۵ تحلیل حساسیت و برنامه‌ریزی پارامتریک

۵ـ۱ـ تحلیل حساسیت

در مسائل برنامه‌ریزی خطی، پس از رسیدن به جواب بهینه نیاز می‌باشد تا تأثیر تغییرات احتمالی ضرایب و متغیر بر مقدار تابع هدف و جواب بهینه بررسی شود. تحلیل حساسیت شیوه‌ای جهت ارزیابی میزان حساسیت جواب بهینه و تابع هدف در مقابل تغییرات معین در مسئله می‌باشد. این تغییرات معمولاً به سه شکل زیر ظاهر می‌شوند.

۱ـ متغیرهای اساسی و جوابشان تغییر نکرده در نتیجه جواب بهینهٔ مسئله و تابع هدف بدون تغییر باقی می‌ماند.

۲ـ متغیرهای اساسی و جوابشان تغییر کرده و در نتیجه جواب بهینه مسئله و تابع هدف تغییر پیدا می‌کند.

۳ـ متغیرهای اساسی عوض نمی‌شوند ولی مقادیرشان تغییر پیدا می‌نماید.

۵ـ۲ـ حالات مختلف آنالیز حساسیت

الف) تاثیر تغییرات ضرایب در جواب بهینه
۱ـ تغییرات ضرایب متغیرهای غیرپایه‌ای تابع هدف
۲ـ تغییرات ضرایب متغیرهای پایه‌ای تابع هدف
۳ـ تغییرات اعداد سمت راست
۴ـ تغییرات ضرایب تکنولوژیکی (فنی) جهت متغیرهای غیرپایه‌ای
۵ـ تغییرات ضرایب تکنولوژیکی (فنی) جهت متغیرهای پایه‌ای

ب) تعیین حدود ضرایب به گونه‌ای که جواب بهینه تغییر نکند
۱ـ تعیین حدود ضرایب متغیرهای غیر پایه‌ای در تابع هدف
۲ـ تعیین حدود ضرایب متغیرهای پایه‌ای در تابع هدف
۳ـ تعیین حدود اعداد سمت راست
۴ـ تعیین حدود ضرایب تکنولوژیکی (فنی) جهت متغیرهای غیرپایه‌ای
۵ـ تعیین حدود ضرایب تکنولوژیکی (فنی) جهت متغیرهای پایه‌ای

ج) تأثیر تغییرات ساختاری مسائل برنامه‌ریزی بر جواب بهینه
۱ـ اضافه نمودن یک متغیر جدید
۲ـ حذف یک متغیر غیراساسی (غیر پایه‌ای)
۳ـ حذف یک متغیر اساسی (پایه‌ای)
۴ـ اضافه کردن یک محدودیت جدید
۵ـ حذف یک محدودیت

۵ـ۳ـ تأثیر تغییرات ضرایب در جواب بهینه

۵ـ۳ـ۱ـ تغییرات ضرایب متغیرهای غیرپایه‌ای تابع هدف

روش اول: با کمک فرمول

$$\overline{C}_N = C_B . B^{-1} . N - C_N$$
$$\overline{C}_j = C_B . B^{-1} a_j - C_j = z_j - C_j$$

مسئله حل می‌شود در حالت Max و یا اگر $z_j - C_j \geq 0$ باشد اعداد سطر تابع هدف در جدول سیمپلکس مثبت بوده و تأثیری در جواب ندارد و اگر $z_j - C_j < 0$ باشد در اینصورت آن متغیر شرایط ورود به پایه را داشته و پس از استاندارد نمودن، جدول سیمپلکس را حل می‌کنیم.

روش دوم: در این روش محدودیت مزدوج متناظر با این متغیر را نوشته و مقادیر جواب مسئله ثانویه را

از سطر صفر جدول بهینه اولیه بدست آورده و در محدودیت موردنظر قرار می‌دهیم اگر صدق کرد جواب بهینه فعلی تغییر نکرده در غیراینصورت بهینگی عوض می‌شود.

مثال ۱ : مسئله زیر و جدول نهایی آن را در نظر بگیرید:

$$Max\ z = -5x_1 + 5x_2 + 13x_3$$
$$-x_1 + x_2 + 3x_3 \le 3$$
$$13x_1 + 4x_2 + 10x_3 \le 90$$
$$x_i \ge 0$$

Max	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS
z	۰	۰	۲	۵	۰	۱۰۰
x_2	۱-	۱	۳	۱	۰	۲۰
s_2	۱۶	۰	۲-	۴-	۱	۱۰

در مثال ۱ اگر $C_3 = 8$ شود چه تاثیری در جواب بهینه دارد.

راه حل اول: $\overline{C}_3 = C_B . B^{-1} . a_3 - C_3 = (5 \quad 0) \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} - 8 = 15 - 8 = 7$

$$\bar{a}_3 = B^{-1} a_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

چون $\overline{C}_3 = 7 \ge 0$ پس جواب تغییر نمی‌کند.

راه حل دوم: $3y_1 + 10y_2 \ge 8 \Rightarrow 3(5) + 90(0) = 15 > 8$

در مسئله صدق می‌کند.

۵-۳-۲- تغییرات ضرایب متغیرهای پایه تابع هدف

در مثال ۱ اگر C_2 به عدد ۴ تبدیل شود در جواب بهینه چه تأثیری دارد.

$$C_2 = 5 \rightarrow C_2 = 4$$

$$\overline{C}_N = C_B . B^{-1} . N - C_N = [\,4 \quad 0\,] \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 16 & -2 & -4 \end{bmatrix} - [\,-5 \quad 13 \quad 0\,] = [\,1 \quad -1 \quad 4\,]$$

بدلیل منفی شدن مقادیر $\overline{C}_N$ جدول دیگر بهینه نمی‌باشد بنابراین حل جدول سیمپلکس پس از پاشنه گردی ادامه یافته و نتایج زیر حاصل می‌شود.

z'	۱	۰	۱-	۴	۰	۸۰

$$\begin{cases} s_2 = \frac{70}{3} \\ x_2 = \frac{20}{3} \end{cases} , z = \frac{260}{3}$$

بنابراین در این حالت C_B تغییر کرده و باعث تغییر در $Z_j - C_j$ می‌شود در اینصورت هر متغیری که منفی‌ترین ضریب را داشت وارد پایه شده در غیر اینصورت جواب تغییر نکرده ولی مقدار Z ممکن است تغییر کند.

نتایج حاصله:

☜ **نکته:** هرگونه تغییر در ضرایب تابع هدف می‌تواند بر بهینگی مسئله تأثیر داشته باشد.

☜ **نکته:** هرگونه تغییر در ضرایب تابع هدف بر موجه بودن فضای جواب تأثیری ندارد.

☜ **نکته:** هرگونه تغییر در ضرایب تابع هدف اگر مقدار تابع هدف و جواب را تغییر دهد در جهت تابع هدف خواهد بود.

☜ **نکته:** هرگونه تغییرات در جواب با استفاده از سیمپلکس اولیه به جواب نهایی خواهد رسید.

۵-۳-۳-تغییرات اعداد سمت راست

$$\bar{b} = B^{-1}.b$$
$$Z = C_B.B^{-1}.b$$

با توجه به روابط فوق تغییرات لازم داده می‌شود اگر جواب $\bar{b}$ مثبت بود جدول مسئله موجه بوده و مقدار تابع هدف $(Z = C_B.B^{-1}.b)$ تغییر پیدا می‌کند اگر $\bar{b}$ منفی بود با کمک سیمپلکس ثانویه به جواب بهینه می‌رسیم.

نتایج حاصله:

☜ **نکته:** هرگونه تغییرات در مقادیر سمت راست (b_i) می‌تواند بر موجه بودن مسئله تأثیر داشته باشد.

☜ **نکته:** هرگونه تغییرات در مقادیر سمت راست (b_i) بر بهینگی مسئله تاثیری نخواهد داشت.

☜ **نکته:** هرگونه تغییرات در مقادیر سمت راست (b_i) می‌تواند بر مقدار تابع هدف تأثیر داشته باشد.

☜ **نکته:** هرگونه تغییرات در مقادیر سمت راست (b_i) در صورت منفی بودن با سیمپلکس ثانویه به جواب نهایی می‌رسد در اینصورت تغییرات تابع هدف در جهت عکس تابع هدف خواهد بود.

۵-۳-۴- تغییرات ضرایب تکنولوژی یک متغیر غیر پایه‌ای (غیراساسی)

الف) هرگونه تغییر در بردار ضرایب یک متغیر غیرپایه‌ای $(\overline{a}_j = B^{-1}.a_j)$ مقدار $(\overline{C}_j = Z_j - C_j = C_B.B^{-1}.a_j - C_j)$ را تغییر می‌دهد فلذا اگر در حالت Max مقدار $\overline{C}_j \geq 0$ باشد جواب بهینه تغییر نمی‌کند (در حالت Min بودن تابع هدف باید، $\overline{C}_j \leq 0$) در غیراینصورت بهینگی بهم خورده و بردار a_j وارد پایه می‌شود که در اینصورت ممکن است مقدار Z نیز تغییر کند.
ب) در روش بعدی محدودیت مزدوج متناظر با متغیر موردنظر را می‌نویسیم. جوابهای ثانویه را از سطر صفر جدول بهینه اولیه بدست آورده و در محدودیت موردنظر امتحان می‌کنیم اگر این جوابها صدق کرد جواب بهینه تغییر نمی‌کند در غیر اینصورت بهینگی مسئله از بین خواهد رفت.

نتایج حاصله:

☜ **نکته:** هرگونه تغییر در ضرایب تکنولوژی یک متغیر غیرپایه‌ای تأثیری بر موجه بودن مسئله ندارد.

$$\overline{b} = B^{-1}.b$$

☜ **نکته:** هرگونه تغییر در ضرایب تکنولوژی یک متغیر غیرپایه‌ای ممکن است مقدار تابع هدف را تغییر دهد.

☜ **نکته:** هرگونه تغییر در ضرایب تکنولوژی یک متغیر غیرپایه‌ای ممکن است بر بهینگی مسئله $(Z_j - C_j)$ تأثیر بگذارد.

۵-۳-۵- تغییرات ضرایب تکنولوژی یک متغیر پایه‌ای

هرگونه تغییر در ضرایب تکنولوژیکی یک متغیر پایه‌ای باعث بهم خوردن ماتریس پایه B و در نتیجه معکوس آن B^{-1} می‌گردد در این حالت تمام پارامترهای $\overline{b}$ و Z و ... تحت تأثیر قرار گرفته و بهتر است که مسئله از ابتدا حل شود. در این شرایط از محدودیت مزدوج نیز نمی‌توان استفاده نمود و بهترین راه‌حل، استفاده از سیمپلکس اولیه ـ ثانویه (سیمپلکس ضربدری) می‌باشد.

نتایج حاصله:

☜ **نکته:** هرگونه تغییر در ضرایب تکنولوژی یک متغیر پایه‌ای بر موجه بودن مسئله تأثیر می‌گذارد.
$(\bar{b} = B^{-1}.b)$

☜ **نکته:** هرگونه تغییر در ضرایب تکنولوژی یک متغیر پایه‌ای بر مقدار تابع هدف می‌تواند تأثیر بگذارد.

$(Z = C_B . B^{-1}.b)$

☜ **نکته:** هرگونه تغییر در ضرایب تکنولوژی یک متغیر پایه‌ای بر بهینگی مسئله تأثیر می‌گذارد.

$(Z_j - C_j) = C_B . B^{-1}.a_j - C_j$

نکات مهم:

۱ـ اگر مسئله از حالت بهینگی خارج گردد از سیمپلکس اولیه جهت حل استفاده می‌شود.

۲ـ اگر مسئله از حالت موجه خارج گردد از سیمپلکس ثانویه جهت حل استفاده می‌شود.

۳ـ اگر مسئله از حالت بهینگی و موجه خارج گردد از سیمپلکس اولیه ـ ثانویه (ضربدری) جهت حل استفاده می‌شود.

۵ـ۴ـ تعیین حدود ضرایب به گونه‌ای که جواب بهینه تغییر نکند.

قبل از بیان حالتهای مختلف این بخش لازم است یادآوری گردد که می‌توان با کمک حدود ضرایب نیز تأثیر تغییرات ضرایب مطرح شده در بخش الف را بر جواب بهینه بررسی کرد. به این ترتیب اگر مقدار جدید در محدودهٔ مجاز ضریب موردنظر قرار داشت موجه بودن یا بهینگی تغییر نمی‌کند در غیر اینصورت تغییرات مؤثر خواهد بود.

۵ـ۴ـ۱ـ تعیین حدود ضرایب متغیرهای غیرپایه‌ای در تابع هدف

از آنجائی‌که هرگونه تغییر در متغیرهای غیرپایه‌ای تابع هدف باعث تغییر C_j و در نتیجه $\overline{C}_j = Z_j - C_j = C_B . B^{-1}.a_j - C_j$ می‌شود. بنابراین باید حدود را به گونه‌ای تعریف کرد که در حالت Max مقدار $\overline{C}_j = Z_j - C_j \geq 0$ باقی بماند.

☜ **نکته:** اگر بخواهیم حدود تغییرات ضرایب متغیرهای غیرپایه را محاسبه کنیم این تغییرات فقط برروی ضرایب ستونی خود آن متغیر (a_j) موثر بوده و بر بقیه ستونها تأثیری ندارد. همچنین این تغییرات تأثیر بر C_B نخواهد داشت.

شبه قیمت (قیمت سایه یا قیمت ثانویه): مشتق تابع هدف نسبت به مقادیر سمت راست برابر شبه قیمت می‌باشد در جدول بهینهٔ مسئلهٔ اولیه در حالت Max مقدار شبه قیمت، اعداد موجود در زیر متغیرهای کمکی در سطر صفر تابع هدف می‌باشد ($\overline{C}_j$ مربوط به متغیرهای کمکی) و در جدول بهینهٔ مسئلهٔ ثانویه در حالت Min اعداد سمت راست مربوط به y_i ها می‌باشد پس در حالت بهینگی جداول اولیه (Max) و ثانویه (Min) شبه قیمت بصورت زیر است:

y_j یا $\overline{b}_j$ مسئله ثانویه (Min) = $\overline{C}_j$ متغیرهای کمکی مسئله اولیه (Max)

و یا:

شبه قیمت (قیمت سایه) $\dfrac{\partial z}{\partial b_j} = y_j$ $\qquad$ $Z = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots$

نکته: در حالت بهینه اگر تابع هدف بصورت z- باشد آنگاه شبه قیمت‌ها در منفی ضرب می‌شود.

نکته: در جداول غیر از جداول بهینه، به اعداد زیر متغیرهای کمکی در سطر صفر، سهم مشارکت در سود آن منبع می‌گویند.

نکته: هرگاه میزان موجودی یک منبع به صفر نرسیده باشد، قیمت سایه آن صفر و برعکس، هنگامی که موجودی یک منبع به صفر رسیده باشد قیمت سایه آن غیر صفر خواهد شد.

نکته: اگر قیمت سایه یک منبع از قیمت بازار آن بیشتر باشد آنگاه تا جایی که این رابطه برقرار نباشد باید میزان استفاده از آن منبع را افزایش دهیم.

نکته: منبعی که قیمت سایه‌ای بیشتری دارد بهتر است افزایش یابد و برعکس.

نکته: در هر مسئله در مراحل مختلف، مشتق تابع هدف نسبت به متغیر jام برابر هزینه تقلیل یافته آن متغیر می‌باشد $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x_j} = \overline{C}_j\right)$ هزینه تقلیل یافته برای متغیرهای غیرپایه‌ای تعریف شده و ضریب آن متغیر در سطر صفر جدول نهایی می‌باشد.

نکات اساسی:

۱ـ اگر تابع هدف بصورت Max باشد حدود ضرایب متغیرهای غیرپایه x_j (C_j') چنین تعریف می‌شود:

هزینه تقلیل یافته متغیر x_j $(\overline{C}_j)$ + ضریب متغیر x_j در تابع هدف اولیه $(C_j) \geq C_j'$

$\overline{C}_j = C_B . B^{-1} . a_j - C_j$ $\quad , \quad$ میزان تغییر $\theta \leq \overline{C}_j$

۲ـ اگر تابع هدف بصورت Min باشد حدود ضرایب متغیرهای غیرپایه $x_j(C'_j)$ چنین تعریف می‌شود.

هزینه تقلیل یافته متغیر $x_j(\overline{C}_j)$ + ضریب متغیر x_j در تابع هدف اولیه $(C_j) \geq C'_j$

۳ـ مقدار ضریب متغیر x_j در تابع هدف اولیه (C_j) باید در حدودی که برای این متغیر بدست می‌آوریم، صدق نماید.

۵ـ۴ـ۲ـ تعیین حدود ضرایب متغیرهای پایه‌ای در تابع هدف

در این شرایط، پارامتر C_B تغییر کرده و باعث تغییر در ضرایب تمام متغیرهای غیرپایه در تابع هدف $(\overline{C}_j = Z_j - C_j)$ می‌شود بنابراین جهت تعیین حدود تغییرات ضرایب متغیرهای پایه‌ای تابع هدف مقادیر تابع $\overline{C}_j = Z_j - C_j = C_B . B^{-1} . N - C_j$ را با دخالت دادن مقدار پارامتر θ جهت کلیه متغیرهای غیرپایه‌ای محاسبه نموده و اشتراک نواحی حاصله، جواب نهایی خواهد شد.

نکات اساسی

۱ـ اگر تابع هدف بصورت Max باشد حدود ضرایب متغیرهای پایه را با کمک ضرایب متغیرهای غیرپایه‌ای حساب می‌کنیم. در این حالت باید $\overline{C}_N \geq 0$ باشد یعنی:

$$\overline{C}_N = C_B . B^{-1} . N - C_N = C_B . \overline{N} - C_N \geq 0 \quad \text{و یا} \quad \overline{C}_N = (C_{B_j} + \theta_j) B^{-1} . N - C_N \geq 0$$

۲ـ اگر تابع هدف بصورت Min باشد علامت به صورت $\overline{C}_N \leq 0$ خواهد بود.

۳ـ مقدار ضرایب متغیر x_{B_j} در تابع هدف اولیه باید در حدود حاصل شده صدق نماید.

۵ـ۴ـ۳ـ تعیین حدود اعداد سمت راست

برای بدست آوردن حدود تغییرات b باید رابطه $\overline{b} = B^{-1} . b \geq 0$ برقرار باشد این وضعیت چه در حالت Max و چه در حالت Min باید صادق باشد سپس با استفاده از اشتراک مقادیر حاصله از رابطه فوق حدود ضرایب بدست می‌آید. در این وضعیت نیز باید مقدار b در جدول اولیه در حدود تعریف شده جدید صدق نماید.

۵ـ۴ـ۴ـ تعیین حدود ضرایب تکنولوژیکی (فنی) جهت متغیرهای غیرپایه‌ای

هرگونه تغییر در ضرایب تکنولوژیکی باعث تغییر a_j و در نتیجه تغییر در

$\overline{C}_j = Z_j - C_j = C_B . B^{-1} . a_j - C_j$ شده و ممکن است باعث بهم خوردگی بهینگی مسئله گردد بنابراین حدود به گونه‌ای تعریف می‌شود که بهینگی مسئله حفظ شود.

نکات اساسی:

۱ـ اگر تابع هدف بصورت $Max\ Z$ باشد آنگاه $\overline{C}_j \geq 0$ و اگر $Max\ (-Z)$ باشد آنگاه $\overline{C}_j \leq 0$

۲ـ اگر تابع هدف بصورت $Min\ Z$ باشد آنگاه $\overline{C}_j \leq 0$ و اگر $Min\ (-Z)$ باشد آنگاه $\overline{C}_j \geq 0$

۳ـ حدود تغییرات a_{ij} می‌تواند از ∞ - تا ∞ + باشد با این وجود باید مقدار a_{ij} مسئله اولیه در حدود تعریف شده جدید صدق نماید.

۵ـ۴ـ۵ـ تعیین حدود ضرایب تکنولوژیکی (فنی) جهت متغیرهای پایه‌ای

هرگاه بخواهیم حدود تغییرات ضرایب تکنولوژیکی متغیرهای پایه را بررسی نمائیم باتوجه به اینکه در این حالت ماتریس B و B^{-1} تغییر می‌کند بهتر است که مسئله را از ابتدا حل نمود ضمن اینکه می‌توان با تشکیل B و B^{-1} با وجود پارامتر مجهول صحت روابط $\overline{C}_N \geq 0$ و $\overline{b} \geq 0$ را بررسی نموده و حدود مشترک را به گونه‌ای بدست آورد که پایه بهینه فعلی عوض نشود.

بعنوان مثال اگر داشته باشیم $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ و بخواهیم حدود $a_{21} = \theta$ را بدست آوریم داریم:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \theta \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{\theta} \\ 0 & \frac{1}{\theta} \end{bmatrix}$$

$$\overline{b} = B^{-1} . b \qquad \overline{C}_N = C_B . B^{-1} . N - C_N$$

۵ـ۵ـ تأثیر تغییرات ساختاری مسائل برنامه‌ریزی بر جواب بهینه

۵ـ۵ـ۱ـ اضافه کردن یک متغیر جدید

الف) اگر متغیر جدیدی به مسئله اضافه شود در اینصورت بر $\overline{C}_j = Z_j - C_j = C_B . B^{-1} . a_j - C_j = y . a_j - C_j$ اثر می‌گذارد فلذا متغیر جدید x_j را به ستونهای جدول نهایی اضافه نموده و $\overline{C}_j$ آنرامحاسبه می‌کنیم اگر در حالت Max مقدار $\overline{C}_j \geq 0$ باشد اضافه نمودن متغیر جدید تأثیری در بهینگی مسئله نداشته و اگر $\overline{C}_j \leq 0$ باشد در اینصورت بهینگی

مسئله بهم می‌خورد و متغیر x_j وارد پایه شده و با تست حداقل نسبت، متغیر خروجی را یافته و با کمک سیمپلکس معمولی تا رسیدن به جواب بهینه، حل مسئله را ادامه می‌دهیم. در حالتی‌که تابع هدف بصورت Min باشد اگر $\overline{C}_j \leq 0$ باشد بهینگی مسئله حفظ و در حالت $\overline{C}_j \geq 0$ مسئله دیگر بهینه نخواهد بود.

ب) در روش بعدی محدودیت مزدوج مربوط به متغیر جدید نوشته شده و جوابهای دوگان را از سطر صفر تابع هدف بدست آورده و در داخل محدودیت امتحان می‌کنیم اگر جوابهای دوگان (y) در محدودیت صدق نمود مسئله بهینه باقی‌مانده در غیر اینصورت از بهینگی خارج می‌شود.

نتایج حاصله:

☜ **نکته:** اضافه نمودن یک متغیر جدید تأثیری بر موجه بودن مسئله ندارد.

☜ **نکته:** اضافه نمودن یک متغیر جدید ممکن است مقدار تابع هدف را تغییر دهد (در صورت ورود به پایه)

☜ **نکته:** اضافه نمودن یک متغیر جدید ممکن است بر بهینگی مسئله تأثیر بگذارد $(\overline{C}_j = Z_j - C_j)$

☜ **نکته:** اضافه نمودن یک متغیر جدید می‌تواند باعث بهتر شدن جواب بهینه گردد (نمی‌تواند بدتر کند)

☜ **نکته:** در صورت ورود متغیر جدید به پایه با کمک سیمپلکس اولیه مسئله به جواب بهینه خواهد رسید.

۵-۵-۲- حذف یک متغیر غیراساسی (غیرپایه‌ای)

هرگاه متغیری در پایه (بهینه) نباشد برای حذف آن کافیست فقط ستون آن متغیر را از مسئله و جدول سیمپلکس حذف کنیم این حذف هیچ تأثیری بر مقدار تابع هدف، موجه بودن مسئله و یا بهینگی مسئله نخواهد داشت.

۵-۵-۳- حذف یک متغیر اساسی (پایه‌ای)

هرگاه متغیری در پایه باشد ابتدا باید متغیر را از پایه خارج نمود جهت این کار به کمک سیمپلکس ثانویه متغیر موردنظر را بعنوان متغیر خروجی در نظر گرفته و با کمک تست حداقل نسبتها متغیر ورودی را مشخص کرده و وارد پایه می‌نمائیم و جدول را تا رسیدن به حل بهینه ادامه می‌دهیم. سپس

ستون آن متغیر را از جدول سیمپلکس حذف می‌نمائیم. در طی مراحل حل جهت رسیدن به جواب بهینه نباید متغیر موردنظر وارد پایه گردد.

نتایج حاصله:

نکته: حذف یک متغیر اساسی ممکن است مقدار تابع هدف را تغییر دهد (جواب بهینه می‌تواند بدتر شود).

نکته: حذف یک متغیر اساسی ممکن است بر موجه بودن جوابهای اساسی تأثیر داشته باشد.

نکته: حذف یک متغیر اساسی ممکن است بر بهینگی مسئله تأثیر بگذارد $(\overline{C}_j = Z_j - C_j)$

۵-۵-۴-اضافه کردن یک محدودیت جدید

در صورت اضافه نمودن یک محدودیت جدید به مسئله، جوابهای بهینه فعلی را در محدودیت جدید قرار می‌دهیم اگر صدق نمود و رابطه برقرار بوده محدودیت جدید تأثیری در مسئله و جواب بهینه نخواهد داشت. در صورتی که جواب بهینه فعلی در محدودیت جدید صدق ننماید آنگاه محدودیت جدید را به شکل کوچکتر مساوی ($\leq$) تبدیل نموده و با کمک متغیر کمکی محدودیت را به تساوی تبدیل می‌نمائیم. حال متغیر کمکی متناظر با محدودیت جدید را به آخر سطر مربوط به متغیرهای اساسی و ستون مربوط به متغیرهای کمکی اضافه کرده، ضرایب محدودیت جدید را وارد جدول نموده و با کمک روش سیمپلکس ثانویه تا رسیدن به جواب بهینه مسئله را ادامه می‌دهیم:

مثال: مسئله زیر و جدول بهینه آن را در نظر بگیرید:

$$Max\ Z = -۵x_۱ + ۵x_۲ + ۱۳x_۳$$
$$-x_۱ + x_۲ + ۳x_۳ \leq ۳$$
$$۱۳x_۱ + ۴x_۲ + ۱۰x_۳ \leq ۹۰$$
$$x_۱, x_۲, x_۳ \geq ۰$$

Max	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	$s_۱$	$s_۲$	RHS
z	۰	۰	۲	۵	۰	۱۰۰
$x_۲$	−۱	۱	۳	۱	۰	۲۰
$s_۲$	۱۶	۰	−۲	−۴	۱	۱۰

اگر محدودیتی به صورت $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 50$ به مسئله اضافه شود چه تأثیری در جواب بهینه خواهد داشت؟

$$2(0)+3(20)+5(0)=60 \not\leq 50 \Rightarrow 2x_1+3x_2+s_3=50$$

I) اضافه نمودن محدودیت جدید

Max	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	RHS	
z	۰	۰	۲	۵	۰	۰	۱۰۰	
x_2	−۱	۱	۳	۱	۰	۰	۲۰	
s_2	۱۶	۰	−۲	−۴	۱	۰	۱۰	(I)
s_3	۲	۳	۵	۰	۰	۱	۵۰	
z	۰	۰	۲	۵	۰	۰	۱۰۰	
x_2	−۱	۱	۳	۱	۰	۰	۲۰	
s_2	۱۶	۰	−۲	−۴	۱	۰	۱۰	(II)
s_3	۵	۰	−۴	−۳	۰	۱	−۱۰	

II) یکه نمودن ستون x_2 و ادامه دادن حل جدول با روش سیمپلکس ثانویه که در آن s_3 از پایه خارج می‌شود.

جواب بهینه: $x_2=\frac{25}{2}$, $x_3=\frac{5}{2}$, $z=95$

نتایج حاصله:

☜ **نکته:** اضافه نمودن یک محدودیت جدید تاثیری بر شرط بهینگی مسئله ندارد.

☜ **نکته:** اضافه نمودن یک محدودیت جدید می‌تواند بر موجه بودن مسئله تاثیر داشته باشد.

☜ **نکته:** اضافه نمودن یک محدودیت جدید ممکن است مقدار تابع هدف را تغییر دهد (جواب بهینه می‌تواند بدترشود)

☜ **نکته:** اضافه نمودن یک محدودیت جدید می‌تواند جواب پایه اساسی را تغییر دهد.

اگر محدودیت بصورت مساوی (=) باشد ممکن است جواب داشته یا نداشته باشیم.

۵-۵-۵- حذف یک محدودیت

در این شرایط دو حالت اتفاق خواهد افتاد:

۱ـ در حالت اول متغیر کمکی متناظر با آن محدودیت در پایه قرار ندارد و در نتیجه مقدار آن صفر است. در این‌صورت آن محدودیت فعال می‌باشد. بنابراین متغیر کمکی متناظر را با روش سیمپلکس معمولی وارد پایه نموده و با کمک تست حداقل نسبتها متغیر دارای شرایط خروج را از پایه خارج می‌کنیم سپس سطر و ستون متغیر کمکی متناظر آن محدودیت را از جدول حذف نموده و جدول را تا رسیدن به حل بهینه ادامه می‌دهیم.

۲ـ در حالت دوم متغیر کمکی متناظر با آن محدودیت در پایه قرار دارد و در نتیجه مقدار آن صفر نمی‌باشد در این صورت آن محدودیت فعال نبوده و به راحتی می‌توان سطر و ستون متغیر کمکی متناظر آن محدودیت را بدون تغییر در جواب بهینه از جدول سیمپلکس حذف نمود.

نتایج حاصله:

☜ **نکته:** حذف یک محدودیت بر موجه بودن مسئله تأثیری نخواهد داشت.

☜ **نکته:** حذف یک محدودیت ممکن است مقدار تابع هدف را تغییر دهد (جواب بهینه می‌تواند بهتر شود)

☜ **نکته:** حذف یک محدودیت ممکن است جواب پایه اساسی را تغییر دهد.

۵ـ۶ـ قانون صد در صد

چنانچه بخواهیم تأثیر تغییرات همزمان چند پارامتر را در مسئله بدانیم می‌توان از قانون ۱۰۰٪ و فرمولهای زیر استفاده نمود.

$$\sum_{C_i}\left(\frac{\text{مقدار تغییرات حاصله}}{\text{حداکثر تغییرات مجاز}}\right) = \text{تغییرات همزمان ضرایب تابع هدف}$$

$$\sum_{b_i}\left(\frac{\text{مقدار تغییرات حاصله}}{\text{حداکثر تغییرات مجاز}}\right) = \text{تغییرات همزمان مقادیر سمت راست}$$

اگر مقدار عبارات فوق کمتر از یک (یا ۱۰۰٪) باشد آنگاه تغییرات همزمان فوق تاثیری بر جواب بهینه نداشته و در غیر اینصورت با کمک سیمپلکس مسئله را تا رسیدن به حل بهینه ادامه می‌دهیم.

۵ـ۷ـ برنامه‌ریزی پارامتریک

در برنامه‌ریزی پارامتری، مدل علاوه براینکه تحت تأثیر پارامترها و متغیرهایی است که در

برنامه‌ریزی خطی تعریف می‌شود، تحت تاثیر پارامتر دیگر که معمولاً با θ نمایش داده می‌شود نیز واقع می‌شود. برنامه‌ریزی پارامتری از نظر عملیاتی و محاسباتی بسیار شبیه آنالیز حساسیت می‌باشد با این تفاوت که در تحلیل حساسیت تغییرات پارامترها را بطور مستقل از یکدیگر مورد بررسی قرارمی دهیم ولی در برنامه‌ریزی پارامتری تغییر پارامترها بطور همزمان محاسبه شده و تغییرات پیوستهٔ پارامترها در فواصل مشخصی بررسی می‌شود در برنامه‌ریزی خطی پارامتری ۴ حالت زیر مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۱ـ برنامه‌ریزی پارامتری ضرایب تابع هدف (C_j)

۲ـ برنامه‌ریزی پارامتری اعداد سمت راست (b_i)

۳ـ برنامه‌ریزی پارامتری ضرایب فنی (a_{ij})

۴ـ برنامه‌ریزی پارامتری همزمان ضرایب تابع هدف، اعداد سمت راست و ضرایب فنی

۵ـ۷ـ۱ـ برنامه‌ریزی پارامتری ضرایب تابع هدف (C_j)

مدل کلی برنامه‌ریزی پارامتری ضرایب تابع هدف بصورت زیر تعریف می‌گردد.

$$Max \text{ یا } (Min)\ Z(\theta) = \sum_{j=1}^{n} (c_j + \alpha_j \theta) x_j$$

$$S.t: \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le (\text{یا } \ge \text{ یا } =)\ b_i & i = 1, 2, \dots, m \\ x_j \ge 0 \quad , \quad \theta > 0 \end{cases}$$

که در آن:

θ: متغیری است مثبت که برای نشان دادن اثر تغییرات ناشی از عوامل تولید روی میزان سود فعالیتها بکار می‌رود.

α_j: مقدار ثابتی است که معرف آهنگ نسبی تغییرات تابع هدف می‌باشد و در واقع میزان افزایش یا کاهش فعالیتها را نمایش می‌دهد.

☜ **نکته:** در برنامه‌ریزی پارامتری α_j تغییرات را نمایش می‌دهد و θ اثر این تغییرات را بر موجه بودن یا بهینه بودن جواب نشان می‌دهد.

الگوریتم حل تغییرات پارامتری C_j

گام اول: مسئله را با روش سیمپلکس به ازاء $\theta = 0$ حل کرده تا به جواب بهینه برسیم.
گام دوم: با استفاده از روش تحلیل حساسیت، تغییر ضرایب تابع هدف $\Delta C_j = \alpha_j \theta$ را در سطر صفر وارد می‌کنیم.
گام سوم: مقدار θ را آنقدر افزایش می‌دهیم تا ضریب یکی از متغیرهای غیراساسی در سطر صفر منفی شود (و یا θ تا حداکثر مقدار مجاز تعیین شده افزایش یابد) اگر چنین متغیری وجود نداشت به جواب بهینه رسیده‌ایم.
گام چهارم: متغیری که ضریب آن منفی شده بعنوان متغیر ورودی انتخاب و جواب جدید را محاسبه نموده و به گام سوم برمی‌گردیم.

نکته: هر نمودار ترسیمی θ و $Z(\theta)$ به ازای θ های محاسبه شده در برنامه‌ریزی پارامتری ضرایب تابع هدف در صورتی که تابع هدف Max باشد بصورت یک خط شکسته محدب $(\vee)$ بوده و در حالت Min بصورت یک خط شکسته مقعر $(\wedge)$ می‌باشد.

نکته: تغییرات پارامتری (C_j) می‌تواند بر بهینگی مسئله تأثیر بگذارد ولی بر موجه بودن مسئله تأثیری نخواهد داشت.

۵-۷-۲- برنامه‌ریزی پارامتری اعداد سمت راست (b_i)

فرم عمومی این مدل بصورت زیر است:

$$Max \text{ یا } (Min)\ Z(\theta) = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j$$

$$S.t: \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le (\text{یا } \ge \text{ یا } =) b_i + \alpha_i \theta & i = 1, 2, \ldots, m \\ x_j \ge 0 \quad , \quad \theta > 0 \end{cases}$$

الگوریتم حل تغییرات پارامتری b_i:

گام اول: مسئله را با روش سیمپلکس به ازاء $\theta = 0$ حل نموده و جواب بهینه را بدست می‌آوریم.
گام دوم: با استفاده از تحلیل حساسیت اثر تغییرات در مقادیر سمت راست محدودیتها $(\Delta b_i = \alpha_i \theta)$ را در ستون سمت راست جدول محاسبه می‌کنیم.
گام سوم: مقدار θ را آنقدر افزایش می‌دهیم (یا به اندازه حداکثر مقدار مجاز تعیین شده) تا مقدار یکی از متغیرهای اساسی در ستون سمت راست منفی شود. اگر چنین متغیری یافت نشد به جواب بهینه

رسیده‌ایم.

گام چهارم: متغیر منفی را بعنوان متغیر خروجی انتخاب و با روش سیمپلکس ثانویه جواب جدید را بدست آورده و به گام سوم باز می‌گردیم.

☜ **نکته:** نمودار ترسیمی θ و $Z(\theta)$ به ازاء θ های محاسبه شده در برنامه‌ریزی پارامتری اعداد سمت راست وقتی که تابع هدف بصورت Max باشد یک خط شکسته مقعر (V) بوده و در حالت Min بصورت یک خط شکسته محدب (Λ) می‌باشد.

☜ **نکته:** اعمال تغییرات پارامتری b_i می‌تواند بر موجه بودن مسئله تأثیر بگذارد ولی تأثیری بر بهینگی نخواهد داشت.

۵-۷-۳- برنامه‌ریزی پارامتری ضرایب فنی (a_{ij})

فرم عمومی این مدل چنین است.

$$Max \text{ یا } (Min)\, Z(\theta) = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j$$

$$S.t: \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + \alpha_i \theta) \leq (\text{یا} \geq \text{یا} =)\, b_i & i = 1, 2, \ldots, m \\ x_j \geq 0 \quad , \quad \theta > 0 \end{cases}$$

در این حالت ابتدا مسئله با $\theta=0$ حل نموده تا جواب بهینه بدست آید سپس با استفاده از روش تحلیل حساسیت a_{ij} های جدید و S_j' های جدید را بدست می‌آوریم. برای متغیرهای غیراساسی مسئله وقتی بهینه می‌باشد که S_j' های مثبت باشد. برای متغیرهای اساسی بعد از بدست آوردن a_{ij} و S_j' های جدید ابتدا بردارهای مربوط به متغیرهای اساسی را یکه کرده و سپس بهینگی یا موجه بودن مسئله را بررسی نموده و باکمک سیمپلکس ثانویه (غیرموجه بودن مقادیر سمت راست) یا سیمپلکس اولیه (غیربهینه بودن سطر صفر) مسئله را حل می‌کنیم.

☜ **نکته:** اعمال تغییرات پارامتری ضرایب فنی (a_{ij}) می‌تواند بر موجه بودن یا بهینگی مسئله تأثیرگذار باشد.

۵-۷-۴- برنامه‌ریزی پارامتری همزمان ضرایب تابع هدف، اعداد سمت راست و ضرایب فنی

فرم عمومی این مدل بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$(Min)\, Z(\theta) = \sum_{j=1}^{n} (C_j + \alpha_j \theta)\, x_j$$

$$S.t: \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} (a_i + \alpha_i \theta) x_j \leq (\text{یا} \geq \text{یا} =) b_i + \alpha_i \theta \\ x_j \geq 0 \quad , \quad \theta > 0 \end{cases}$$

الگوریتم حل بصورت زیر می‌باشد:

گام اول: مسئله را با روش سیمپلکس به ازاء $\theta = 0$ حل نموده تا جواب بهینه حاصل شود.

با استفاده از تحلیل حساسیت اثر تغییرات Δb_i , Δc_j , Δa_{ij} را محاسبه نموده و در جدول نهایی اعمال می‌کنیم.

مقدار θ را آنقدر افزایش می‌دهیم (یا به اندازه حداکثر مقدار مجاز تعیین‌شده) تا مقدار یکی از متغیرهای اساسی در ستون سمت راست و یا ضریب یک متغیر غیراساسی در سطر صفر منفی گردد. اگر چنین متغیری پیدا نشد به جواب بهینه رسیده‌ایم.

از این متغیر بعنوان متغیر اساسی خروجی (در صورتی‌که یکی از اعداد سمت راست منفی گردد) یا متغیر اساسی ورودی (در صورتی‌که مقدار یکی از متغیرهای غیراساسی در سطر صفر منفی گردد) استفاده نموده و به ترتیب با روش سیمپلکس ثانویه یا اولیه جواب جدید را بدست آورده و به گام سوم باز می‌گردیم.

☜ **نکته:** اعمال تغییرات پارامتری همزمان C_j و b_i و a_{ij} می‌تواند بر موجه بودن یا بهینگی مسئله تاثیرگذار باشد