

ریاضی عمومی:

منابع:

دکتر مسعود نیکوکار - توابع عددی و برداری (دکتر امیر هوشنگ یمینی) - توماس

## توابع چند متغیره:

تابع  $D \rightarrow E: f$  را یک تابع 2 متغیره گوئیم هرگاه:

$$\forall (x, y) \in E \quad \exists z \in D \quad \text{s.t.} \quad f(x, y) = z$$

$$E = \{(X, Y) | X, Y \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

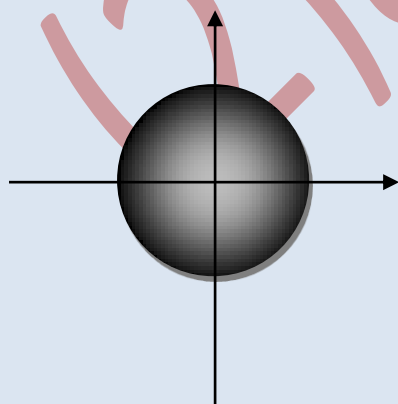
$$D = \{z | z \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}$$

(دامنه تابع قسمتی از صفحه است و برد تابع دامنه ای از اعداد حقیقی است)

$$f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

دامنه و برد تابع زیر را بیابید؟

$$9 - x^2 - y^2 \geq 0 \rightarrow x^2 + y^2 \leq 9 \quad \text{اگر} \quad x^2 + y^2 = 9 \rightarrow 3 \text{ شعاع } O(0,0) \text{ به مرکز}$$

دامنه: دیسک تو پر به مرکز  $O(0,0)$  و شعاع (3)

برد:

$$x^2 + y^2 \geq 0$$

$$-x^2 - y^2 \leq 0 \rightarrow 9 - x^2 - y^2 \leq 9 \rightarrow 0 \leq \sqrt{9 - x^2 - y^2} \leq 3$$

$$R_f \in [0,3] \text{ یا } 0 \leq R_f \leq 3$$

$R_f$  برد است.

نکته:

معادلات صفحه

$$1- (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

دایره ای به مرکز  $O \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$  و شعاع  $R$

$$2- \frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$$

بیضی به مرکز  $O \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$  و نیم اقطار (قطر)  $b, a$

$$3- \frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$$

هذلول به مرکز  $O \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$  و نیم اقطار  $b, a$

تمرین: دامنه توابع زیر را بیابید؟

$$f(x,y) = \ln\left(\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}\right) > 0$$

$$f(x,y) = \sin^{-1}(x, y)$$

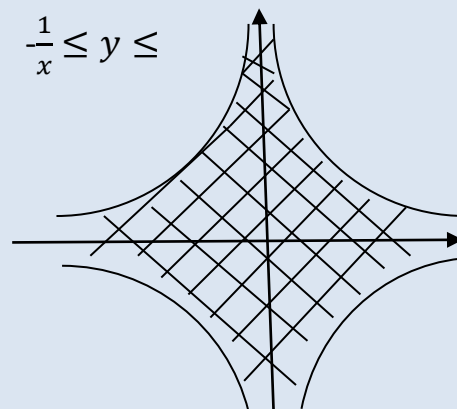
$$\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} > 0$$

$$-1 \leq xy \leq 1 \quad \frac{1}{x} \leq y \leq$$

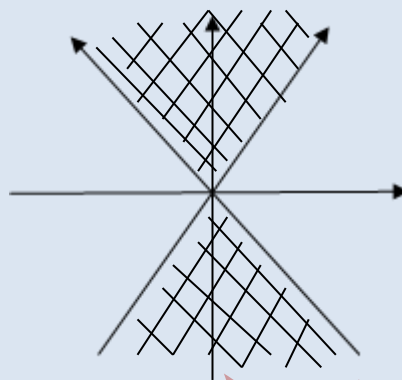
$$x^2 - y^2 > 0 \rightarrow y^2 <$$

$$x^2$$

$$y^2 - x^2 < 0 \rightarrow y^2 - x^2 = 0$$



$$y^2 = x^2 \rightarrow y = \pm x$$



تعریف:

یک چند جمله ای از 2 متغیر  $x, y$  تابعی مانند  $f(x, y)$  از مجموعه جملاتی به فرم  $\alpha x^n y^m$  است که در آن اعداد حقیقی  $m, n \in \mathbb{Z}^+, \alpha \in \mathbb{R}$  هستند و درجه جمله ای برابر است با بزرگترین مجموع توان های  $x, y$  که در چند جمله ای ظاهر می شود.

تابع  $n$  متغیره:

تابعی است که به هر  $n$  تایی مرتب مانند  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  از  $\mathbb{R}^n$  یک عدد حقیقی از بردار منظور می کند.

$$F(x, y, z) = 2x + 3y - z$$

تعریف فاصله 2 نقطه در فضای  $n$  بعدی:

اگر نقطه  $A$  و  $B$  2 نقطه در فضای  $\mathbb{R}^n$  باشند (یعنی  $A, B \in \mathbb{R}^n$ ) آنگاه فاصله آن دو را با نرم

$\|A - B\|$  نمایش می دهند.

$$\|A - B\| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2}$$

حد تابع دو متغیره:

$$\lim_{x \rightarrow a} f_x = l$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ s.t } |x - a| < \delta \quad |f(x) - L| < \epsilon$$

تعریف ریاضی حد تابع دو متغیره:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = l$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ s.t. } \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \quad |f(x,y) - l| < \epsilon$$

مثال: ثابت کنید؟

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} 4x + y = 5$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ s.t. } \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \quad |4x + y - 5| < \epsilon$$

$$|4x + y - 5| = |4x - 4 + y - 1| = |4(x-1) + (y-1)|$$

$$\leq |4(x-1)| + |y-1|$$

$$\leq 4|x-1| + |y-1|$$

$$|x-1| = \sqrt{(x-1)^2} \leq \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} < \delta$$

$$< 4\delta + \delta = 5\delta \quad 5\delta < 4 \quad \delta < \frac{4}{5}$$

$$|y-1| = \sqrt{(y-1)^2} \leq \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} < \delta$$

حدود مکرر:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y)$$

$$\left[ \lim_{x \rightarrow a} \left[ \lim_{y \rightarrow b} f(x,y) \right] \right] = l_{12}$$

$$\left[ \lim_{y \rightarrow b} \left[ \lim_{x \rightarrow a} f(x,y) \right] \right] = l_{21}$$

اگر  $L_{21}, L_{12}$  موجود باشند ولی  $L_{21} \neq L_{12}$  باشد آنگاه تابع دو متغیره در نقطه  $a, b$  حد نخواهد داشت اگر  $L_{21}, L_{12}$

$L_{12}$  وجود باشند و حد تابع نیز موجود باشد (حد تابع برابر با) آنگاه حتما باید  $L_{21} = L_{12}$  باشد.

نکته: با وجود برابر بودن  $L_{21}, L_{12}$  نمی توان گفت که تابع حتما حد دارد زیرا تابع 2 متغیره است نه تک متغیره.

مثال: حد تابع زیر را بررسی کنید؟

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin x - y}{x + \sin y} = \frac{0}{0}$$

$$L_{12} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin x - y}{x + \sin y} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1$$

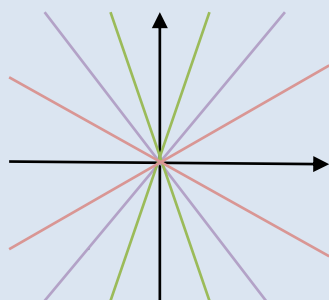
$$L_{21} = \lim_{y \rightarrow 0} \left[ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - y}{x + \sin y} \right] = \lim_{y \rightarrow 0} \left( \frac{-y}{\sin y} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y}{y} = -1$$

پس تابع حد ندارد.  $L_{21} \neq L_{12}$

دسته مسیر های گذرانده از مبدا:

$$Y = mx$$

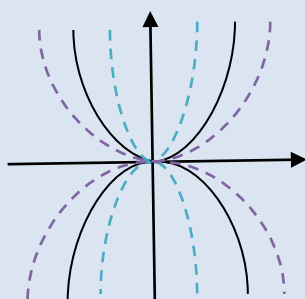
$$X = my$$



دسته خطوط گذرانده از مبدا

$$Y = mx^2$$

$$X = my^2$$

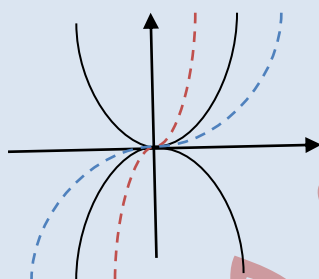


دسته سعی های گذرانده از مبدا

اگر ضابطه منفی بخورد نمودار نسبت به محور X ها قرینه می شد.

$$Y = mx^3$$

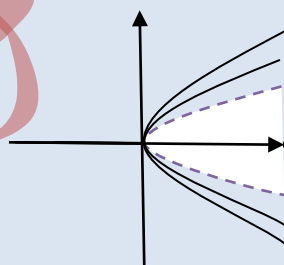
$$X = my^3$$



$$Y = \sqrt{x}$$

$$Y = m\sqrt{x}$$

$$Y = -m\sqrt{x}$$



نکته:

اگر حدی که آن را بررسی می کنیم از لحاظ درجه صورت و مخرج یکسان باشد دسته خطوط  $y=mx$  را استفاده می کنیم. در صورت برابر نبودن درجه صورت و مخرج از مسیرهای کمک می گیریم که صورت و مخرج را هم درجه کنند.

حال صورت و مخرج هم درجه هستند می توان حد راحل کرد.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 + y^2}{x^4 + yx^2} \quad \begin{array}{l} y = mx^2 \\ \text{جاگذاری} \end{array} \quad \frac{x^4 + (mx^2)^2}{x^4 + x^2(mx^2)}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 + mx^4}{x^4 + mx^4} = \frac{x^4(1+m)}{x^4(1+m)} = 1$$

جلسه دوم:

مثال: ثابت کنید که حد روبه رو موجود نیست اما  $0 = L_{12} = L_{21}$  است.

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) \text{ موجود نیست } L_{12} = L_{21} = 0$$

$$L_{12} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \right] = 0$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

$$L_{21} = \lim_{(y \rightarrow 0)} \left[ \lim_{(x \rightarrow 0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \right] = 0$$

$$\frac{\text{دسته مسیر}}{y = mx^2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(mx^2)}{x^4 + (mx^2)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^4}{x^4 + m^2x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^4}{x^4(1+m^2)} = \frac{m}{1+m^2}$$

مهم: با تغییر  $x$  جواب حد تغییر می کند لذا حد ندارد.

$$M=1 \rightarrow \frac{1}{2} \neq m=2 \rightarrow \frac{2}{5}$$

مثال: آیا حد روبرو موجود است.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{my}{x^2 + y^2}$$

چون صورت و مخرج هم درجه هستند (درجه 2) لذا برای این حد مسیرهای مناسب است.

$$\lim_{m \rightarrow 0} \frac{x(mx)}{x^2 + (mx)^2} = \lim_{m \rightarrow 0} \frac{x(mx)}{x^2 + (mx)^2} = \lim_{m \rightarrow 0} \frac{mx^2}{x^2 + m^2x^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

با تغییر  $x$  جواب حد تغییر می کند لذا حد ندارد.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2 y}{x^2 + y^2}$$

تمرین:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2(mx^2)}{x^2 + (mx^2)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^4 m}{x^2 + m^2x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3mx^4}{m^2x^4 + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3mx^4}{x^2(1+m^2)} = \frac{3m}{1+m^2}$$

## پیوستگی تابع دو متغیره:

تابع  $n$  متغیره  $f$  در نقطه  $X_0 \in R^n$  پیوسته است اگر و تنها اگر هر سه شرط زیر برقرار باشد.

1- تابع در نقطه  $X_0$  تعریف شده باشد یعنی  $F(X_0)$  موجود باشد.

2-  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  موجود باشد.

3-  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(X_0)$  حد تابع با مقدار تابع برابر باشد.

مثال: آیا تابع  $f(x,y)$  در  $(0,0)$  پیوسته است.

$$F(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^3 + y^3} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^3 + y^3} \underset{\text{صورت و مخرج هم درجه}}{y=mx} \lim \frac{x^2(mx)}{x^3 + (mx)^2} = \frac{m}{1+m^3}$$

با تغییر  $x$  جواب حد تغییر می کند لذا حد ندارد پس پیوسته نیست.

## انواع ناپیوستگی:

اگر در بررسی پیوستگی تابع  $f$  شرط دوم برقرار نباشد گوئیم ناپیوستگی اساسی است در غیر این صورت ناپیوستگی را رفع شدنی گوئیم.

## تمرین:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x - y} & (x,y) \neq (0,0) \\ h(x) & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

تابع  $h(x)$  را طوری بیابید که تابع  $f(x,y)$  در  $R^2$  پیوسته باشد

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x - y} \Rightarrow$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x-y)(x+y)}{x-y} = 0$$

$$h(x) = 0$$

## تمرین:

آیا تابع روبرو در  $(0,0)$  پیوسته است؟

$$F(x,y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x} =$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2 \sin \frac{x}{y} + y^2 \sin \frac{y}{x}$$

**مشتق:**

$$y = f(x)$$

مشتقات جزئی یا نسبی:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

مشتق تابع یک متغیره (در حالت کلی)

$$f'_x(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta(x)} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

مشتق تابع n متغیره نسبت به x

$$f'_y(x, y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta(y)} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

مشتق تابع n متغیره نسبت به y

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

مشتق تابع در نقطه  $x_0$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right| = \lim \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

مشتق تابع 2 متغیره نسبت به  $x_0$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right| = \lim \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

مشتق تابع 2 متغیره نسبت به  $y_0$

مثال:  $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial x}$  را برای تابع روبرو در نقطه (0 و 1) بدست آورید.

$$F(x, y) = \frac{1}{y} \cos x^2$$

در مشتق گیری نسبت به x هر متغیری که غیر x باشد با آن مانند عدد برخورد می کنیم.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y} (2 \cos x^2)_x = \frac{1}{y} (-2x \sin x^2) = -\frac{2x}{y} \sin x^2 \rightarrow = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \cos x^2 \left( \frac{1}{y} \right) = \cos x^2 \left( \frac{0-1}{y^2} \right) = -\frac{\cos x^2}{y^2} \rightarrow = -1$$

**نکته:** فرمول های مشتق:

$$Y=c \rightarrow y'=0$$

$$Y=x^n \rightarrow nx^{n-1} \Rightarrow y=\sqrt{x} \Rightarrow y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$Y=\sin x \rightarrow y'=\cos x$$

$$Y=\cos x \rightarrow y'=-\sin x$$

$$Y=\tan x \rightarrow y'=1+\tan^2 x$$



$$Y = \cot x \rightarrow y' = -(1 + \cot^2 x)$$

$$Y = L_{nx} \quad y' = \frac{1}{x}$$

$$Y = e^x \quad y' = e^x$$

$$Y = a^x \quad y' = a^x \ln a$$

$$Y = \text{Arcsin } x \quad y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$Y = \text{Arc cos } x \quad y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$Y = \text{Arcc tan } x \quad y' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$Y = \text{Arc cot } x \quad y' = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$Y = u+v \quad y' = u'+v'$$

$$Y = uv \quad y' = u' \cdot v + v' \cdot u$$

$$Y = \frac{u}{v} \quad y' = \frac{u \cdot v' - v \cdot u'}{v^2}$$

$$(n^u) = nu \cdot u^{n-1}$$

جلسه سوم:

مشتق پذیری و دیفرانسیل:

$$\begin{cases} f(x + \Delta x) \simeq f(x) + f'(x, \Delta x) \\ f(x + \Delta x) - f(x) \simeq f'(x, \Delta x) \end{cases}$$

دیفرانسیل تابع دو بعدی (دو متغیره):

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \simeq f(x, y) + f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y$$

لغو تابع دو متغیره:

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y) \simeq f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y$$

$$d_f = f'_x \Delta x + f'_y \Delta y$$

مثال :

استوانه ای به شعاع 4cm و ارتفاع 5cm مفروض است اگر شعاع را به 3/9 و ارتفاع آن را به 5/2 برسانیم چه تغییری در حجم به وجود می آید؟

$$V(r,h)=\pi r^2 h$$

$$V_r(r,h)=2\pi r h$$

$$V_h(r,h)=\pi r^2$$

$$\Delta r = -0/1 \quad \Delta h = +0/2$$

$$\Delta v = v_2(r,h)\Delta r + v_h(r,h)\Delta h$$

$$= 2\pi r h(-0/1) + \pi r^2(0/2) = 2\pi(4)(5)(-0/1) + \pi(4)^2(0/2) = -0/8\pi$$

مثال: (قضیه)

اگر  $f(x,y)$  در نقطه  $(x_0, y_0)$  مشتق پذیر باشد آنگاه  $f(x,y)$  در  $(x_0, y_0)$  پیوسته است.

(مثال)

$$f_x(2,2) \quad , \quad f_y(2,2)$$

تابع  $f$  به صورت زیر مفروض است ثابت کنید:ولی تابع در نقطه  $(2,2)$  مشتق پذیر نیست.

$$f(x,y) = \begin{cases} x + y + 4 & x = 2 \text{ یا } y = 2 \\ 3 & x \neq 2, y \neq 2 \end{cases}$$

چون در نقطه  $(2,2)$  ناپیوستگی داریم تنها باید از راه تعریف حل کنیم.

$$f_x(2,2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2+\Delta x, 2) - f(2,2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(2+\Delta x + 2 + 4) - (2+2+4)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{8+\Delta x - 8}{\Delta x} = 1$$

$$f_y(2,2) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(2, 2+\Delta y) - f(2,2)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{(2+2+\Delta y + 4) - (2+2+4)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta y} = 1$$

باید از تابع حد بگیرد تا نشان دهیم پیوسته نیست.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,2)} f(x,y)$$

دو مسیر که از نقطه  $(2,2)$  می گذرند را انتخاب می کنیم و حد را برای آن ها بررسی می کنیم.

$$X=2 \quad \lim_{y \rightarrow 2} 2 + y + 4 = 8$$

پس تابع حد ندارد لذا پیوسته نیست چون  $\neq$

$$Y=x \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (2,2)} 3 = 3$$

پیوسته نیست پس مشکل پذیر هم نیست

قاعده زنجیره ای:

قضیه: فرض کنید تابع  $z=f(x,y)$  مشتق پذیر باشد و  $x=x(r,s)$  و  $y=y(r,s)$  دو تابع دو متغیره باشند به طوری که:

همگی موجود و پیوسته باشند آنگاه:  $\frac{\partial z}{\partial r}, \frac{\partial x}{\partial r}, \frac{\partial y}{\partial r}, \frac{\partial z}{\partial s}, \frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial s}$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r}$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}$$

مثال:

مقدار  $\frac{\partial z}{\partial t}$  را در نقطه  $t = \frac{\pi}{2}$  محاسبه کنید؟  $z = e^{xy^2}$ ,  $m = t \cos t$ ,  $y = t \sin t$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

$$= y^2 e^{xy^2} [ \cos t + t(-\sin t) ] + (2xy) e^{xy^2} (\sin t + t \cos t)$$

$$= (t^2 \sin^2 t) e^{(t \cos t)(t^2 \sin^2 t)} [ \cos t - t \sin t ] + 2(t \sin t)(t \cos t) e^{(t \cos t)(t^2 \sin^2 t)} (\sin t + t \cos t)$$

$$= \frac{\pi}{2} \left( 0 - \frac{\pi}{2} \right) + 0 = \left( \frac{-\pi}{2} \right)^3 = \frac{-\pi^3}{8}$$

مثال:

شعاع استوانه ای با سرعت  $3 \text{ cm/s}$  و ارتفاع آن با سرعت  $5 \text{ cm/s}$  افزایش می یابد حجم این استوانه با چه سرعتی افزایش می یابد زمانی که شعاع  $15 \text{ cm}$  و ارتفاع  $25 \text{ cm}$  است؟

$$\frac{dr}{dt} = 3 \text{ cm/s} \quad r = 15 \text{ cm}$$

$$H = 25 \text{ cm}$$

$$\frac{dh}{dt} = 5 \text{ cm/s} \quad \frac{dv}{dt} = ? \quad v(r,h) = \pi r^2 h$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial h} \cdot \frac{\partial h}{\partial t}$$

$$= (2\pi r h)(3) + \pi r^2 (5) = 6\pi r h + 5\pi r^2 = 6\pi (15)(25) + 5\pi (15)^2 = 2250\pi + 1125\pi$$

$$Z = \sin \frac{x}{y}$$

تمرین: اگر تابع رو به رو مفروض باشند و در آن  $y = \frac{s}{r}$ ,  $x = \frac{r}{s}$  می باشد.

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r}$$

را محاسبه کنید؟  $\frac{dz}{ds}, \frac{dz}{dr}$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \left(\frac{1}{y} \cos \frac{x}{y}\right) \left(\frac{1}{s}\right) + \left(\frac{-x}{y^2}\right) \left(\cos \frac{x}{y}\right) \left(\frac{-s}{r^2}\right) = \left(-\frac{1}{y} \cos \frac{x}{y}\right) \left[\frac{1}{s} + \frac{x}{y} \cdot \frac{s}{r^2}\right]$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} = \left(\frac{1}{y} \cos \frac{x}{y}\right) \left(\frac{-r}{s^2}\right) + \left(\frac{-x}{y^2}\right) \left(\cos \frac{x}{y}\right) \left(\frac{1}{r}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{y} \cos \frac{x}{y}\right) \left[\frac{-r}{s^2} + \left(\frac{-x}{y}\right) \left(\frac{1}{r}\right)\right]$$

مشتقات منفی: هر گاه  $x, y$  به صورت مخطوط باشد و نتوان آن ها را از هم تفکیک کرد از مشتق ضمنی استفاده می کردیم مانند  $xy^2 = \cos \frac{x}{y}$  در دبیرستان زمانی از مشتق گیری ضمنی استفاده می کردیم که نمی توانستیم متغیر وابسته یعنی  $y$  را در یک طرف تساوی تنها کنیم یا آن را به فرم  $y=f(x)$  بنویسیم. در این صورت از مشتق گیری حتمی استفاده می کردیم هم اکنون نیز اگر نتوانیم متغیر مستقل را از متغیرهای وابسته جدا کنیم از مشتق گیری حتمی استفاده کنیم.

$$F(x, y, z) = 0 \rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f_x}{f_z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{f_y}{f_z}, \quad \frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{f_z}{f_y}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{f_x}{f_y}$$

مثال:

اگر  $\sin xy + \sin xz + \sin yz = 1$  باشد  $\frac{\partial z}{\partial x}$  را محاسبه کنید.

$$F(x, y, z) = 0 \rightarrow \sin xy + \sin xz + \sin yz - 1 = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f_x}{f_z} = -\frac{y \cos xy + z \cos xz}{x \cos xz + y \cos yz}$$

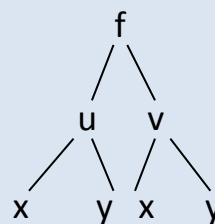
تمرین (خیلی مهم):

اگر  $W=f(x+y, x-y)$  و نسبت به  $u=x+y, v=x-y$  مشتقات جزئی پیوسته داشته باشد نشان دهید.

$$\frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = a \quad \frac{\partial f}{\partial v} = b$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$



$$\left(\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v}\right) \left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\right)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v}\right) \left(\frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \left(\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial v}\right) \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \left(\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial v}\right) \frac{u=x+y \rightarrow x=u-y}{v.x-y \rightarrow y=v-x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial x}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial y} \quad \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} = \left(\frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}\right) = (fu+fv)(fu.fv) = (fu)^2 - (fv)^2$$

جلسه چهارم:

مشتقات جزئی مراتب بالاتر:

$$X = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$X = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$F_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$F_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

مثال:

اگر  $z = x^y$  باشد نشان دهید:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = yx^{y-1} \ln x + x^y \frac{1}{x}$$

$$= yx^{y-1} \ln x + x^{y-1} = x^{y-1} (y \ln x + 1)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \quad \frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1} \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x = x^{y-1} (y \ln x + 1)$$

$$y = \text{Lnu} \quad y = a^u$$

یادآوری:

$$y' = \frac{u'}{u} \quad y' = u' a^u \text{Lna}$$

قضیه:

اگر  $f(x,y)$  تابعه ای دو متغیره با مشتقات جزئی  $f_{yx}, f_{xy}, f_y, f_x$  باشد که همگی آن ها در همسایگی  $(x_0, y_0)$  پیوسته باشند آنگاه:

$$F_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$$

مثال:

اگر  $y=2s-t, x=s+3t, u=x^2+y^2$  نشان دهید:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = 2x(3) + 2y(-1) = 6x - 2y$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} (6x - 2y) = 6 \frac{\partial x}{\partial t} - 2 \frac{\partial y}{\partial t} = 6(3) - 2(-1) = 20$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} = 2x(1) + 2y(2) = 2x + 4y$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = \frac{\partial}{\partial s} (2x + 4y) = 2 \frac{\delta x}{\delta s} + 4 \frac{\delta y}{\delta s} = 2 + 4(2) = 10 = 20$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}$$

**ماکسیمم و مینیمم توابع دو متغیره:**

فرض کنید تابع  $z=f(x,y)$  در همسایگی نقطه  $(x_0, y_0)$  تعریف شده باشند:

الف)  $f$  در  $(x_0, y_0)$  دارای یک مقدار مینیمم نسبی است اگر یک همسایگی از  $(x_0, y_0)$  وجود داشته باشد به

$$f(x,y) \geq f(x_0, y_0) \quad \text{در همسایگی } (x,y) \text{ هر ازای}$$

ب)  $f$  در  $(x_0, y_0)$  دارای یک مقدار ماکسیمم نسبی است اگر یک همسایگی از  $(x_0, y_0)$  وجود داشته باشد به

$$f(x,y) \leq f(x_0, y_0) \quad \text{در همسایگی } (x,y) \text{ هر ازای}$$

ج) اگر  $f$  در  $(x_0, y_0)$  دارای یک ماکسیمم نسبی یا مینیمم نسبی باشد گوییم  $f$  در  $(x_0, y_0)$  دارای یک مقدار

اکسترمم نسبی است و نقطه  $(x_0, y_0)$  را نقطه اکسترمم تابع  $f$  گوییم.

نکته:

اگر در تعاریف بالا همسایگی مورد نظر به دامنه تابع  $f$  ارتقاء داده شود آنگاه نقطه  $(x_0, y_0)$  را اکسترمم مطلق

تابع  $f$  گوییم.

**قضیه:**

اگر  $(x_0, y_0)$  یک نقطه اکسترمم نسبی تابع  $f(x, y)$  باشند آنگاه هر یک از مشتقات جزئی  $f_x(x_0, y_0)$  و  $f_y(x_0, y_0)$  صفر هستند یا وجود ندارند.

**تعریف:**

نقطه  $(x_0, y_0)$  را نقطه بحرانی تابع  $f$  گوئیم هرگاه  $f$  در  $(x_0, y_0)$  مشتق پذیر نباشد یا  $f_x(x_0, y_0)$  و  $f_y(x_0, y_0)$  باشد.

**مثال:**

نقاط اکسترمم تابع رو به رو را بررسی کنید:

$$F(x, y) = y^2 - xy + 2x + y + 1$$

$$F_y = 2y - x + 1 \quad f_y = 0 \quad -x + 1 = -4 \quad x = 5$$

$$f(2, 5) = 7$$

به نظر می یاد که  $(5, 2)$  نقطه اکسترمم نسبی تابع  $f$  باشد.

همسایگی نقطه  $(5, 2)$  را به صورت  $(5+h, 2+k)$  نشان می دهید:

$$F(5+h, 2+k) = (2+k)^2 - (5+h)(2+k) + 2(5+h) + (2+k) + 1$$

$$= 4 + 4k + k^2 - (10 + 2h + 5k + hk) + 10 + 2h + k + 3$$

$$= k^2 - hk + 7 \Rightarrow k(k-h)$$

نکته: بسته به اینکه مقدار  $h, k$  منفی یا مثبت در نظر گرفته شود مقدار همسایگی تغییر کرده لذا  $(5, 2)$  نمی توان اکسترمم گرفت.

$$\begin{cases} k > h \rightarrow (5, 2) & \min \\ k < h \rightarrow (5, 2) & \max \end{cases}$$

**تمرین:**

نقاط اکسترمم تابع رو به رو را در صورت وجود بیابید.

$$F(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{(x, y)^2}$$

$$x + y \neq 0$$

## قضیه آزمون مشتق دوم:

اگر  $(x_0, y_0)$  نقطه بحرانی تابع  $f(x, y)$  باشند و مقام مشتقات نسبی مرتبه اول و دوم در همسایگی  $(x_0, y_0)$  پیوسته باشند آنگاه قرار می دهیم:

$$A = f_{xx}(x_0, y_0)$$

$$B = f_{xy}(x_0, y_0)$$

$$C = f_{yy}(x_0, y_0)$$

مبین تابع مورد نظر را به  $D = B^2 - AC$  صورت قرار می دهیم.

الف) اگر  $D > 0$  نقطه یک نقطه  $(x_0, y_0)$  زمینی است.

ب) اگر  $D = 0$  آزمون نتیجه ای ندارد.

ج) اگر  $D < 0$  نقطه  $A > 0$  نقطه  $(x_0, y_0)$  نقطه min نسبی می شود.

= اگر  $A < 0, D < 0$  نقطه  $(x_0, y_0)$  نقطه max نسبی می شود.

مثال:

ماهیت نقطه بحرانی تابع رو به رو را بررسی کنید.

$$F(x, y) = x^3 + 3xy^2 + 3y^2 - 15x + 2$$

$$f'_x = 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = -1 \end{cases} \quad \begin{aligned} 3x^2 = 15 &\rightarrow x^2 = 5 \rightarrow x = \pm\sqrt{5} \\ 3 + 3y^2 = 15 &\rightarrow 3y^2 = 12 \rightarrow y = \pm 2 \end{aligned}$$

$$f'_y = 6xy + 6y = 0 \quad (x+1) = 0$$

$$\begin{array}{ccc|c} A & B & C & D \\ \hline \sqrt{5} & -\sqrt{5} & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}$$

$$A = f_{xx} = 6x$$

$$B = f_{xy} = 6y$$

$$C = f_{yy} = 6x + 6$$

$$D = 36y^2 - 36x^2 + 36x = 36(y^2 - x^2 + x)$$

$$D = 36(-5 + \sqrt{5}) < 0$$

- ماهیت نقطه  $A \begin{vmatrix} \sqrt{5} \\ 0 \end{vmatrix}$



$$A=6\sqrt{5} > 0$$

در نتیجه نقطه  $A \left| \begin{matrix} \sqrt{5} \\ 0 \end{matrix} \right.$  min نسبی f است.

$$D=36(-5+\sqrt{5}) < 0$$

- ماهیت نقطه  $B \left| \begin{matrix} -\sqrt{5} \\ 0 \end{matrix} \right.$ :

$$A=6(-\sqrt{5}) < 0$$

در نتیجه نقطه  $B \left| \begin{matrix} -\sqrt{5} \\ 0 \end{matrix} \right.$  max نسبی f است.

$$D=36(4-1-1) > 0$$

- ماهیت نقطه  $C \left| \begin{matrix} -1 \\ 2 \end{matrix} \right.$ :

چون d مثبت است پس زینی است.

$$D=36(4-1-1) > 0$$

- ماهیت نقطه  $D \left| \begin{matrix} -1 \\ -2 \end{matrix} \right.$  زینی

جلسه پنجم:

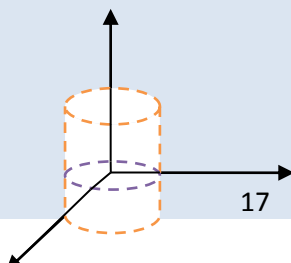
سطح یا رویه:

مکان هندسی نقاطی مانند  $p \left| \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \right.$  که در معادله  $f(x, y, z) = 0$  صدق می کند را یک رویه یا سطح می نامیم.

سطحی که معادله اش نسبت به متغیرهای  $x, y, z$  از درجه دوم باشد سطح یا رویه درجه دوم باشد سطح یا رویه درجه دوم گویند.

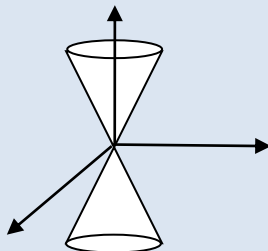
استوانه بیضوی:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



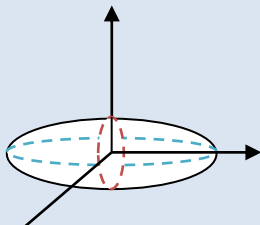
مخروط بیضوی

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$



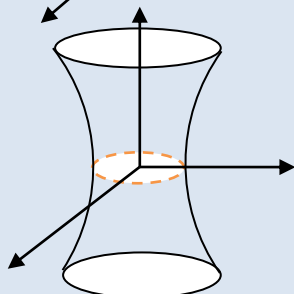
بیضی گون:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



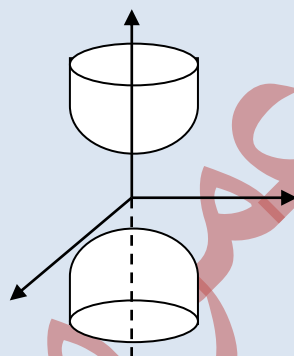
هذلولی گون یکپارچه:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



2 تا هذلولی و یک بیضی (چون شکل جدا نیست یکپارچه می شود).

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

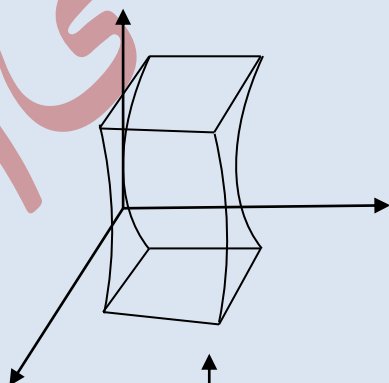


هذلولی گون دو پارچه:

چون از 2 دیدگاه به ما هذلولی می ده و از یک دیدگاه بیضی دو پارچه (چون از هم جداست).

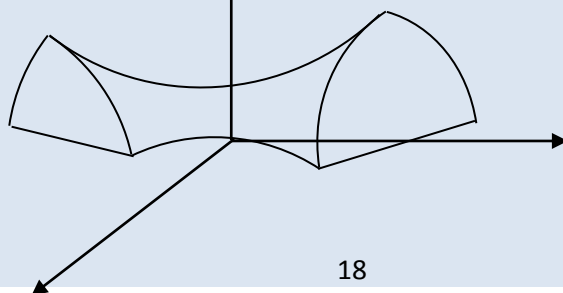
استوانه هذلولی:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

سهمی گون هذلولی



یادآوری:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = R^2 \quad \text{معادله دایره 1)}$$

$$\frac{(x-\alpha)^2}{(a)^2} + \frac{(y-\beta)^2}{(b)^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{معادله بیضی 2)}$$

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{معادله 3) هذلولی}$$

$$(y - \beta)^2 = 4p(x - \alpha) \Rightarrow y^2 = 4px \quad \text{معادله سهمی 4)}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{اثبات معادله:}$$

$$z = 0 \rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$z = k \rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{k^2}{c^2} \Rightarrow \frac{\text{طرفین تقسیم بر}}{(1 - \frac{k^2}{c^2})} \rightarrow \frac{x^2}{a^2(1 - \frac{k^2}{c^2})} + \frac{y^2}{b^2(1 - \frac{k^2}{c^2})} = 1$$

در جایی که نیم اقطار صفر می شود و به نقطه تبدیل می شوند دیگر نمی توان شکل را ادامه داد یعنی  $k > c$  دیگر وجود ندارد

برای مرحله اول  $z = 0$  قرار داده تا شکل در صفحه  $xy$  تشکیل شود سپس برای مرحله دوم  $z = k$  که  $k < c$

است قرار می دهیم که معادله به صورت معادله 2 در می آید سپس از تصمیم معادله فوق بر  $1 - \frac{k^2}{c^2}$  به معادله 3

می رسم چون  $k < c$  است عدد  $\frac{k^2}{c^2}$  کمتر از یک بوده لذا مضرب  $(1 - \frac{k^2}{c^2})$  نیز کمتر از یک است و این نشان

دهنده این است که نیم اقطار بیضی در حال کوچک شدن هستند. اگر  $k > c$  باشد آنگاه مضرب  $(1 - \frac{k^2}{c^2})$  یک

عدد منفی خواهد شد که با صورت معادله تناقض دارد زیرا جمع دو عدد منفی هیچگاه برابر 1 نخواهد شد. سپس نقطه انتهایی محور zها برابر c خواهد شد چون در این فرمول k توان 2 دارد همین استدلال تا -c ادامه می یابد.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

استدلال معادله:

$$z = 0 \rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$$

چون جمع 2 عدد + هرگز -1 نمی شود پس این معادله هیچوقت در کف موجود نیست.

$$z = c \rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{c^2}{c^2} = -1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$

## انتگرال دو گانه:

فرض کنید  $f(x, y)$  یک تابع در متغیره باشد که بر ناحیه R تعریف شده باشد اگر عددی چون L یافت شود به طوریکه برای هر  $\varepsilon$  مثبت، دلتای مثبتی وجود داشته باشد به قسمتی که برای هر افراز  $\Delta$  که فرم  $(\|\Delta\|)$  کوچکتر از  $\delta$  باشد ( $\|\Delta\| < \delta$ ) و تمام انتخاب های ممکنه  $(x_i, y_i)$  در  $R_i$  داشته باشیم:

$$\left| \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta A_i - L \right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta A_i = L$$

در اینصورت تابع f را روی R انتگرال پذیر گوییم و حد L را انتگرال 2 گانه تابع f روی R می نامیم و با نماد  $\iint f(x, y) dA$  نشان می دهیم.

اگر  $Z = f(x, y)$  روی ناحیه بسته و متناهی R نامنفی باشد حجم جسمی که از پایین به وسیله ناحیه R واقع در صفحه xy و از بالا به وسیله ی رویه ی  $Z = f(x, y)$  محصور شده است برابر است با:

$$V = \iint f(x, y) dA$$

پس:

$$\text{مساحت ناحیه } R = \iint dA$$

انتگرال دوگانه روی سطح مساحت را حساب می کند.

چون انتگرال دوگانه تعمیم انتگرال یگانه است لذا تمام خواص انتگرال یگانه را دارد.

حالت های مختلف محاسبه قاعده:

الف) اگر  $R$  یک ناحیه مستطیلی باشد.

$$\int_a^b \left[ \int_c^d f(x,y) dy \right] dx = \int_c^d \left[ \int_a^b f(x,y) dx \right] dy$$

برای محاسبه انتگرال دوگانه در این حالت ابتدا انتگرال داخل را محاسبه می کنیم. توجه می کنیم که انتگرال

گیری را نسبت به متغیری انجام دهیم که دیفرانسیل آن در ابتدا هست و متغیر دیگر را در این انتگرال گیری

ثابت فرض می کنیم.

ب) اگر  $R$  ناحیه شکل زیر باشد.

$$\left( \text{آزاد} \right) \rightarrow \int_a^b \left[ \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y) dy \right] dx$$

این انتگرال دوگانه خاصیت جابجایی نداشته زیرا همیشه حدودی که مستقل هستند باید بیرون انتگرال دوگانه

قرار گیرند و حدود وابسته داخل باشند.

ج) اگر  $R$  ناحیه شکل زیر باشد.

$$\int_c^d \left[ \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y) dy \right] dx$$

این انتگرال نیز خاصیت جابجایی ندارد زیرا همشه حدودی که مستقل هستند باید بیرون انتگرال دوگانه قرار

گیرند و حدود وابسته داخل باشند.

جلسه ششم:

مثال:

$$\int_0^1 \int_0^{2x} e^{x^3} y \, dy \, dx$$

$$\int_0^{2x} e^{x^3} y \, dy = e^{x^3} \int_0^{2x} y \, dy = e^{x^3} \frac{y^2}{2} \Big|_0^{2x} = e^{x^3} \frac{1}{2} (4x^2 - 0) = 2x^2 e^{x^3}$$

$$\int_0^1 2x^2 e^{x^3} \, dx = \frac{2}{3} \int_0^1 3x^2 e^{x^3} \, dx$$

$$= \frac{2}{3} e^{x^3} \Big|_0^1 = \frac{2}{3} (e^1 - e^0) = \frac{2}{3} (e - 1)$$

مثال:

اگر R ناحیه مثلثی شکل ایجاد شده در ربع اول بوسیله خط  $x + y = 1$  باشد حاصل انتگرال دوگانه  $\iint_R (y - \sqrt{x}) \, dA$  را محاسبه کنید.

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} (y - \sqrt{x}) \, dy \, dx$$

$$\int_0^{1-x} (y - \sqrt{x}) \, dy = \frac{y^2}{2} - \sqrt{x}y \Big|_0^{1-x} = \frac{(1-x)^2}{2} - \sqrt{x}(1-x)$$

$$\int_0^1 \left[ \frac{(1-x)^2}{2} - \sqrt{x}(1-x) \right] dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 (1-x)^2 dx - \int_0^1 (\sqrt{2} - x^{\frac{3}{2}}) dx =$$

$$-\frac{1}{2} \frac{(1-x)^3}{3} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{5}{5/2} \Big|_0^1 = \left( -\frac{2}{3} + \frac{2}{5} \right) - \left( -\frac{1}{6} \right) = \frac{1}{6} - \frac{2}{3} + \frac{2}{5} =$$

$$\frac{5 - 20 + 12}{30} = \frac{-3}{30} = -\frac{1}{10} = -0.1$$

تمرین:

$$\int_0^1 \int_0^{1-y} (y - \sqrt{x}) \, dy \, dx$$

$$\int_0^{1-y} (y - \sqrt{x}) \, dy = y - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_0^{1-y} = y - \frac{(1-y)^{\frac{3}{2}}}{3/2} (1-y)$$

$$\int_0^1 y - \frac{(1-y)^{\frac{3}{2}}}{3/2} (1-y) \, dy = \int_0^1 y \, dy - \frac{2}{3} \int_0^1 (1-y)^{\frac{3}{2}} \, dy + \int_0^1 (1-y) \, dy$$

$$\left. \frac{y^2}{3} \right|_0^1 - \frac{2}{3}$$

مثال:

$$\int_0^1 \int_0^1 |y - \sqrt{x}| dy dx$$

$$\int_0^1 \int_0^x (x - y) dy dx + \int_0^1 \int_0^y -(x - y) dy dx$$

$$= \int_0^1 xy - \frac{y^2}{2} \Big|_0^x dx - \int_0^1 \left( \frac{x^2}{2} - yx \right) \Big|_0^y dy$$

$$= \int_0^1 \left( x^2 - \frac{x^2}{2} \right) dx - \int_0^1 \left( \frac{y^2}{2} - y^2 \right) dy = \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \frac{y^3}{3} \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

مثال:

اگر R ناحیه محصور بین منحنی  $y = \sqrt{x}$  و خطوط  $y = 1$  و  $y = 2$  و  $y = x$  باشد انتگرال دوگانه

$\iint \sin \frac{\pi x}{2y} dA$  را بدست آورید.

$$\int_1^2 \int_y^{y^2} \sin \frac{\pi x}{2y} dy dx$$

$$= \int_1^2 -\frac{2y}{\pi} \cos \frac{\pi x}{2y} \Big|_y^{y^2} dy = \int_1^2 -\frac{2y}{\pi} \left( \cos \frac{\pi x}{2y} - \cos \frac{\pi}{2} \right) dy$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_1^2 y \cos \frac{\pi y}{2} dy = -\frac{2}{\pi} \left[ \frac{2y}{\pi} \sin \frac{\pi y}{2} + \frac{4}{\pi^2} \cos \frac{\pi y}{2} \right]_1^2$$

$$= -\frac{2}{\pi} \left[ \left( \frac{4}{\pi} \sin \pi + \frac{4}{\pi^2} \cos \pi \right) - \left( \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi^2} \cos \frac{\pi}{2} \right) \right]$$

$$= \frac{8}{\pi^3} + \frac{4}{\pi^2}$$

تمرین:

(1)

$$\int_3^4 \int_1^2 \frac{1}{(x+y)^2} dy dx$$

(2)

$$\iint x^2 \sqrt{9-y^2}$$

$x^2 + y^2 = 9$  دایره درون ناحیه R -

(3)

$$\iint e^{2y-x} dA$$

R - ناحیه مثلثی محدود به سه رأس (0,0)(2,0)(2,1)

(2)

$$4 \iint x^2 \sqrt{9-y^2} dA$$

$$= 4 \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} x^2 \sqrt{9-y^2} dx dy$$

$$= 4 \int_0^3 \sqrt{9-y^2} \frac{x^3}{3} \Big|_0^{\sqrt{9-y^2}} dy = \frac{4}{3} \int_0^3 \sqrt{9-y^2} (\sqrt{9-y^2})^3 dy =$$

$$\frac{4}{3} \int_0^3 (9-y^2)(9-y^2) dy = \frac{4}{3} \int_0^3 (81 - 81y^2 + y^4) dy = \frac{4}{3} \left( 81y - 6y^3 + \frac{y^5}{5} \right) \Big|_0^3$$

$$= 4(8) - 6(9) + \frac{81}{5}$$

(3)

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x + x_0) \quad \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} 2 \\ 1 \end{array} \right.$$

$$y = mx$$

$$1 = m2 \quad \rightarrow m = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^2 \frac{1}{3} \int_0^{\frac{1}{2}x} e^{2y-x} 2 dy dx$$

$$\int_0^2 \frac{1}{2} e^{2y-x} \Big|_0^{\frac{1}{2}x} dx = \int_0^2 \frac{1}{2} (e^0 - e^{-x}) dx$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} \int_0^2 -e^{-x} dx = \frac{1}{2} e^{-x} \Big|_0^2 = \frac{1}{2} (e^{-2} - 1) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{e^2} - 1 \right) = \frac{1 - e^2}{2e^2}$$



**نکته:**

یک انتگرال مضاعف را می توان به راحتی به وسیله یکی از دو حالت انتگرال مکرر ب و ج محاسبه کرد ولی ممکن است یکی از انتگرال ها از دیگری آسان تر باشد.

**مثال:**

R ناحیه محصور در ربع اول بوسیله خطوط  $y = x$  و  $x = 1$

$$\iint \frac{\sin x}{x} dA$$

اگر انتگرال دوگانه طوری حدودش بیان شود که  $y$  ها آزاد و  $x$  ها مستقل شود آنگاه انتگرال داخلی قابل حل نخواهد بود.

پس برای نوشتن حدود  $x$  را آزاد می کنیم و  $y$  را وابسته به  $x$  می نویسیم.

$$\int_0^1 \int_0^x \frac{\sin x}{x} dy dx$$

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} y \Big|_0^x dx \rightarrow = \int_0^1 \sin x dx = -\cos x \Big|_0^1 = -\cos 1 + 1 = 1 - \cos 1$$

**نکته:**

اگر انتگرال داخل مثل مثال بالا قابل حل نباشد باید آزادی متغیرها را تعویض کنیم به این کار در انتگرال دوگانه تعویض ترتیب گویند.

**مثال:**

انتگرال زیر را تعویض ترتیب نمایید.

در اینجا  $x$  آزاد است باید  $y$  را آزاد کنیم.

$$\int_0^2 \int_1^{e^x} f(x, y) dy dx$$

$$\int_1^{e^2} \int_{\ln y}^{e^x} f(x, y) dx dy$$

**مثال:**

تعويض ترتيب:

$$\int_0^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{4-2y^2}}^{\sqrt{4-2y^2}} f(x, y) dx dy$$

$$x = \sqrt{4 - 2y^2} \quad y = 0$$

$$x = -\sqrt{4 - 2y^2} \quad y = \sqrt{2}$$

$$x^2 = 4 - 2y^2 \rightarrow x^2 + 2y^2 = 4 \rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \quad \text{معادله بیضی} \quad a^2 = 4 \rightarrow a = 2$$

$$b^2 = 4 \rightarrow b = \sqrt{2}$$

$$\rightarrow \frac{y^2}{2} = 1 - \frac{x^2}{4}$$

$$\rightarrow y = \sqrt{2 - \frac{x^2}{2}}$$

نکته:

$$x^2 + y^2 = a^2$$

$$\int_{-2}^2 \int_0^{\sqrt{2-\frac{x^2}{2}}} f(x, y) dy dx$$

تمرین:

(1)

$$\int_{-1}^0 \int_{x+1}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy dx$$

(2)

$$\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2} dx dy$$

(1)

$$\int_{-1}^0 \int_{x+1}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy dx$$

$$x = 0 \quad y = \sqrt{1 - x^2} \rightarrow y^2 = (1 - x^2) \rightarrow y^2 + x^2 = 1 \quad \text{دایره}$$

$$x = -1 \quad y = x + 1$$

(2)

$$\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2} dx dy$$

$$x = 0 \quad y = 1$$

$$x = y \quad y = 0$$

جلسه هفتم:

مثال:

مساحت ناحیه محصور بین دو منحنی  $y = 9 - x^2$  و  $y = x^2 - 9$  را بیابید.

$$y = 9 - x^2 \rightarrow 9 - x^2 = 0 \rightarrow x = \pm 3$$

$$y = x^2 - 9 \rightarrow x^2 - 9 = 0 \rightarrow x = \pm 3$$

برای نوشتن انتگرال  $x$  ها را آزاد فرض می کنیم چون حل انتگرال راحتتر خواهد بود.

$$S = \int_{-3}^3 \int_{x^2-9}^{9-x^2} dy dx = \int_{-3}^3 [9 - x^2 - (x^2 - 9)] dx$$

$$\int_{-3}^3 (-2x^2 + 18) dx = -2 \frac{x^3}{3} + 18x \Big|_{-3}^3 = \left[ -\frac{2}{3}(3)^3 + 18(3) - (18 - 54) \right]$$

$$= -36 + 108 = 72$$

نکته:

برای محاسبه حجم جسم محصور که از بالا به رویه  $Z = f(x, y)$  و از اطراف به رویه های  $f_1(x, y)$  و  $f_2(x, y)$

محدود است باید انتگرال دوگانه  $\iint Z dA$  محاسبه شود این انتگرال دوگانه بر روی ناحیه  $R$  خواهد بود که  $R$

تصویر رویه محصور روی صفحه  $xy$  است.

مثال:

حجم جسمی را که بوسیله دو رویه  $x^2 + y^2 = 4$  و  $x^2 + z^2 = 4$  محصور است را بیابید. چون معادله اول

$(x^2 + y^2 = 4)$  شامل  $z$  نمی باشد لذا تأثیر گذار در مساحت قاعده خواهد شد.

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$\rightarrow z = \pm\sqrt{4 - x^2}$$

به علت تقارن شکل می توان نتایج بالا را در نظر گرفت و آنرا دوباره ذکر کرد.

نمونه دیگر انتگرال گیری:

$$\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} 2\sqrt{4-x^2} dy dx$$

$$= 8 \int_0^2 \sqrt{4-x^2} (\sqrt{4-x^2} - 0) dx = 8 \int_0^2 (\sqrt{4-x^2}) dx = 8 \left( 4x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 =$$

$$8 \left( 8 - \frac{8}{3} \right) = \frac{128}{3}$$

نکته:

در مثال قبل اگر محدوده  $x$  ها را آزاد در نظر می گرفتیم حل انتگرال بی نهایت سخت می شد.

$$4 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} 2\sqrt{4-x^2} dx dy$$

$$8 \int_0^2 \left[ \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \sqrt{4-x^2} dx \right] dy$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \ln \left| x + \sqrt{a^2 - x^2} \right|$$

اگر در هر دو معادله  $z$  داشته باشیم مقدار  $z$  را از معادله در آورده 2 معادله را مساوی هم قرار دهیم.

نکته:

در این مثال یک رویه شامل  $z$  نبوده و  $z$  مسأله تنها از رویه دوم بدست می آید و رویه اول تنها در قاعده مسأله

نقش خواهد داشت اما اگر در مسأله ای هر دو رویه شامل  $z$  باشند باید  $z$  های آن ها را پیدا کرد و با هم مساوی

قرار داد تا مقاله ای بر حسب  $x, y$  بدست آید که سازنده مساحت قاعده است. (در صفحه  $xy$ )

تمرین:

حجم جسم محصوره که از بالا به سهمی  $z = x^2 + 4y^2$  و از اطراف به استوانه های  $x = y^2$  و  $y = x^2$

محدود است را بدست آورید.

تغییر متغیر در انتگرال دوگانه:

اگر  $R_1$  و  $R_2$  در زیر مجموعه از فضای  $R^2$  باشد نگاشت یک به یکی از  $R_1$  به  $R_2$  به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$\iint f(x, y) dA = \iint f[h(u, V), g(u, V)] |j| dudV$$

ژاکوبین تغییر دستگاه

$$|j| = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, V)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial V} & \frac{\partial y}{\partial V} \end{vmatrix}$$

مثال:

انتگرال دوگانه زیر را محاسبه کنید:

$$\int_0^1 \int_0^{1-y} \cos \frac{x-y}{x+y} dx dy$$

+

$$x - y = u$$

$$x - y = u$$

$$x + y = V$$

$$x + y = V$$

$$2x = u + V$$

$$-2y = u - V$$

$$x = \frac{u+V}{2}$$

$$y = \frac{V-u}{2}$$

$$\frac{\partial x}{\partial x} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial x}{\partial V} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial V} = \frac{1}{2}$$

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

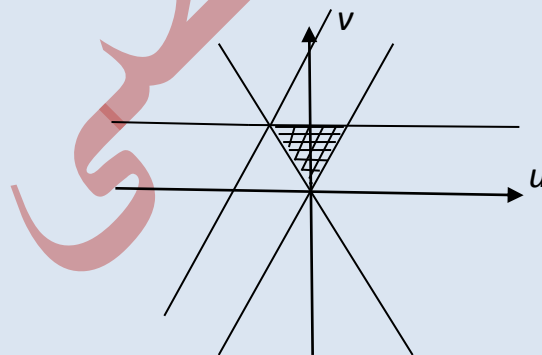
$$y = 0 \rightarrow \frac{V-u}{2} = 0 \rightarrow u = V$$

$$y = 1 \rightarrow \frac{V-u}{2} = 1 \rightarrow V = u + 2$$

$$x = 0 \rightarrow \frac{u+V}{2} = 0 \rightarrow V = -u$$

$$x = 1-y \rightarrow \frac{u+V}{2} = 1 - \frac{V-u}{2} \rightarrow u+V = 2-V+u \rightarrow V = 1$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_{-V}^V \cos \frac{u}{V} \frac{1}{2} du dV &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{-V}^V \cos \frac{u}{V} du dV = \\ \frac{1}{2} \int_0^1 V \sin \frac{u}{V} \Big|_{-V}^V dV &= \frac{1}{2} \int_0^1 V(\sin 1 + \sin 1) dV \\ &= \sin 1 \int_0^1 V dV = \frac{\sin 1}{2} \end{aligned}$$



نکته:

$$\sin(-1) = -\sin 1$$

تمرین:

انتگرال دوگانه زیر را حل کنید:

$$\iint (x-y) \sin(x-y) dx dy$$

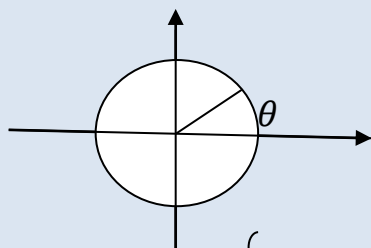
$R$  ناحیه ای است به رئوس  $0$  و  $\frac{\pi}{2\pi}$  و  $\frac{\pi}{\pi}$  و  $\frac{\pi}{0}$

تغییر متغیر در دستگاه قطبی:

می دانیم متغیرها در دستگاه قطبی به صورت زیر به دستگاه دکارتی تبدیل می شوند.

$$u = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$



$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (x, y) \rightarrow (r, \theta)$$

$$\theta = \text{Arc tan } \frac{y}{x}$$

$$|j| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)$$

$$= r$$

$$dxdy = r dr d\theta$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

مثال:

انتگرال دوگانه زیر را با تغییر متغیر قطبی حل کنید:

$$\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2} dy dx$$

$$\sqrt{1-(x^2+y^2)}$$

$$r^2$$

$$x = 1$$

$$x = -1$$

$$y = 0$$

$$y = \sqrt{1-x^2} \rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2} \int_0^\pi \int_0^1 \sqrt{1-r^2} - 2r \, dr \, d\theta = -\frac{1}{2} \int_0^\pi \left. \frac{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right|_0^1 d\theta \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^\pi \left(0 - \frac{2}{3}\right) d\theta \\
&= \frac{1}{3} \int_0^\pi d\theta = \frac{\pi}{3}
\end{aligned}$$

برای اینکه انتگرال زیر رادیکال ایجاد شود باید یک 2- اضافه ممتم کنیم.

$$1 - r^2 = u$$

$$du = -2r \, dr$$

جلسه هشتم:

**مثال:**

با استفاده از انتگرال دوگانه مقدار  $I = \int_0^\infty e^{-x^2} \, dx$  را محاسبه کنید.

$$I = \int_0^\infty e^{-y^2} \, dy \quad \text{خودمان در نظر می گیریم}$$

$$I^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2} \cdot e^{-y^2} \, dx \, dy = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} \, dx \, dy$$

$$I^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-r^2} r \, dr \, d\theta$$

$$\int_0^\infty e^{-r^2} r \, dr = \frac{1}{-2} \int_0^\infty e^{-r^2} (-2)r \, dr = \frac{1}{-2} e^{-r^2} \Big|_0^\infty = \frac{1}{-2} (e^{-\infty} - e^0) = \frac{1}{2}$$



$$e^{-\infty} = \frac{1}{e^{-\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$I^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} d\theta = \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} \quad \rightarrow I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

نکته:

در چه مواقعی از تغییر متغیر قطبی استفاده می شود؟

اگر در عبارت تحت انتگرال عامل  $x^2 + y^2$  به هر عنوان ظاهر شود و یا ناحیه انتگرال گیری که از حدود انتگرال دوگانه مشخص می شود تمام یا قسمتی از یک دایره باشد از تغییر متغیر قطبی استفاده می کنیم.

مثال:

مطلوب است محاسبه حجم جسم واقع در داخل استوانه  $x^2 + y^2 = 9$  که از بالا به وسیله صفحه  $z = 4$  و از پایین به وسیله رویه  $x^2 + y^2 + 4z = 16$  محصور است.

هر گاه  $z^2$  در صورت سوال بود باید در انتگرال گیری  $z$  بالایی را از  $z$  پایینی کمک کنیم. (یک  $z$  از بالا و دیگری از پایین ناحیه را جدا می کنند) به جای  $z \rightarrow z - z$  بالایی  $z$  پایینی می نویسیم.

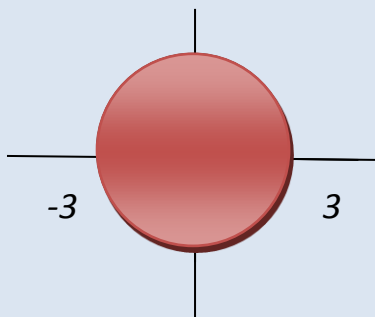
$$V = \iint z dA = \iint 4 - \frac{1}{4}(16 - x^2 - y^2) dA$$

$$= \frac{1}{4} \iint (x^2 + y^2) dx dy$$

$$x^2 + y^2 + 4z = 16$$

$$z = \frac{1}{4}(16 - x^2 - y^2)$$

$R$  داخل دایره به شعاع 3 است.



خودمان یک ربع را انتگرال می گیریم و بعد 4 برابر می کنیم (برای راحتی کار)

$$\frac{1}{4} \times 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^3 r^2 r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^3 r^3 dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^4}{4} \Big|_0^3 d\theta$$

$$= \frac{81}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{81\pi}{8}$$

مهم

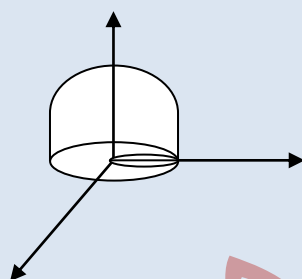
مثال:

حجم جسم محصور به صفحه  $xy$  و استوانه  $x^2 + y^2 = ax$  و کره  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  را بیابید.

ضرب  $x$  نصف می شود و جمله دوم اتحاد نوع اول قرار می گیرد. و بعد جمله دوم اتحاد به توان (2) کم می شود.

$$x^2 + y^2 = ax \rightarrow x^2 + ax + y^2 = 0$$

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + y^2 = 0 \rightarrow \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$$



دایره ای به مرکز  $\frac{a}{2}$  و شعاع  $\frac{a}{2}$  قطبی:

$$x^2 + y^2 = ax$$

$$r^2 = a r \cos \theta$$

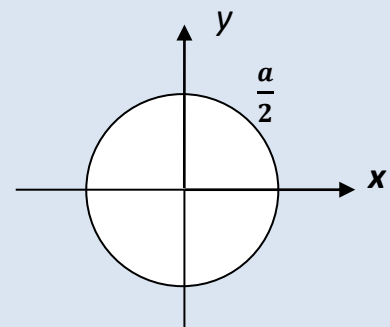
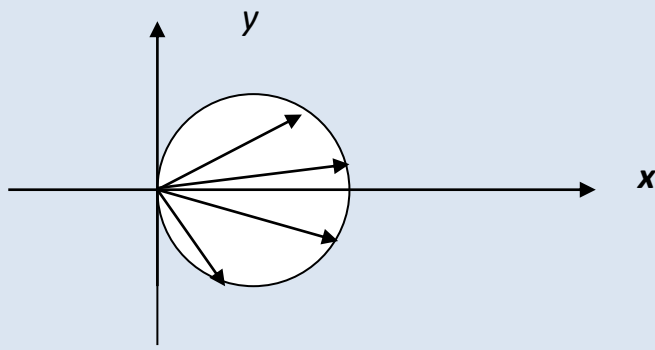
$$r = a \cos \theta$$

$$r = 0 \rightarrow a \cos \theta = 0$$

$$\cos \theta = 0$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$$

$$V = \iint z dA = \iint \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a \cos \theta} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dy dx$$



مثال:

$$\theta = -\frac{\pi}{2} \rightarrow r = a \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow r = a \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$x^2 + y^2 = ay$$

$$r^2 = ar \sin \theta$$

$$r = a \sin \theta$$

$$0 = a \sin \theta \rightarrow \sin \theta = 0$$

$$\theta = 0, \pi$$

$$= -\frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a \cos \theta} \sqrt{a^2 - r^2} (-2)r dr d\theta = -\frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_0^{a \cos \theta} d\theta$$

$$= -\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[ (a^2 - a^2 \cos^2 \theta)^{\frac{3}{2}} - (a^2)^{\frac{3}{2}} \right] d\theta$$

$$= -\frac{1}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[ (a^2(1 - \cos^2 \theta))^{\frac{3}{2}} - a^3 \right] d\theta$$

$$= -\frac{1}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (a^3 \sin^3 \theta - a^3) d\theta = -\frac{a^3}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 \theta - 1) d\theta$$

$$= -\frac{a^3}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta d\theta + \frac{a^3}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta$$

$$= -\frac{a^3}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \sin \theta d\theta + \frac{-a^3}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta + (-) \frac{a^3}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (-) \cos^3 \theta$$

$$\sin \theta d\theta + \frac{a^3}{3} \pi$$

$$= -\frac{a^3}{3}(-\cos\theta) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{a^3}{3} \frac{\cos^3\theta}{3} \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi a^3}{3} = \frac{\pi a^3}{3}$$

تمرین:

حجم جسم محصور بین کره  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  و سهمی  $x^2 + y^2 = 3z$  را بیابید. 2 مساحت ناحیه داخل دایره  $r = 2a \sin\theta$  و خارج دایره  $r = a$  را بیابید.

$$r^2 = 2ra \sin\theta$$

$$x^2 + y^2 = 2ay$$

3 حدود ناحیه بین خط  $x + y = 1$  و  $x + y = 2$  را بوسیله متغیرهای قطبی بیابید.

4 انتگرال دوگانه زیر را حل کنید

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\tan\theta \sec\theta} r^2 \cos^2\theta \, dr d\theta$$

جلسه نهم:

همانند استدلالی که برای انتگرال دوگانه داشتیم برای تابع سه متغیره  $f(x, y, z)$  می توان نوشت:

$$\iiint f(x, y, z) \, dV$$

می دانیم  $dV = dx dy dz$  است پس اگر  $h_1(x, y) \leq z \leq h_2(x, y)$

$$R = \{(x, y) | a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x, y, z) \, dx dy dz$$

اگر در فرمول مذکور  $f(x, y, z) = 1$  باشد محاسبه این انتگرال 3 گانه همان محاسبه حجم خواهد شد.

مثال:

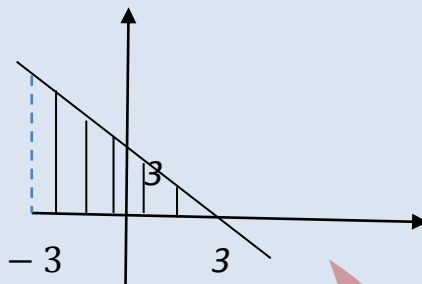
اگر  $D$  ناحیه محصور به استوانه  $x^2 + z^2 = 9$  و صفحات  $x = 0$  و  $x = 3$  و  $y = 0$  و بالای صفحه  $xy$

باشد مطلوب است محاسبه

$$\iiint (xz + 3z) \, dV$$

$$x^2 + z^2 = 9 \rightarrow x^2 = 9 - z^2 \rightarrow x = \pm\sqrt{9 - z^2}$$

$$z^2 = 9 - x^2 \rightarrow z = \pm\sqrt{9 - x^2}$$



$$\begin{aligned} & \int_{-3}^3 \int_0^{3-x} \int_0^{\sqrt{9-x^2}} (xz + 3z) dz dy dx \\ &= \int_{-3}^3 \int_0^{3-x} x \frac{z^2}{2} + 3 \frac{z^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{9-x^2}} dy dx \\ &= \int_{-3}^3 \int_0^{3-x} \frac{(x+3)}{2} (9-x^2-0) dy dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-3}^3 \int_0^{3-x} (-x^3 - 3x^2 + 9x + 27) dy dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-3}^3 (-x^3 - 3x^2 + 9x + 27)y \Big|_0^{3-x} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-3}^3 (-x^3 - 3x^2 + 9x + 27)(3-x) dx = \frac{1}{2} \int_{-3}^3 x^4 - 18x^2 + 81 dx \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{x^5}{5} - 18 \frac{x^3}{3} + 81x \right) \Big|_{-3}^3 = \frac{648}{5} \end{aligned}$$

مثال:

مطلوب است محاسبه حجم جسم صلبی که به سهی گون  $x^2 + (y+1)^2 = 4 - z$  و صفحه  $2y + z = 2$

محصور است ...

$$z_1 = 4 - x^2 - (y+1)^2$$

$$z_2 = 2 - 2y \rightarrow 4 - x^2 - (y^2 + 2y + 1) = 2 - 2y$$

$$4 - x^2 - y^2 - 2y - 1 = 2 - 2y \rightarrow -x^2 - y^2 = -1 \rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

سازنده ناحیه  $R$  در صفحه  $xy$  (الف)

برای بدست آوردن حد بالا و پایین در  $z$  نقطه  $\Big|_0^0$  را در 2 فرمول جاگذاری کرده هر کدام که مقدار بیشتری شد

صفحه بالایی را تشکیل می دهد.

$$x^2 + (y + 1)^2 = 4 - z$$

$$z = 3$$

$$2y + z = 2 \rightarrow z = 2$$

$$4 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{2-2y}^{4-x^2-(y+1)^2} dz dy dx$$

$$= -4 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2 - 1) dy dx = -4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 (r^2 - 1) r dr d\theta$$

$$= -4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 (r^3 - r) dr d\theta = -4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left. \frac{r^4}{4} - \frac{r^2}{2} \right|_0^1 d\theta = -4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) d\theta =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{2}$$

تمرین:

مطلوب است محاسبه حجم جسم صلبی که از بالا به رونه  $u^2 = 4 - z$  و از پایین به صفحه  $z = 0$  و از طرف چپ و راست بوسیله صفحات  $y = 0$  و  $y = 6$  محصور است.

تمرین:

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{2(x^2+y^2)}^2 \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dz dy dx$$

مطالعه آزاد:

1 - اگر چگالی حجمی جسم محصور به ناحیه  $D$  در نقطه  $S(x, y, z)$  باشد آنگاه جرم جسم محصور به  $D$  برابر

است با:

$$M = \iiint S(x, y, z) dV$$

2- مختصات مرکز ثقل:

$$\bar{x} = \frac{\iiint x S(x, y, z) dV}{M}$$

$$\bar{y} = \frac{\iiint y S(x, y, z) dV}{M}$$

$$\bar{z} = \frac{\iiint z S(x, y, z) dV}{M}$$

3- مختصات گرانیگاه:

$$\bar{x} = \frac{\iiint x dV}{V} \quad \bar{y} = \frac{\iiint y dV}{V} \quad \bar{z} = \frac{\iiint z dV}{V}$$

4- گشتاور درماند نسبت به صفحات:

$$I_{xy} = \iiint z^2 S(x, y, z) dV$$

$$I_{xz} = \iiint y^2 S(x, y, z) dV$$

$$I_{yz} = \iiint x^2 S(x, y, z) dV$$

5- گشتاور درماند نسبت به محورها:

$$I_x = \iiint (y^2 + z^2) S(x, y, z) dV$$

$$I_y = \iiint (x^2 + z^2) S(x, y, z) dV$$

$$I_z = \iiint (x^2 + y^2) S(x, y, z) dV$$

6- گشتاور درمماند نسبت به مبدأ:

$$I_0 = \iiint (x^2 + y^2 + z^2) S(x, y, z) dV$$

7- شعاع چرخشی:

$$R_x = \sqrt{\frac{I_x}{M}}$$

$$R_z = \sqrt{\frac{I_z}{M}}$$

8- شعاع چرخش نسبت به مبدأ:

$$R_y = \sqrt{\frac{I_y}{M}}$$

$$R_0 = \sqrt{\frac{I_0}{M}}$$

مختصات کروی:

در دستگاه مختصات کروی هر نقطه مانند  $P$  دارای سه تایی مرتب  $P(\rho, \varphi, \theta)$  است که در آن  $P \geq 0$ ،  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  و  $0 \leq \varphi \leq \pi$  قرار دارد.

$\rho$ : فاصله نقطه از مبدأ

$\varphi$ : زاویه شعاع حامل آن نقطه با جهت مثبت محور  $Z$  ها

$\theta$ : زاویه شعاع حامل تصویر نقطه در صفحه  $xy$  با جهت مثبت

تبدیل مختصات کروی به دکارتی و بالعکس:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\varphi = \cos^{-1} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

← تبدیل دکارتی به کروی



$$\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

$$x = \rho \sin \varphi \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \varphi \sin \theta$$

$$z = \rho \cos \varphi$$

تبدیل کروی به دکارتی ←

ژاکوبین:

$$|j| = \rho^2 \sin \varphi$$

$$dx dy dz = \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$$

مثال:

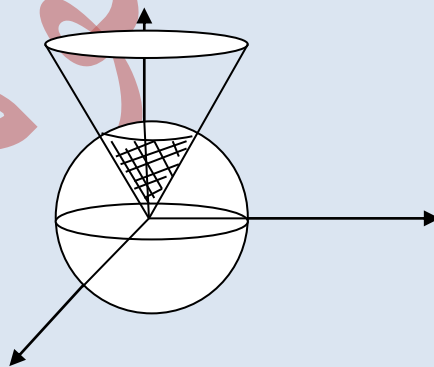
حجم جدا شده از کره  $\rho = a$  بوسیله مخروط  $\varphi = \alpha$  را بیابید.

$\rho = a$ : مکان هندسی تمام نقاطی است که از یک نقطه مشخص فاصله  $a$  را دارد.

- چون دایره کامل است پس  $\theta$  بین  $0$  و  $2\pi$  می چرخد.

- زاویه از  $0$  تا  $\alpha$  است چون اگر بالاتر از  $\alpha$  برود شکل تشکیل نمی شود

- شعاع هم از  $0$  تا  $a$  است ...



$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\alpha} \int_0^a \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\alpha} \sin \varphi \left( \frac{\rho^3}{3} \right) \Big|_0^a = \frac{a^3}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\alpha} \sin \varphi d\varphi d\theta$$

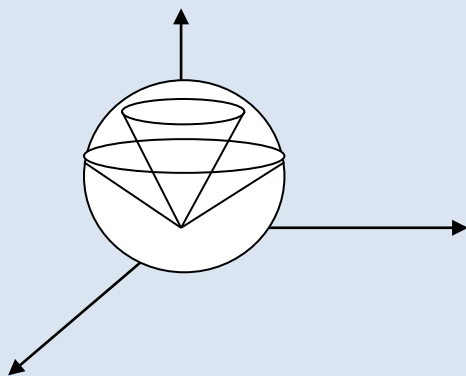
$$= \frac{a^3}{3} \int_0^{2\pi} (-\cos \varphi) \Big|_0^{\alpha} d\theta = \frac{a^3}{3} \int_0^{2\pi} (-\cos \alpha + 1) d\theta$$

$$= \frac{a^3(1 - \cos \alpha)}{3} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2\pi}{3} a^3(1 - \cos \alpha)$$

- برای چک کردن اینکه آیا درست حل کردیم یا نه به  $\alpha$  مقدار می دهیم.  $\alpha = 0$  نباید هیچ حجمی ایجاد کند و  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  باید سخت حجم را ایجاد کند.

تمرین:

حجم جدا شده از کره  $\rho = a$  بوسیله مخروط های  $\varphi = \alpha$  و  $\varphi = \beta$  که  $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$  است، را بیابید.



توابع برداری:

توابع برداری توابعی هستند که از فضای  $R^n$  و  $R^m$  تعریف می شوند. مثلاً توابع برداری  $f: R^2 \rightarrow R^3$  به صورت:

$$f(x, y) = f_1(x, y)\vec{i} + f_2(x, y)\vec{j} + f_3(x, y)\vec{k}$$

- حد و پیوستگی توابع برداری به حد و پیوستگی مؤلفه های تابع بستگی دارد مثلاً تابع  $f: R \rightarrow R^3$  با ضابطه:

$$f(t) = t\vec{i} + \sin t\vec{j} + e^t\vec{k}$$

در  $t = 0$  پیوسته است زیرا هر یک از سه مؤلفه تابع  $f$  در  $t = 0$  پیوسته است.

منحنی های فضایی:

فرض کنید  $R$  یک تابع برداری از  $R$  به  $R^2$  یا  $R^3$  باشد و به مقدار حقیقی  $t$  مقادیر  $\langle x(t), y(t) \rangle$  یا  $\langle x(t), y(t), z(t) \rangle$  به ترتیب در صفحه و فضا نسبت می دهد.

$$x = a \cos \theta$$

$$y = a \sin \theta \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 = a^2 \quad \leftarrow \quad \text{معادله دایره با شعاع } a$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$x = a \cos \theta$$

$$y = b \sin \theta \quad \rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{بیضی به نیم اقطار } a, b$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$x = a \cosh \theta$$

$$y = b \sinh \theta \quad \rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad b, a \text{ هذلولی به نیم اقطار}$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

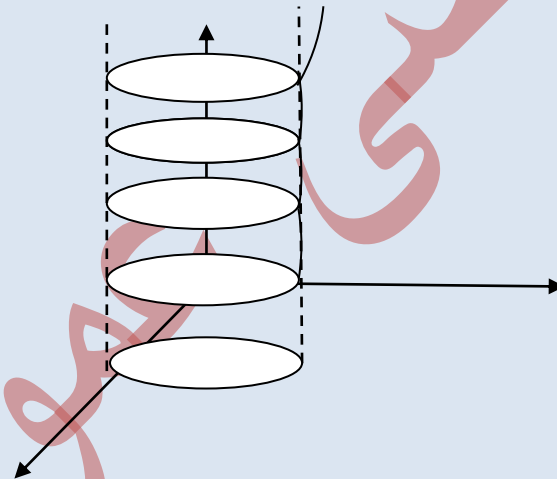
$$\sinh \theta = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2}$$

$$\cosh \theta = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2}$$

هیپربولیک ←

نکته:

مثال:



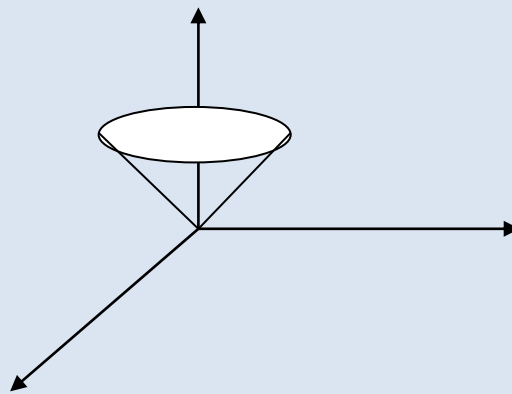
$$y = a \sin t$$

$$z = a t$$

$$0 \leq t \leq 2\pi$$

$$x = a \cos t$$

مثال:



$$x = e^{-t} \cos t$$

$$y = e^{-t} \sin t$$

$$z = e^{-t}$$

$$0 \leq t \leq 2\pi$$

1- مہدی افرا نصفی (اصلاح- نمودار- فرمول نویسی)

2- عادل پور اکبر

3- مبین کشاورز

4- محمود بشری

5- امیر محمد شفیع نژاد

6- ابوذر عشوری

7- مجید دولتی

8- نادر ازغ

9- سجاد کاشفی

10- کاوہ تقی نژاد

11- مصطفی شاد منش

12- محمد عبدالله

13- مہیار ایرانی ترکده

14- سمیہ مرادی

15- پروانہ طوفانی

16- فیض اللہ مجلسی

17- بہنام خسروی یکتا

18- اکبر قربانیان

(با تشکر از استاد گرامی، استاد عزیز)