ریاضی ۱ و ۲

تابع

تعریف تابع: متغیر y را تابعی از متغیر x در حوزه تعریف D گویند اگر به ازای هر x از این حوزه یا دامنه مقدار معینی برای متغیر y متناظر باشد. یا برای هر $(x_۱ , y_۱)$ و $(x_1 , y_۲)$ داشته باشیم $(y_۱ = y_۲)$

روش‌های نمایش توابع:

۱- ضابطه تحلیلی، $y=f(x)$

مثال: $y=x^۲+۲\log x$

۲- ضابطه ضمنی $f(x,y)=۰$

مثال: $y\cos x+x^۲\ln y=۲$

نکته: در هر صورت نمایش تابع، باید تعریف آن صادق باشد.

دامنه تابع: مجموعه تمام xهایی که در معادله تابع صدق کنند را دامنه تابع گفته و با D_f نمایش می‌دهند.

برد تابع: مجموعه تمام yهایی که در معادله تابع صدق کند را برد تابع گفته و با R_f نمایش می‌دهند.

انواع تابع

۱- تابع یک به یک: $f(x_۱)=f(x_۲) \Rightarrow x_۱=x_۲$

۲- تابع پوشا: fپوشا است اگر $f:X\to Y \Rightarrow Y=R_f$

۳- تابع متناوب: T: دوره تناوب و $\forall x\in D_f \Rightarrow f(x+T)=f(x)$

نکته: دوره تناوب تابع $f(ax)$ در صورت متناوب بودن f با دوره T، برابر $\frac{T}{|a|}$ می‌باشد.

٤- تابع زوج: تابع متقارن نسبت به محور yها یا $f(-x)=f(x)$

٥- تابع فرد: تابع متقارن نسبت به مرکز یا $f(-x)=-f(x)$

٦- تابع صعودی و اکیدا صعودی:

تابع اکیدا صعودی: $x_۲>x_۱ \Rightarrow y_۲>y_۱$ و تابع صعودی: $x_۲>x_۱ \Rightarrow y_۲\geq y_۱$

۷- تابع نزولی و اکیدا نزولی:

تابع اکیدا نزولی: $x_۲>x_۱ \Rightarrow y_۲<y_۱$ و تابع نزولی: $x_۲>x_۱ \Rightarrow y_۲\leq y_۱$

معرفی برخی توابع خاص:

- تابع جزء تصحیح: $y=[x]=n \quad ; \quad n\leq x\leq n+۱$
- تابع نمایی: $y=a^x \quad , \quad a>۰, a\neq ۱$
- تابع لگاریتمی: $y=\log_a^x \quad , \quad a>۰ \quad , \quad a\neq ۱$

– تابع سینوس: $y=\sin x$

خواص : $\sin(-x)=-\sin x$ تابع فرد و $\sin(x+(2k+1)\pi)=-\sin x$ و $\sin(\pi-x)=\sin x$

– تابع کسینوس: $y=\cos x$

خواص : $\cos(-x)=\cos x$ تابع زوج و $\cos(x+(2k+1)\pi)=\cos x$ و $\cos(\pi-x)=-\cos x$

– تابع تانژانت: $y=\operatorname{tg}x \ , \ x\neq(2n-1)\frac{\pi}{2} \ ; \ n\in z$

خواص : $\operatorname{tg}(-x)=-\operatorname{tg}x$ و $\operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}$ و $\operatorname{tg}(x+k\pi)=\operatorname{tg}x$

– تابع کتانژانت: $y=\operatorname{cotg}x$ و $x\neq n\pi \ ; \ n\in z$

توجه: همانطور که دیده شد دوره تناوب تابع سینوس و کسینوس، 2π و دوره متناوب تانژانت و کتانژانت π می‌باشد.

روابط مثلثاتی مهم:

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x \quad , \quad \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x \quad , \quad \operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\operatorname{cotg}x$$

$$\sin(a\pm b)=\sin a\cos b\pm\cos a\sin b \quad , \quad \cos(a\pm b)=\cos a\cos b\mp\sin a\sin b$$

$$\operatorname{tg}(a\pm b)=\frac{\operatorname{tg}a\pm\operatorname{tg}b}{1\mp\operatorname{tg}a\,.\operatorname{tg}b} \quad , \quad \operatorname{cotg}(a\pm b)=\frac{\operatorname{cotg}a\,.\operatorname{cotg}b\pm 1}{\operatorname{cotg}a\mp\operatorname{cotg}b}$$

$$\sin 2a=2\sin a\cos a \quad , \quad \cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a=2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a$$

$$\operatorname{tg}2a=\frac{2\operatorname{tg}a}{1-\operatorname{tg}^2 a} \quad , \quad \sin 2a=\frac{2\operatorname{tg}a}{1+\operatorname{tg}^2 a} \quad , \quad \cos 2a=\frac{1-\operatorname{tg}^2 a}{1+\operatorname{tg}^2 a}$$

$$\sec^2 a=\frac{1}{\cos^2 a}=1+\operatorname{tg}^2 a \quad , \quad \operatorname{cosc}^2 a=\frac{1}{\sin^2 a}=1+\operatorname{cotg}^2 a$$

$$\sin a\pm\sin b=2\sin\frac{a\pm b}{2}\cos\frac{a\mp b}{2}$$

$$\cos a+\cos b=2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} \quad , \quad \cos a-\cos b=-2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$$

$$\sin a\cos b=\frac{1}{2}\left(\sin(a+b)+\sin(a-b)\right)$$

$$\cos a\cos b=\frac{1}{2}\left(\cos(a+b)+\cos(a-b)\right)$$

$$\sin a\sin b=-\frac{1}{2}\left(\cos(a+b)-\cos(a-b)\right)$$

توابع معکوس و معکوس توابع

در تابع $f:D_f\to R_f$ با ضابطه $y=f(x)$ معکوس تابع، رابطه روبرو است: $f^{-1}:R_f\to D_f$

اگر تابعی بخواهد معکوس‌پذیر باشد باید حتما یک به یک باشد.

توابع مثلثاتی معکوس:

$$f(x)=\sin x \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x)=\operatorname{Arcsin}x$$

نکات: Arcsinx تابعی صعودی و فرد و $-\frac{\pi}{2}\leq \operatorname{Arcsin}x\leq\frac{\pi}{2}$

$$f(x)=\cos x \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x)=\operatorname{Arccos}x$$

Arccosx نزولی و تابعی نه زوج و نه فرد است. $0\leq\operatorname{Arccos}x\leq\pi$

$f(x)=tgx \quad \Rightarrow \quad f^{-۱}(x)=Arctgx$

Arctgx صعودی و فرد است و $-\frac{\pi}{۲}\le Arctgx\le \frac{\pi}{۲}$

برخی روابط:

$$\sin(Arcsin\,x)=x \quad , \quad \sin(Arccos\,x)=\sqrt{۱-x^۲}$$
$$\cos(Arccos\,x)=x \quad , \quad \cos(Arcsin\,x)=\sqrt{۱-x^۲}$$
$$Arcsin\,x+Arccos\,x=\frac{\pi}{۲}$$

توابع هیپربولک و معکوس هیپربولیک

$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{۲} \quad , \quad \cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{۲} \quad , \quad tghx=\frac{\sinh x}{\cosh x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{e^{۲x}-۱}{e^{۲x}+۱}$$
$$\cosh^۲ x-\sinh^۲ x=۱$$
$$\cosh ۲x=\cosh^۲ x+\sinh^۲ x \quad , \quad \sinh ۲x=۲\sinh x\cosh x$$
$$\cosh^۲ x=\frac{۱}{۱-tgh^۲x} \quad , \quad \sinh^۲ x=\frac{tgh^۲x}{۱-tgh^۲x}$$


نکته: اگر در هر یک از اتحادهای مثلثاتی sinx و cosx و tgx را با i sinh x و i cosh x و i tgh x (که $i^۲=-۱$) عوض کنیم، اتحادهای هیپربولیک حاصل می‌شوند.

تابع معکوس sinh x: $\sinh^{-۱}x=\ln\left(x+\sqrt{x^۲+۱}\right)$

تابع coshx دربازه $(-\infty,۰]$ نزولی و دربازه $[۰,\infty)$ صعودی است. برد آن $[۱,\infty)$ می‌باشد. در نتیجه تابع $y=\cosh^{-۱}x$ به دو شاخه یک مقداری که به ازای $x\ge ۱$ معین هستند تقسیم می‌شوند. لذا:

$$\left(\cosh^{-۱}x\right)_۱=\ln\left(x-\sqrt{x^۲-۱}\right) \quad , \quad \left(\cosh^{-۱}x\right)_۲=\ln\left(x+\sqrt{x^۲-۱}\right)$$

از آنجا که $\ln\left(x-\sqrt{x^۲-۱}\right)=-\ln\left(x+\sqrt{x^۲-۱}\right)$ پس تابع coshx تابعی زوج است. Sinh x و tgh x نیز توابعی فرد هستند.

تابع معکوس tgh x: $tgh^{-۱}x=\frac{۱}{۲}\ln\frac{۱+x}{۱-x}$

حد و پیوستگی

اگر $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$ باشد f را در x=a پیوسته گوئیم.

اگر $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=f(a)$ باشد f را در x=a پیوسته چپ گوئیم.

اگر $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=f(a)$ باشد f را در x=a پیوسته راست گوئیم.

مثال: به ازای کدام مقدار a و b تابع f با ضابطهٔزیر در x=1 پیوسته است؟

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^۳-۱}{x-a} & x>۱\\ [-x]+b & x\le ۱\end{cases}$$

حل: $f(۱^+)=\frac{۰}{۱-a}=۰ \quad , \quad f(۱^-)=-۱+b \quad , \quad f(۱)=-۱+b \quad \Rightarrow \quad b=۱, a\ne ۱$

نکته: اگر تابع f در x=a حد داشته باشد ولی تعریف نشده باشد، می‌توان با تعریف f(a) برابر حد تابع در x=a تابع را پیوسته کرد. به این نقطه «رفع شدنی» گویند.

مثال: f(2) چند باشد تا تابع $f(x)=\left(\frac{x}{۲}\right)^{\frac{۱}{x-۲}}$ در x=2 پیوسته باشد.

حل:

$$f(۲)=\lim_{x\to ۲}\left(\frac{x}{۲}\right)^{\frac{۱}{x-۲}}=\lim_{x\to ۰}\left(\frac{x+۲}{۲}\right)^{\frac{۱}{x}}=\lim_{x\to ۰}\left(۱+\frac{x}{۲}\right)^{\frac{۱}{x}}=e^{\frac{۱}{۲}}$$

مشتق و کاربرد آن

مشتق‌پذیری: تابع f را در x=a مشتق‌پذیر گوئیم هرگاه $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ موجود باشد که آن را مشتق تابع f $(f'(a))$ در x=a گوئیم.

(فرمول دوم مشتق $\lim_{x\to ۰}\frac{f(x+a)-f(a)}{x}$)

مشتق چپ: $f'_-(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ و مشتق راست: $f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

نکته ۱: $f'(a)$ و حد آن $\left(\lim_{x\to a}f'(x)\right)$ لزوماً برابر نیستند.

نکته ۲: برای محاسبهٔ برخی مشتق‌ها استفاده از تعریف مناسب‌تر است.

مثال: اگر تابع f در شرط روبرو صدق کند، $f'(a)$ کدام است؟

$$\forall x,y\in R: f(x+y)=f(x)+f(y)+xy \quad , \quad \lim\frac{f(x)}{x}=b$$

حل:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to ۰}\frac{f(x+a)-f(a)}{x}=\lim\frac{f(x)+f(a)+xa-f(a)}{x}=\lim_{x\to ۰}\left(\frac{f(x)}{x}+a\right)=b+a$$

همانطور که در مثال دیده شد گاهی در حل مسایل لازم است از فرمول دوم مشتق استفاده کنیم.

نکته: از آنجا که مشتق شیب خط مماس در نقطهٔ مفروض است لذا جهت محاسبه معادلهٔ خط‌های مماس یا عمود بر منحنی‌ها از آن استفاده می‌شود.

قضایای مشتق:

۱- مشتق مجموع تعداد متناهی از توابع برابر مجموع مشتقات آنهاست: $(u+v+\ldots+w)'=u'+v'+\ldots+w'$

۲- مشتق حاصل‌ضرب دو تابع: $(uv)'=u'v+uv'$ به همین صورت: $(uvw)'=u'vw+uv'w+uvw'$

۳- مشتق خارج قسمت دو تابع: $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^۲}$ به همین صورت: $\left(\frac{۱}{u}\right)'=\frac{-u'}{u^۲}$

۴- مشتق تابع مرکب: $(f(g(x)))'=g'(x)f'(g(x))$

نکته: مشتق توابعی که به صورت حاصلضرب می‌باشند و نیز توابع توانی را می‌توان با گرفتن Ln و استفاده از فرمول بالا، محاسبه کرد.

مثال: مشتق تابع $y=\sin x^{\cos x}$ را محاسبه کنید.

حل: $\mathrm{Ln}y=\cos x(\mathrm{Ln}\sin x)$ حال از دو طرف مشتق می‌گیریم:

$$\frac{y'}{y}=-\sin x(\mathrm{Ln}\sin x)+\cos x\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right) \quad\Rightarrow\quad y'=\sin x^{\cos x}\left(\frac{\cos^۲ x}{\sin x}-\sin x(\mathrm{Ln}\sin x)\right)$$

۵- مشتق تابع معکوس: $\left(f^{-۱}(x)\right)'=\dfrac{۱}{f'\left(f^{-۱}(x)\right)}$

مشتقات معروف:

$$\left(x^x\right)'=x^x(۱+\mathrm{Ln}x) \qquad , \qquad \left(a^x\right)'=a^x\mathrm{Ln}a$$

$$(\mathrm{Arc}\cos x)'=\frac{-۱}{\sqrt{۱-x^۲}} \quad ,(\mathrm{Arc}\sin x)'=\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}$$

$$(\mathrm{tg}x)'=۱+\mathrm{tg}^۲x \quad , \quad (\mathrm{Arctg}x)'=\frac{۱}{۱+x^۲} \quad ; \quad (\cot gx)'=-\left(۱+\cot g^۲x\right) \quad , \quad (\mathrm{Arc}\cot gx)'=\frac{-۱}{۱+x^۲}$$

مشتق n ام: $(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{۲}\right) \quad , \quad \left(\dfrac{۱}{x}\right)^{(n)}=\dfrac{(-۱)^n n!}{x^{n+۱}}$

$$(\sinh x)'=\cosh x \qquad , \qquad (\cosh x)'=\sinh x$$

نکته: زاویهٔ بین دو خط $y=mx+h$ و $y=m'x+h'$ برابر است با: $\mathrm{tg}\theta=\left|\dfrac{m-m'}{۱+mm'}\right|$

- اگر $mm'=-۱$ باشد دو خط بر هم عمودند.

نکته: فاصله نقطه $(x_۰,y_۰)$ از خط $ax+by+c=۰$ برابر است با: $AH=\dfrac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$

برای یافتن معادلهٔ خط مماس بر منحنی از نقطه‌ای خارج از منحنی، رابطهٔ $\dfrac{f(x)-y_۱}{x-x_۱}=f'(x)$ را استفاده می‌نمائیم. و نقطهٔ مماس $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ و شیب را می‌یابیم سپس از رابطهٔ $y-b=f'(x)(x-a)$ معادله را می‌نویسیم.

برای یافتن معادلهٔ خط عمود بر منحنی از نقطهٔ خارج آن از رابطهٔ $\dfrac{F(X)-y_۱}{x-x_۱}=\dfrac{-۱}{f(x)}$ استفاده می‌کنیم.

قاعدهٔ هوپیتال:

در محاسبه حدهای مبهم ($\frac{۰}{۰}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ یا ۱^{∞} یا ...) می‌توان از آن استفاده کرد: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

شرط استفاده از این قاعده، مشتق‌پذیری f و g در a است.

نکته: در محاسبهٔ حدهای ۱^{∞} یا مشابه باید از دو طرف ln بگیریم و با ایجاد کسر فوق، از قاعدهٔ هوپیتال استفاده نمائیم.

سری تیلور: $f(x)=c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+\ldots+c_n(x-a)^n+\ldots \quad ; \quad c_n=\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$

بسط مک لورن: $f(x)=f(0)+\dfrac{f'(0)}{1!}x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$

بسط‌های مهم: $\mathrm{Ln}(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\ldots \qquad e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\ldots\dfrac{x^n}{n!}+\ldots$

$$\sinh x=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots \qquad \cosh x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots$$

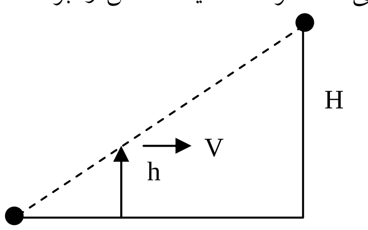
$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots \quad , \quad \cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots$$

مشتق تابع قدر مطلق:

$$g(x)=|f(x)|\Rightarrow g'(x)=f'(x)\frac{f(x)}{|f(x)|}$$

آهنگ تغییر کمیت‌های وابسته: برای حل مسایل مربوط به این قسمت ابتدا باید تابع ضمنی را بیابید سپس نسبت به متغیر خواسته شده مشتق بگیرید.

مثال: در شکل، شخصی با قد H و با سرعت V به سمت تیر چراغی به ارتفاع H حرکت می‌کند. سرعت سایهٔ شخص را بر حسب h و H و V به دست آورید. (به مقادیر ثابت و متغیر باید دقت کنید)



حل: فاصله سایه سر تا چراغ= y و فاصلهٔ شخص تا چراغ= x

$$\Rightarrow \quad \frac{y-x}{y}=\frac{h}{H} \quad\Rightarrow\quad (H-h)y-Hx=0 \quad , \quad \frac{dx}{dt}=V \quad\Rightarrow\quad -H\frac{dx}{dt}+(H-h)\frac{dy}{dt}=0 \quad \frac{dy}{dt}=\frac{H}{H-h}V$$

نکته: اگر بین x و y رابطهٔ $f(x,y)=0$ برقرار باشد در این صورت مشتق y برابر است با: $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$

نقاط بحرانی:

نقطه‌ای که در آن یکی از دو شرط روبرو برقرار باشد: ۱) $f'(a)=0$ ۲) $f'(a)$ موجود نباشد.

انواع نقاط بحرانی:

- نقاط ناپیوستگی تابع
- نقاط زاویه‌دار (نکته: زاویهٔ بین دو مماس برابر است با : $\tg\alpha=\left|\dfrac{f_1'(a)-f_2'(a)}{1+f_1'(a)f_2'(a)}\right|$)
- نقاط بازگشت: مشتق‌های چپ و راست مختلف العلامه
- نقاط عطف قائم: مشتق‌های چپ و راست هم علامت– تقعر منحنی تغییر می‌کند. ("y تغییر علامت می‌دهد)
- نقاط عطف افقی: مشتق‌های چپ و راست مختلف‌العلامه– تقعر منحنی تغییر می‌کند ("y تغییر علامت می‌دهد)
- نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی: مشتق صفر و تغییر علامت مشتق

قضیه رل: اگر تابع f در بازه [a, b] پیوسته و در بازهٔ (a, b) مشتق‌پذیر باشد و نیز f(a)= f(b) آنگاه وجود دارد یک نقطهٔ c در بازه (a, b) بـه قسمی که $f'(c)=0$.

قضیه مقدار میانگین: اگر تابع f در بازه [a, b] پیوسته و در (a, b) مشتق‌پذیر باشد آنگاه وجود دارد نقطهٔ c در بازهٔ (a, b) به طوری که $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

قضیهٔ کوشی: تعمیم قضیهٔ مقدار میانگین، اگر f و g پیوسته ودر (a, b) مشتق‌پذیر باشند $\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

مثال: مقدار c در قضیهٔ مقدار میانگین تابع $f(x)=\text{Arcsin}\,x$ وقتی $\circ\le x\le ١$ باشد را تعیین کنید.

حل:

$$f'(x)=\frac{١}{\sqrt{١-x^٢}}\quad;\quad f(\circ)=\circ\quad,\quad f(١)=\frac{\pi}{٢}\quad\Rightarrow\quad \frac{١}{\sqrt{١-c^٢}}=\frac{\frac{\pi}{٢}-\circ}{١-\circ}\quad\Rightarrow\quad c=\sqrt{١-\frac{۴}{\pi^٢}}$$

قضیه نامساوی: اگر g و f در بازهٔ (a,∞) مشتق‌پذیر بوده و به ازای هر x>a داشته باشیم $f'(x)\ge g'(x)$ همچنین f و g در x=a دارای مقادیر مساوی باشند آنگاه خواهیم داشت $f(x)\ge g(x)$.

قضیه مقدار میانی: اگر تابع f در بازه [a, b] پیوسته باشد آنگاه f(x) هر مقداری را بین f(a) و f(b) در بازه [a, b] اختیار می‌کند.

مثال: تعداد ریشه‌های معادلهٔ $x\sin x=١$ را در بازه $\left[\circ,\frac{\pi}{٢}\right]$ تعیین کنید.

$$f(x)=x\sin x\quad;\quad f(\circ)=\circ\quad,\quad f\left(\frac{\pi}{٢}\right)=\frac{\pi}{٢}$$

در نتیجه چون $١\in\left[\circ,\frac{\pi}{٢}\right]$ است و همچنین f(x) صعودی است در نتیجه در این بازه معادله دقیقاً یک ریشه دارد.

قضیه تله موش:

اگر f و g در x=a دارای حدی برابر باشند (L) و در یک همسایگی a داشته باشیم: $h(x)\le f(x)\le g(x)$ در این صورت تابع f نیز در x=a دارای حدی برابر L است.

نمونه سوالات

١- حد مقابل کدام است؟ $\lim\limits_{x\to\circ}\frac{\text{Arctg}x-\text{Arcsin}\,x}{x^٣}$

١) $\frac{١}{٢}$ ٢) $-\frac{١}{٢}$ ٣) $\frac{١}{٣}$ ٤) $-\frac{١}{٣}$

٢- تابع f در رابطه $f(x)=\begin{cases}x^٢-٢\text{Ln}x & x\ne\circ\\ \circ & x=\circ\end{cases}$ صدق می‌کند. کدام صحیح است؟

١) f تنها دارای دو مینیمم نسبی است ٢) f دارای نقطه عطف است

٣) معادلهٔ $f(x)=\frac{\pi}{٣}$ دو ریشهٔ حقیقی دارد ٤) معادله $f(x)=x$ دو ریشهٔ حقیقی داد

٣- اگر $\forall x,y\in\mathbb{R}:f(x,y)=f(x)f(y)$ و $f(\circ)\ne\circ$ آنگاه دامنهٔ تابع $g(x)=\frac{١}{\sqrt{f(x)}}$ کدام است؟

١) R ٢) $[\circ,\infty)$ ٣) $[-١,١]$ ٤) $\{\circ\}$

٤- مشتق دهم تابع $f(x)=x^٢e^{(x-١)}$ در $x=١$ کدام است؟

١) ٩١ ٢) ١٠١ ٣) ١١١ ٤) ١٢١

۵- ضریب زاویهٔ خط قائم بر منحنی تابع معکوس تابع $y=f(x)$ در هر نقطه (x, y) روی آن برابر $2y+1$ می‌باشد. اگر $f(0)=1$ باشد. $f(2)$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) -5 ۳) -6 ۴) ۷

حل نمونه سؤالات:

۱-۲: صحیح است. با استفاده از مک لورن توابع

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\text{Arctg}x-\text{Arcsin}\,x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x-\frac{1}{3}x^3\right)-\left(x+\frac{1}{6}x^3\right)}{x^3}=-\frac{1}{2}$$

۲-٤: صحیح است. با استفاده از مک لورن توابع

$$f'(x)=2x-\frac{2}{x}=0\Rightarrow x=\pm 1\quad ;\quad y=1\qquad \lim_{x\to\infty}f(x)=+\infty\quad ,\quad \lim_{x\to 0}f(x)=+\infty$$

نقطه‌های $(0,0)$ و $(-1,1)$ و $(1,1)$ همه مینیمم نسبی هستند و $f''(x)=2+\frac{2}{x^2}>0$ منحنی نقطهٔ عطف ندارد.

معادلهٔ $f(x)=\frac{\pi}{3}>1$ دارای چهار ریشهٔ حقیقی است. معادلهٔ $f(x)=x$ دو ریشهٔ حقیقی مثبت یکی $x_1=1$ و دیگری $x_2>1$ دارد.

۳-۱: صحیح است. با استفاده از مک لورن توابع

$$f(x)=a^x\qquad g(x)=a^{-\frac{x}{2}}\qquad\Rightarrow\quad D_g=\mathbb{R}$$

٤-۳: صحیح است. با استفاده از مک لورن توابع

$$f(x+1)=(x+1)^2e^x\ \Rightarrow\ f(x+1)=(x^2+2x+1)\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots\right)\quad C_{10}=\frac{1}{8!}+\frac{2}{9!}+\frac{1}{10!}$$

$$\Rightarrow\ f^{(10)}(1)=10!C_{10}=111$$

۵-۲: صحیح است. با استفاده از مک لورن توابع

$$m=-\frac{1}{(f^{-1})'}=-f'(y)=2y+1\ \Rightarrow\ f(y)=-y^2-y+c\qquad f(0)=c=1\ \Rightarrow\ f(y)=-y^2-y+1\ \Rightarrow\ f(2)=-5$$

ریاضی ۱ و ۲

دنباله‌ها

تابع $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ را یک دنباله گویند و با $\{a_n\}$ نمایش می‌دهند.

دنباله‌ها جزو توابع گسسته هستند و برای آنها حد به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\lim a_n = L \quad ; \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbb{N} : n \geq M \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$$

نکات:

– دنبالهٔ یکنوا و کراندار، همگراست.

– دنبالهٔ همگرا، کراندار است.

– اگر a_n به L همگرا باشد، آنگاه a_{mn+k} نیز همگرا به L است که در آن $m\in\mathbb{N}$, $k\in\mathbb{Z}$

– اگر a_n به L همگرا باشد، آنگاه حد آن یکتاست.

– اگر a_n همگرا باشد آنگاه $a_{n+1}-a_n$ همگرا به صفر است.

دنباله‌های خاص:

۱– دنبالهٔ حسابی: $a_{n+1}-a_n = d \quad ; \quad d:$ مقدار ثابت و قدر نسبت

$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow$ اگر $d>0$ دنباله صعودی اکید و اگر $d<0$ دنباله، نزولی اکید است. در حالت $d=0$ دنباله ثابت است.

۲– دنبالهٔ توانی (هندسی) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q \quad ; \quad q:$ مقدار ثابت و قدر نسبت

$a_n = a_1 q^{n-1}$

اگر $q>1$، دنباله صعودی اکید و اگر $0<q<1$ باشد نزولی اکید است و اگر $q<0$، دنبالهٔ نوسانی است.

اگر $|q|<1$ باشد $\lim q^n = 0$ و اگر $|q|>1$ باشد دنبالهٔ q^n واگراست.

اگر $q=1$ باشد q^n همگرا به یک و اگر $q=-1$ باشد q^n واگراست.

۳– دنبالهٔ $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

این دنباله صعودی اکید و کراندار است (همگراست) و حد آن e است.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \quad , \quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

توجه: دنبالهٔ $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ دنباله‌ای نزولی اکید و همگرا به e است.

۴– دنبالهٔ $\dfrac{n!}{n^n}$

این دنباله، دنباله‌ای نزولی اکید و همگرا به صفر است.

اگر $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$ باشد آنگاه دنبالهٔ $b_n = \dfrac{a_n}{a_{n+1}}$ دنباله‌ای همگرا به e است.

نکته: اگر دنبالهٔ $\{a_n\}$ به گونه‌ای باشد که $\lim \frac{a_{n+۱}}{a_n}$ موجود باشد آنگاه داریم: $\lim \frac{a_{n+۱}}{a_n} = \lim \sqrt[n]{a_n}$

مثال: حد دنبالهٔ $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ را تعیین کنید.

$$\lim \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \lim \frac{\frac{(n+۱)!}{(n+۱)^{n+۱}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim \frac{۱}{\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^n} = \frac{۱}{e}$$

سری‌ها

اگر مجموع n جملهٔ اول دنباله $\{a_n\}$ را با S_n نمایش دهیم داریم: $S_n = a_۱ + a_۲ + \ldots + a_n = \sum_{i=۱}^{n} a_i$

از آنجا دنبالهٔ $\{S_n\}$ تعریف می‌شود که اگر همگرا به S باشد می‌نویسیم $\lim S_n = S$ و یا $\lim \sum_{i=۱}^{n} a_i = S$ و به اختصار می‌نویسیم $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n = S$ و می‌گوئیم سری $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ همگرا به S است. در غیر این صورت می‌گوئیم واگراست.

نکات:

- شرط لازم همگرایی سری $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ آن است که دنبالهٔ a_n همگرا به صفر باشد.

- اگر a_n همگرا به L باشد آنگاه سری $\sum_{n=۱}^{\infty} (a_{n+۱} - a_n)$ همگرا به $L - a_۱$ است.

- اگر $a_n > ۰$, $\lim na_n \neq ۰$ آنگاه سری $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ واگراست.

- اگر $q = \lim \frac{a_{n+۱}}{a_n} = \lim \sqrt[n]{a_n}$ باشد آنگاه به ازای $|q|<۱$ سری $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ همگراست و به ازای $|q|>۱$ سری واگراست و به ازای $|q|=۱$ چیزی نمی‌توان گفت.

- اگر $۰ < a_n < b_n$ و سری $\sum_{n=۱}^{\infty} b_n$ همگرا باشد آنگاه سری $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ همگرا خواهد بود و اگر $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ واگرا باشد، آنگاه سری $\sum_{n=۱}^{\infty} b_n$ نیز واگرا خواهد بود.

- اگر $\sum_{i=۱}^{\infty} a_i = S_n$ باشد خواهیم داشت $\sum_{i=۱}^{n} (a_{i+۱} - a_i) = a_{n+۱} - a_۱ \quad , \quad S_n - S_{n-۱} = a_n$

مثال: حاصل $A = \sum_{n=۱}^{m} \sin nx$ را محاسبه کنید.

حل: طرفین را در $۲\sin\frac{x}{۲}$ ضرب می‌کنیم:

$$\sum_{n=۱}^{m} ۲\sin\frac{x}{۲}\sin nx = \sum_{n=۱}^{m} \cos\frac{۲n-۱}{۲}x - \cos\frac{۲n+۱}{۲}x = \cos\frac{x}{۲} - \cos\frac{۲n+۱}{۲}x = ۲\sin\frac{n}{۲}x\sin\frac{(n+۱)}{۲}x \Rightarrow A = \frac{\sin\frac{nx}{۲}\sin(n+۱)\frac{x}{۲}}{\sin\frac{x}{۲}}$$

سری توانی: سری $S_n=\sum_{n=۱}^{\infty}a^n$ را سری توانی گویند. هرگاه $|a|<۱$، سری همگراست.

$$S_n=\frac{a^{n+۱}-a}{a-۱}\quad\Rightarrow\quad \lim S_n=\frac{a}{۱-a}$$

مثال: حاصل $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۲^n+(-۱)^{n-۱}}{۳^{n+۱}}$ را حساب کنید.

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۲^x+(-۱)^{n-۱}}{۳^{n+۱}}=\frac{۱}{۳}\sum_{n=۱}^{\infty}\left(\frac{۲}{۳}\right)^n-\frac{۱}{۳}\sum_{n=۱}^{\infty}\left(-\frac{۱}{۳}\right)^n=\frac{۱}{۳}\frac{\frac{۲}{۳}}{۱-\frac{۲}{۳}}-\frac{۱}{۳}\frac{-\frac{۱}{۳}}{۱+\frac{۱}{۳}}=\frac{۲}{۳}+\frac{۱}{۱۲}=\frac{۳}{۴}$$

سری همساز یا هارمونیک: سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n}$ را گویند که واگراست.

- سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$: همانطور که گفته شد $\lim \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}=\frac{۱}{e}$ و چون $\left|\frac{۱}{e}\right|<۱$ پس سری فوق همگراست.

انتگرال

دیفرانسیل یک تابع:

در مسایل تخمین یک تابع از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$f(x+\Delta x)\simeq f(x)+f'(x)\Delta x$$

مثال: مقدار تقریبی $\sin ۳۱^\circ$ کدام است؟

$$f(x)=\sin x\ \ ;x=\pi/۶;\ \Delta x=\pi/۱۸۰.$$

$$\sin(x+\Delta x)\simeq\sin x+(\cos x)\Delta x\qquad\Rightarrow\qquad \sin\left(\pi/۶+\pi/۱۸۰\right)\simeq\sin\pi/۶+\cos\pi/۶\times\pi/۱۸۰=۱/۲+\frac{\pi\sqrt{۳}}{۳۶۰}$$

تابع اولیه:

تابع F(x) را تابع اولیه f(x) گوئیم هر گاه داشته باشیم: $F'(x)=f(x)$

نتیجه: F(x)+c نیز تابع اولیه تابع f(x) است در نتیجه: $\int f(x)dx=F(x)+c$

انتگرال‌های مهم:

$$\int x^\alpha dx=\frac{۱}{\alpha+۱}x^{\alpha+۱}+c\qquad;\alpha\neq-۱$$

$$\int\sin\alpha x dx=-\frac{۱}{\alpha}\cos\alpha x+c\ \ ,\int\cos xdx=\frac{۱}{\alpha}\sin\alpha x+c\qquad;\alpha\neq ۰$$

$$\int e^{\alpha x}dx=\frac{۱}{\alpha}e^{\alpha x}+c\qquad;\alpha\neq ۰$$

$$\int\frac{۱}{x}dx=Ln|x|+c$$

$$\int\frac{۱}{a^۲+b^۲x^۲}dx=\frac{۱}{ab}Arctg\frac{bx}{a}+c\qquad;\int\frac{۱}{\sqrt{a^۲-b^۲x^۲}}dx=\frac{۱}{b}Arc\sin\frac{bx}{a}+c$$

انتگرال جزء به جزء: $\int udV=uV-\int Vdu$

$$\int tgx\ dx=Ln|\cos x|+c\qquad;\int e^x(f(x)+f'(x))dx=e^xf(x)+c$$

مثال: حاصل انتگرال $\int x^۴e^xdx$ را حساب کنید.

$$I=\int x^4e^xdx=\int e^x\left(x^4+4x^3-4x^3-12x^2+12x^2+24x-24x-24+24\right)dx$$

$$I=e^x\left(x^4-4x^3+12x^2-24x+24\right)+c$$

تعویض متغیر در انتگرال‌گیری:

در انتگرال معین $I=\int f(x)dx$ اگر به جای x تابعی از y را قرار دهیم داریم:

$$x=g(y)\ \Rightarrow\ dx=g'(y)dy\ \Rightarrow\ I=\int f(x)dx=\int f(g(y))g'(y)dy$$

مثال: حاصل انتگرال مقابل را حساب کنید. $\int\frac{1}{\sqrt{x}(2+x)}dx$

$$x=y^2\ \Rightarrow\ dx=2ydy\ \Rightarrow\ I=\int\frac{1}{y\left(2+y^2\right)}2ydy\quad\Rightarrow\quad I=\int\frac{2}{2+y^2}dy=\sqrt{2}\,\mathrm{Arctg}\sqrt{\frac{x}{2}}+c$$

مثال: حاصل $\int x^x(1+Lnx)dx$ را حساب کنید.

حل: $y=x^x\ \Rightarrow\ dy=x^x(1+Lnx)dx\quad\Rightarrow\quad I=\int dy=y+c=x^x+c$

قضایای انتگرال:

– خطی بودن انتگرال (α,β ثابت) $\quad \int_a^b \alpha f+\beta g=\alpha\int_a^b f+\beta\int_a^b g$

– تفکیک انتگرال $\quad \forall c\in[a.b]\ ;\ \int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f$

– مقدار متوسط $(f(c))$ $\quad \exists c\in[a,b]\ ;\ \int_a^b f=f(c)(b-a)$

– **قضیه اساسی اول انتگرال:** اگر f در [a,b] انتگرال‌پذیر باشد و به ازای a<x<b داشته باشیم: $F(x)=\int_a^x f(x)dx$

در نتیجه با فرض پیوستگی تابع f در x داریم: $F'(x)=f(x)$

قضیه اساسی دوم انتگرال: اگر تابع f در [a,b] انتگرال‌پذیر باشد و تابع F(x) در رابطه زیر صدق کند

$$\forall x\in(a,b)\ ;\ F'(x)=f(x)\quad\Rightarrow\quad\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

مثال: حاصل $I=\int_0^1(2x-1)^n dx$ را حساب کنید.

$$I=\frac{1}{2(n+1)}(2x-1)^{n+1}\Big|_0^1=\frac{1}{2n+2}(1)^{n+1}-\frac{1}{2n+2}(-1)^{n+1}=\frac{1+(-1)^n}{2n+2}$$

قضیه انتگرال تابع معکوس: اگر تابع f در [a,b] صعودی و انتگرال‌پذیر باشد، در این صورت انتگرال تابع معکوس را از رابطه زیر حساب کرد:

$$\int_a^b f(x)dx+\int_{f(a)}^{f(b)}f^{-1}(y)dy=bf(b)-af(a)$$

مثال: حاصل $\int_1^e Lnxdx$ را حساب کنید.

$$\int_1^e Lnxdx+\int_0^1 e^ydy=e\quad\Rightarrow\quad\int_1^e Lnxdx=1$$

* قضیه تقارن در انتگرال معین

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx$$

مثال: حاصل $\int_0^1 x(1-x)^n dx$ را حساب کنید:

$$I=\int_{\circ}^{۱} x(۱-x)^n dx=\int_{\circ}^{۱}(۱-x)x^n dx \Rightarrow I=\int_{\circ}^{۱}\left(x^n-x^{n+۱}\right)dx=\frac{۱}{n+۱}-\frac{۱}{n+۲}$$

- مساحت بین منحنی‌ها

- سطح محصور بین منحنی $y=f(x)$ و $y=g(x)$ در بازه $[a,b]$ از رابطه زیر تعیین می‌شود:

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$

نتیجه: سطح محصور بین منحنی $y=f(x)$ و محور ox دربازه $[a,b]$: $s=\int_a^b |f(x)|dx$

سطح محصور بین منحنی $y=f(x)$ و محور oy در بازه $c\le y\le d$: $s=\int_c^d xdy=\int_c^d f^{-۱}(y)dy$

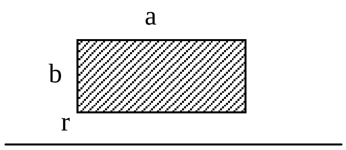
مثال: سطح محصور به منحنی $y=Lnx$ و محور yها وقتی $\circ\le y\le ۱$ را حساب کنید.

$$s=\int_{\circ}^{۱} e^y dy=e-۱$$

- قضیه تخمین انتگرال معین: اگر در هر نقطه x از بازه $[a,b]$ و $\psi(x)\le f(x)\le \varphi(x)$ در نتیجه:

$$\int_a^b \psi(x)dx\le\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b \varphi(x)dx \qquad a<b$$

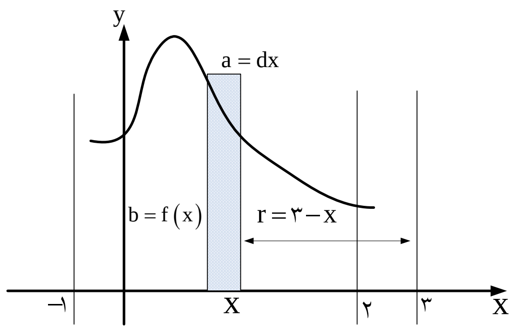
محاسبه حجم حاصل از دوران:



حجم حاصل از دوران مستطیل b,a حول خط به فاصله r:

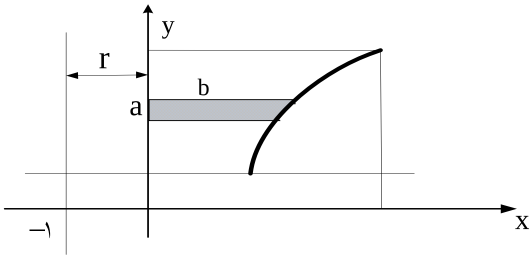
فرمول مهم: $V=\pi a(b+r)^۲-\pi ar^۲=\pi ab(b+۲r)$

مثال: مطلوبست جزء حجم حادث از دوران سطح منحنی $f(x)^+$ با محور ox بین خطوط $x=2, x=-1$ حول خط $x=3$.



$$dv=\pi dx f(x)\left(f(x)+۲(۳-x)\right)=\pi f(x)\left(f(x)-۲x+۶\right)dx$$

مثال: جزء حجم حاصل از دوران منحنی $f(x)=Lnx+x$ و محور oy بین خطوط $y=e+1, y=1$ حول خط $x=-1$ را تعیین کنید.



$$a=dy\ ,\ b=x\ ,\ r=۱$$

$$dV=\pi xdy(x+۲)=\pi\left(۱+\frac{۱}{x}\right)(x+۲)xdx$$

$$V=\int_۱^e \pi(x+۱)(x+۲)dx$$

با استفاده از روش فوق می‌توان اثبات کرد حجم حادث از دوران سطح محصور بین دو منحنی g,f در بازه $[a,b]$ حول خط $x=c$ برابر است با:

$$V=\int_a^b ۲\pi|x-c||f(x)-g(x)|dx$$

قضیه: حجم حادث از دوران سطح بسته به مساحت s حول خطی که فاصله مرکز ثقل سطح از آن d باشد برابر است با $V=۲\pi sd$

قضیه تعمیم انتگرال معین

اگر تابع f در فاصله b(x), a(x) پیوسته باشد و b(x), a(x) نیز مشتق‌پذیر باشند و داشته باشیم $G(x)=\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt$ آنگاه خواهیم داشت: $G'(x)=b'(x)f(b(x))-a'(x)f(a(x))$

مثال: اگر $G(x)=\int_{x^۲}^{\cos x}\frac{\cos t}{۱+t^۲}dt$ باشد $G'(x)$ کدام است؟

حل

$$G'(x)=\sin x\frac{\cos(\cos x)}{۱+\cos^۲ x}-۲x\frac{\cos x}{۱+x^۴}$$

چند نکته:

$f(x)$ تابع زوج $\Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)dx=۲\int_{۰}^{a} f(x)dx$

$f(x)$ تابع فرد $\Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)dx=۰$

$f(x)$ تابع متناوب با دوره تناوب T $\Rightarrow \int_{a}^{at+nT} f(x)dx=n\int_{۰}^{T} f(x)dx$

آزمون انتگرال در سری‌ها:

$$\int_{۱}^{\infty} f(x)dx \le \sum_{n=۱}^{\infty} a_n \le a_۱+\int_{۱}^{\infty} f(x)dx$$

یعنی شرط همگرایی $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ آن است که $\int_{۱}^{\infty} f(x)dx$ همگرا باشد و یا کراندار باشد.

مثال: سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۲}$ با توجه به نکته بالا همگراست و مقدار آن بین ۱ و ۲ است زیرا:

$$\int_{۱}^{\infty}\frac{۱}{x^۲}dx=\left(-\frac{۱}{x}\right)\Big|_{۱}^{\infty}=۱\ ,\quad a_۱=۱$$

- قضیه انتگرال ریمان:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\sum_{i=a_n}^{b_n} f\left(\frac{i}{n}\right)=\int_{a}^{b} f(x)dx\ ;\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=a\quad ,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}=b$$

مثال: مطلوبست محاسبه حد $A=\lim_{n\to\infty}\left(\mathrm{Arctg}\frac{۱}{n^۲}+\mathrm{Arctg}\frac{۲}{n^۲}+\cdots+\mathrm{Arctg}\frac{n-۱}{n^۲}\right)$

$$A=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=۱}^{n-۱}\mathrm{Arctg}\frac{i}{n^۲}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=۱}^{n-۱}\frac{i}{n^۲}=\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n-۱}\frac{i}{n}=\int_{۰}^{۱}xdx=\frac{۱}{۲}$$

نمونه سؤالات:

۱- اگر f(x)= sinx باشد سری $\sum_{n=۱}^{۱۰۰} f(n)$ کدام است؟

۱) $\frac{\sin ۵۰\ \sin ۵۰/۵}{\sin ۰/۵}$ ۲) $\frac{\sin ۵۰\ \sin ۴۹/۵}{\sin ۰/۵}$ ۳) sin50 ٤) 2sin50

۲- اگر مقدار c در قضیه مقدار میانگین برای تابع زیر در بازه داده شده باشد $e^{c^{۲}-c}$ کدام است؟

$$f(x)=\int_{x}^{x^{۲}}\frac{e^{t}}{۱+t}dt \quad ۰\le x\le ۱$$

۱) $\frac{۱+c^{۲}}{۱+c}$ ۲) $\frac{۱+c^{۲}}{c+c^{۲}}$

۳) $\frac{۱+c^{۲}}{۲c+c^{۲}}$ ۴) $\frac{۱+c^{۲}}{۲c+۲c^{۲}}$

۳- حاصل $\int_{۰}^{۱}\frac{dx}{x^{۰/۹۹۲}}$ کدام است؟

۱) ۸۰ ۲) 3Ln2 ۳) ۱ ۴) ۱۲۵

۴- مساحت سطح حاصل از دوران منحنی $y=\frac{۲}{۳}x\sqrt{x}$ وقتی $۰\le x\le ۳$ حول محور oy کدام است؟

۱) $\frac{۱۱۶\pi}{۱۵}$ ۲) $\frac{۱۶۶\pi}{۱۵}$ ۳) ۱۲π ۴) $\frac{۲۳۲\pi}{۱۵}$

۵- طول نقطه عطف منحنی $(x+۱)e^{-x^{۲}}$ کدام است؟

۱) x=0 ۲) x= 1 ۳) x= -1 ۴) x= 2

۶- شعاع همگرایی سری $\sum_{n=۱}^{\infty}C_n(x-۱)^{۲n}$ برابر ٤ است. حاصل $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{c_n}+\frac{c_n}{c_n+۱}$ کدام است؟

۱) ٤ ۲) ۲/۵ ۳) ٤/۲۵ ۴) $\frac{۲۵۷}{۱۶}$

۷- اگر $f(x)=\int_{۰}^{x}\sqrt{۱+f(t)}dt$ باشد f(1) کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۵}{۴}$ ۴) $\frac{۹}{۴}$

۸- حاصل $\int_{۰}^{\infty}\frac{e^{-۲x}-e^{-x}}{x}dx$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) −۱ ۳) Ln2 ۴) –Ln2

۹- تابع f در شرط $f(x)=\int_{۰}^{x}\frac{\sqrt{f(t)}}{\cos^{۲}t}dt$ صدق می‌کند. کدام صحیح است؟

۱) f در $\mathbb{R}$ پیوسته است ۲) f در $\mathbb{R}$ صعودی اکید است

۳) خط x= 0 عمود بر y= f(x) است ۴) $f\left(\frac{\pi}{٤}\right)=۱$

۱۰- سری $\sum_{n=۱}^{\infty}(۱-\cos x)^{n}$ همگرا به f(x) است حاصل $f'\left(\frac{\pi}{۶}\right)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $-\frac{۲}{۳}$

حل نمونه سؤالات:

۱- گزینه ۱ صحیح است.

$$A=\sum_{n=۱}^{۱۰۰}\sin n=\frac{۱}{۲\sin(۰/۵)}\sum_{n=۱}^{۱۰۰}۲\sin n\sin(۰/۵)=\frac{۱}{۲\sin(۰/۵)}\sum_{n=۱}^{۱۰۰}\cos(n-۰/۵)-\cos(n+۰/۵)$$

$$\Rightarrow A=\frac{۱}{۲\sin(۰/۵)}\left(\cos(۰/۵)-\cos(۱۰۰/۵)\right)=\frac{\sin ۵۰\ \sin ۵۰/۵}{\sin(۰/۵)}$$

۲- گزینه ٤ صحیح است.
$$f(0)=f(1)=0 \Rightarrow \exists c\in(0,1):\quad 2c\frac{e^{c^2}}{1+c^2}-\frac{e^c}{1+c}=0 \quad\Rightarrow\quad e^{c^2-c}=\frac{1+c^2}{2c+2c^2}$$

۳- گزینه ٤ صحیح است.
$$I=\int_0^1 x^{-0.992}dx=\frac{1}{1-0.992}x^{1-0.992}\Big|_0^1=\frac{1}{0.008}=125$$

٤- گزینه ٤ صحیح است.
$$ds=2\pi x\sqrt{dx^2+dy^2} \quad\Rightarrow\quad s=\int_0^3 2\pi x\sqrt{1+x}\,dx \quad\Rightarrow\quad s=2\pi\int_0^3 (x+1-1)(x+1)^{\frac{1}{2}}dx$$
$$\Rightarrow\ s=2\pi\left[\frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3=\frac{232}{15}\pi$$

۵- گزینه ۲ صحیح است.
$$y'=e^{-x^2}\left(1-2x(x+1)\right) \ \Rightarrow\ y''=e^{-x^2}\left[-4x-3-2x\left(1-2x^2-2x\right)\right]=0$$
$$\Rightarrow\ 4x^3-2x-2=0\ \Rightarrow\ x=1$$

٦- گزینه ٤ صحیح است.
$$L=\lim\sqrt[n]{c_n}\,(x-1)^2<1 \Rightarrow |x-1|<4 \Rightarrow \lim\sqrt[n]{c_n}=\frac{1}{16}$$
$$L=\lim\frac{c_n+1}{c_n}(x-1)^2<1 \Rightarrow \lim\frac{c_{n+1}}{c_n}=\frac{1}{16} \Rightarrow \lim\frac{c_n}{c_{n+1}}=16$$

۷- گزینه ۳ صحیح است.
$$f'(x)=\sqrt{1+f(x)}\quad ,f(0)=\int_0^0=0$$
$$\Rightarrow\ \int\frac{f'(x)}{\sqrt{1+f(x)}}dx=\int 1dx\ \Rightarrow\ 2\sqrt{1+f(x)}=x+c\Rightarrow f(x)=\left(\frac{x+2}{2}\right)^2-1 \quad\Rightarrow\quad f(1)=\frac{5}{4}$$

۸- گزینه ٤ صحیح است.
$$I=\int_0^\infty\frac{e^{-2x}-e^{-x}}{x}dx=\int_0^\infty\int_1^2 -e^{-yx}dydx\ \Rightarrow I=\int_1^2\int_0^\infty -e^{-yx}dxdy=\int_1^2\frac{1}{y}e^{-yx}\Big|_0^\infty dy=-\mathrm{Ln}2$$

در آزمون‌های بعد بیشتر توضیح داده خواهد شد.

۹- گزینه ۳ صحیح است.
$$f'(x)=\frac{\sqrt{f(x)}}{\cos^2 x}\quad ;\quad f(0)=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx=\frac{1}{\cos^2 x}dx$$

خط قائم بر منحنی:
$$\Rightarrow\ 2\sqrt{f(x)}=\mathrm{tg}x+c \quad\Rightarrow\quad f(x)=\frac{1}{4}\mathrm{tg}^2x \quad\Rightarrow\quad f'(0)=0 \quad\Rightarrow\quad x=0$$

۱۰- گزینه ۳ صحیح است.
$$f(x)=\frac{1-\cos x}{\cos x}=\frac{1}{\cos x}-1 \quad,\quad \cos x>0 \quad\Rightarrow\quad f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sin x}{\cos^2 x}\Big|_{\frac{\pi}{6}}=\frac{2}{3}$$

ریاضی ۱ و ۲

معادله منحنی‌ها در $\mathbb{R}^{۲}$

۱- مقاطع مخروطی:

$f(x,y)=ax^{۲}+bxy+cy^{۲}+dx+ey+f=۰$

مبین این معادله به صورت $\Delta=b^{۲}-۴ac$ است, اگر $\Delta<۰$ منحنی بیضی است, اگر $\Delta=۰$ منحنی سهمی است و اگر $\Delta>۰$ منحنی هذلولی است. معادلات منحنی به صورت زیر خلاصه می شود:

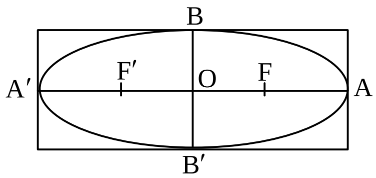
۱٫۱) دایره: حالت خاص بیضی, دایره است؛ ($O(\alpha,\beta)$ مرکز دایره و R شعاع)

$$(x-\alpha)^{۲}+(y-\beta)^{۲}=R^{۲}$$

$$x^{۲}+y^{۲}+ax+by+c=۰ \;\Rightarrow\; R=\sqrt{\frac{a^{۲}}{۴}+\frac{b^{۲}}{۴}-c}\;,\; O\left(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲}\right)$$

۱٫۲) بیضی: مکان هندسی نقاطی که مجموع فواصل آنها از دو نقطه ثابت به نام کانون برابر مقدار ثابت ۲a باشد.

$$c=a^{۲}-b^{۲}\quad,\quad b=\frac{۱}{۲}BB'\quad,\quad a=\frac{۱}{۲}AA'$$



$\pi ab=$ مساحت و فاصله کانونی: $FF'=۲c$

$\frac{(x-\alpha)^{۲}}{a^{۲}}+\frac{(y-\beta)^{۲}}{b^{۲}}=۱$: معادله بیضی که قطر بزرگ آن موازی محور ox است.

۱٫۳) سهمی: مکان هندسی نقاطی که فاصله آن از نقطه ثابتی به نام کانون و خط ثابتی به نام خط هادی برابر باشد. معادله سهمی به کانون $F\left(\frac{p}{۲},۰\right)$ و خط هادی $x=\frac{-p}{۲}$ به صورت روبرو به دست می آید: $y^{۲}=۲px$.

در حالت کلی ($\frac{p}{۲}$ فاصله کانون تا خط هادی, $S(\alpha,\beta)$ راس سهمی افقی): $(y-\beta)^{۲}=۲p(x-\alpha)$

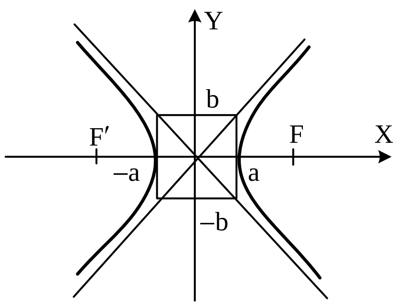
۱٫۴) هذلولی: مکان هندسی نقاطی از صفحه که تفاضل فواصل آنها از دو نقطه ثابت به نام کانون مقدار ثابت ۲a باشد. معادله هذلولی به مرکز $O'(\alpha,\beta)$ و فاصله کانونی $ff'=۲c$ که محور کانونی موازی محور ox باشد به صورت زیر است:

$$\frac{(x-\alpha)^{۲}}{a^{۲}}-\frac{(y-\beta)^{۲}}{b^{۲}}=۱$$

که در آن $c^{۲}=a^{۲}+b^{۲}$

این هذلولی دارای دو مجانب مایل به معادله های زیر است:

$$\frac{y-\beta}{b}=\pm\frac{x-\alpha}{a}$$



نکته: خروج از مرکز هذلولی: $e=\frac{c}{a}$

۲- معادلات پارامتری منحنی‌ها

اگر مختصات نقطه $M(x,y)$ هر یک تابع یک یا چند پارامتر باشد معادله را پارامتری گوئیم.

برای حالت یک پارامتری داریم: $x=X(t)\quad,\quad y=Y(t)\quad,\quad t\in\mathbb{R}$

نکته: ضریب زاویه خط مماس بر منحنی و تقعر منحنی:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=z(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{d^{2}y}{dx^{2}}=\frac{z'(t)}{x'(t)}$$

معادله پارامتری دایره:

$$\begin{cases} x=\alpha+R\cos\theta \\ y=\beta+R\sin\theta \end{cases} \quad ; \quad 0\le\theta\le 2\pi \quad \text{یا} \quad -\pi\le\theta\le\pi$$

معادله پارامتری بیضی:

$$\begin{cases} x=\alpha+a\cos\theta \\ y=\beta+b\sin\theta \end{cases} \quad ; \quad 0\le\theta\le 2\pi \quad \text{یا} \quad -\pi\le\theta\le\pi$$

معادله منحنی ها در $\mathbb{R}^{3}$

معادله یک منحنی در $\mathbb{R}^{3}$ به صورت روبه رو خواهد بود: $x=X(t)\ ;\ \ y=Y(t)\ ;\ \ z=Z(t)$

این منحنی می تواند از برخورد سطوح مختلف در فضا ایجاد شود.

مثال: منحنی روبرو چیست؟

$C: x=2+\cos t \quad ; \quad y=-1+\sin t \quad ; \quad z=5$

حل: $(x-2)^{2}+(y+1)^{2}=\sin^{2}t+\cos^{2}t=1 \quad ; \quad z=5$

منحنی c از برخورد استوانه موازی محور oz و صفحه عمود بر oz به دست می آید که دایره ای است با مرکز (۵ و ۱- و ۲) و شعاع یک.

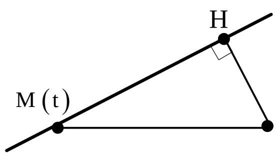
معادله خط مستقیم در R_{3}

معادله پارامتری خط: $D: x=pt+x_0 \quad , \quad y=qt+y_0 \quad , \quad z=rt+z_0$

که در آن (x_0,y_0,z_0) یک نقطه از خط و $\vec{L}=(p,q,r)$ بردار موازی خط است (بردار هادی خط)

معادله کانونیک خط : $D:\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r}$ ؛ شرط: $pqr\neq 0$

نقطه متغیر M را با $M(t)$ نمایش داده و داریم $M(t)=(pt+x_0,qt+y_0,rt+z_0)$، اگر نقطه $A(x_1,y_1,z_1)$ خارج خط D یا روی آن باشد برای تعیین تصویر A نسبت به خط D و یا فاصله A تا خط D به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:



۱) ابتدا $\overrightarrow{AM(t)}$ را تشکیل می‌دهیم: $\overrightarrow{AM(t)}=(pt+x_0-x_1,qt+y_0-y_1,rt+z_0-z_1)$

۲) $\overrightarrow{AM(t)}\perp\vec{L}$ قرار می‌دهیم (یعنی $\vec{L}.\overrightarrow{AM(t)}=0$). با توجه به شکل t_H به دست می‌آید.

$H=M(t_H)$

نکته: در معادله خط، اگر $r=0$ باشد خط بر محور OZ عمود است و داریم $z=z_0$؛ به همین ترتیب برای سایر پارامترها.

نکته: برای محاسبهٔ مختصات نقطه قرینه نقطه A نسبت به خط D پس از محاسبه نقطه H از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

$x_{A'}=2x_H-x_A \quad , \quad y_{A'}=2y_H-y_A \quad , \quad z_{A'}=2z_H-z_A$

معادله خط مماس بر منحنی C در فضا

اگر منحنی C به معادله پارامتری $(x=X(t)\quad;\quad y=Y(t)\ ;\ z=Z(t))$ در فضا باشد، امتداد خط مماس بر منحنی فوق به صورت $\vec{V}=\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt},\frac{dz}{dt}\right)$ می‌باشد. در نتیجه معادله خط مماس در هر نقطه به دست می‌آید.

مثال: معادله خط مماس بر منحنی روبرو در $t=\frac{\pi}{2}$ کدام است؟ $C: x=\cos 3t\ ;\ y=-t+1\ ;\ z=2\sin t$

حل: $\vec{V}_1=(-3\sin 3t\ ,-1\ ,2\cos t)=(3,-1,0)\quad\Rightarrow\quad D: x=3t\ ; y=-t+\frac{\pi}{2}-1\ ; z=2$

طول قوس منحنی در فضا

جزء طول قوس منحنی عبارتست از: $ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}$

اگر x و y و z به صورت پارامتری از t داده شود ds بر حسب dt محاسبه می‌شود: $ds=\sqrt{x'(t)+y'(t)+z'(t)}dt$

طول قوس منحننی C از $t=t_1$ تا $t=t_2$ از رابطه روبروست می‌آید: $S=\int_{t_1}^{t_2} ds$

نکته: اگر طول قوس منحنی $y=f(x)$ را از x_1 تا x_2 بخواهیم می‌توانیم از رابطهٔ روبرو استفاده کنیم: $S=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+y'^2}dx$

مثال: طول قوس منحنی C به معادله روبرو را تعیین کنید: $C: x=y^2-Lny\quad;\quad z=\sqrt{7}y$

حل: $ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+1+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}dy=\sqrt{(2y-\frac{1}{y})^2+1+7}=\left|2y+\frac{1}{y}\right|$

$$\Rightarrow s=\int_1^e(2y+\frac{1}{y})dy=y^2+\ln y\Big|_1^e=e^2$$

انحنا و شعاع انحنای منحنی

جهت محاسبهٔ انحنا و تاب منحنی ابتدا به تعریف چند متغیر می‌پردازیم:

هرگاه ذره‌ای روی منحنی C به معادله $\overrightarrow{r(t)}=r_1(t)\hat{i}+r_2(t)\hat{j}+r_3(t)\hat{k}$ حرکت کند در هر زمان t، بردارهای سرعت و شتاب لحظه‌ای عبارتند از: $\vec{v}(t)=\vec{r_1'}(t)\hat{i}+r_2'(t)\hat{j}+r_3'(t)\hat{k}\qquad,\qquad \vec{a}(t)=\vec{r''}(t)\hat{i}+r_2''(t)\hat{j}+r_3''(t)\hat{k}$

مقدار سرعت و شتاب نیز از طول بردارهای آنان به دست می‌آید.

- بردار یکانی مماس بر منحنی C در نقطهٔ p به صورت روبرو تعریف می‌شود: $\vec{T}(t)=\frac{\vec{r'}(t)}{|\vec{r'}(t)|}$
- بردار یکانی عمودی اصلی یا قائم یکانی اول را به صورت روبرو تعریف می‌کنیم: $\vec{N}(t)=\frac{\vec{T}'(t)}{|\vec{T}'(t)|}$
- بردار قائم یکانی دوم نیز به صورت روبرو به دست می‌آید: $\vec{B}=\vec{T}\times\vec{N}$
- برای منحنی $y=f(x)$ که در صفحه تعریف شده است، انحنا از رابطه روبرو به دست می‌آید: $k(x)=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$

- برای منحنی $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ که در صفحه تعریف شده است، انحناء به صورت روبرو محاسبه می‌شود.
$$k(t) = \frac{|x'y'' - x''y'|}{\left(x'^{2} + y'^{2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

- برای منحنی $\vec{r}(t)$ که در فضا تعریف شده انحناء هر نقطه از رابطه روبرو محاسبه می‌شود:
$$k(t) = \frac{|r'(t) \times r''(t)|}{|r'(t)|^{3}}$$

- عکس انحنا در هر نقطه را شعاع انحنا یا اصطلاحاً شعاع دایره بوسان گویند.

رویه‌های خاص در فضای $\mathbb{R}^{3}$

۱) معادله صفحه

بردار $\vec{N}$ را نرمال صفحه P (عمود بر آن) گویند اگر داشته باشیم:
$$P: a(x - x_{0}) + b(y - y_{0}) + c(z - z_{0}) = 0$$
$\vec{N} = (a,b,c)$ و (x_{0}, y_{0}, z_{0}) یک نقطه روی صفحه

برای تعیین وضعیت دو صفحه نسبت به هم از رابطه روبرو استفاده می‌کنیم:

$p: \vec{N}$ و نرمال $p': \vec{N}'$ نرمال $\Rightarrow$ $\vec{N}.\vec{N}' = |\vec{N}||\vec{N}'|\cos\theta$ و θ زاویه بین دو صفحه

برای تعیین وضعیت خط و صفحه نیز از ضرب داخلی $\vec{N}$ (بردار نرمال صفحه) و $\vec{L}$ (بردار هادی خط) استفاده می‌کنیم که زاویه به دست آمده مکمل زاویه خط و صفحه است.

نکته: اگر نقطه $A(x_{1}, y_{2}, z_{1})$ خارج یا روی صفحه p به معادله $p(x,y,z) = ax + by + cz + d = 0$ باشد، برای تعیین تصویر نقطه A روی صفحه p، ابتدا خطی عمود بر صفحه p از نقطه A می‌گذرانیم و سپس نقطه تلاقی خط فوق با صفحه p را تعیین می‌کنیم. یعنی:

$$D: x = at + x_{1} \quad , \quad y = bt + y_{1} \ , \ z = ct + z_{1}$$
$$\Rightarrow a(at + x_{1}) + b(bt + y_{1}) + c(ct + z_{1}) + d = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{H} = -\frac{ax_{1} + by_{1} + cz_{1} + d}{a^{2} + b^{2} + c^{2}} = \frac{-p(A)}{N^{2}}$$
$$\Rightarrow H = (at_{H} + x_{1}, bt_{H} + y_{1}, ct_{H} + z_{1})$$

از روی H می‌توان تصویر A را نسبت به صفحه p نیز پیدا کرد.

فاصله نقطه A از صفحه p نیز برابر $|\overrightarrow{AH}|$ است و داریم:
$$|\overrightarrow{AH}| = \frac{|ax_{1} + by_{1} + cz_{1} + d|}{\sqrt{a^{2} + b^{2} + c^{2}}}$$

معادله دسته صفحه: اگر $p_{1} = 0$ و $p_{2} = 0$ دو صفحه متقاطع باشند آنگاه معادله هم صفحه‌های دسته صفحه متقاطع به صورت زیر خواهد بود:
$$P: \alpha p_{1} + \beta p_{2} = 0$$
که در آن α و β پارامترهای نامعلومی هستند که با شرایط مساله تعیین می‌گردند به ازای $\alpha = 0$ صفحه p_{2} و به ازای $\beta = 0$ صفحه p_{1} را خواهیم داشت.

مثال: معادله صفحه‌ای را بنویسید که شامل خط D بوده و با خط به معادله $x = y = 2z$ نیز موازی باشد.

حل:
$$D: x = 2t - 1 \ ; \ y = -t \ ; \ z = t + 2$$
$$D: x = -2y - 1 \ ; \ z = -y + 2 \quad \Rightarrow \quad D: x + 2y + 1 = 0 \ ; \ y + z - 2 = 0$$
$$P: \alpha(x + 2y + 1) + \beta(y + z - 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad P: \alpha x + (2\alpha + \beta)y + \beta z + \alpha - 2\beta = 0 \ ; \ \vec{L}' = (2,2,1)$$
$$\Rightarrow \quad \vec{N}_{p}.\vec{L}' = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\alpha + 2(2\alpha + \beta) + \beta = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta = -2\alpha \quad \Rightarrow \quad p: x - 2z + 5 = 0$$

نکته: برای محاسبهٔ طول عمود مشترک دو خط متنافر D و D' ابتدا صفحه شامل خط D و موازی D' را به دست می‌آوریم (بر حسب α و β) سپس فاصلهٔ D' را از صفحه فوق تعیین می‌کنیم. (فاصله هر نقطه D' از صفحه فوق مقدار ثابتی است)

نکته: برای محاسبه معادله عمود مشترک دو خط متنافر D و D'، ابتدا D را بر حسب متغیر t و D' را بر حسب t' می‌نویسیم و نقاط $M(t)$ و $M'(t')$ را روی آنها تعیین می‌کنیم سپس از روابط $\vec{L}.\overrightarrow{MM'}=0$ و $\vec{L'}.\overrightarrow{MM'}=0$، t و t' و $\overrightarrow{MM'}$ را می‌یابیم.

۲) بیضیگون

یک بیضگون استاندارد به مرکز $O(\alpha,\beta,\gamma)$ دارای معادله‌ای به صورت روبرو می‌باشد:

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}+\frac{(z-\gamma)^2}{c^2}=1$$

منحنی حاصل از تلاقی بیضیگون با صفحه‌های موازی صفحه مختصات، یک بیضی است. به طور مثال، صفحه $z=\gamma$ منحنی تلاقی یک بیضی به معادله روبه رو خواهد بود.

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-B)^2}{b^2}=1\ ,\ z=\gamma$$

حالت خاص بیضیگون، کره است و حالتی است که $a=b=c=R$ باشد.

۳) سهمیگون

سهمیگون یک سطح از یک طرف بسته و از یک طرف باز است. معادله یک سهمیگون استاندارد که محور کانونی آن موازی محور oz و رأس آن $S(\alpha,\beta,\gamma)$ باشد به صورت روبروست:

$$z-\gamma=\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}$$

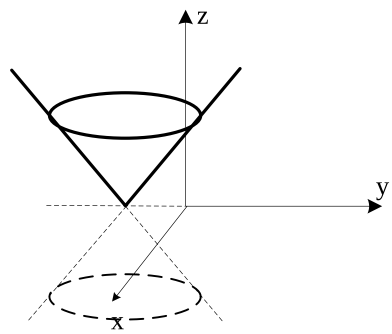
دامنهٔ تغییرات z مقادیر $z\geq\gamma$ است و هر صفحه $z=z_0>\gamma$ نیز سهمیگون را در یک بیضی قطع می‌کند. اگر $a=b$ باشد سهمیگون را دوار گویند.

۴) هذلولیگون

هذلولیگون یک منحنی از دو سو باز است. معادله یک هذلولیگون استاندارد به طوری که محور کانونی آن موازی محور oz باشد به صورت زیر است:

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}-\frac{(z-\gamma)^2}{c^2}=1$$

که در آن $O(\alpha,\beta,\gamma)$ مرکز هذلولیگون است. بدیهی است صفحه موازی محور oz هذلولیگون را در یک هذلولی قطع می‌کند و همچنین صفحه‌های عمود بر oz نیز هذلولی را در یک بیضی قطع می‌کنند.



۵) مخروط بیضوی

مخروط بیضوی به راس $S(\alpha,\beta,\gamma)$ به معادله زیر می‌باشد.

به طوری که محور تقارن آن موازی محور oz باشد.

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}-\frac{(z-\gamma)^2}{c^2}=0$$

صفحه‌های موازی xoy و یا $z=z_0$ مخروط را در یک بیضی قطع می‌کنند. اگر $a=b$ باشد مخروط را دوار گویند. صفحات $y=y_0$ و $x=x_0$ مخروط را در یک هذلولی قطع می‌کنند.

خط قائم بر یک رویه و صفحه مماس بر رویه

اگر $f(x,y,z)$ یک تابع اسکالر باشد گرادیان تابع f برداری در $\mathbb{R}^3$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\vec{\nabla}f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

بردار گرادیان یک تابع اسکالر بر رویه مربوط به آن تابع در نقطه مورد نظر، عمود است. بنابراین بردار نرمال صفحه مماس در هر نقطه قابل محاسبه است (یا بردار هادی هر خط عمود در نقطه مورد نظر)

مشتق سویی یک تابع

به فرض تابع اسکالر $w=f(x,y,z)$ و یا $w=f(x,y)$ به ترتیب در $\mathbb{R}^{3}$ و $\mathbb{R}^{2}$ تعریف شده باشند، مشتق سویی یا جهتی تابع f در امتداد بردار $\vec{b}$ در نقطه $M(x_{\circ},y_{\circ},z_{\circ})$ به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial f}{\partial s}=\vec{\nabla}f.\frac{\vec{b}}{b}=\vec{\nabla}f.\vec{e}_{b}$$

مقدار $\frac{\partial f}{\partial s}$ در واقع آهنگ تغییرات تابع f در نقطه M و در جهت $\vec{b}$ است. بدیهی است مشتق جهتی f در هر نقطه در جهت گرادیان، ماکزیمم مقدار خود را دارد و در جهت عکس گرادیان مینیمم مقدار دارد.

حد و پیوستگی توابع چند متغیره و اسکالر

تابع $W=f(x,y,z)$ و یا $w=f(x,y)$ را در نقطه $M_{\circ}$ دارای حد گوئیم هرگاه

$$\forall\varepsilon>\circ\ \exists\delta>\circ\quad \circ<|\vec{r}-\vec{r}_{\circ}|<\delta\quad\Rightarrow\quad |f-l|<\varepsilon$$

$\circ<|\vec{r}-\vec{r}_{\circ}|<\delta$ در $\mathbb{R}^{3}$ درون کره به مرکز $M_{\circ}$ و شعاع δ است که خود $M_{\circ}$ را شامل نیست. در $\mathbb{R}^{2}$ نیز دایره‌ای است که این ویژگی را دارد.

برای بررسی وجود یا عدم حد بهترین راه استفاده از مختصات استوانه‌ای و کروی است. روش دیگر ثابت نگه داشتن دو پارامتر و متغیر دانستن یک پارامتر است.

مثال: حد تابع $f(x,y,z)=\dfrac{e^{xy}-e^{y}}{zx-z}$ در نقطه (۲و۲-و ۱) کدام است؟

$$\lim_{(x,y,z)\to(۱,-۲,۲)} f=\lim\frac{e^{-۲x}-e^{-۲}}{۲x-۲}=\frac{۱}{۲e^{۲}}\lim_{x\to ۱}\frac{e^{-۲(x-۱)}-۱}{x-۱}=\frac{-۱}{e^{۲}}$$

بهینه سازی توابع اسکالر چند متغیره

فرض کنیم تابع اسکالر $f:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ با ضابطه $y=f(x)$ داده شده باشد. گرادیان f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\vec{\nabla}f=\frac{\partial f}{\partial x}=\left(\frac{\partial f}{\partial x_{۱}},\frac{\partial f}{\partial x_{۲}},...,\frac{\partial f}{\partial x_{n}}\right)\in\mathbb{R}^{n}$$

نقطه $x^{*}\in\mathbb{R}^{n}$ را نقطه بحرانی تابع گوئیم هرگاه $\frac{\partial f}{\partial x^{*}}=\circ$ باشد. (با شرط وجود مشتقات جزئی)

مثال: نقاط بحرانی تابع $f(x,y)=x^{۳}-۳xy^{۲}+۶y$ را تعیین کنید.

حل: $\vec{\nabla}f=(۳x^{۲}-۳y^{۲}\ ,\ -۶xy+۶)=(\circ,\circ)\ \Rightarrow\ x^{۲}=y^{۲}\ ,\ xy=۱\Rightarrow$ نقاط بحرانی $(-۱,-۱)\ ,\ (۱,۱)$

ماتریس هسین

اگر $f:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ با ضابطه $y=f(x)$ یک تابع اسکالر مشتق‌پذیر از مرتبه دوم نسبت به همه مولفه‌های x باشد، ماتریس هسین به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H(f)=\left[\frac{\partial^{۲}f}{\partial x_{i}\partial x_{j}}\right]_{n\times n}$$

قضیه اکسترمم‌های نسبی تابع چند متغیره

اگر $f:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ با ضابطه $y=f(x)$ دارای مشتقات دوم جزئی پیوسته نسبت به مؤلفه‌های x ونقطه x^{*} یک نقطه بحرانی f باشد به طوری که داشته باشیم: $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x^{*}}=\circ$ در نتیجه نقطه x^{*} ممکن است یکی از حالت‌های زیر باشد:

www.ie-jozve.blogfa.com ie.jozve@yahoo.com

۱) ماکزیمم نسبی: اگر ماتریس هسین $H(f)$ به ازای $x=x^*$ منفی معین باشد نقطه x^* ماکزیمم نسبی برای $y=f(x)$ است.

۲) مینیمم نسبی: اگر ماتریس هسین $H(f)$ به ازای $x=x^*$ مثبت معین باشد نقطه x^* مینیمم نسبی برای $y=f(x)$ است.

۳) نقطه زین اسبی: اگر ماتریس هسین $H(f)$ به ازای $x=x^*$ نامعین باشد نقطه زین اسبی برای $y=f(x)$ است.

نکته: ماتریس A مثبت معین است هرگاه $x'Ax \geq 0$ (برای هر x). از ویژگی‌های ماتریس معین، مثبت بودن همه مقادیر ویژه آن و مثبت بودن مجموع درایه‌های آن می‌باشد. ماتریس منفی معین هم حالت بالعکس دارد. مثبت یا منفی بودن ماتریس هسین را از مقادیر ویژه آن در می‌یابیم.

مثال: اکسترمم‌های نسبی تابع روبرو را تعیین کنید: $f(x,y)=x^2+4y^2-2xy+x-4y$

حل: $\vec{\nabla} f=(2x-2y+1, 8y-2x-4) \Rightarrow (x,y)^*=\left(0,\frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow H(f)=\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow$ مثبت معین $\Rightarrow$ مینیمم نسبی $\left(0,\frac{1}{2}\right)$

نمونه سوالات:

۱- منحنی C به معادله $z=t$ و $y=\sin t$ و $x=\cos t$ مفروض است. کوتاهترین فاصله مبداء مختصات از خط مماس بر منحنی C در نقطه $(-1,0,\pi)$ کدام است؟

۱) $\sqrt{1+\pi^2}$ ۲) $\sqrt{2+\pi^2}$ ۳) $\sqrt{2+2\pi^2}$ ٤) $\sqrt{1+\frac{\pi^2}{2}}$

۲- معادله صفحه مماس بر رویه $z=x^2y+xy-\frac{y}{x+1}$ در نقطه (۳ و ۲ و ۱) کدام است؟

۱) $13x+3y-2z=13$ ۲) $13x-3y-2z=1$ ۳) $13x-3y+2z=13$ ٤) $13x+3y+2z=25$

۳- شعاع انحنای منحنی پارامتری C به معادله زیر در $t=0$ کدام است؟

$x=t \; ; \; y=\sin 2t \; ; \; z=\cos^2 t$

۱) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ۲) $\frac{5}{2}$ ۳) $\sqrt{5}$ ٤) $5\sqrt{5}$

٤- محیط منحنی بسته $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x^2+y^2+z^2=4 \end{cases}$ کدام است؟

۱) π ۲) 2π ۳) $\frac{3\pi}{4}$ ٤) $\frac{2\pi}{3}$

٥- طول قوس منحنی C به معادله پارامتری زیر وقتی $0 \leq t \leq 1$ کدام است؟

$C: x=\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) \; ; \; y=\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \; ; \; 2=\log_e \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$

۱) $\frac{\pi}{4}\ln 2$ ۲) $\frac{\pi}{2}\ln 2$ ۳) $\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$ ٤) $\frac{\pi}{4}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$

٦- اگر $f(x,y)=x^2y-y^2-x^3+xy$ باشد نقطه $(0,0)$ برای f چه نقطه‌ای است؟

۱) مینیمم نسبی ۲) ماکزیمم نسبی ۳) نقطه زینی ٤) نقطه غیر بحرانی

۷- صفحه مماس بر رویه $2x^2+y^4+z^2-4z=0$ در نقطه $p(1,1,1)$ با محور oy چه زاویه‌ای می‌سازد؟

۱) $\operatorname{Arcsin}\frac{1}{3}$ ۲) $\operatorname{Arccos}\frac{1}{3}$ ۳) $\operatorname{Arcsin}\frac{2}{3}$ ٤) $\operatorname{Arcsin}\frac{3}{4}$

۸- اگر $f(x,y,z)=xye^{-z}+\frac{z}{x+y}$ باشد، مشتق جهتی f در جهت بردار $\vec{k}+\text{۲}\vec{j}+\text{۲}\vec{i}$ و در نقطه $P(\text{۱},-\text{۲},\text{۱})$ کدام است؟

۱) $\frac{\text{۱}}{\text{۳}}$ ۲) $\frac{\text{۵}}{\text{۳}}$ ۳) $\frac{-\text{۱}}{\text{۳}}$ ۴) $\frac{-\text{۵}}{\text{۳}}$

۹- تابع $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^{\text{۲}}-y}{x+y^{\text{۲}}} & x>-y^{\text{۲}}\\ xy+\text{۱} & x\le -y^{\text{۲}}\end{cases}$ مفروض است. مقدار حد مقابل کدام است؟

$$\lim_{(x,y)\to(-\text{۱},\text{۱})} f(x,y)$$

۱) موجود نیست ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۱-

۱۰- مختصات مرکز انحنای منحنی C با معادله داده شده زیر کدام است؟

$$x=\text{۱}+\cos^{\text{۲}}t\ ;\ y=\sin t\cos t$$

۱) $(\text{۱},\circ)$ ۲) $\left(\frac{-\text{۳}}{\text{۲}},\circ\right)$ ۳) $(\text{۱},\frac{\text{۱}}{\text{۲}})$ ۴) $\left(\frac{\text{۳}}{\text{۲}},\circ\right)$

حل نمونه سوالات:

۱- گزینه ٤ صحیح است.

$$\vec{V}=\frac{d\vec{r}}{dt}=(-\sin t,\cos t,\text{۱})\ ,\ t=\pi$$

$$D: x=-\text{۱}\ ;\ y=-t\ ;\ z=t+\pi \Rightarrow oM=\sqrt{\text{۱}+t^{\text{۲}}+(t+\pi)^{\text{۲}}}\Rightarrow oH=\sqrt{\text{۱}+\frac{\pi^{\text{۲}}}{\text{۲}}}$$

۲- گزینه ۱ صحیح است.

$$f(x,y,z)=x^{\text{۲}}y+xy-\frac{y}{x+\text{۱}}-z=\circ$$

$$\vec{\nabla}f=\left(\text{۲}xy+y+\frac{y}{(x+\text{۱})^{\text{۲}}},x^{\text{۲}}+x-\frac{\text{۱}}{x+\text{۱}},-\text{۱}\right)\Rightarrow \vec{\nabla}f(\text{۱},\text{۲},\text{۳})=\left(\frac{\text{۱۳}}{\text{۲}},\frac{\text{۳}}{\text{۲}},-\text{۱}\right)\Rightarrow \vec{N}=(\text{۱۳},\text{۳},-\text{۲})$$

$$\Rightarrow P:\text{۱۳}(x-\text{۱})+\text{۳}(y-\text{۲})-\text{۲}(x-\text{۳})=\circ \Rightarrow P=\text{۱۳}x+\text{۳}y-\text{۲}z=\text{۱۳}$$

۳- گزینه ۲ صحیح است.

$$\vec{r}=(t,\sin\text{۲}t,\cos^{\text{۲}}t)\ ;\ t=\circ$$

$$\vec{V}=\frac{\overrightarrow{dr}}{dt}=(\text{۱},\text{۲}\cos\text{۲}t,-\sin\text{۲}t)=(\text{۱},\text{۲},\circ)\Rightarrow \vec{a}=\frac{\overrightarrow{dv}}{dt}=(\circ,-\text{۴}\sin\text{۲}t,-\text{۲}\cos\text{۲}t)=(\circ,\circ,-\text{۲})$$

$$R=\frac{\text{۱}}{k}=\frac{v^{\text{۳}}}{|\vec{v}\times\vec{a}|}=\frac{\text{۵}\sqrt{\text{۵}}}{|(-\text{۴},\text{۲},\circ)|}=\frac{\text{۵}\sqrt{\text{۵}}}{\sqrt{\text{۲۰}}}=\frac{\text{۵}}{\text{۲}}$$

٤- گزینه ۲ صحیح است.

منحنی فوق از تقاطع یک صفحه باکره پدید آمده است که دایره‌ای است به شعاع $\sqrt{R^{\text{۲}}-OH^{\text{۲}}}$ که OH فاصلهٔ مرکز کره از صفحه است و R شعاع کره می‌باشد. داریم:

$$OH=\frac{|-\text{۳}|}{\sqrt{\text{۳}}}=\sqrt{\text{۳}}\ ,\ R=\text{۲}\Rightarrow r=\sqrt{\text{۴}-\text{۳}}=\text{۱}\Rightarrow I=\text{۲}\pi$$

۵- گزینه ۳ صحیح است.

$$\vec{r}=\left(\cos\frac{\pi}{\text{٤}}t\ ,\ \sin\frac{\pi}{\text{٤}}t\ ,\ \log_e\cos\frac{\pi}{\text{٤}}t\right)\Rightarrow \vec{V}=\frac{\overrightarrow{dr}}{dt}=\left(\frac{-\pi}{\text{٤}}\sin\frac{\pi}{\text{٤}}t,\frac{\pi}{\text{٤}}\cos\frac{\pi}{\text{٤}}t,\frac{-\pi}{\text{٤}}tg\frac{\pi}{\text{٤}}t\right)$$

$$\Rightarrow |\vec{V}| = \frac{\pi}{4}\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{4}t} = \frac{\pi}{4}\sec\frac{\pi}{4}t \Rightarrow L = \int_0^1 \frac{\pi}{4}\sec\frac{\pi}{4}t\,dt = \ln\left(\sec\frac{\pi}{4}t + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right)\Big|_0^1 \Rightarrow L = \ln(\sqrt{2}+1)$$

۶- گزینه ۳ صحیح است.

$$\vec{\nabla}f = (2xy - 3x^2 + y, x^2 - 2y + x)\ ,\ (x,y) = (0,0) \Rightarrow H(f) = \begin{bmatrix} 2y-6x & 2x+1 \\ 2x+1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow |H(f) - \lambda I| = (-\lambda)(-2-\lambda) - 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0$ نامعین

۷- گزینه ۳ صحیح است.

$$f(x,y,z) = 2x^2 + y^4 + z^2 - 4z \Rightarrow \vec{\nabla}f = (4x, 4y^3, 2z-4) \Rightarrow \vec{\nabla}f(1,1,1) = (4,4,-2) = \vec{N}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \left(\widehat{\vec{N}.\vec{j}}\right) \Rightarrow \sin\theta = \frac{4}{\sqrt{4^2+4^2+2^2}} = \frac{2}{3}$$

۸- گزینه ٤ صحیح است.

$$\vec{\nabla}f = \left(ye^{-z} - \frac{z}{(x+y)^2}\ ,\ xe^{-z} - \frac{z}{(x+y)^2}\ ,\ -xye^{-z} + \frac{1}{x+y}\right)$$

$$\vec{\nabla}f(1,-2,1) = (-2e^{-1}-1, e^{-1}-1, 2e^{-1}-1) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial b} = \vec{\nabla}f.\overrightarrow{e_b} = \frac{2}{3}\left(-2e^{-1}-1\right) + \frac{2}{3}\left(e^{-1}-1\right) + \frac{1}{3}\left(2e^{-1}-1\right) = \frac{-5}{3}$$

۹- گزینه ۱ صحیح است.

$$x = -1 + r\cos\theta\ ,\ y = 1 + r\sin\theta \Rightarrow \frac{x^2 - y}{x + y^2} = \frac{r\cos^2\theta - 2\cos\theta - \sin\theta}{r\sin^2\theta + 2\sin\theta + \cos\theta}$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(-1,1)} = \lim_{r\to 0}\frac{r\cos^2\theta - 2\cos\theta - \sin\theta}{r\sin^2\theta + 2\sin\theta + \cos\theta}\ ,\ \cos\theta > -2\sin\theta$$

$\Rightarrow = \dfrac{-2\cos\theta - \sin\theta}{2\sin\theta + \cos\theta} \Rightarrow$ حد ندارد

۱۰- گزینه ٤ صحیح است.

$$x = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t\ ;\ y = \frac{1}{2}\sin 2t \Rightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow O\left(\frac{3}{2}, 0\right)$$

ریاضی ۱ و ۲

دیورژانس توابع برداری

دیورژانس میدان برداری $\vec{F}$ $(\vec{F}=F_x\hat{i}+F_y\hat{j}+F_z\hat{k}$ که F_z,F_y,F_x توابع اسکالر و حقیقی هستند) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\operatorname{div}(\vec{F})=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z} \quad \text{یا} \quad \operatorname{div}(\vec{F})=\vec{\nabla}.\vec{F}=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right).(F_x,F_y,F_z)$$

نکته: اگر میدان برداری $\vec{F}$، گرادیان یک تابع اسکالر مانند $f(x,y,z)$ باشد، یعنی $\vec{F}=\vec{\nabla}f$، در این صورت دیورژانس گرادیان تابع اسکالر f به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}(f))=\vec{\nabla}.(\vec{\nabla}f)=\nabla^2 f \qquad \Rightarrow \qquad \nabla^2 f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

که در آن عملگر ∇^2 را لاپلاس می‌نامند.

اگر تابع اسکالر $u(x,y,z)$ در معادله لاپلاس صدق کند، در این صورت تابع $u(x,y,z)$ را یک تابع همساز گویند.

معادله لاپلاس $\vec{\nabla}^2 u=0$

تاو (کرل) میدان برداری

فرض کنید $\vec{F}=F_x\hat{i}+F_y\hat{j}+F_z\hat{k}$ یک میدان برداری در $\mathbb{R}^3$ باشد، کرل یا تاو میدان برداری $\vec{F}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\operatorname{curl}(\vec{F})=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\hat{i}+\left(\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\hat{j}+\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\hat{k}$$

کرل میدان برداری $\vec{F}$ به این صورت هم نمایش داده می‌شود: $\operatorname{curl}(\vec{F})=\vec{\nabla}\times\vec{F}$

میدان برداری پایستار

میدان‌های برداری که خود گرادیان یک تابع اسکالر باشند، کرلشان صفر است: $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}f)=0$

به چنین میدان‌هایی، پایستار گویند و در غیر این صورت ناپایستار گویند. در نتیجه میدان $\vec{F}$ را پایستار گوئیم هرگاه: $\vec{\nabla}\times\vec{F}=0$

خواص عملگر $\vec{\nabla}$ (دل)

خواص $\vec{\nabla}$ مشابه خواص مشتق مرتبه اول است:

۱) $\vec{\nabla}(f+g)=\vec{\nabla}f+\vec{\nabla}g$

۲) $\vec{\nabla}(fg)=g\vec{\nabla}f+f\,\vec{\nabla}g$

۳) $\vec{\nabla}\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{g\vec{\nabla}f-f\,\vec{\nabla}g}{g^2}$

مثال: گرادیان تابع $F(x,y,z)=(x^2+y)^{xz^2}$ کدام است؟

حل:

$$\ln f = xz^2 \ln\left(x^2+y\right) \Rightarrow \frac{\vec{\nabla} f}{f} = \vec{\nabla}\left(xz^2\right)\ln\left(x^2+y\right) + \frac{\vec{\nabla}\left(x^2+y\right)}{x^2+y}.xz^2$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} f = \left(x^2+y\right)^{xz^2} \ln\left(x^2+y\right)\left(z^2,0,2xz\right) + xz^2\left(x^2+y\right)^{xz^2-1}(2x,1,0)$$

برخی خواص دیگر $\vec{\nabla}$:

$1)\ \vec{\nabla}\times\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\times\vec{F}+\vec{\nabla}\times\vec{G}$

$2)\ \vec{\nabla}\times\left(f\,\vec{F}\right) = \vec{\nabla} f\times\vec{F} + f\,\vec{\nabla}\times\vec{F}$

$3)\ \vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla} f\right) = 0$

$4)\ \vec{\nabla}.\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = 0$

$5)\ \vec{\nabla}.\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = \vec{G}.\vec{\nabla}\times\vec{F} - \vec{F}.\vec{\nabla}\times\vec{G}$

$6)\ \vec{\nabla}\left(g\vec{\nabla} f\times f\vec{\nabla} g\right) = 0$

قاعده زنجیره‌ای

فرض کنید عملگر یک به یک T هر نقطه (x,y) از صفحه xoy را به نقطه‌ای متناظر در صفحه uov تصویر کنندهٔ به قسمی که:

$$(u,v) = T(x,y)\ ,\ u = U(x,y)\ ;\ v = V(x,y) \Rightarrow (x,y) = T^{-1}(u,v)\ ,\ x = X(u,v)\ ;\ y = Y(u,v)$$

در این صورت می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}\\ \frac{\partial f}{\partial y}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial u}\\ \frac{\partial f}{\partial v}\end{bmatrix}$$

و نیز خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial u}\\ \frac{\partial f}{\partial v}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}\\ \frac{\partial f}{\partial y}\end{bmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{bmatrix}$$

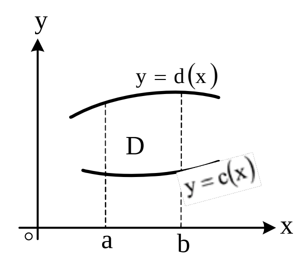
به ماتریس‌های اخیر ماتریس ژاکوبین گویند و داریم:

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{bmatrix}$$

ماتریس ژاکوبین، بردار گرادیان تابع f(x,y) در هر نقطه در صفحه xoy را تبدیل بـه بـردار گرادیـان تـابع $f\left(X(u,v),Y(u,v)\right)$ در نقطهٔ متناظرش در صفحهٔ uov می‌کند.

انتگرال دو گانه

ناحیه بسته D در فضای $\mathbb{R}^2$ در صفحه xoy محصور بین منحنی‌های $y = d(x), y = c(x)$ و خط‌های $x = a$ و $x = b$ را در نظر بگیریـد. فرض کنید ناحیه D دارای چگالی سطحی f(x,y) باشد. در این صورت جرم باریکه محصور به منحنی‌های روبرو را می‌توان با انتگـرال‌گیـری در امتداد محور oy محاسبه نمود.



$$c(x)\le y\le d(x)\ ;\ x\le x\le x+dx \Rightarrow dm_x = \int_{c(x)}^{d(x)}\left(f(x,y)dx\right)dy$$

با انتگرال‌گیری از dm_X روی متغیر x از a تا b جرم ناحیه D به صورت زیر به دست می‌آید:

$$m=\int_a^b dm_X=\int_a^b\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)dydx$$

اگر ناحیه D با چگالی f(x,y) محصور بین منحنی‌های $x=a(y)$, $x=b(y)$ و خط‌های $y=c$ و $y=d$ باشد نیز می‌توان نشان داد جرم ناحیه D به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$m=\int_c^d\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)dxdy$$

قضیه: اگر ناحیه D با چگالی $f(x).g(y)$ در صفحه xoy به صورت روبرو باشد: $D=\{(x,y)\,|\,a\le x\le b\ ,\ c\le y\le d\}$

آنگاه جرم ناحیه D به صورت روبرو به دست می‌آید:

$$m=\left(\int_a^b f(x)dx\right).\left(\int_c^d g(y)dy\right)$$

مرکز ثقل یک ناحیه

اگر سطح بستهٔ D دارای چگالی $f(x,y)$ باشد در این صورت نقطه $(\overline{X},\overline{Y})$ را مرکز ثقل D گوئیم هرگاه:

$$\overline{x}=\frac{\iint_D xf(x,y)dxdy}{\iint_D f(x,y)dxdy}\quad,\quad \overline{Y}=\frac{\iint_D yf(x,y)dxdy}{\iint_D f(x,y)dxdy}$$

قضیه مقدار متوسط

اگر مساحت ناحیه D برابر S_D باشد در این صورت برای هر تابع f(x,y) که در درون D انتگرال‌پذیر باشد، نقطه (x_0,y_0) وجود دارد به قسمی که:

$$f(x_0,y_0)=\frac{1}{S_D}\iint_D f(x,y)dxdy$$

$f(x_0,y_0)$ را مقدار متوسط تابع F(x,y) در ناحیه D گویند.

تغییر متغیر در انتگرال‌های دوگانه

انتگرال دوگانه $I=\iint_D f(x,y)dxdy$ را در نظر بگیرید چنانچه به هر دلیلی بخواهیم از تغییر متغیرهای $\begin{cases}u=u(x,y)\\ v=v(x,y)\end{cases}$ استفاده کنیم لازم است نخست تبدیل یافته ناحیه D که در صفحه (x,y) تعریف شده را در صفحه (u,v) پیدا کرده و آن را D' می‌نامیم.

سپس تابع F(x,y) را بر حسب متغیرهای (u,v) بازنویسی می‌کنیم و آن را h(u,v) می‌نامیم. در انتها ژاکوبین تغییر دستگاه مختصات را که با J نشان می‌دهند به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$J=\frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\quad\Rightarrow\quad J=\frac{1}{\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}}\quad \text{یا}\quad J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}$$

حال با توجه به $|J|dudv$ می‌توان نوشت:

$$I=\iint_{D'} h(u,v)|J|dudv$$

نکته: ژاکوبین تبدیل مختصات دکارتی (x,y) به قطبی (ρ,ϕ) برابر ρ می‌باشد.

مثال: حاصل $\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{x}{\left(x^2+y^2+1\right)^2}dydx$ کدام است؟

حل: از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty \frac{\rho\cos\varphi}{\left(\rho^2+1\right)^2}\rho d\rho d\varphi=\left(\sin\phi\right)_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty \frac{\rho^2}{\left(1+\rho^2\right)^2}d\rho=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{tg^2\phi(1+tg^2\phi)}{(1+tg^2\phi)^2}d\phi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\phi d\phi=\frac{\pi}{4}$$

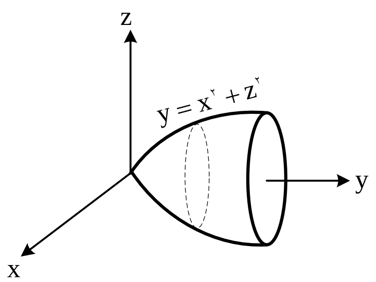
انتگرال سه‌گانه

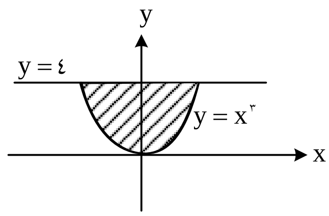
ناحیهٔ بسته D در فضای $\mathbb{R}^3$ را در نظر بگیرید. اگر D محصور بین دو رویهٔ $z_1(x,y)$ و $z=z_2(x,y)$ بوده و چگالی حجمی D نیز f(x,y,z) باشد. همچنین تصویر ناحیه D در صفحه xoy نیز ناحیه R باشد در این صورت جرم ناحیهٔ D با چگالی f(x,y,z) به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$m=\iiint_D f(x,y,z)dzdydx=\iint_R\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dzdydx$$

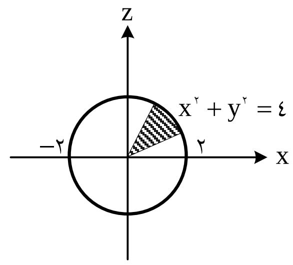
مثال: مطلوبست محاسبهٔ $\iiint_D\sqrt{x^2+z^2}\,dxdydz$ که در آن D ناحیهٔ محصور بین $y=x^2+z^2$ و $y=4$ است.

حل: ابتدا ناحیه فوق را رسم می‌کنیم.





تصویر ناحیه روی صفحه xy



تصویر ناحیه روی صفحه xz

اگر ناحیه رادر جهت z بگیریم آنگاه z بین $-\sqrt{y-x^2}$ و $\sqrt{y-x^2}$ و نیز y بین $y=x^2$ و $y=4$ واقع می‌شود. بنابراین خواهیم داشت:

$$\iiint_D\sqrt{x^2+z^2}dxdydz=\int_{x=-2}^{2}\int_{y=x^2}^{4}\int_{z=-\sqrt{y-x^2}}^{\sqrt{y-x^2}}\sqrt{x^2+z^2}dzdydx$$

برای راحت‌تر شدن انتگرال جای دو متغیر را عوض می‌کنیم.

$$\iiint_D\sqrt{x^2+z^2}dv=\int_{x=-2}^{2}\int_{z=-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{y=x^2+z^2}^{4}\sqrt{x^2+z^2}dydzdx=$$

$$\int_{x=-2}^{2}\int_{z=-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}y\sqrt{x^2+z^2}\Big|_{y=x^2+z^2}^{4}=\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\left(4-x^2-z^2\right)\sqrt{x^2+z^2}dzdx$$

حال بهتر است از مختصات قطبی استفاده کنیم:

$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\left(4-x^2-z^2\right)\sqrt{x^2+z^2}\,dzdx=$$

$$\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2}\left(4-r^2\right)r.rdrd\theta=\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{2}\left(4r^2-r^4\right)drd\theta=\int_{0}^{2\pi}\frac{4}{3}r^3-\frac{1}{5}r^5\Big|_{0}^{2}d\theta=\frac{64}{15}(\theta)\Big|_{0}^{2\pi}=\frac{128}{15}\pi$$

نکته: ماتریس ژاکوبین تبدیل مختصات دکارتی به استوانه‌ای برابر است با: $(x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi,\ z=z)$

$$J=\begin{bmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad |J|=\rho$$ دترمینان

ماتریس ژاکوبین تبدیل مختصات دکارتی به کروی نیز برابر است با: $(x=r\sin\theta\cos\varphi, y=r\sin\theta\sin\varphi, z=r\cos\theta)$

$$J=\begin{bmatrix}\sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\\ -r\sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & 0\\ r\cos\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad |J|=r^2\sin\theta$$

مثال: فاصلهٔ مرکز ثقل نیم کره به شعاع R و چگالی واحد از صفحه دایره‌ای شکل قاعده نیمکره چقدر است؟

حل:

$$r=R\ ;\ 0\le\varphi\le 2\pi\ ;\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \overline{z}=\frac{\iiint_D zf(x,y,z)dv}{\iiint_D f(x,y,z)dv}\ ;\ \iiint_D 1dv=V_D=\frac{2}{3}\pi R^3\ ,\ \iiint_D zdv=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^{R} r\cos\theta.r^2\sin\theta drd\varphi d\theta$$

$$\Rightarrow\iiint_D zdv=\left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^R\times[\varphi]_0^{2\pi}\times\left[\frac{1}{2}\sin^2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}R^4\quad\Rightarrow\quad \overline{z}=\frac{\frac{\pi}{4}R^4}{\frac{2}{3}\pi R^3}=\frac{3}{8}R$$

با محاسبهٔ $\overline{x}$ و $\overline{y}$ می‌توان نشان داد: $\overline{x}=\overline{y}=0$ و در نتیجه فاصله همان $\frac{3}{8}R$ است.

انتگرال روی سطح

فرض کنید سطح دلخواه s در فضای R^3 به صورت روبرو باشد: $z=z(x,y)\ ,\ (x,y)\in S$

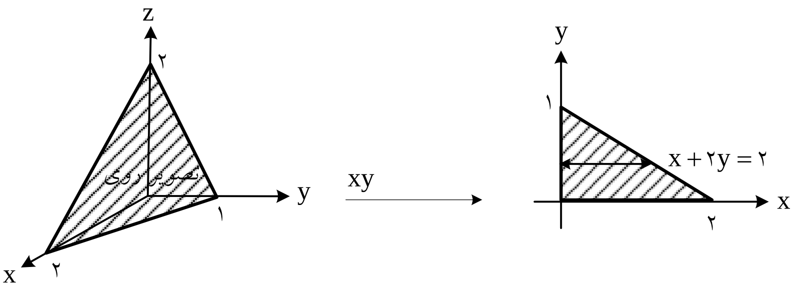
همچنین فرض کنید چگالی سطحی s نیز f(x,y,z) باشد، اگر جرم سطح s با چگالی فوق را بخواهیم داریم:

$$m=\iint_S f(x,y,z)\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}\ dxdy$$

همانطور که مشاهده می‌شود $\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}$ اندازه گرادیان تابع $z(x,y)-z=0$ است که با |ds| نمایش می‌دهیم.

مثال: انتگرال $\iint_S (z-x)ds$ که در آن s قسمتی از صفحه $x+2y+z=2$ است که در $\frac{1}{8}$ اول دستگاه مختصات واقع شده است را محاسبه کنید.

حل: ابتدا ناحیه را رسم می‌کنیم.



$$\Rightarrow z = 2 - x - 2y \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \dfrac{dz}{dx} = -1 \\ \dfrac{dz}{dy} = -2 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad ds = \sqrt{1 + (-1)^2 + (-2)^2}\ dxdy$$

$$\Rightarrow I = \iint_s (z - x)ds = \int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{2-2y} (2 - x - 2y - x)\sqrt{6}dxdy = \sqrt{6}\int_0^1 \left(4 - 4y - 4 + 8y - 4y^2 - 4y + 4y^2\right)dy = 0$$

انتگرال سطح نوع دوم:

میدان برداری $\vec{F} = p\hat{i} + Q\hat{j} + R\hat{k}$ را در نظر بگیرید، چنانچه s سطح یک رویه فضایی بوده و $\vec{n}$ بردار یکهٔ عمود بر این سطح باشد مطابق تعریف شار میدان برداد $\vec{F}$ گذرنده از سطح s به صورت روبرو تعریف می‌شود: $\Phi = \iint_s \vec{F}.\vec{n}\,ds$

مثال: چنانچه S بخشی از سهمیگون هذلولی $z = xy$ که بالای ناحیه مستطیلی $0 \le y \le 2$ و $0 \le x \le 3$ باشد، شار میدان برداری $\vec{F} = \hat{i} - y^2\hat{j} - z\hat{k}$ گذرنده از سطح S را بیابید.

حل:

$$x, y > 0\ ;\ z = xy \Rightarrow z_x = y\ ,\ z_y = x \qquad \Rightarrow \qquad \vec{N} = -z_x\hat{i} - z_y\hat{j} + \hat{k} = -y\hat{i} - x\hat{j} + \hat{k}$$

$$\iint_s \vec{F}.\vec{n}ds = \iint_A \left(\vec{F}.\vec{n}\right)\left|\vec{N}\right|dA = \iint \vec{F}.\vec{N}dA = \iint_A \left(-y + y^2x - z\right)dA = \int_{x=0}^{3}\int_{y=0}^{2} \left(-y + y^2x - xy\right)dydx = \int_0^2 \left(-2 + \frac{8x}{3} - 2x\right)dx = -3$$

توجه: همانطور که دیده می‌شود بردار $\vec{n}$ از گرادیان تابع سطح به دست می‌آید.

قضیه دیورژانس

فرض کنید که S یک سطح بسته باشد که حجم v را به خود محدود کرده است و میدان برداری $\vec{F} = p(x,y,z)\hat{i} + Q(x,y,z)\hat{j} + R(x,y.z)\hat{k}$ دیورژانس $\vec{F}$ در تمام حجم v توابعی پیوسته باشند. می‌توان نشان داد:

$$\oiint_s \vec{F}.\vec{n}ds = \iiint_V \left(\vec{\nabla}.\vec{F}\right)dv$$

فرمول استروگرادسکی:

$$\oiint_s p(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy = \iiint_V \left(\vec{\nabla}.\vec{F}\right)dx$$

مثال: حاصل انتگرال روبرو را حساب کنید:

$$\oiint_s \vec{F}.\vec{ds}\ ;\ \vec{F} = x^3 + y^3 + z^3\ ;\ s = x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

حل: $$\oiint_s \vec{F}.\vec{ds} = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{R} \left(3r^2\right)r^2 \sin\theta drd\varphi d\theta = \left(\frac{3}{5}R^5\right)\times(2\pi)\times(2) = \frac{12}{5}\pi R^5$$

انتگرال منحنی الخط

اگر ds المان طول قوس بر روی منحنی C باشد انتگرال منحنی الخط به صورت روبرو تعریف می‌شود:

$$I=\int_C f(x,y,z)ds \quad ; \quad ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}$$

اگر منحنیC در صفحه با معادلات پارامتری $\begin{cases} x=p(t) \\ y=q(t) \end{cases}$ تعریف شده باشد آنگاه: $ds=\sqrt{p'^2(t)+q'^2(t)}dt$

مثال: انتگرال تابع $f(x,y,z)=x+z$ روی منحنی $z=t$ و $y=2\sin t$ و $C: x=2\cos t$ وقتی $0\le t\le \pi$ چقدر است؟

حل:

$$I=\int_C (x+z)ds=\int_0^\pi (2\cos t+t)\sqrt{4\sin^2 t+4\cos^2 t+1}\,dt=\int_0^\pi \sqrt{5}(2\cos t+t)dt=\left[2\sqrt{5}\sin t+\frac{\sqrt{5}}{2}t^2\right]_0^\pi=\frac{\sqrt{5}}{2}\pi^2$$

نکته ۱: در مختصات استوانه‌ای داریم: $ds=\sqrt{(\rho d\varphi)^2+(d\rho)^2+(dz)^2}$

نکته ۲: در مختصات کروی داریم: $ds=\sqrt{(dr)^2+(rd\theta)^2+(r\sin\theta d\varphi)^2}$

نکته ۳: برای محاسبه طول قوس یک منحنی (S) از فرمول $\int_{r_1}^{r_2} 1ds$ استفاده می‌کنیم.

نکته ٤: کار نیروی $\vec{F}$ در مسیر منحنی C به صورت روبرو تعریف می‌شود: $\int_C \vec{F}.\vec{dr}=\int_c F_x dx+F_y dy+F_z dz$

اگر منحنی C به صورت پارامتری باشد $(C: x=X(t), y=Y(t), z=Z(t))$ آنگاه: $\int_C \vec{F}.\vec{dr}=\int_{t_1}^{t_2}\left(F_x X'(t)+F_y Y'(t)+F_x Z'(t)\right)dt$

قضیه استوکس

فرض کنید S یک سطح جهت‌دار و هموار در فضا باشد و C نیز منحنی کرانهٔ S باشد. همچنین فرض کنید میدان برداری $\vec{F}$ در S و کرانه C پیوسته باشد در این صورت داریم:

$$\oint_C \vec{F}.\vec{dr}=\iint_s (\vec{\nabla}\times\vec{F}).\vec{ds}$$

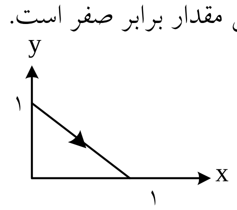
در حالتی که $F_z=0$ باشد، قضیه را گرین گویند و خواهیم داشت:

$$\oint_C F_x dx+F_y d_y=\iint_S\left[\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right]dxdy$$

نتیجه: اگر میدان برداری $\vec{F}$ پایستار باشد، انتگرال منحنی‌الخط $\int_c \vec{F}.\vec{dr}$ مستقل از مسیر است و می‌توان با ثابت نگه‌داشتن x و y و z در فواصل انتگرال‌گیری آن را ساده کرد.

نکته: برای تشخیص پایستار بودن یک میدان مقدار $\vec{\nabla}\times\vec{F}$ را محاسبه می‌کنیم. برای میدان‌های پایستار این مقدار برابر صفر است.

نمونه سؤالات:



۱- حاصل $\int_C (e^y-\sin x)dx+dy$ که در آن C منحنی نشان داده شده است، کدام است؟

۱) $e-\cos 1-1$ ۲) $e+\cos 1-3$ ۳) $e-\cos 1-3$ ٤) $e+\cos 1-1\le$

۲- محیط منحنی بسته $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x^2+y^2+z^2=4 \end{cases}$ کدام است؟

۱) π ۲) 2π ۳) $\frac{3\pi}{4}$ ٤) $\frac{2\pi}{3}$

۳- طول قوس منحنی C به معادله پارامتری روبرو وقتی $0 \le t \le 1$ است کدام است؟

$$C: x=\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)\ ;\ y=\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)\ ;\ z=\ln\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$$

۱) $\frac{\pi}{4}\ln 2$ ۲) $\frac{\pi}{2}\ln 2$ ۳) $\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$ ٤) $\frac{\pi}{4}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$

٤- حاصل انتگرال روبرو کدام است؟ $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dydx$

۱) $\frac{\pi}{3}$ ۲) $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$ ۳) $\frac{\pi\sqrt{2}}{6}$ ٤) $\frac{\pi}{6}$

۵- حاصل $\oint_c \left(x^3+2y\right)dx+\left(4x-3y^2\right)dy$ که در آن C بیضی به معادله $x^2+4y^2=4$ می‌باشد کدام است؟

۱) $\frac{4}{27}$ ۲) $\frac{8}{81}$ ۳) $\frac{8}{27}$ ٤) $\frac{16}{81}$

٦- کار نیروی $\vec{F}=\left(y^2+x\right)\hat{i}+\left(2xy+1\right)\hat{j}$ روی مسیر دایره $x^2+y^2=1$ از نقطه $(1,0)$ به $(0,1)$ کدام است؟

۱) 0 ۲) 1 ۳) -1 ٤) $\frac{1}{2}$

۷- اگر $F(x,y,z)=0$ باشد، حاصل $\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}$ کدام است؟

۱) F ۲) -F ۳) 1 ٤) -1

۸- اگر $f(x,y,z)=(z+y^2)^{x-z}$ باشد گرادیان تابع f در نقطه $p(1,1,1)$ کدام است؟

۱) $(\ln 2,0,-1)$ ۲) $(-\ln 2,0,1)$ ۳) $(\ln 2,0,\ln 2)$ ٤) $(\ln 2,0,-\ln 2)$

۹- کرل میدان $\vec{F}=u\vec{\nabla}v+v\vec{\nabla}u$ برابر است با:

۱) صفر ۲) $\vec{\nabla}(uv)$ ۳) $\vec{\nabla}.\left(\vec{\nabla}(uv)\right)$ ٤) $\vec{\nabla}(u+v)$

۱۰- زاویه کرل میدان برداری $\vec{F}=e^y\hat{i}+yz^y\hat{j}-e^{xz}\hat{k}$ در نقطهٔ $p\left(\frac{1}{2}\ln 3,0,1\right)$ با محور oz کدام است؟

۱) $\mathrm{Arc}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۲) $\mathrm{Arc}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{3}$ ٤) $\frac{\pi}{6}$

حل نمونه سوالات

۱- گزینه ۲ صحیح است.

$C: y=1-x\ ,\ 0\le x\le 1$

$$dy=-dx \Rightarrow I=\int_0^1\left(e^{1-x}-\sin x-1\right)dx=\left[-e^{1-x}+\cos x-x\right]_0^1=e+\cos 1-3$$

۲- گزینه ۲ صحیح است. منحنی فوق از تقاطع یک صفحه باکره پدیده آمده است. که دایره‌ای است به شعاع $\sqrt{R^2-OH^2}$ که OH فاصله مرکز کره از صفحه است و R شعاع کره می‌باشد داریم:

$$OH=\frac{|-3|}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}\ ,\ R=2 \Rightarrow r=\sqrt{4-3}=1 \Rightarrow I=2\pi r=2\pi$$

۳- گزینه ۳ صحیح است.

$$\vec{r}=\left(\cos\frac{\pi}{4}t\ ,\ \sin\frac{\pi}{4}t\ ,\ \ln\cos\frac{\pi}{4}t\right)$$

$$\vec{V}=\frac{\overrightarrow{dr}}{dt}=\left(-\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4}t\ ,\ \frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}t\ ,\ -\frac{\pi}{4}\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}t\right)\ \Rightarrow\ |\vec{V}|=\frac{\pi}{4}\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{4}t}=\frac{\pi}{4}\sec\frac{\pi}{4}t$$

$$\Rightarrow L=\int_0^1\frac{\pi}{4}\sec\frac{\pi}{4}t\,dt=\ln\left(\sec\frac{\pi}{4}t+\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}t\right)\Big|_0^1\ \Rightarrow L=\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$$

۴- گزینه ۲ صحیح است.

$$I=\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}\,dydx\qquad\Rightarrow\qquad I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sqrt{2}}\rho.\rho d\rho d\varphi=\left(\frac{\pi}{2}\right)\times\left(\frac{1}{3}\rho^3\right)\Big|_0^{\sqrt{2}}=\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$$

۵- گزینه ٤ صحیح است.

$$\frac{x^2}{4}+y^2=1\ \Rightarrow\ S_D=\pi ab=2\pi\ \Rightarrow\ \oint(x^3+2y)dx+(4x-3y^2)dy=\iint_D(4-2)ds=2s_D=4\pi$$

٦- گزینه ٤ صحیح است.

$$I=\int_{x^2+y^2=1}(y^2+x)dx+(2xy+1)dy\quad;\quad\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}=2y-2y=0$$

$$\Rightarrow I=\int_{(1,0)}^{(0,1)}(y^2+x)dx+(2xy+1)dy=\int_{(1,0)}^{(0,0)}(0,x)\,dx+\int_{(0,0)}^{(0,1)}(0+1)dy=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$$

۷- گزینه ٤ صحیح است.

$$\frac{\partial x}{\partial y}=\frac{-F_y}{F_x}\quad;\quad\frac{\partial y}{dz}=-\frac{F_z}{F_y}\quad;\quad\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}\quad\Rightarrow\quad\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=-1$$

۸- گزینه ٤ صحیح است.

$$f(x,y,z)=(x+y^2)^{x-z}\Rightarrow\vec{\nabla}f=$$

$$\left[\left[(x-z)(x+y^2)^{x-y-1}+(x+y^2)^{x-z}\ln(x+y^2)\right],\left[2y(x-z)(x+y^2)^{x-z-1}\right],\left[-(x+y^2)^{x-z}\ln(x+y^2)\right]\right]$$

$$\Rightarrow\ \vec{\nabla}f(1,1,1)=\left(\ln 2,0,-\ln 2\right)$$

۹- گزینه ۱ صحیح است.

$$\vec{F}=u\vec{\nabla}v+v\vec{\nabla}u=\vec{\nabla}(uv)\quad\Rightarrow\quad\vec{\nabla}\times\vec{F}=\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}(uv)=0$$

۱۰- گزینه ۳ صحیح است.