور دوران توضیح می دهد.

$K = \frac{1}{2}I\omega^2$

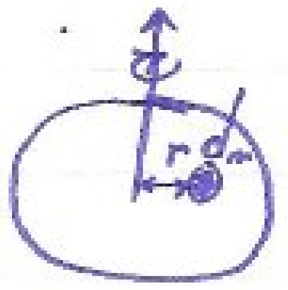
دورانی	خطی
θ	x
ω	v
α	a
I	m
$\frac{1}{2}I\omega^2$	$\frac{1}{2}mv^2$
$\tau = I\alpha$	$F = ma$

www.iebest.ir

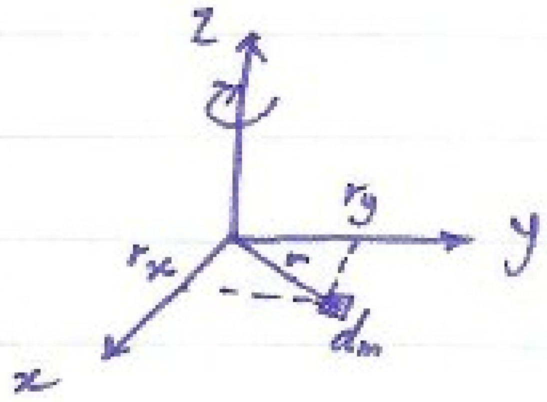


$I = \sum m_i r_i^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 = 2(2)^2 + 2(2^2) = 16$

محاسبه لختی دورانی در حالت پیوسته:



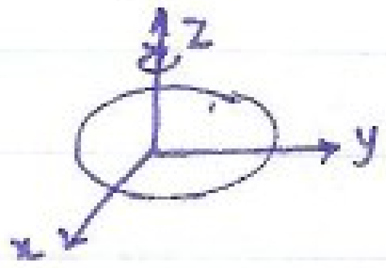
$I = \int r^2 d_m$



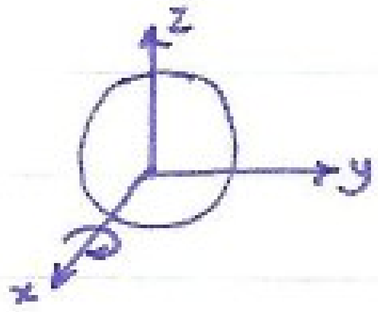
$I_Z = \int (x^2 + y^2) d_m = \int x^2 d_m + \int y^2 d_m$

$= I_x + I_y$

مجموع لختی های دورانی حول دو محور عمود بر هم (xوy) برابر است با لختی دورانی حول محور عمود بر دو محور دیگر (Z)

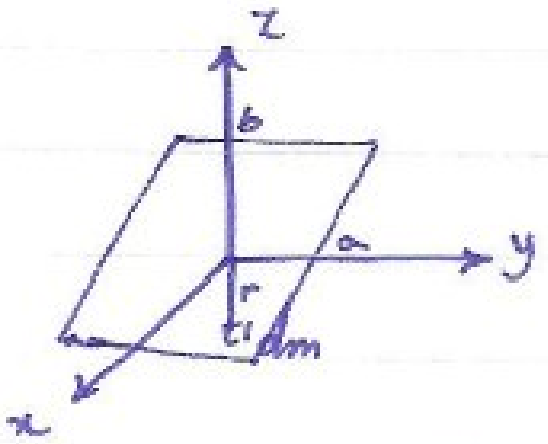


$I_Z = I_x + I_y$



$I_x = I_y + I_Z$

eg: گشتاور لختی دورانی یک ~~مربع~~ مستطیل را حول محور Z بدست آورید.



$I_Z = \int r^2 d_m = \int x^2 d_m + \int y^2 d_m = I_x + I_y$

$\sigma = \frac{m}{A} \Rightarrow \sigma = \frac{dm}{dA} \Rightarrow d_m = \sigma d_A$

$I_Z = \int x^2 d_m + \int y^2 d_m = \int x^2 \sigma d_A + \int y^2 \sigma d_A$

www.iebest.ir

www.iebest.ir

یادآوری: کارتزی: $d_A = d_x d_y ، d_x d_z ، d_y d_z$

استوانه‌ای: $d_A = r d_r d_\theta$

کروی: $d_A = r^2 \sin\theta \, d_\theta d_\varphi$

$$I_Z = \int x^2 \cancel{\sigma}\, d_A + \int y^2 \sigma\, d_A = \cancel{\sigma}\left[\int x^2 d_x d_y + \int y^2 d_x d_y\right]$$

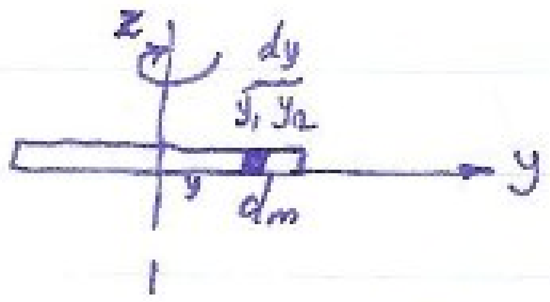
$$I_Z = \sigma\left(\int_{-a/2}^{a/2} x^2 d_x \int_{-b/2}^{b/2} d_y + \int_{-b/2}^{b/2} y^2 d_y \int_{-a/2}^{a/2} d_x\right) = \sigma\left(\frac{x^3}{3}\Big]_{-a/2}^{a/2} y\Big]_{-b/2}^{b/2} + \frac{y^3}{3}\Big]_{-b/2}^{b/2} x\Big]_{-a/2}^{a/2}\right)$$

$$= \sigma\left(b\left(\frac{(a/2)^3}{3} - \frac{(-a/2)^3}{3}\right) + a\left(\frac{(b/2)^3}{3} - \frac{(-b/2)^3}{3}\right)\right)$$

$$= \sigma\left(\frac{a^3 b}{12} + \frac{b^3 a}{12}\right) = \sigma\left(ab\left(\frac{a^2}{12} + \frac{b^2}{12}\right)\right) = \sigma\left(A\left(\frac{a^2+b^2}{12}\right)\right)$$

$$= \sigma A\left(\frac{a^2+b^2}{12}\right) = \frac{m}{12}(a^2+b^2)$$

$$k = \frac{1}{2} I w^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12} M(a^2+b^2)\right)\omega^2$$



محاسبه لختی دورانی یک میله حول محور عمود بر مرکز جرم آن:

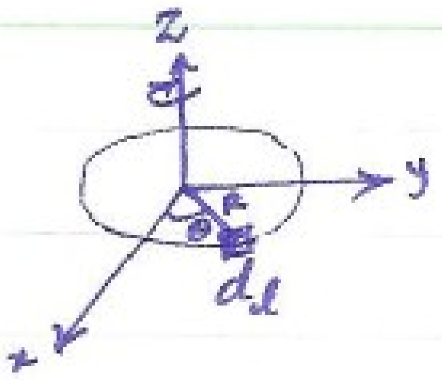
$$I_Z = \int r^2 d_m \qquad \lambda = \frac{d_m}{d_l} \Rightarrow d_m = \lambda d_l$$

$$r = y ,\ d_l = d_y \Rightarrow I_Z = \int_{-L/2}^{L/2} y^2 \lambda d_l = \int_{-L/2}^{+L/2} y^2 \lambda d_y = \lambda \frac{y^3}{3}\Big)_{-L/2}^{L/2}$$

$$= \lambda \frac{L^3}{12} = \lambda L \frac{L^2}{12} = \frac{m}{12} L^2$$

www.iebest.ir

www.iebest.ir



eg : لختی دورانی یک حلقه :

یادآوری: دکارتی : $d_l = dx, dy, dz$

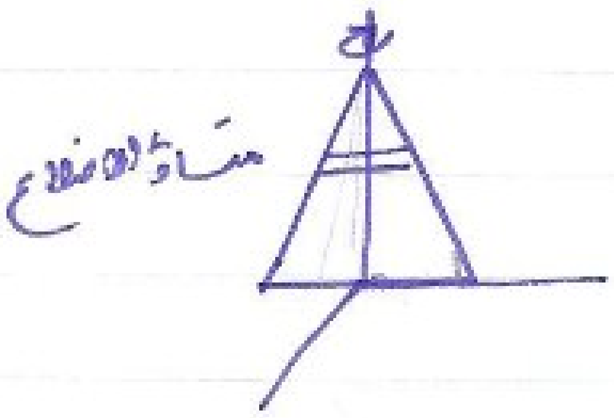
استوانه‌ای: $d_l = Rd\theta$

$$I_Z = \int R^2 d_m = \int_0^{2\pi} R^2 \lambda R d_\theta = R^3 \lambda \int_0^{2\pi} d_\theta \qquad d_m = \lambda d_l = \lambda R d_\theta$$

$$\Rightarrow I_Z = R^3 \lambda 2\pi = 2\pi R \lambda R^2 = \lambda L R^2 = MR^2$$

eg : لختی دورانی یک مثلث :

(تشکیل شده از میله)

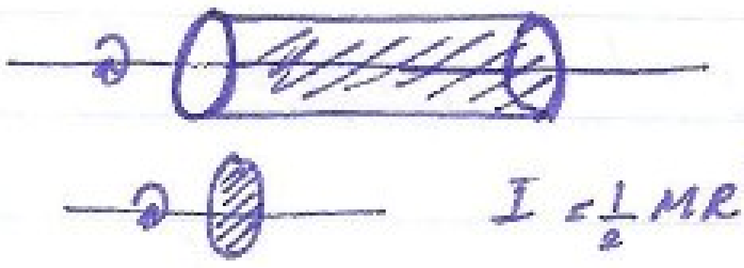


حلقه حول محور عمود بر مرکز $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

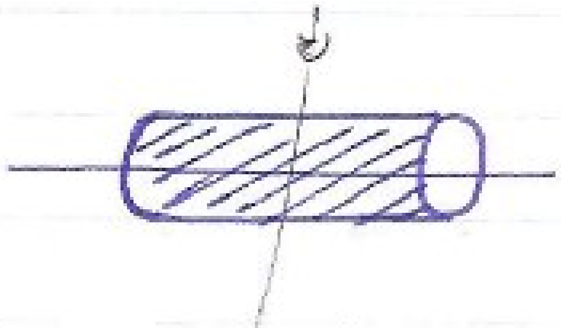
$I = MR^2$

حلقه نسبت به یکی از قطرها $0 \leq \varphi \leq \pi$

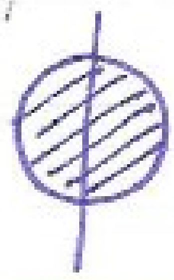
$I = \frac{1}{2} MR^2$



$I = \frac{1}{2} MR^2$



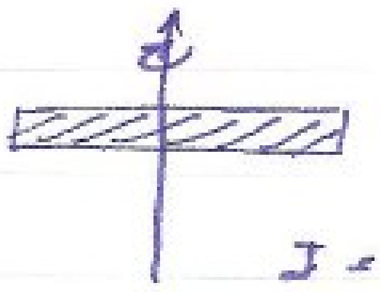
استوانه توپر $I = \frac{1}{4} MR^2 + \frac{1}{12} ML^2$



$I = \frac{1}{4} MR^2$

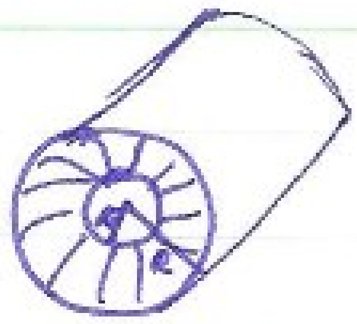
www.iebest.ir

www.iebest.ir



میله

$I = \frac{1}{12} M L^2$



استوانه توخالی

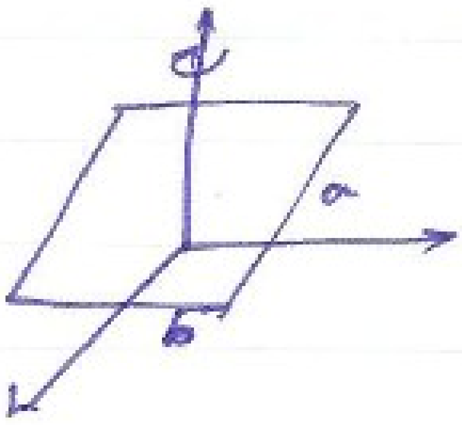
$I = \frac{1}{2} M(R_1^2 + R_2^2)$

کره توپر

$I = \frac{2}{5} M R^2$

پوسته کروی

$I = \frac{2}{3} M R^2$

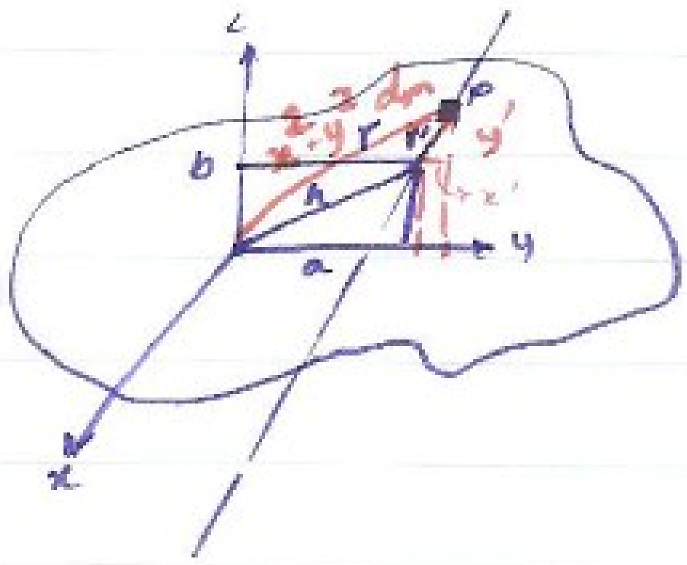


$I = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2)$

قضیه محورهای موازی:

* اگر I را حول یک محور گذرنده مرکز جرم بدانیم و بخواهیم آن را حول محور دیگری موازی محور اول که به فاصله h از آن قرار دارد بدست آوریم:

$I = I_{cm} + Mh^2$



$y' = y - b$

$x' = x - a$

$I_p = \int r'^2 dm = \int (x'^2 + y'^2) dm$

$= \int ((x-a)^2 + (y-b)^2) dm$

$= \int (x^2 - 2ax + a^2) dm + \int (y^2 + b^2 - 2by) dm$

$= \int (x^2 + y^2) dm + \int (a^2 + b^2) dm - 2a \int x dm - 2b \int y dm$

$= \int r^2 dm + \int h^2 dm - 2a \underbrace{\int x dm}_{0} - 2b \underbrace{\int y dm}_{0}$

مرکز جرم مولفه x

مولفه y مرکز جرم

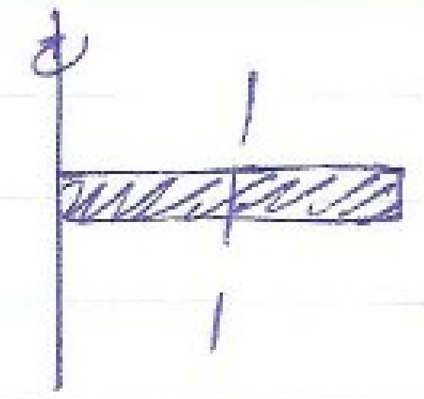
$\Rightarrow I_p = I_{cm} + Mh^2$

x محور

www.iebest.ir

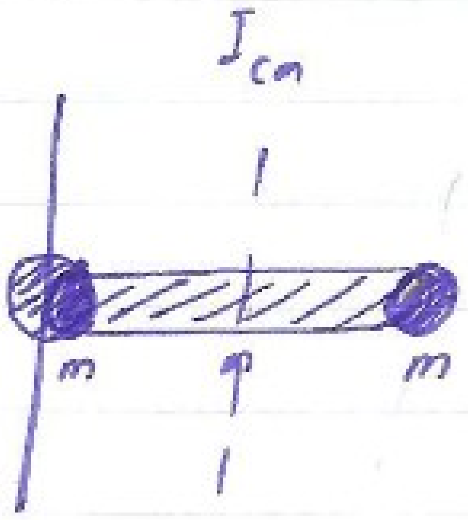
www.iebest.ir

تحقیق در منزل برای معلم:



$$\boxed{I = I_{cm} + Mh^2}$$

$$I = \frac{1}{12}MR^2 + M\frac{R^2}{4} = \frac{1}{3}MR^2$$

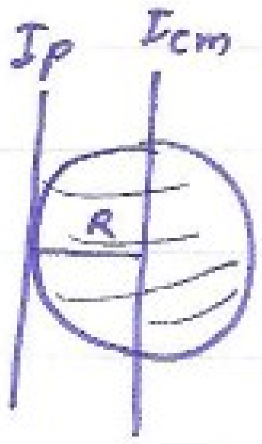


$$\boxed{I = I_{cm} + Mh^2}$$

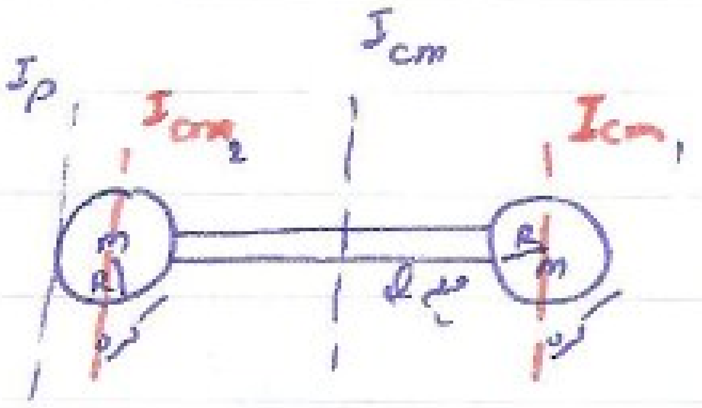
$$I_{cm} = I_1 + I_2 + I_3$$

$$= \frac{mL^2}{4} + \frac{1}{12}mL^2 + \frac{mL^2}{4} = \frac{7}{12}mL^2$$

$$I = \frac{7}{12}mL^2 + 3m\frac{L^2}{4} = \frac{4}{3}mL^2$$



$$I_{cm} = \frac{2}{5}MR^2 \qquad I_p = \frac{2}{5}MR^2 + mR^2 = \frac{7}{5}MR^2$$



$$I_p = I_{cm\,\text{کل}} + 3m(L/2 + 2R)^2$$

$$I_{cm_T} = \frac{1}{2}mL^2 + I_{cm_1} + M(R + L/2)^2 + I_{cm_2} + M(R + L/2)^2$$

$$I_{cm\,\text{کل}} = \frac{1}{12}mL^2 + \frac{2}{5}mR^2 + m(R + L/2)^2 + \frac{2}{5}mR^2 + m(R + L/2)^2$$

$$I_{cm\,\text{کل}} = \frac{1}{12}mL^2 + \frac{4}{5}mR^2 + 2m(R + L/2)^2$$

$$I_p = I_{cm\,\text{کل}} + 3m(L/2 + 2R)^2$$

گشتاور نیرو: بیان کننده اثر چرخانندگی یا پیچانندگی نیروی F وارد بر یک جسم حول محور دوران است.

$$\underset{\text{گشتاور}}{\tau} = rF = rFSin\varphi = rSin\varphi \cdot F = r_\perp F$$

بازوی گشتاور.

www.iebest.ir

www.iebest.ir

$\vec{\tau} = \vec{r} \wedge \vec{F}$ فرم برداری گشتاور نیرو

خواص گشتاور نیرو:

۱. برداراست .

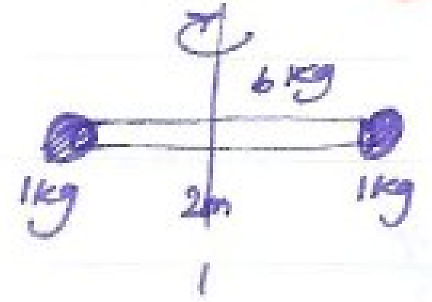
2. گشتاور نیرو از اصل برهم نهی پیروی می کند.

3. گشتاور نیرو اگر جسم پاد ساعتگرد بچرخد مثبت و اگر ساعتگرد بچرخد منفی است .

$\tau = I\alpha$ دورانی قانون دوم نیوتون در حرکت دورانی.

$F = ma$ انتقالی $\tau = r\underset{\text{نیروی مماسی}}{F_t} = r(ma_t) = r(m\alpha r) = (mr^2)\alpha = I\alpha$

مثال: در شکل مقابل در لحظه ای که سرعت دورانی میله 40 دور بر دقیقه است جسم شروع به توقف می کند و 20^s بعد می ایستد با فرض ثابت بودن گشتاور



$\alpha = \frac{\omega-\omega_0}{t} = \frac{0-4\pi/3}{20} = -\pi/15$

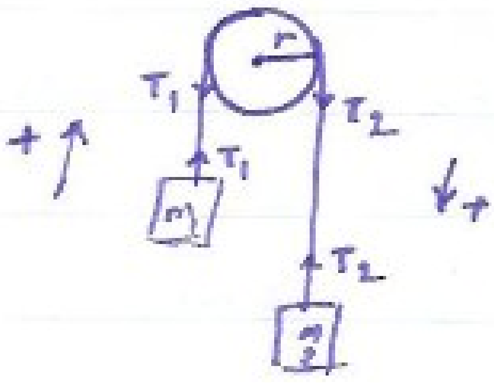
۱. شتاب زاویه ای

۲. گشتاور کند کننده

$40 \times \frac{2\pi}{60} = \frac{4\pi}{3}$

$\tau = I\alpha \Rightarrow I = \frac{1}{12} \times 6(2)^2 + 1\times1 + 1\times1 = 4$ $\tau = -\frac{4\pi}{15}$

مثال: در یک ماشین آتوود جرم یک جسم 500gr و دیگری 400gr است. شعاع قرقره 5cm پس از رها کردن دستگاه از حالت سکون جسم سنگین تر به اندازه ی 75cm پایین می آید لختی دورانی



قرقره چقدر است؟

نکات:

در صورت جرم دار بودن قرقره دیگر کشش طناب در دو طرف آن برابر نیست

۱. معادلات حرکت نیوتون را می نویسیم.

2. اگر تعداد معادلات کمتر از تعداد مجهولات بود از معادلات کلی گشتاور نیرو استفاده می کنیم و یک سری از مجهول برحسب بقیه بدست می آید .

$$\left.\begin{array}{l} m_2g - T_2 = m_2a \\ T_1 - m_1g = m_1a \end{array}\right\} \Rightarrow T_2 - T_1 = m_2(g-a) + m_1(g+a) \quad (I)$$

(II) $\tau = (T_2 - T_1)R = I\alpha = \frac{a}{R}I$ $y = +\frac{1}{2}at^2 + V_0t \Rightarrow$ $75\times10^{-2} = \frac{1}{2}a(5)^2 \Rightarrow a = 6\times10^{-2} m/s^2$

www.iebest.ir

با جایگذاری I در II

$$m_2(g-a) - m_1(g+a) = I\frac{a}{\cancel{R}} = I a/R^2$$

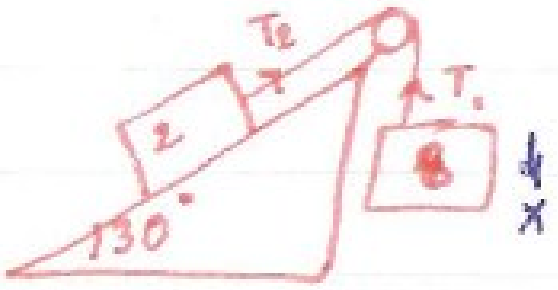
$$\Rightarrow I = \left(\frac{0.5(9.8-6\times10^{-2}) - 0.4(9.8+6\times10^{-2})}{6\times10^{-2}}\right)R^2$$

$*\ s = r\theta \ ،\ a = r\alpha \ ،\ v = r\omega \ *$

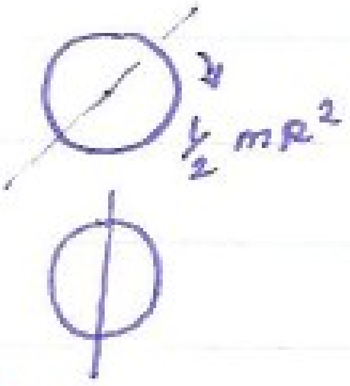
مثال: جسمی به جرم 2kg روی سطح شیبداری که با افق زاویه 30° می‌سازد قرار دارد و به جسم 8kg متصل است. جرم قرقره قرص مانند 1kg است و شعاع آن 10cm است. اگر $\mu_k = 0.1$

۱. شتاب جسم آویخته
۲. کشش نخ در هر طرف

خودم حل کردم.



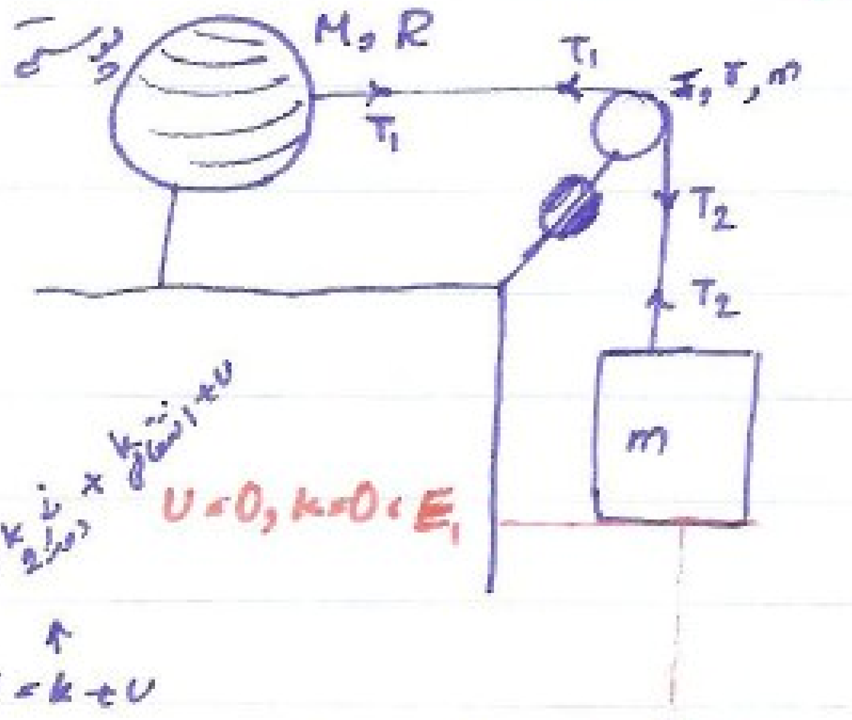
$$I = \frac{1}{2}MR^2 \xrightarrow{M=1} \frac{1}{2}R^2$$



$a = 6.37\ m/s^2$

$T_2 = 24.2^N \ ,\ T_1 = 27.44^N$

مثال: پوسته نازکی مطابق شکل به جسم m متصل است نخ به دور پوسته پیچیده شده و جسم m رها می‌شود سرعت جسم پس از سقوط به اندازه h چقدر است؟



$$m:\ mg - T_2 = ma \Rightarrow T_2 = m(g-a) \quad (I)$$

$$\tau_{\text{قرقره}} = T_2r - T_1r = (T_2 - T_1)r = I\alpha = I\,a/r \quad (III)$$

$$\tau_{\text{پوسته}} = T_1R = I\alpha_2 = I\frac{a}{R} \Rightarrow T_1 = I_2\,a/R^2 \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(II, I)} r\left(m(g-a) - I_2\frac{a}{R^2}\right) = \frac{a}{r}\cdot I_1$$

$$\Rightarrow a = rmg\Big/\left(\frac{I_1}{r} + \frac{rI_2}{R^2} + rm\right)$$

$k_{\text{دورانی}1} + k_{\text{دورانی}2} + k_{\text{انتقالی}} + U$

$\uparrow$

$k + U = k + U$

$$0 + 0 = -mgh + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 \quad E_2$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\left(\frac{v}{r}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}MR^2\right)\left(\frac{v}{R}\right)^2 \qquad v^2 - v_0^2 = 2ah \Rightarrow v = \sqrt{2ah}$$

$$2mgh = \left(m + \frac{I}{r^2} + \frac{2}{3}M\right)v^2 \qquad v = \sqrt{\left[2rmg\Big/\left(\frac{\frac{1}{2}m'R^2}{r} + \frac{r\,\frac{2}{3}MR^2}{R^2} + rm\right)\right]h}\ m/s$$

www.iebest.ir

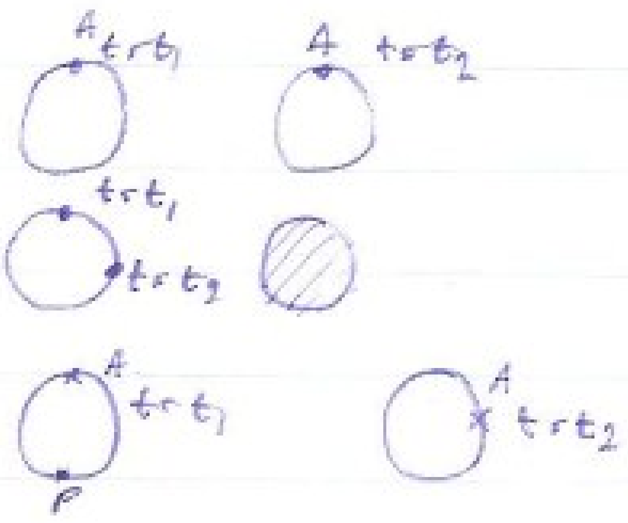
نکته: دو جسم که توسط نخ به هم متصل اند و حرکت دورانی دارند دارای سرعت و شتاب) خطی برابر و سرعت (و شتاب) زاویه ای متفاوت هستند.

اما یک جسم که در حال دوران است دارای سرعت و شتاب زاویه‌ای برابر و سرعت و شتاب خطی متفاوت دارند.

The inetioa of moment for triangle

.10 .5

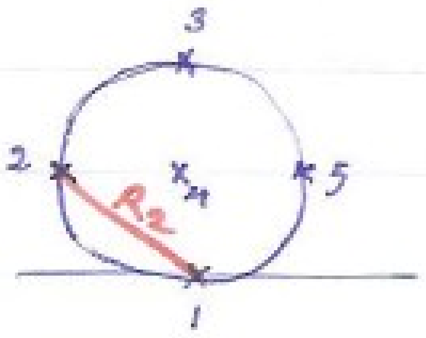
فصل یازدهم: غلتش



1. انتقالی: جسم فقط جابجا می‌شود و هیچ دورانی ندارد.
2. دورانی: جسم حول یک محور دوران می‌کند و هیچ انتقالی ندارد.
3. غلتش: جسم هم دوران می‌کند هم منتقل می‌شود.

نکته: در حرکت دورانی محور دوران از مرکز جسم می‌گذشت اما در حرکت غلتشی محور دوران نقطه تماس با زمین است نقطه P در شکل بالا.

سرعت نقاط مختلف را در حرکت غلتشی بررسی می‌کنیم.



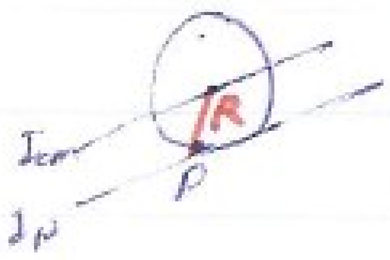
* $V_1 = 0$

$V_2 = R_2 \omega$ ، $V_3 = R_3 \omega = 2a\omega$ ، $V_4 = R_4 \omega = a\omega$

$V_5 = R_5 \omega$

1. سرعت خطی نقطه تماس با زمین صفر و سرعت خطی بالاترین نقطه A دو برابر سرعت مرکز جرم است.

انرژی جنبشی غلتش:



$$k = \frac{1}{2} I_p \omega^2$$

$$I_p = I_{cm} + MR^2 \Rightarrow k = \frac{1}{2}(I_{cm} + MR^2)\omega^2$$

$$= \frac{1}{2} I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2} MR^2\omega^2$$

$$= \frac{1}{2} I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2} mv^2$$

با استفاده از k بالا نتیجه می‌گیریم که انرژی جنبشی غلتش برابر است با مجموع انرژی جنبشی دورانی حول مرکز جرم و انرژی جنبشی انتقالی

$$k_{\text{غلتش}} = k_{\text{دورانی}} + k_{\text{انتقالی}}$$

www.iebest.ir

www.iebest.ir

مث: استوانه‌ای روی زمین می‌غلتد انرژی جنبشی دورانی آن چه کسری از انرژی کل است.

$K_{غلتش} = K_{دورانی} + K_{انتقالی}$

$$K_{غلتش} = \frac{1}{2} I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2} mv^2$$

$$\frac{\frac{1}{2} I_{cm}\omega^2}{\frac{1}{2} I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2} mv^2} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} MR^2)\omega^2}{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} MR^2)\omega^2 + \frac{1}{2} mv^2}$$

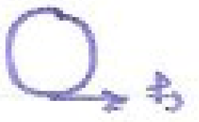
$$= \frac{\frac{1}{2} MR^2\omega^2}{\frac{1}{2} MR^2\omega^2 + Mv^2} = \frac{\frac{1}{2} M}{\frac{1}{2} M + M} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

نیروها در حرکت غلتشی :

انواع حرکت‌های غلتشی : ۱. حرکت غلتشی هموار (محض) : جسم فقط جابجا نشده و دوران می‌کند. (غلتش)

2. حرکت غلتشی ناهموار : علاوه بر جابجایی و دوران لغزش هم دارد. (هم غلتش و هم لغزش)

نیروی ایجاد کننده‌ی حرکت غلتشی محض f_s است.



(f_s ، $f_{s_{Max}}$ نیست)

اما در حرکت غلتش ناهموار نیروی f_k عامل ایجاد غلتش است.

f_s : مقدار ماکزیمم نیست بلکه برای هر جسم دارای مقدار متفاوتی است.

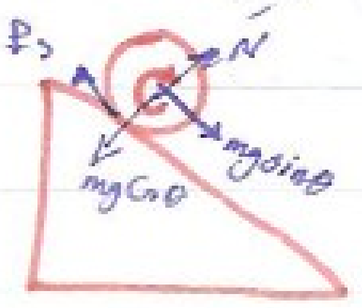
f_s : جزء مجهولات در حل معادلات حرکت غلتشی.

در حرکت غلتشی هموار می‌توانیم از رابطه‌ی $a_{cm} = R\alpha$ استفاده کنیم. اما در حرکت غلتشی ناهموار از رابطه $a_{cm} = R\alpha$ نمی‌توان استفاده کرد.

مراحل حل مسائل :

1. مرکز جرم جسم را تعیین می‌کنیم.
2. f_s و سایر نیروها را در دستگاه رسم می‌کنیم.
3. قانون نیوتن را بر حرکات می‌نویسیم.
4. اگر تعداد مجهولات از تعداد معادلات بیشتر بود از معادلات گشتاور نیرو استفاده می‌کنیم.

مث :



$$\sum F = ma$$

$$\Rightarrow mg\sin\theta - f_s = ma$$

$$\Rightarrow \tau\begin{pmatrix} N \\ mg\sin\theta \\ mg\cos\theta \end{pmatrix} = 0 \quad \text{چون} \quad r_\perp = 0$$

$$\tau = f_s r = I\alpha \Rightarrow f_s = I\frac{\alpha}{r} = I\frac{a}{r^2}$$

www.iebest.ir

www.iebest.ir

$$mg\sin\theta - I\frac{a}{r^2} = ma \Rightarrow mg\sin\theta \cdot r^2 = mar^2 + Ia$$

$$\Rightarrow mg\sin\theta \cdot r^2 = mar^2 + \frac{1}{2}MR^2 a$$

$$\Rightarrow mg\sin\theta \cdot r^2 = a(mr^2 + \frac{1}{2}mr^2 a)$$

$$\Rightarrow mg\sin\theta = a(m + \frac{1}{2}m)$$

$$\Rightarrow g\sin\theta = a\frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{2}{3}g\sin\theta$$

$$a = \frac{g\sin\theta}{1 + \frac{I_{cm}}{MR^2}}$$ درحالت کلی

$$a_{\text{استوانه}} = \frac{g\sin\theta}{1 + \frac{\frac{1}{2}MR^2}{MR^2}} = \frac{2}{3}g\sin\theta$$

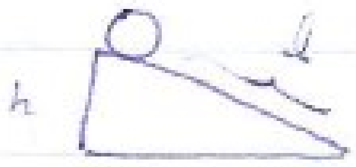
$$a_{\text{کره}} = \frac{g\sin\theta}{1 + \frac{\frac{2}{5}MR^2}{MR^2}} = \cancel{\frac{2}{3}}g\sin\theta \cdot \frac{5}{7}$$

$\Rightarrow$ کره زودتر از استوانه به پایین سطح شیبدار می‌رسد.

مث: استوانه‌ی توپری به جرم m و شعاع R از یک سطح شیبدار به پایین [illegible] که سرعت مرکز جرم هنگام رسیدن به سطح شیبدار چقدر است. (ارتفاع سطح شیبدار h) می‌غلتد

$$a_{\text{استوانه}} = \frac{2}{3}g\sin\theta \Rightarrow v^2 - v_0^2 = 2ad$$

$$\Rightarrow v^2 = 2ad \Rightarrow v = \sqrt{\frac{4}{3}g\sin\theta \cdot d} = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$$



$$E_2 - E_1 = W = \cancel{F.d} \Rightarrow E_2 = E_1 \Rightarrow mgh = \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

$$\Rightarrow mgh = \frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{4}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$$

تکانه زاویه‌ای:

$\vec{l} = \vec{r} \wedge \vec{p}$

تکانه زاویه‌ای o

θ: زاویه بین امتداد دو بردار $\vec{r}$ و $\vec{P}$

تکانه خطی

تکانه خطی برای یک ذره $P = mV$ و برای مجموعه ذرات $P = \sum P_i$

تکانه زاویه‌ای برای یک ذره $l = r \wedge F$ " " $l = \sum l_i$

هرگاه برآیند گشتاورهای نیرو حول محور صفر شد در آن صورت پایستگی تکانه زاویه‌ای داریم. $\vec{L_i} = \vec{L_f}$

شکل دوم قانون دوم نیوتن: $F_{net} = \frac{dp}{d_t}$

شکل دوم قانون نیوتن در حرکت دورانی $\tau_{net} = \frac{dL}{d_t}$

$$\frac{dL}{d_t} = \frac{d(rnP)}{d_t} = \frac{d}{d_t}(r \wedge mv) = m\frac{d(rnv)}{d_t} = m\frac{dr}{d_t}\wedge v + mr\wedge\frac{dv}{d_t}$$

$$\frac{dL}{d_t} = \underbrace{mv \wedge v}_{0} + mr \wedge a \Rightarrow \frac{dL}{d_t} = r \wedge ma = r \wedge F = \tau \Rightarrow \tau = \frac{dL}{d_t}$$

www.iebest.ir

www.iebest.ir

مقایسه روابط حرکت انتقالی و دورانی:

انتقالی		دورانی	
نیرو	F	گشتاور نیرو	τ
تکانه ذره	$p = mv$	تکانه زاویه ای ذره	$l = I\omega$
تکانه کل	$P = \sum P_i$	تکانه زاویه ای کل	$L = \sum l_i$
پایستگی تکانه خطی	$P_i = P_f$	پایستگی تکانه زاویه	$L_i = L_f$
شکل دوم نیوتون	$F_{net} = \frac{dp}{dt}$	شکل دوم نیوتون	$\tau_{net} = \frac{dL}{dt}$

کار و انرژی جنبشی دورانی:

$$W = \int F \cdot dt \Rightarrow W = \int \tau \, d\theta$$

توان:

$$P = \frac{dW}{dt} = F \cdot v$$ انتقالی

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}(\tau\theta) = \tau \frac{d\theta}{dt} = \tau\omega$$

قضیه کار و انرژی جنبشی:

$$\frac{1}{2} I\omega^2 - \frac{1}{2} I_0 \omega_0^2 = \int \tau \, d\theta = W$$

تعادل:

۱. برایند نیروهای وارد بر جسم صفر است. $\sum F = 0$

$\Rightarrow \sum F_{(x)} = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum F_z = 0$

۲. برایند گشتاورهای نیرو وارد بر جسم صفر است. $\sum \tau = 0$

$\Rightarrow \sum \tau_x = 0 \quad \sum \tau_y = 0 \quad \sum \tau_z = 0$

روش حل مسائل برای تعادل:

۱. ابتدا نمودار آزاد جسم را رسم کرده و کلیه نیروها را وارد می‌کنیم.

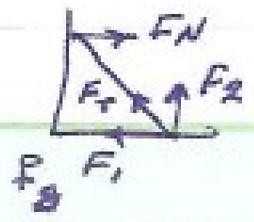
۲. چون دستگاه در حال تعادل است از روابط $\sum F = 0$ و $\sum \tau = 0$ استفاده می‌کنیم. (محور دوران انتخاب می‌کنیم)

۳. اگر گشتاورهای نیرویی وارد بر جسم تمایل داشت جسم را ساعتگرد بچرخاند علامت گشتاور منفی است. اگر تمایل داشت جسم را پادساعتگرد بچرخاند گشتاور مثبت است.

۴. اگر تعداد مجهولات بیشتر از معادلات بود می‌توانیم محور دوران را روی نیروها مجهول قرار دهیم گشتاور نیروها را صفر کنیم.

۵. اگر نیروها دارای زاویه بودند ابتدا آنها را تجزیه می‌کنیم و سپس گشتاورشان را حساب می‌کنیم.

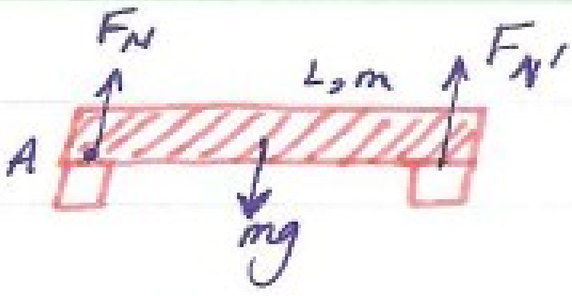
۶. اگر سطح بدون اصطکاک بود تنها نیروی وارد بر جسم نیروی عکس العمل سطح است. اما اگر جسم دارای اصطکاک بود دو نیروی عمود بر هم بر جسم وارد می‌شود.



www.iebest.ir

www.iebest.ir

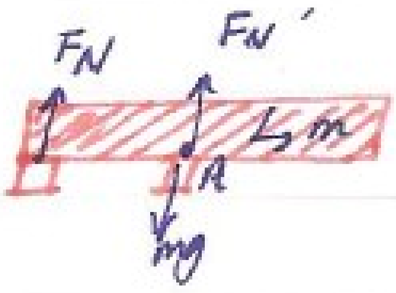
مث: نیروی عکس العمل وارد بر پایه ها بر جسم را حساب کنید.



$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_N' + F_N - mg = 0$$

حول نقطه A دوران کنید.

$$\Sigma \tau = 0 \Rightarrow -mg\, L/2 + F_N' L = 0 \Rightarrow F_N' = mg/2 = F_N$$



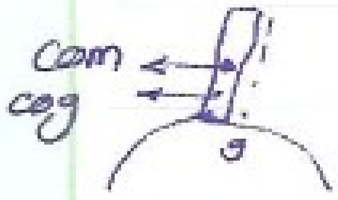
$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_N + F_N' - mg = 0$$

$$\Sigma \tau = 0 \Rightarrow -F_N(L/2) = 0 \Rightarrow F_N = 0 \Rightarrow F_N' = mg$$

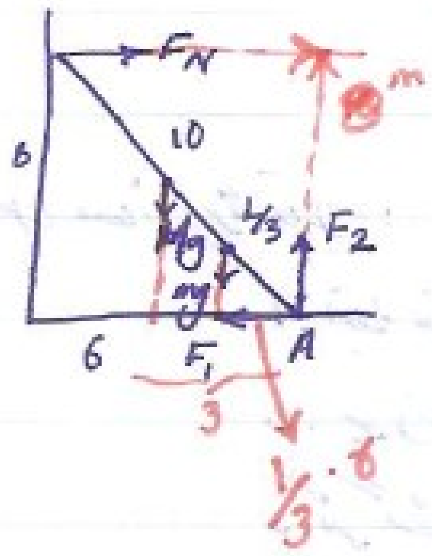
مث: نردبانی به طول 10^m و جرم 45kg بر دیوار بدون اصطکاکی تکیه کرده است انتهای بالای نردبان در ارتفاع 8^m زمین قرار دارد زمین دارای اصطکاک است شخصی به جرم 70kg تا مکان نردبان بالا می رود.

فاصله ی مرکز جرم نردبان از انتهای پایینی 1/3 است بزرگی نیروهای وارد بر نردبان از سوی دیوار و کف چقدر است.

* مرکز گرانی (گرانیگاه) : نیروی گرانشی وارد بر جسم به نقطه ای وارد می شود که به آن گرانیگاه گویند و با (cog)



$$\Rightarrow cog \simeq com$$



$$\Sigma F = 0 \Rightarrow \Sigma F_x = 0 \Rightarrow \boxed{F_1 = F_N}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow \boxed{F_2 = mg + Mg}$$

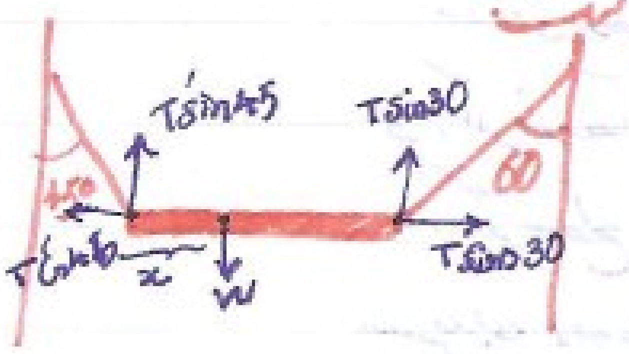
$$\Sigma \tau = 0 \Rightarrow -F_N . 8 + Mg \times 3 + mg \times 2 = 0$$

$$\Rightarrow (3M + 2m)g = 8F_N$$

$$F_N = F_1 = 37.5^N \quad F_2 = 427^N$$

مث: میله غیر یکنواختی به وزن W به دو نخ سبک مطابق شکل وصل است $\theta = 45$ و $\varphi = 60$ اگر طول

میله 6m باشد فاصله مرکز گرانی (x) از انتهای سمت چپ میله چقدر است



$$\Sigma F = 0 \Rightarrow \Sigma F_x = 0 \Rightarrow T \cos 30 = T' \cos 45 \Rightarrow T' = \sqrt{3}/2\, T$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T' \sin 45 + T \sin 30 = W$$

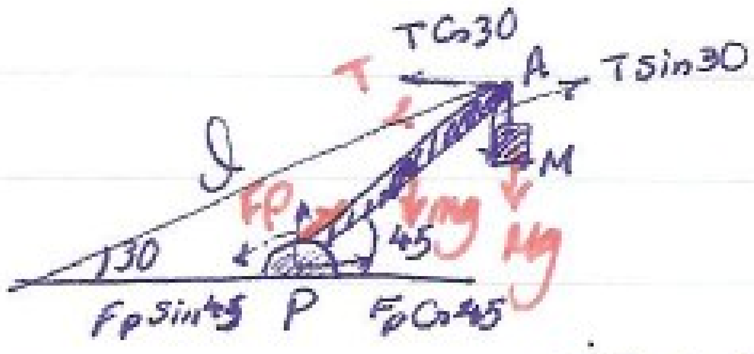
$$\Sigma \tau = 0 \Rightarrow T' \sin 45\, d + W(d - x) = 0$$

www.iebest.ir

$T' \sin 45\, l = (T_0 \cos 30 + T' \sin 45)(l - x)$,

$\frac{\sqrt{3}}{2} l = (T_1/2 + \sqrt{3} T_1/2)(l - x) \Rightarrow x = \frac{6}{(\sqrt{3}+1)}$

eg : دستگاه شکل مقابل در حال تعادل است مطلوبست آن نیروی وارد بر میله از طرف پایه P جرم
جسم 200kg جرم میله 50kg .



$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_p \cos 45 = T \cos 30 \Rightarrow T = F_p \sqrt{3/3}$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow Mg + mg + T \sin 30 = F_p \sin 45$

محور دوران
نقطه A : $\Sigma \tau = 0 \Rightarrow mg \frac{L}{2} \cos 45 + F_p \cos 45 . L \sin 45$

$- F_p \sin 45 . L \cos 45 = 0$ پس جواب نمی‌دهد.

نیروی نقطه A را حذف می‌کند
از اتصال .

P محور دوران : $\Sigma \tau = 0 \Rightarrow - T \cos 30 . L \sin 30 + mg . \frac{l}{2} \sin 45$

$+ Mg L \sin 45 = 0$

$\Rightarrow - T \times \frac{\sqrt{3}}{2} . L \frac{1}{2} + 50 \times 9.8 \times \frac{L}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 200 . L \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

فصل نهم: یک نقطه خاص در اجسام (مرکز جرم)

مرکز جرم یک جسم یا دستگاهی از اجسام، نقطه‌ای است که در موقع حرکت کردن گویی تمام جرم جسم در آنجا متمرکز شده است و تمام نیروهای خارجی بر آن نقطه اثر می‌کنند.

center of mass برای دو جسم به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$x_{com} = \frac{m_1 d + m_2 d}{m_1 + m_2}$$

نتیجه: به ازای $m_1 = m_2$ جرم‌های ذره‌ها یکسان و مرکز جرم در وسط فاصله‌ی میان آنهاست $\Leftarrow x_{com} = d/2$

- اگر $m_1 \neq 0$ و $m_2 \neq 0$ باشند، x_{com} مقداری در بین صفر و d خواهد بود یعنی مرکز جرم در محلی واقع در میان دو ذره است.
- با وجود جابجا شدن دستگاه مختصات، فاصله مرکز جرم از ذره‌ها همان فاصله قبلی است.

برای حالتی که n ذره در راستای محور x قرار دارد:

$$M = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$$

$$\Rightarrow x_{com} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_n x_n}{M}$$

$$x_{com} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i$$

تذکر: شاخص i: ذره‌های مختلف را از لحاظ جرم و مکانشان معرفی می‌کند.

اگر ذرات در سه بعد توزیع شود:

(مهم)

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i$$

$$y_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i$$

$$z_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i z_i$$

$$\Rightarrow \vec{r}_{cm} = x_{cm}\hat{i} + y_{cm}\hat{j} + z_{cm}\hat{k}$$

$$\Rightarrow \vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i \quad \text{(مهم)}$$

$$d_I = \tfrac{1}{3} d_m L^2 = \tfrac{1}{3}\sigma d_A x^2 = \tfrac{1}{3}\sigma x^3 dy$$

$$y = x \Rightarrow dy = dx \Rightarrow d_I = \tfrac{1}{3}\sigma x^3 dx$$

$$\Rightarrow I = \frac{\sigma}{3} x^4/4 \Big]_0^a$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma}{12} a^4 = \frac{1}{2} a^2 . \sigma \left(a^2/6\right)$$

$$= ma^2/6$$

تفسیر موضوعی : 10.12 , 13:30-16:30

ریاضی : 10.18 , 7:30-10:30

زبان : 10.19 , 16:30-18:30

فیزیک پایه : 10.25 , 7:30 - 10.30

فارسی : 10.26 , 13.30 - 16.30

www.iebest.ir

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\int x\, d_m$$

حجم : $\rho = \frac{M}{V} = \frac{dm}{dV} \Rightarrow d_m = \frac{MdV}{V}$

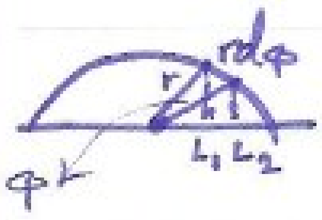
چگالی سطحی $\sigma = \frac{M}{A} = \frac{dm}{d_A} \Rightarrow d_m = \frac{Md_A}{A}$

چگالی طولی $\lambda = \frac{M}{l} = \frac{dm}{dl} \Rightarrow dm = \frac{Mdl}{L}$

المانها:

۱. d_l (خطی): a) دکارتی: $d_l = dx$ یا dy یا d_z

* b) دایره:



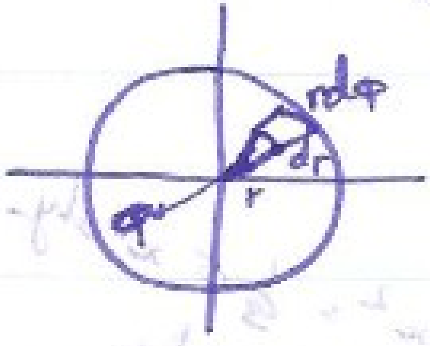
$\Delta l = l_2 - l_1 = dl$

$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = d\varphi$

$\Rightarrow dl = rd\varphi \quad , \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$

2) d_A (سطحی): a) دکارتی: $d_A = dx \cdot dy$ یا $dx\, d_z$ یا $dy \cdot d_z$

* b) اگر یک قرص دایره باشد:



$\Rightarrow d_A = rd\varphi\, dr = rdr\, d\varphi \quad , \quad 0 \leqslant r \leqslant a \quad , \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$

c) اگر یک کره باشد:

$d_A = a^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$

$0 \leqslant \theta \leqslant \pi \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$

3. d_V (حجمی): a) دکارتی: $d_V = d_x \cdot d_y d_z$

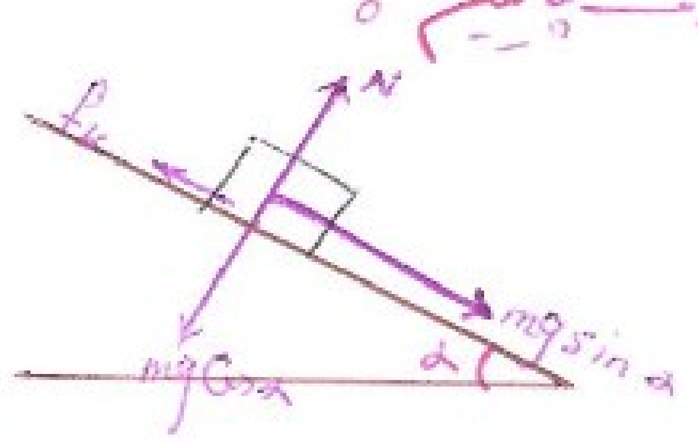
b) کره: $d_r = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dr$

www.iebest.ir

www.iebest.ir

حرکت روی سطح شیب‌دار :

لغزیدن با شتاب به طرف پایین :



$$mg\sin\alpha - f_K = ma \quad (1)$$

$$f_K = \mu_K \cdot N = \mu_K mg\cos\alpha \quad (2) \xrightarrow{(2)(1)} \boxed{a = g(\sin\alpha - \mu_K \cos\alpha)}$$

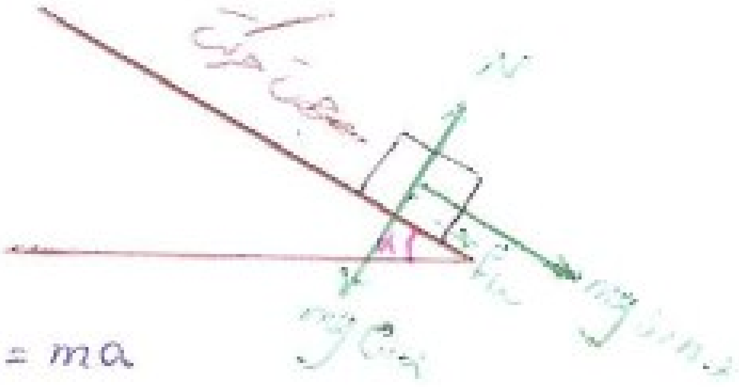
$$\mu_K \simeq 0 \Rightarrow a = g\sin\alpha$$

([illegible])

[illegible]

[illegible]

پرتاب به طرف بالای سطح شیبدار :



پرتاب به طرف بالای سطح شیب دار ($F_{محرک} = 0$)

$$-mg\sin\alpha - f_K = ma \Rightarrow -mg\sin\alpha - \mu_K mg\cos\alpha = ma$$

$$\Rightarrow \boxed{a = -g(\sin\alpha + \mu_K \cos\alpha)} \quad \mu_K \simeq 0 \Rightarrow a = -g\sin\alpha$$

* اگر جسم را رو به بالا با سرعت V_0 روی سطح شیبدار پرتاب کنیم

و با سرعت V به همین نقطه برگردد داریم :

$$\boxed{\frac{V}{V_0} = \sqrt{\frac{\sin\alpha - \mu_K \cos\alpha}{\sin\alpha + \mu_K \cos\alpha}}}$$

www.iebest.ir

حرکت چند جسم باهم روی یک سطح

افقی :

* در این حالت می توانیم حرکت اجسامی را که به طریقی به هم وصل شده است (توسط نخ یا فنر یا تماس سطح دو جسم) را به صورت تک تک یا صورت جسم واحد بررسی نماییم .

* همواره F از T بزرگتر و T نیز از T' بزرگتر است *

کل دستگاه : $F - f_1 - f_2 - f_3 = (m_1 + m_2 + m_3)a$

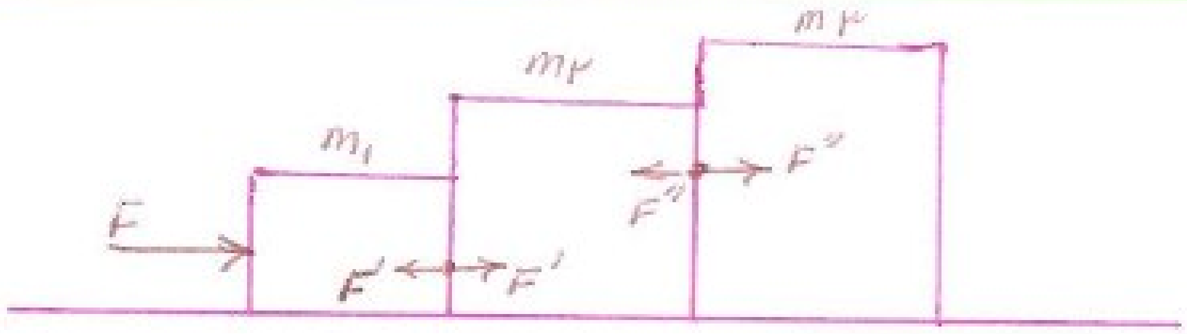
$$\frac{F}{m_1+m_2+m_3} = \frac{T_1}{m_2+m_3} = \frac{T'}{m_3}$$

اگر F به این شکل باشد : $\nearrow F$

یا μ همگی یکسان باشد :

$$a = \frac{F - f_1 - f_2 - f_3}{m_1+m_2+m_3} = \frac{F - T - f_1}{m_1} = \frac{T' - f_3}{m_3}$$

$$\text{شتاب} = \frac{\text{برآیند نیروهای وارد بر کل دستگاه}}{\text{جرم کل دستگاه}} = \frac{\text{برآیند نیروهای وارد بر هر جزء از دستگاه}}{\text{جرم همان جزء}}$$



* همواره F از F' بزرگتر و F' از F'' بزرگتر است .

کل دستگاه : $F - f_1 - f_2 - f_3 = (m_1 + m_2 + m_3)a$

$$F' : \begin{cases} m_1 : F - F' - f_1 = m_1 a \\ m_2 + m_3 : F' - f_2 - f_3 = (m_2 + m_3)a \end{cases}$$

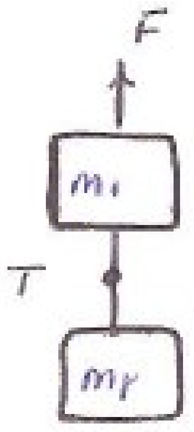
$$F'' \begin{cases} m_3 : F'' - f_3 = m_3 a \\ m_1 + m_2 : F - F'' - f_1 - f_2 = (m_1 + m_2)a \end{cases}$$

$F' - F'' \Rightarrow m_2 : F' - F'' - f_2 = m_2 a$

$$\frac{F}{m_1+m_2+m_3} = \frac{F'}{m_2+m_3} = \frac{F''}{m_3}$$

قائم:

در این حرکت اگر شتاب داشته باشیم، ابتدا باید کل دستگاه را یک جسم واحد در نظر گرفته و قانون دوم نیوتون برای آن نوشته شود.



کل دستگاه: $F - m_1 g - m_2 g = (m_1 + m_2) a$

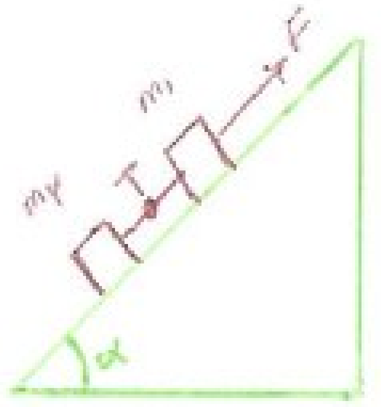
$$\begin{cases} m_1 : F - m_1 g - T = m_1 a \\ m_2 : T - m_2 g = m_2 a \end{cases}$$

$$\frac{F}{m_1 + m_2} = \frac{T}{m_2}$$

* اگر دستگاه در شرایط خلاء کشیده شود، نیروی کشش نخ با جرم وزنه‌هایی که به دنبال خود می‌کشد متناسب است.

$$\begin{cases} F \propto m_1 + m_2 \\ T \propto m_2 \end{cases}$$

سطح شیبدار:



کل دستگاه: $F - m_1 g \sin\alpha - m_2 g \sin\alpha - f_1 - f_2 = (m_1 + m_2) a$

$m_1 : F - m_1 g \sin\alpha - f_1 - T = m_1 a$

$m_2 : T - m_2 g \sin\alpha - f_2 = m_2 a$

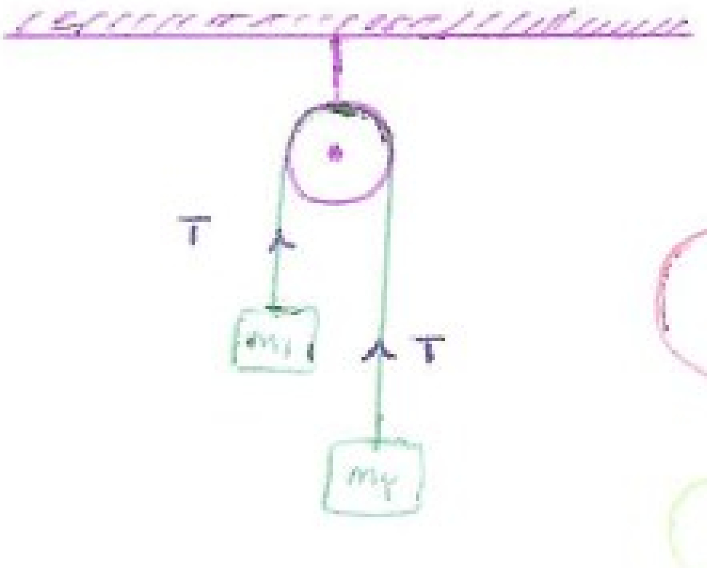
$$\frac{F}{m_1 + m_2} = \frac{T}{m_2}$$

* اگر جسم با سطح اصطکاک نداشته باشد یا ضریب اصطکاک آن برای هر دو وزنه یکسان باشد، نیروی کشش نخ با جرم وزنه‌هایی که به دنبال خود می‌کشد، متناسب است.

$$\begin{cases} F \propto m_1 + m_2 \\ T \propto m_2 \end{cases}$$

www.iebest.ir

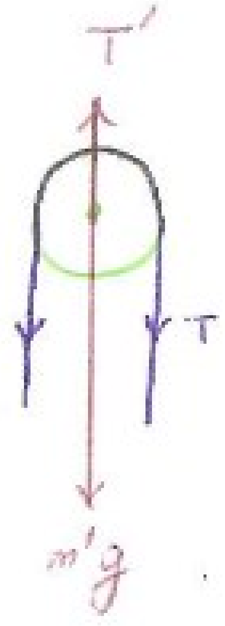
* ماشین آتوود *



$$a = \frac{|m_۲ - m_۱|g}{m_۲ + m_۱}$$

$$T = \frac{۲m_۱ m_۲ g}{m_۱ + m_۲}$$

بررسی قرقره ثابت



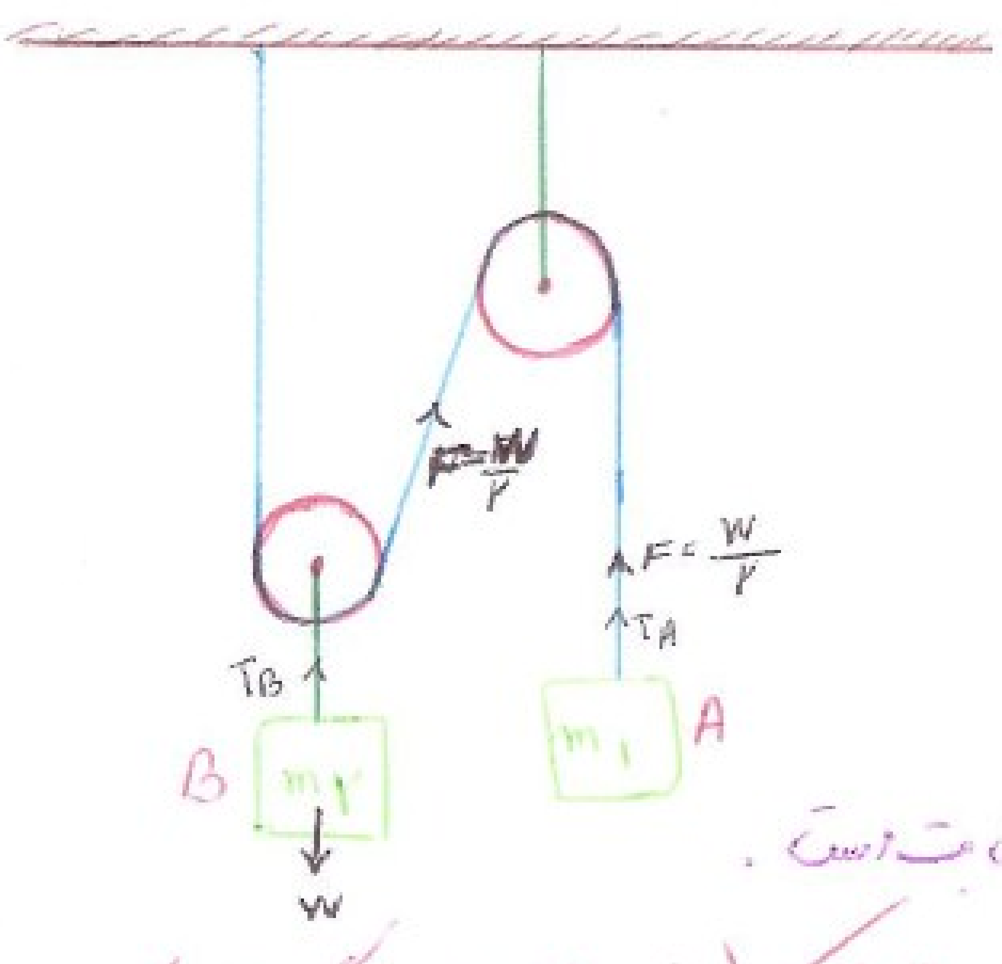
$$T' = ۲T + m'g$$

اگر جرم قرقره ناچیز باشد آنگاه $m' = 0$

$\Leftarrow$ $T' = ۲T$

$$\Rightarrow T' = \frac{۴m_۱ \cdot m_۲ \cdot g}{m_۱ + m_۲}$$

بررسی قرقره متحرک



$x_A = ۲x_B \Rightarrow x = \frac{۱}{۲}at^۲ \Rightarrow a_A = ۲a_B$

$v = at \Rightarrow v_A = ۲v_B$

$T_A = m_A(g - a_A)$ و $T_B = ۲T_A = m_B(g + a_B)$

و $a_B = \frac{a_A}{۲} \Rightarrow T_B = ۲T_A = m_B(g + \frac{a_A}{۲})$

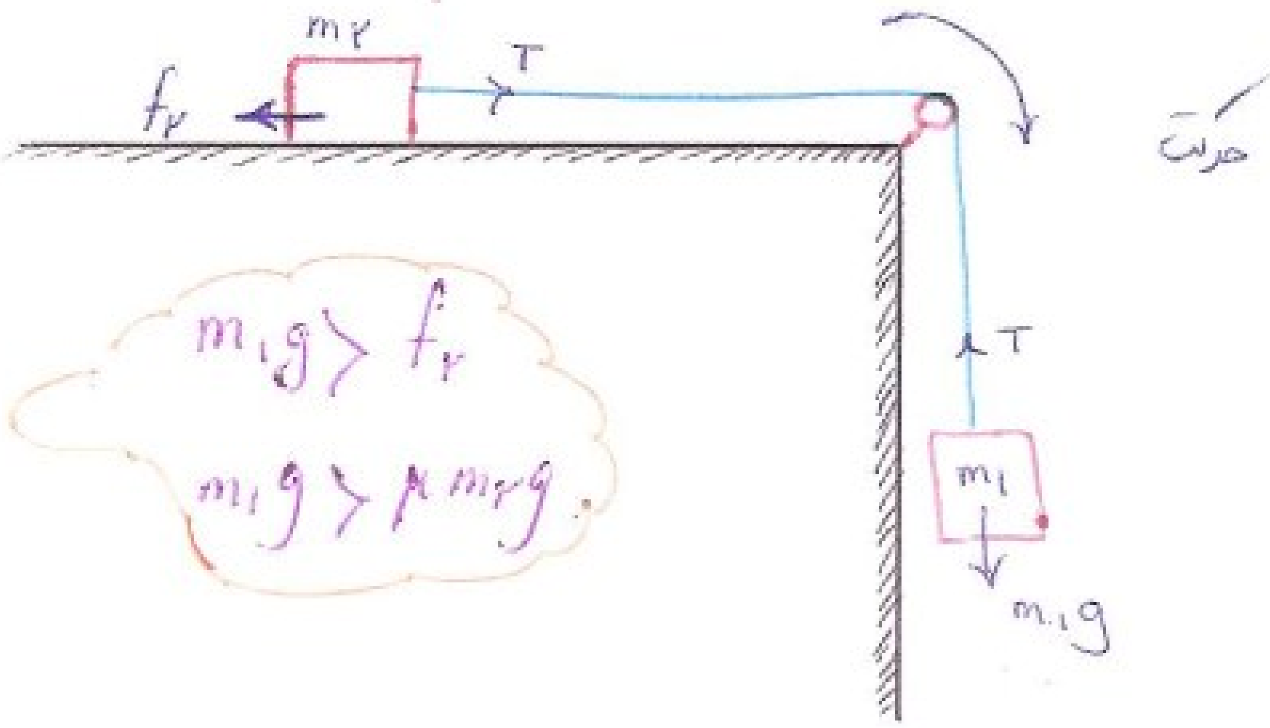
* اگر نخ بدون جرم باشد کشش نخ در سرتاسر نخ مقدارش ثابت است.

* اندازه‌ی نیروی کشش نخ با عبور از روی قرقره تغییر نمی‌کند (یعنی به جرم قرقره بستگی ندارد).

www.iebest.ir

www.iebest.ir

* حرکت در سطوح ترکیبی افقی و قائم *



چند فرمول کاربردی

زمانی که در سوال سرعت یا
زمان یا مسافت داده می‌شود!

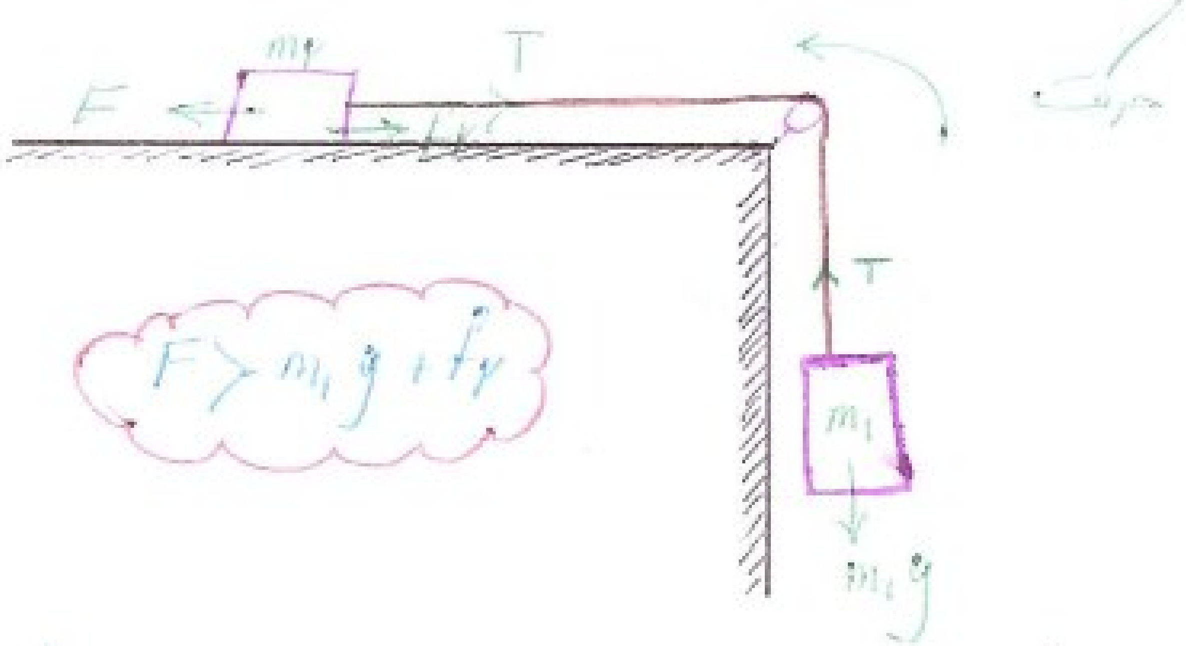
$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x$

$v = at + v_0$

که در اکثر موارد $v_0 = 0$

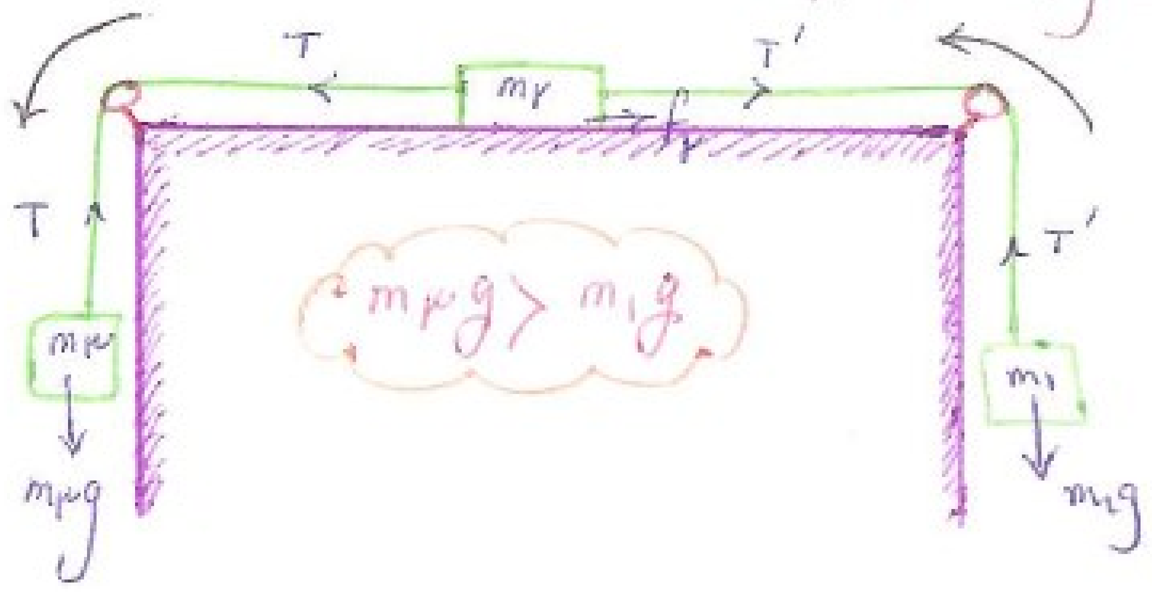
کل دستگاه: $m_1g - f_2 = (m_1 + m_2)a$

$$\begin{cases} m_2: T - f_2 = m_2 a \\ m_1: m_1 g - T = m_1 a \end{cases}$$



کل دستگاه: $F - f_2 - m_1 g = (m_1 + m_2)a \Rightarrow$

$$\begin{cases} m_2: F - f_2 - T = m_2 a \\ m_2: F - f_2 - T = m_2 a \\ m_1: T - m_1 g = m_1 a \end{cases}$$



کل دستگاه: $m_3g - f_2 - m_1g = (m_1 + m_2 + m_3)a \Rightarrow$

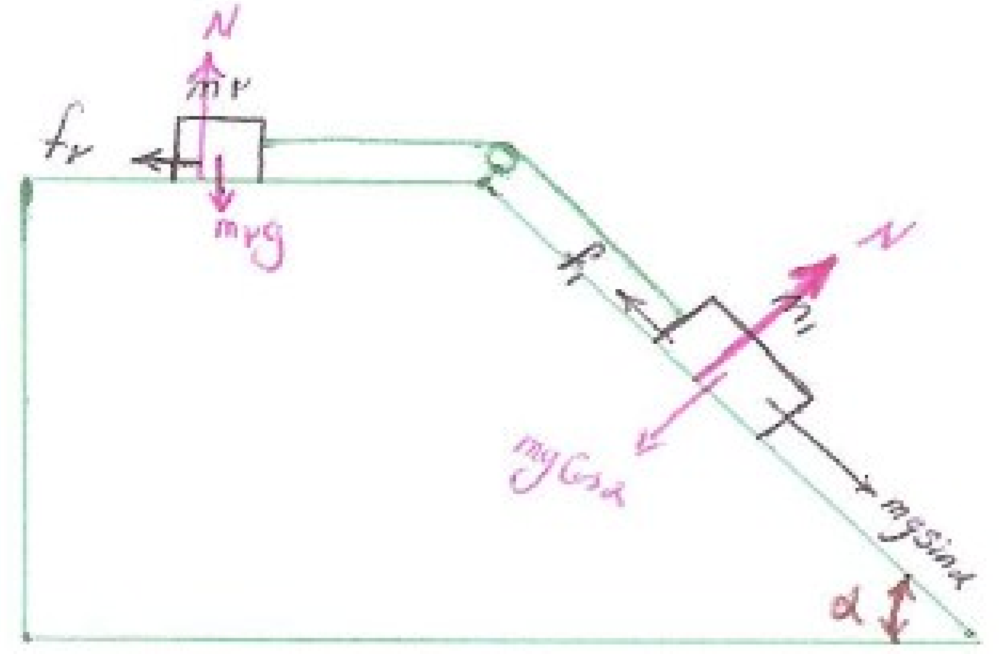
$$\begin{cases} m_3: m_3 g - T = m_3 a \\ m_2: T - T' - f_2 = m_2 a \end{cases}$$

www.iebest.ir

سطح‌های ترکیبی افقی یا قائم با سطح شیب‌دار

در این مسئله‌ها برای تعیین جهت حرکت باید ابتدا برای وزنه‌ی روی سطح شیب‌دار نیروی $mg\sin\alpha$ را با نیروی mg برای وزنه‌ای که در راستای قائم قرار دارد مقایسه نماییم. پس از آن قانون اول و دوم نیوتون را بنویسیم

$N_2 = m_2 g$



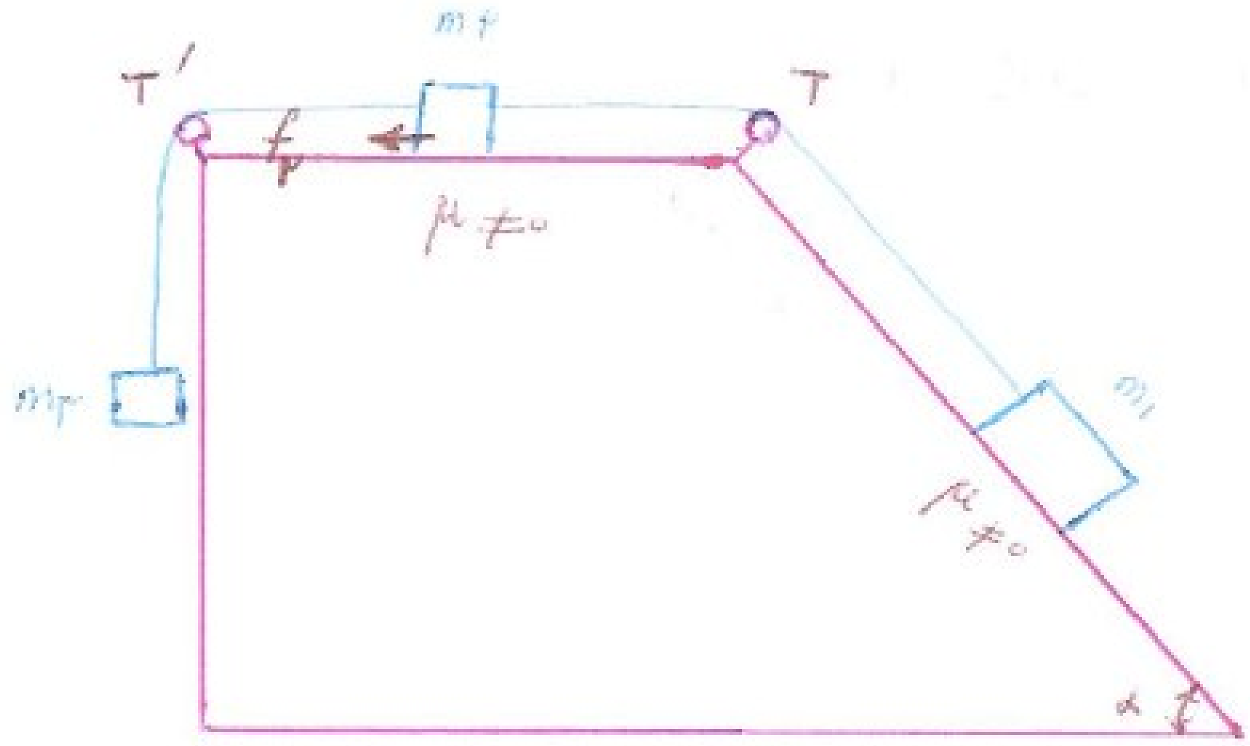
$N_1 = m_1 g \cos\alpha$

$m_1 g\sin\alpha > f_1 + f_2$

(کل دستگاه) $m_1 g\sin\alpha - f_1 - f_2 = (m_1 + m_2)a$

$m_1 :\ m_1 g\sin\alpha - f_1 - T = m_1 a$

$m_2 :\ T - f_2 = m_2 a$



اگر: $m_1 g\sin\alpha > m_3 g + f_2$

(کل دستگاه) $m_1 g\sin\alpha - f_2 - m_3 g = (m_1 + m_2 + m_3)a$

$m_2 :\ T - T' - f_2 = m_2 a$

$m_3 :\ T' - m_3 g = m_3 a$

$(m_1, m_2) :\ m_1 g\sin\alpha - f_2 - T' = (m_1 + m_2)a$

www.iebest.ir