کنترل کیفیت آماری: انواع توزیع‌ها، توزیع‌های گسسته

۱) توزیع برنولی:

$$P(X) = \begin{cases} 1-p = q & x = 0 \\ p & x = 1 \end{cases}$$

X: تعداد اقلام معیوب در بازرسی یک محصول

$$P(X) = p^{x}(1-p)^{1-x} \quad ; \quad x = 0, 1$$

و کاربرد آن بررسی مشخصه‌های کیفی یک محصول یا محصولات نامنطبق از نظر کیفیت

$$E(X) = p \qquad var(X) = (1-p)p = pq$$

۲) توزیع دوجمله‌ای: تعمیم توزیع برنولی با n بازرسی یک محصول یا بازرسی n محصول

X: تعداد محصول معیوب در بازرسی n محصول یا بازرسی یک محصول در n بازرسی و کاربرد آن

عمدتاً در بازرسی‌های مربوط به فرآیند یا نمونه‌گیری محصول در حال تولید

چون توزیع دوجمله‌ای مبتنی بر فرآیند برنولی است باید شرایط فرآیند

الف) اجزای نمونه مستقل از هم باشند ب) p در طول فرآیند ثابت باشد

برای عملکرد دستگاه در گذشته از همین توزیع استفاده می‌کنیم

$$P(x) = \binom{n}{x} p^{x}(1-p)^{n-x}$$

$$E(X) = \mu = np \qquad var(X) = npq$$

مثال) یک نمونه‌ی تصادفی ۲۰تایی از فرآیندی که دارای $p=0.02$ است گرفته‌ایم فرض می‌کنیم

شرایط کنترل فرآیند به گونه‌ای است که در این نمونه‌گیری حتی اگر یک محصول معیوب مشاهده شود

خط تولید متوقف می‌گردد احتمال متوقف شدن خط در یک بار نمونه‌گیری چقدر است؟

$$P(X\geq 1) = 1 - P(X<1) = 1 - \binom{20}{0}(0.02)^0(0.98)^{20} = 0.34$$

ب) احتمال توقف فرآیند در ۸ بار نمونه‌گیری چقدر است؟

$$P(Y\geq 1) = 1 - P(Y<1) = 1 - P(0) = 1 - \binom{8}{0}(0.34)^0(1-0.34)^8 = 0.96$$

مثال) فرض کنید قطعات تولید شده در یک کارخانه مستقلاً با احتمال 0.05 خراب است

این قطعات در بسته‌های ۱۰تایی به فروش می‌رسند چنانچه یک بسته بیش از یک قطعه‌ی معیوب

داشته باشد به شرکت برمی‌گردد با چه احتمالی بسته‌ها برگشت داده می‌شوند؟

$$P(X>1) = 1 - P(X\leq 1) = 1 - P(0) - P(1)$$

$$1 - \binom{10}{0}(0.05)^0(0.95)^{10} - \binom{10}{1}(0.05)^1(0.95)^{10} = 0.086$$

ب) اگر شخصی ۵ بسته بخرد مطلوبست احتمال برگشتن آن‌ها؟

$$P(Y>1) = 1 - P(Y\leq 1) = 1 - P(0) - P(1) =$$

$$1-\binom{5}{0}(0.086)^{0}(0.914)^{5}-\binom{5}{1}(0.086)^{1}(0.914)^{4}=0.088$$

۳- توزیع فوق هندسی :

X : تعداد اقلام معیوب در نمونه ای n تایی یک انباشته N تایی یا حجم که کاربرد آن

در بازرسی یک محصول می باشد. در این توزیع نیازی به برقراری شرایط توزیع دوجمله ای نیست

یعنی الف) نیازی به شرط استقلال ندارد ب) p ثابت نیست

$$P(x)=\frac{\binom{D}{x}\binom{N-D}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

دارای سه پارامتر D, N, n

$$E(X)=\frac{nD}{N}_{p} \qquad var(X)=\left(\frac{nD}{N}\right)_{p}\left(1-\frac{D}{N}\right)_{q}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

مثال: در مثال توزیع دوجمله ای که یک نمونه ی ۱۰۰ تایی داشتیم که $p=0.02$ داشتیم

یک نمونه ی ۲۰ تایی از انباشته فرآیند فوق گرفتیم شرایط بازرسی محصول به صورت است که

اگر در این نمونه حتی یک محصول معیوب مشاهده شود کل انباشته رد می شود احتمال رد

انباشته در یک بار نمونه گیری چقدر است؟ $p=0.02 \rightarrow p=\frac{D}{N} \rightarrow 0.02=\frac{D}{100} \rightarrow D=2$

$$P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-\frac{\binom{2}{0}\binom{98}{20}}{\binom{100}{20}}=1-0.63=0.37$$

مثال: یک کارخانه تولیدی محصولات خود را در بسته های ۱۰ تایی به فروش می رساند

اگر در یک بسته‌ی تولیدی ۳ محصول معیوب داشته باشیم مطلوب است احتمال

اینکه در یک نمونه‌ی سه‌تایی از این محصول ۲ محصول معیوب مشاهده شود؟

X، تعداد محصولات معیوب در نمونه‌ی ۳تایی

$P(X=2)=$

$N=10,\ n=3,\ D=3$

$$=\frac{\binom{3}{2}\binom{7}{1}}{\binom{10}{3}}=0.175$$

ب) اگر ۳۰٪ بسته‌ها بدون محصول معیوب، ۴۰٪ دارای یک محصول معیوب و ۳۰٪

دارای دو محصول معیوب باشند و شرکت ضمانت بازگشت پول خریداران را در صورت

وجود محصول معیوب در نمونه ۳تایی بدهند مطلوب است درصد بسته‌هایی که به شرکت برمی‌گردند؟

برگشت محصول = B ؛ تعداد محصولات معیوب A

$$P(B)=P(B|A_0)P(A_0)+P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)$$

$$=0\times 0.3+\frac{\binom{1}{1}\binom{9}{2}}{\binom{10}{3}}\times 0.4+\frac{\binom{2}{1}\binom{8}{2}+\binom{2}{2}\binom{8}{1}}{\binom{10}{3}}\times 0.3=0.28$$

متغیر تصادفی هندسی، آزمایش ساده برنولی که احتمال موفقیت هر یک p است

بشرطی که آن قدر تکرار کنیم تا اولین موفقیت حاصل شود

X ، تعداد آزمایش‌های انجام شده تا رسیدن به اولین موفقیت و کاربرد آن

تعداد بازرسی های لازم برای رسیدن به اولین معیوب که جلوی مفاهیم کنترل فرآیند است

$P(X) = (1-p)^{n-1}\, p \qquad E(X) = \frac{1}{p} \qquad Var(X) = \frac{p}{q^2}$

$\underbrace{\text{①②③} \cdots}_{n-1 \text{ شکست}} \overset{\text{امین پیروزی } n}{Ⓟ}$

$F(x=a) = 1-(1-p)^{a} = P(X \leq a)$ تابع توزیع تجمعی توزیع هندسی

مثال، $p = \%2$ در مثال قبل (مثال توزیع دو جمله ای) احتمال اینکه بیش از ده بار بازرسی

برای رسیدن به اولین قطعه ی معیوب داریم باشد چقدر است؟

$P(X>10) = 1 - \underbrace{P(X \leq 10)}_{\text{طبق توزیع تجمعی}} = 1 - F_X(10) = 1 - (1-(1-p)^{10}) = (1-p)^{10} = 0/98$

جامعه ← نمونه تصادفی $X_1, X_2, \ldots, X_n$

آماره، آماره تابعی از نمونه ی تصادفی است که شامل پارامترهای مجهول نیست به عنوان مثال

$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ میانگین نمونه

$S^2 = \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{n-1}$ واریانس نمونه

اگر $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ باشد آماره $\bar{X} - \mu$ آماره نیست چون μ که میانگین جامعه است معلوم نیست

توزیع مربع کای (خی دو) χ^2: اگر $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ متغیرهای تصادفی نرمال استاندارد

$Z_i \sim (0,1)$ توزیع متغیر تصادفی باشد $y = Z_1^2 + Z_2^2 + \cdots + Z_n^2$ یک توزیع مربع کای می‌سازد

با n درجه آزادی یعنی $y \sim \chi^2_{(n)}$

$$\text{تابع چگالی: } f(y) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\, y^{\frac{n-2}{2}}\, e^{-\frac{y}{2}} \qquad y>0$$

درجه آزادی نشان دهنده‌ی تعداد متغیرهای مستقل تصادفی است که مربع‌های آن با هم جمع شده

نکته: اگر X_1 تا X_n متغیرهای تصادفی نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد مجموع مربعات

آن دارای توزیع مربع کای نخواهد بود مگر اینکه $\mu=0, \sigma^2=1$ باشد

$$E(\chi^2_n) = n \qquad Var(\chi^2_n) = 2n$$

نکته، اگر توزیع نرمال $\cong$ توزیع مربع کای $\leftarrow$ طبق قضیه حد مرکزی $\infty \leftarrow n$

یعنی $y \sim \chi^2 \xrightarrow{n \to \infty} y \sim N(\mu = n \quad \sigma^2 = 2n)$

مثال: اگر متغیرهای تصادفی X دارای توزیع مربع کای با ۴۰ درجه آزادی باشد احتمال

$$P(X < 50) \to P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{50-\mu}{\sigma}\right) \qquad \sigma^2 = 80 \;,\; \mu = 40$$

$$\to P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{50-40}{\sqrt{80}}\right) = P(Z < 1.11)$$

نکته: اگر $X_1, \ldots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل مربع کای با درجه آزادی‌های $n_1, \ldots, n_n$

آنگاه متغیرهای تصادفی $y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ یعنی $y = \sum_{i=1}^{m} X_i$

درجه آزادی

اگر y دارای توزیع مربع کای $y = X_1 + X_2 + \cdots + X_m \sim \chi^2_{(n_1+n_2+\cdots+n_m)}$

$$\left.\begin{array}{l} X_1 \sim \chi^2_{(1)} \\ X_2 \sim \chi^2_{(1)} \end{array}\right\} \rightarrow X_1 + X_2 = y \sim \chi^2_{(2)}$$

نکته: اگر درجه آزادی توزیع مربع کای برابر ۲ باشد این توزیع به یک توزیع نمایی با پارامتر $\lambda = \frac{1}{2}$ تبدیل

می‌شود $\chi^2_2 \sim \exp(\lambda = \frac{1}{2})$

$$x \sim \exp \rightarrow P(X < a) = F(a) = 1 - e^{-\lambda a}$$

مثال: اگر $X \sim N(0,1)$ و $Y \sim N(0,1)$ ، $X^2 + Y^2$ چه توزیعی است و احتمال

$P(X^2 + Y^2 < 1) = ?$

$$\left.\begin{array}{l} X \sim N(0,1) \\ Y \sim N(0,1) \end{array}\right\} \rightarrow X^2 + Y^2 \sim \chi^2_2$$

$$\rightarrow P(X^2 + Y^2 < 1) = P(\underbrace{\chi^2_{(2)}}_{\text{نمایی } \lambda = \frac{1}{2}} < 1) = 1 - e^{-\frac{1}{2} \times 1}$$

توزیع t : استودنت، اگر $Z \sim N(0,1)$ باشد و y متغیر مستقل از Z باشد، و به طور

مستقل از Z یک توزیع مربع کای با n درجه آزادی $y \sim \chi^2_n$ متغیر t با n درجه آزادی است

$$t_n = \frac{Z}{\sqrt{Y/n}} \quad n>1 \qquad var(t_n) = \frac{n}{n-2} \quad n>2$$

نکته: درجه آزادی توزیع t با درجه توزیع مربع کای که در مخرج است برابر است

$$E(t_n) = 0 \quad n>1 \qquad var(t_n) = \frac{n}{n-2} \quad n>2$$

نکته: هرچه n بزرگ‌تر باشد توزیع t بیشتر به سوی توزیع نرمال میل می‌کند.

مثال: اگر متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال با میانگین ۵ و واریانس ۹ و متغیر تصادفی Y

بطور مستقل دارای توزیع مربع کای با ۹ درجه آزادی باشد $P(X-5 > 3\sqrt{Y})$

$$X \sim N(\underset{\mu}{5}, \underset{\sigma^2}{9}) \rightarrow P(X-5 > 3\sqrt{Y}) = ?$$

$$Y \sim \chi^2_9$$

$$\frac{\frac{X-\mu_x}{\sigma_x}}{\sqrt{\frac{Y}{9}}} \sim t_9 \rightarrow \frac{X-5}{3\sqrt{\frac{Y}{9}}} = \frac{X-5}{\sqrt{Y}} \sim t_9$$

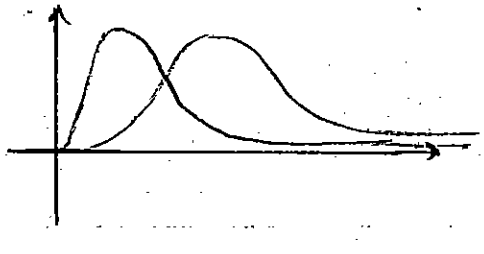
$$P(\overbrace{\frac{X-5}{\sqrt{Y}}}^{t_9} > 3) = 0.007$$

توزیع F: اگر U و V متغیرهای تصادفی مستقل از نوع مربع کای به n و m درجه آزادی

آنگاه متغیر F بصورت

$$F_{n,m} = \frac{\frac{U}{n}}{\frac{V}{m}}$$

که دارای n و m درجه آزادی است



با افزایش درجات n و m توزیع F چه گسسته و معیارهای تمرکز توزیع مثل میانگین، مد، میانه

بیشتر به سمت عدد یک میل می‌کند $E(X)=\frac{m}{m-2}$ $m>2$

توزیع میانگین نمونه: فرض کنید $x_1, x_2, \dots, x_n$ نمونه تصادفی جامعه نامتناهی با میانگین μ و

واریانس σ^2 باشد در این صورت بدون فرض قرار از نوع توزیع جامعه داریم $E(\bar{X})=\mu$, $Var(\bar{X})=\frac{\sigma^2}{n}$

مثال: فرض کنید هر یک از قطعات تولیدی یک شرکت تولیدی با احتمال p خراب باشند یک نمونه n تایی

از این قطعات گرفته و متغیرهای تصادفی زیر را تعریف می‌کنیم $X_i \begin{cases} 1 & \text{اگر خراب باشد} \\ 0 & \text{د.غ} \end{cases}$ اگر $\bar{X}$

میانگین نمونه x_iها باشد در این صورت $Var(\bar{X})=?$

$$x_i \sim Bernoly \rightarrow V(x_i)=p(1-p) \Rightarrow Var(\bar{X})=\frac{\sigma^2}{n}=\frac{p(1-p)}{n}$$

نکته: توزیع جامعه هر چه باشد چه پیوسته و چه گسسته با افزایش n توزیع $\bar{X}$ به توزیع نرمال نزدیک می‌شود

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim Z$$

مثال: یک فرآیند بسته‌بندی سیمان را طوری تنظیم می‌کنیم که میزان سیمان هر بسته متغیری

تصادفی با میانگین 25kg و انحراف معیار 0.1 باشد احتمال اینکه میانگین سیمان یک نمونه

۳۶ تایی از این بسته‌ها در بازه‌ی (۲۵.۰۵ و ۲۴.۹۵) باشد چقدر است؟

$\mu(\bar{x}) = ۲۵.۰۰$ $\qquad \sigma(\bar{x}) = \frac{۰.۱}{\sqrt{۳۶}}$

$P(۲۴.۹۵۰ < x < ۲۵.۰۵۰) \rightarrow P\left(\frac{۲۴.۹۵۰ - ۲۵.۰۰۰}{\frac{۰.۱}{۶}} < \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{۲۵.۰۵۰ - ۲۵.۰۰۰}{\frac{۰.۱}{۶}}\right)$

$P(-۳ < z < ۳)$

توزیع پواسون: اگر توزیع جامعه (توزیع هریک از x_i ها) پواسون با پارامتر λ باشند آنگاه

متغیر تصادفی $x_i \sim P(\lambda)$ باشد $y = \sum_{i=1}^{n} x_i$ $\leftarrow$ $P(\lambda' = n\lambda)$ دارای توزیع

پواسون با پارامتر $n\lambda$ خواهد بود $\qquad P(y=a) = \frac{e^{-n\lambda}(n\lambda)^a}{a!}$

توزیع واریانس نمونه: اگر σ^2 یا واریانس جامعه مجهول باشد انتظار می‌رود که از تقسیم s^2 یعنی

واریانس نمونه به جامعه σ^2 را برآورد کرد اما اینکه s^2 چه اندازه برای برآورد σ^2 مناسب است آن را استنباطی با

توزیع s^2 داریم $\qquad s^2 = \frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n-1}$

فرض کنید $x_1, \ldots, x_n$ نمونه تصادفی از یک جامعه نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد آنگاه

$\chi^2_n \sim \frac{\sum(x_i-\mu)^2}{\sigma^2}$ توزیع کای با n درجه آزادی داریم چون مجموع n تا مجذور نرمال‌ها

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$$

مثال: اگر x_1, x_2, x_3 یک نمونه‌ی تصادفی سه‌تایی از جامعه نرمال باشد با میانگین

واریانس به ترتیب $\mu = 3$ و $\sigma^2 = 3$ باشد آنگاه $P(S^2 < 3)$

$$P\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \frac{(n-1)\times 3}{\sigma^2}\right) \rightarrow P\left(\chi^2_{n-1} < \frac{2\times 3}{3}\right)$$

$$P(\chi^2_2 < 2) = 1 - e^{-\frac{1}{2}\times 2} = 1 - e^{-1}$$

نمایی است

توزیع $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ اگر در رابطه $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ ، σ مجهول و به جای آن S قرار گیرد توزیع

$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ دارای t با $n-1$ درجه آزادی است.

توزیع تفاضل بین میانگین های دو نمونه: $X_1, X_2, \dots, X_n \quad X_n \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$

$Y_1, Y_2, \dots, Y_n \quad Y_n \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$

$$\bar{X} \sim N\left(\mu_x, \frac{\sigma_x^2}{n_x}\right) \qquad \bar{Y} \sim N\left(\mu_y, \frac{\sigma_y^2}{n_y}\right)$$

$$\bar{X}-\bar{Y} \sim N\left(\mu_x - \mu_y, \frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\sigma_y^2}{n_y}\right)$$

$$\frac{(\bar{X}-\bar{Y}) - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\sigma_y^2}{n_y}}}$$

توزیع نسبت واریانس های نمونه: $\frac{\frac{(n_x-1)S_x^2}{\sigma_x^2}/(n_x-1)}{\frac{(n_y-1)S_y^2}{\sigma_y^2}/(n_y-1)} = F_{n_x-1, n_y-1} \rightarrow \frac{S_x^2}{S_y^2}\,\frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} \sim F_{n_x-1, n_y-1}$

مثال: اگر دو نمونه تصادفی مستقل با اندازه یکسان $n_x = n_y$ از دو جامعه نرمال X و Y با واریانس های

به ترتیب $\sigma_x^2 = 3$ و $\sigma_y^2 = 1$ بگیریم $P\left(\frac{S_x^2}{S_y^2} > 3\right)$ چقدر است؟

$$P\left(\frac{S_x^2}{S_y^2} > 3\right) \to P\left(\frac{S_x^2}{S_y^2} \times \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} > 3 \times \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2}\right)$$

$$\frac{S_x^2}{S_y^2} \times \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} > 3 \times \frac{1}{3} \to P\left(F_{n_x-1,\, n_y-1} > 1\right) = P\left(F_{n-1,\, 9-1}\right) = \frac{1}{2}$$

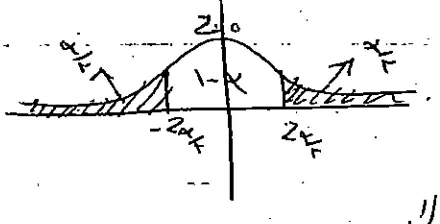
کاربرد: از این توزیع برای مقایسه تغییرپذیری جامعه استفاده می‌شود

تخمین فاصله‌ای: که اغلب بصورت [L , U] و این توابع از نمونه‌های تصادفی هستند

$$P(L < \theta < U) = 1-\alpha$$

فاصله‌ی اطمینان برای میانگین توزیع نرمال (انحراف معیار معلوم)

$$P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$



برای میانگین نمونه $\quad P = \left(\mu - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X} < \mu + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$

جامعه $\quad P = \left(\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$

مثال: مقاومت پاره شدگی نوعی خاص پارچه از توزیع نرمال پیروی می‌کند یک نمونه ۱۰ تایی از این پارچه‌ها

گرفته شده که نتایج بدست آمده به این صورت است ۱۸۶ ۱۸۵ ۱۸۰ ۱۸۴ ۱۸۲ ۱۷۹ ۱۸۵ ۱۸۱ ۱۸۶ ۱۸۲

بر اساس داده‌های گرفته شده انحراف معیار مقاومت پارچه ۲/۵ است یک فاصله اطمینان

۹۵٪ برای میانگین جامعه بدست آورید $\quad \%0.95 \to 1-\alpha = \%0.5 \quad \bar{X} = 182.6$

$n=10 \qquad z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.025} = 1.96$

$$\left(182.6 - 1.96 \times \frac{3.5}{\sqrt{10}} < \mu < 182.6 + 1.96 \times \frac{3.5}{\sqrt{10}}\right) \rightarrow 181.05 < \mu < 184.15$$

مثال: برای جمع‌آوری اطلاعات و برآورد میانگین یک جامعه نرمال با واریانس $\sigma^2 = 4$

چه تعداد نمونه باید انتخاب کرد تا با اطمینان ۹۵٪ طول فاصله اطمینان ۲ باشد؟

$$\text{طول فاصله اطمینان} = U - L = 2 z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow 2 \times 1.96 \times \frac{2}{\sqrt{n}} = 2$$

$n = 15.36 \simeq 16$

فاصله اطمینان برای میانگین توزیع نرمال (انحراف معیار مجهول)

$$P\left(\bar{x} - t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \times \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

$$\text{فاصله اطمینان} = 2 t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

مثال: اگر در مثال مقاومت پارچه انحراف معیار جامعه نامعلوم باشد فاصله اطمینان ۹۵٪ برای میانگین جامعه بدست آورید.

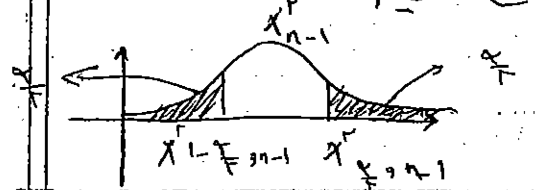
$\bar{x} = 182.6 \qquad t_{0.025} = 2.26$

$$S = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = 2.32$$

$$P\left(\bar{x} - t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \times \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{S}{\sqrt{n}}\right) = \left(182.6 - 2.26 \times \frac{2.32}{\sqrt{10}} < \mu < 182.6 + 2.26 \times \frac{2.32}{\sqrt{10}}\right)$$

نکته: در صورتی که n بزرگ باشد یعنی $n \geq 30$ آماره‌ی S^2 به σ^2 باشد توزیع t به توزیع Z میل می‌کند و لذا معمولاً در شرایطی که n بزرگ باشد حتی اگر انحراف معیار جامعه معلوم نباشد می‌توان S^2 را جایگزین σ^2 کرد.

فاصله‌ی اطمینان برای واریانس توزیع نرمال: فرض کنید X دارای توزیع نرمال با پارامتر μ و σ^2 باشد یک نمونه تصادفی n تایی از این توزیع می‌گیریم $\bar{X}$ و S^2 میانگین و واریانس نمونه تصادفی می‌باشند.



$$P\Bigg(\underbrace{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}}}_{L} < \sigma^2 < \underbrace{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}}_{U}\Bigg) = 1-\alpha$$

مثال: فرض کنید مدت زمان آماده‌سازی یک دستگاه برای تولید از توزیع نرمال پیروی می‌کند. اگر نتایج حاصل از دوازده اندازه‌گیری این زمان برحسب دقیقه به صورت زیر است یک بازه ۹۵٪ برای انحراف معیار واقعی مدت زمان آماده‌سازی را بدست آورید.

۸۱ ۸۴ ۷۹ ۸۷ ۸۵ ۷۹ ۸۲ ۷۱ ۸۹ ۸۳ ۷۷ ۸۶

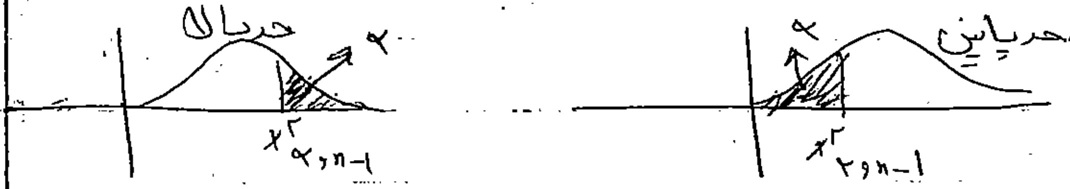
$\bar{x} = 81.75$ $\qquad \chi^2_{0.025,11} = 21.92$ $\qquad n = 12$

$S = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = 4.9$ $\qquad \chi^2_{0.975,11} = 3.816$

$$P\left(\sqrt{\frac{11\times 4.9^2}{21.92}} < \sigma < \sqrt{\frac{11\times 4.9^2}{3.816}}\right)$$

مثال: فرض کنید بر اساس یک نمونه تصادفی ۳ تایی از یک جامعه نرمال یک فاصله اطمینان یکطرفه ۹۵٪ با حد پایین برای σ^2 تشکیل شده. اگر حد پایین فاصله اطمینان بر اساس نتایج نمونه برابر ۳ شده باشد مقدار s^2 و واریانس نمونه چقدر بوده است؟

حل:



$$L = \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha,n-1}} \rightarrow 3 = \frac{2\times s^2}{\chi^2_{0.05,2}}$$

$$2s^2 = 3\chi^2_{0.05,2} \rightarrow s^2 = \frac{3}{2}\chi^2_{0.05,2}$$

اگر در مسئله ای پارامتر μ معلوم باشد و بخواهیم بر اساس یک نمونه تصادفی n تایی از یک جامعه فاصله ای برای واریانس جامعه ارائه دهیم

$$\frac{ns^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n}} < \sigma^2 < \frac{ns^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n}}$$

فاصله ی اطمینان برای تفاضل میانگین های توزیع نرمال مستقل با انحراف معیار معلوم

$$P\left((\bar X-\bar Y) - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x}+\frac{\sigma_y^2}{n_y}} < \mu_x-\mu_y < (\bar X-\bar Y) + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x}+\frac{\sigma_y^2}{n_y}}\right)=1-\alpha$$

مثال: به منظور تفاضل واقعی بین میانگین های طول عمر دو نوع لامپ داریم یک نمونه ۴ تا از لامپ نوع اول و ۵ تا از نوع لامپ دوم. انحراف معیار لامپ ها معلوم

به ترتیب $\sigma_1 = 26$ و $\sigma_2 = 22$ یک فاصله‌ی اطمینان ۹۴٪ برای اختلاف میانگین‌ها بسازید

درصورتی که میانگین نمونه اول برابر ۴۸ و برای نمونه‌ی دوم ۴۲ است؟

$$\left(16 - 1.88 \times \sqrt{\frac{26^2}{40} + \frac{22^2}{50}} < \mu_1 - \mu_2 < 16 + 1.88 \times \sqrt{\frac{26^2}{40} + \frac{22^2}{50}}\right)$$

مثال: از دو جامعه‌ی نرمال مستقل دو نمونه با اندازه‌ی برابر n می‌گیریم واریانس جامعه اول

برابر ۹ و واریانس جامعه دوم ۱۶ است اندازه نمونه هر جامعه چقدر باشد تا طول فاصله‌ی

اطمینان دو طرفه ۹۵٪ باشد برای اختلاف میانگین‌ها خواهیم حداکثر برابر ۲ باشد؟

$$2 Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = 2 \to 2 \times 1.96 \sqrt{\frac{9}{n} + \frac{16}{n}} = 2$$

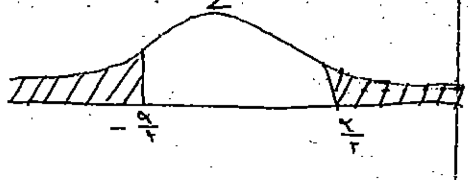
$$n = 96.04 \simeq 97$$

فاصله اطمینان برای پارامتر p در توزیع برنولی:

p: درصد اقلام معیوب در یک خط تولید

اگر تعداد نمونه بزرگ باشد طبق قضیه‌ی حد مرکزی داریم

$$\frac{\bar{X} - p}{\sqrt{V(\bar{X})}} = \frac{\bar{X} - p}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}}$$



$$P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{X} - p}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}} < Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} < p < \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) = 1 - \alpha$$

$\bar{X} = \hat{p}$

مثال: در یک نمونه تصادفی ۲۰۰ تایی از قطعات یک خط تولید ۴۶ عدد از آن‌ها معیوب بوده‌اند

یک فاصله‌ی اطمینان ۹۵٪ برای درصد اقلام معیوب این خط تولید بدست آورید؟

$$\hat{p} = \bar{X} = \frac{46}{200} = 0.23 \qquad \alpha = 0.05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025 = 1.96$$

$$P\left(0.23 - 1.96 \times \sqrt{\frac{0.23(1-0.23)}{200}} < p < 0.23 + 1.96\sqrt{\frac{0.23(1-0.23)}{200}}\right) = 1-\alpha$$

$$0.172 < p < 0.289$$

فاصله‌ی اطمینان برای پارامتر λ در توزیع پواسون:

$$\frac{\bar{X}-\lambda}{Var(\bar{X})} = Z \qquad Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{\lambda}{n} \quad , E(X) = Var(X) = \lambda$$

$$\frac{\bar{X}-\lambda}{\sqrt{\frac{\lambda}{n}}} \sim Z \rightarrow P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{X}-\lambda}{\sqrt{\frac{\lambda}{n}}} < Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\lambda}{n}} < \lambda < \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\lambda}{n}}\right) = 1-\alpha$$

مثال: یک تولیدکننده‌ی لاستیک مصنوعی مدعی است که میانگین سختی محصولاتش برابر با ۶۴/۳ درجه است. احساس می‌شود که این ادعا درست نباشد و می‌خواهیم هرگونه انحراف مثبت یا منفی میانگین واقعی از استاندارد مورد ادعا را بررسی کنیم. سوابق حاکی از آن است که سختی هر لاستیک تولید شده توسط این شرکت دارای توزیع نرمال با انحراف معیار دو درجه است. اگر بخواهیم

الف) اگر بخواهیم براساس یک نمونه‌ی ۱۰ تایی در مورد درست یا غلط بودن ادعا تصمیم گرفته آن را با احتمال ۹۵٪ بپذیریم ناحیه پذیرش صفر برای $\bar{X}$ را تعیین کنید؟

$$H_0: \mu = 64.3$$
$$H_1: \mu \neq 64.3$$

ناحیه پذیرش $(63.03 , 65.54) = \left(64.3 - 1.96 \times \frac{2}{\sqrt{10}} < \mu < 64.3 + 1.96 \times \frac{2}{\sqrt{10}}\right)$

ب) چنانچه $\bar{X}$ برابر ۶۵ شود چه تصمیمی در مورد ادعا صورت می‌گیرد؟ ادعا رد نمی‌شود

خطای نوع اول زمانی رخ می‌دهد که فرض صفر صحیح باشد و تصمیم گیرنده به اشتباه آن را رد کند.

خطای نوع دوم " " " " " صحیح باشد " " " " " بپذیرد.

$P($ رد H_0 | H_0 صحیح $) = \alpha$ خطای نوع اول

$P($ پذیرش H_0 | H_1 صحیح $) = \beta$ خطای نوع دوم

$P($ پذیرش H_0 | H_0 صحیح باشد $) = 1 - \alpha$

$P($ رد H_0 | H_1 صحیح باشد $) = 1 - \beta$

ج) اگر میانگین واقعی ۶۵٫۸ باشد براساس اندازه‌ی نمونه‌ی ۱۰ تایی و ناحیه پذیرش به دست آمده در قسمت الف مقدار β یا احتمال ارتکاب خطای نوع دوم چقدر است؟

$$P(63.03 < \bar{X} < 65.54 \mid \mu = 65.8)$$

$$P\left(\frac{63{,}03-65{,}8}{\frac{2}{\sqrt{10}}} < \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{65{,}04-65{,}8}{\frac{2}{\sqrt{10}}}\right) = P(-4{,}38 < Z < -1{,}21)$$

نکته، فرض کنید بخواهیم براساس یک نمونه تصادفی از یک جامعه‌ی نرمال با واریانس معلوم σ^2 فرض $\mu=\mu_0$ را در برابر $\mu \neq \mu_0$ آزمون کنیم. اگر احتمال خطای نوع ۱ برابر α تعیین شده باشد و بخواهیم درستی برابر بودن میانگین واقعی جامعه با μ_1، فرض صفر را با احتمال $1-\beta$ رد کنیم اندازه‌ی نمونه‌ی لازم تقریباً برابر است با

$$n \sim \frac{\sigma^2 (Z_{\frac{\alpha}{2}}+Z_\beta)^2}{(\mu_0-\mu_1)^2}$$

مثال، فرض کنیم بخواهیم براساس یک نمونه تصادفی از جامعه‌ی نرمال با واریانس معلوم ۵ فرض $\mu=\mu_0$ را در برابر $\mu \neq \mu_0$ آزمون کنیم. اگر احتمال خطای نوع ۱ برابر ۰/۵ تعیین شده باشد و بخواهیم درستی وجود تفاوت به اندازه‌ی ۱ بین میانگین واقعی و μ_0 با احتمال ۰/۵ آن را کشف کنیم اندازه‌ی نمونه‌ی لازم تقریباً چقدر است؟ $\alpha = 0{,}5$

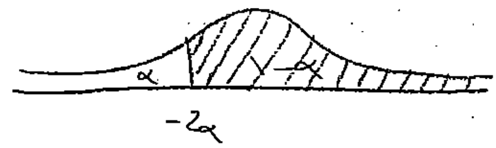
به دلیل تقارن منظور $Z_{0,5} \to Z$

$$\beta = 1 - 0{,}5 = 0{,}5 \rightarrow n = \frac{5(1{,}96-0)}{1^2} = 19{,}2 \sim 20$$

مثال، فرض کنید مسافت طی شده توسط یک لاستیک دارای توزیع نرمال با انحراف معیار معلوم ۱۰۰۰ باشد. در مورد این نوع لاستیک ادعا شده که به طور متوسط ۲۲۰۰۰ mile رانندگی می‌کند. اگر بخواهیم براساس یک نمونه ۱۳ تایی فرض $\mu=22000$ را در برابر $\mu<22000$ در سطح معنی‌دار

الف) ۵٪ آن را آزمون کنیم ناحیه‌ی پذیرش برای $\bar{x}$ را تعیین کنید؟

$$\left(\mu_0 - Z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} , +\infty\right) = 1-\alpha$$



چون یک طرفه است

$$\left(22000 - 1.64 \frac{1000}{\sqrt{12}} , +\infty\right) = (21525 , +\infty)$$

ب) چنانچه $\bar{x}$ برابر ۲۱۴۰۰ شود چه تصمیمی می‌گیرید؟ خارج از ناحیه پذیرش است پس μ_0 رد می‌شود

ج) اگر میانگین واقعی برابر ۲۱۲۰۰ باشد مقدار خطای نوع دوم چقدر است؟

$$1-\beta \quad \bar{x} > 21200 \quad P(\bar{x} > 21525 \mid \mu = 21200)$$

$$P\left(Z > \frac{21525 - 21200}{\frac{1000}{\sqrt{12}}}\right) = P(Z > 1.12) = 0.1314$$

جمع‌بندی: ۱- فرض صفر و فرض مقابل آن را تعیین می‌کنیم ۲- آماره‌ای مناسب برای آزمون فرض به صورت $z = \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ تعیین می‌کنیم ۳- ناحیه پذیرش و رد فرض صفر را برای آماره‌ی Z_0 یا $\bar{x}$ براساس فرض صفر و فرض مقابل آن تعیین می‌کنیم

۴- براساس یک نمونه‌ی تصادفی مقدار آماره را تعیین کرده و در مورد رد یا پذیرش فرض صفر تصمیم می‌گیریم

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases} \qquad Z_0 = \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \qquad \left[-Z_{\frac{\alpha}{2}} , Z_{\frac{\alpha}{2}}\right]$$

ناحیه پذیرش $\uparrow Z_0$

ناحیه پذیرش $\bar{X}$ $\quad \left(\mu - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} , \mu + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

$$\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu < \mu_0 \end{cases} \qquad Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \qquad \left[-z_{\frac{\alpha}{2}} , +\infty\right)$$

ناحیه پذیرش Z

ناحیه پذیرش $\bar{X}$ $\quad \left(\mu - z_{\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} , \infty\right)$

$$\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu > \mu_0 \end{cases} \qquad Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \qquad \left(-\infty , Z_{\alpha}\right)$$

ناحیه پذیرش Z

ناحیه پذیرش $\bar{X}$ $\quad \left(-\infty , \mu + Z_{\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

آزمون فرض درباره میانگین جامعه نرمال با انحراف معیار نامعلوم:

مثال: از ۵ بار اندازه‌گیری محتوی نوعی محصول اعداد ۱۴٫۶ ۱۴٫۳ ۱۴٫۴ ۱۴٫۲ ۱۴٫۵

(۱) $\begin{cases} \mu = 14.2 \\ \mu > 14.2 \end{cases}$ حاصل شده‌اند با فرض نرمال بودن جامعه در سطح معناداری ۵٪ فرض

را آزمون کنید. $\quad \bar{X} = 14.4 \quad , \quad S^2 = 0.025$

(۲) $t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \rightarrow \frac{14.4 - 14.2}{\sqrt{\frac{0.025}{5}}} = 2.83$

(۳) $\left(-\infty , t_{\alpha, n-1}\right) = \left(-\infty , t_{0.05, 4}\right) = \left(-\infty , 2.132\right)$

قابل قبول نیست

$$\begin{cases} \mu = \mu_0 \\ \mu \neq \mu_0 \end{cases} \quad t_0 = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \quad [-t_{\frac{\alpha}{2}} , t_{\frac{\alpha}{2}}]$$

ناحیه پذیرش t

ناحیه پذیرش $\bar{x}$ $\left(\mu_0 - t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} , \mu_0 + t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$

$$\begin{cases} \mu = \mu_0 \\ \mu > \mu_0 \end{cases} \quad t_0 = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \quad (-\infty , t_\alpha)$$

ناحیه پذیرش t

ناحیه پذیرش $\bar{x}$ $\left(-\infty , \mu_0 + t_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$

$$\begin{cases} \mu = \mu_0 \\ \mu < \mu_0 \end{cases} \quad t_0 = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \quad (-t_\alpha , \infty)$$

ناحیه پذیرش t

$$\left(\mu - t_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}} , +\infty\right)$$

آزمون فرض در مورد پارامتر P یک جامعه‌ی برنولی؛ فرض کنید بر اساس نمونه تصادفی

$x_1 , \ldots , x_n$ از یک جامعه‌ی برنولی فرض $\begin{cases} P = P_0 \\ P \neq P_0 \end{cases}$ می‌خواهیم آزمون کنیم

آماره‌ی آزمون خواهد بود $Z_0 = \dfrac{\bar{x} - P_0}{\sqrt{\dfrac{P_0(1-P_0)}{n}}}$

اگر فرض درست باشد $P = P_0$ بر اساس قضیه‌ی حد مرکزی آماره Z_0 دارای توزیع

نرمال استاندارد خواهد بود با اطمینان $1-\alpha$ انتظار می‌رود در فاصله $-Z_{\frac{\alpha}{2}}$ و $Z_{\frac{\alpha}{2}}$

قرار می‌گیرد

مثال: در یک آزمون با ۵۰ سوال ۴ گزینه‌ای یک دانش آموز در ۲۵ سوال گزینه درست را انتخاب کرد ادعا شده که این دانش آموز به تمام سوال‌ها شانسی جواب داده این ادعا در سطح معنی ۵٪ آزمون کنید:

$$\hat{P} = \bar{X} = \frac{25}{50} = .5$$

$$P_0 = \frac{1}{4} = .25 \qquad Z_0 = \frac{.5 - .25}{\sqrt{\frac{.25 \times .75}{50}}} = 4.08$$

$$P_1 \neq .25$$

ناحیه پذیرش $(-Z_{.025}, Z_{.025}) = (-1.96, +1.96)$

کنترل فرآیند:

فرآیند: ترکیبی از ماشین‌ها - روش‌ها - مواد و افراد گفته می‌شود که برای تولید یک محصول با کیفیت مطلوب چیده شده‌اند

کنترل: کارهای انجام شده برای نگهداری مشخصات و استانداردهای محصول

هدف نهایی فرآیند، ساخت محصول مطابق با مشخصات قابل قبول

نمودار کنترل: ابزاری است که اطلاعات بدست آمده از عملکرد فرآیند را نمایش می‌دهد و با حدود رسم شده روی نمودار مقایسه می‌کنیم

انواع انحرافات فرایند: ۱- انحرافات غیر تصادفی (عمدی) که باعث می شود اطلاعات بدست آمده از حدود بالا تر رفته که توسط خطای اپراتور- تنظیم اشتباه دستگاه یا مواد اولیه نامرغوب انجام می شود که به انحرافات با دلیل نیز معروفند زیرا دارای علل مشخص قابل شناسایی است و می توان آن ها را کشف کرد و حذف آن توجیه پذیر است ۲- انحرافات تصادفی (انحرافات بی دلیل)

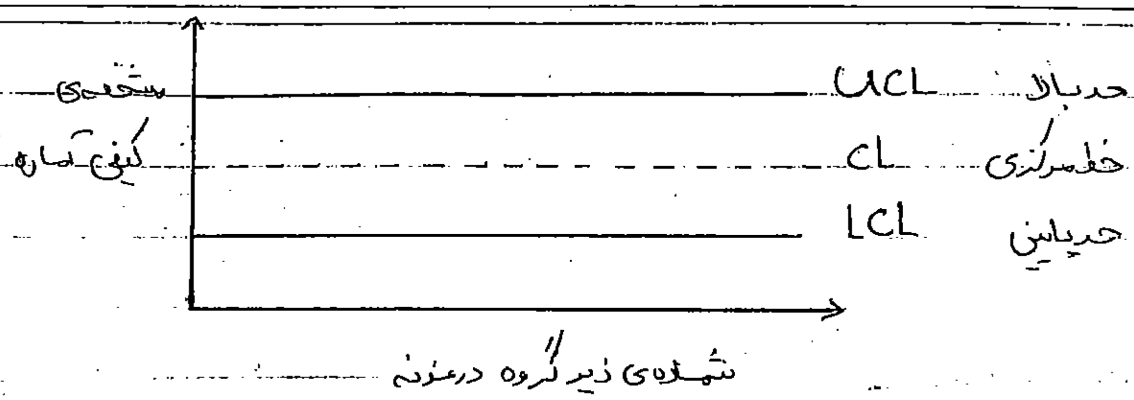
فرایند تحت کنترل: به فرایندی که بدون انحراف با دلیل باشد فرایند تحت کنترل آماری گفته می شود با استفاده از حدود نمودار کنترل (حد بالا و حد پایین) نمودار کنترل انحرافات با دلیل را می توان از انحرافات بی دلیل جدا کرد

حدود کنترل اکثر نمودارها در فاصله ± 3 انحراف معیار استاندارد از میانگین آماره است

نکته: هر یک فرایند تحت کنترل آماری به معنی است که تنها انحرافات تصادفی در آن وجود دارد لزوما به این معنی نیست که محصولات تولید شده طبق مشخصات می باشند و محصول معیوب دیده نمی شود

مراحل تهیه نمودار کنترل: ۱- انتخاب مشخصه هایی که باید بررسی شوند. ۲- انتخاب نوع نمودار کنترل: مثل نمودار $\bar{X}$، نمودار R، نمودار P، نمودار C

خطای نوع اول ↑ ↓ | خطای نوع دوم ↓ ↑ | فاصله‌ی بین حدود کنترل ↓ ↑ | اندازه نمونه (n) ↑ ↓ | حجم



۳- تعیین خط مرکزی و حدود کنترل (خط مرکزی ممکن است میانگین داده‌های گذشته باشد یا یک میانگین انتخابی باشد مثل یک استاندارد)

حدود کنترل در فاصله‌ی ±۳ انحراف استاندارد است ولی ممکن است از حدود ±۲ انحراف استاندارد نیز استفاده شود (با توجه به ریسک α و β یعنی خطای نوع اول و دوم).

نکته: حدودی که در ±۲٫۵ تعیین می‌شوند ریسک کمتر خطای نوع دوم (β) را خواهند داشت و ریسک زیادتر خطای نوع اول را (α)

۴- انتخاب زیرگروه‌های منطقی، داده‌هایی که به ترتیب روی یک نمودار کنترل رسم می‌شوند از مجموعه‌های از اقلام تولید شده که زیرگروه منطقی نامیده می‌شوند بدست می‌آیند

۵- ترکیب زیرگروه‌ها، در نمودارهای کنترل اقلام هر زیرگروه یا نمونه باید اقلام متوالی به ترتیب تولید باشند چون اگر اقلام زیرگروه بطور تصادفی انتخاب شوند پراکندگی

افزایش یافته و حدود کنترل زیاد می شود که باعث کاهش حساسیت نمودار می گردد

۶- اندازه ی زیرگروه (حجم مشاهدات) : هرچه اندازه ی زیرگروه بیشتر باشد احتمال

بدست آوردن تصویر دقیق عملکرد فرآیند افزایش می یابد ولی هزینه های نمونه گیری بیشتر

می شود. تعداد نمونه های معمول در صنعت و محاسبات ۵تا است (تعداد مشاهدات برای

هر زیرگروه)

۷- محاسبه ی حدود کنترل و تفسیر نتایج : برای تفسیر مقدار بدست آمده از نمونه ها

یا مشاهدات مثل میانگین، دامنه، انحراف معیار بصورت نقطه روی نمودار رسم می شوند و نقاط

اگر خارج از حدود کنترل باشد مشخص می شود که فرآیند خارج از حدود کنترل است؛

یا نقاط خارج از کنترل بررسی شده و انحرافات با دلیل مربوطه این نقاط باید حذف

شده و حدود کنترل جدید محاسبه گردد

نکته: اگر تمام نقاط داخل حدود کنترل قرار گیرد ولی تغییرات منظم باشد فرآیند تولید از

کنترل خارج است یعنی یک انحراف غیرعادی به طور منظم در حال انجام است یعنی نمودار

باید بصورت زیگزاگی باشد مثلا ۱۲ نقطه از ۲۰ نقطه بالا خط مرکزی و ۸ تای دیگر پایین آن باشد

زیر حالت مرکزی باشد. ص ۲۱۹ برای مشاهده زیر گروه‌ها مناسب است

نمودارهای کنترل برای متغیرها، یک مشخصه‌ی کیفی قابل اندازه‌گیری مثل وزن یا تکرار یک متغیر است وقتی مشخصه‌ی کیفی متغیر باشد هر دو مقدار میانگین و انحراف معیار مشخصه باید کنترل شوند. متوسط فرآیند یا میانگین سطح کیفیت با نمودار کنترل برای میانگین‌ها یا نمودار $\bar{X}$ کنترل می‌شود.

تغییرپذیری یا پراکندگی فرآیند با نمودار کنترل برای انحراف استاندارد یا نمودار S یا نمودار کنترل برای دامنه‌ی تغییرات یا نمودار R کنترل می‌شوند.

فرض کنید مشخصه‌ی کیفی دارای توزیع نرمال با میانگین μ و انحراف استاندارد σ باشد و هر دو مقدار μ و σ معلوم باشد اگر $x_1, x_2, \dots, x_n$ یک نمونه به اندازه‌ی n باشند

$$\left.\begin{aligned}\bar{X} &= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\\ \bar{X} &= N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)\end{aligned}\right\} \quad \mu + Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad , \quad \mu - Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

که از این دو برای محاسبه‌ی حد بالا و پایین استفاده می‌شود و بجای $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ از ۳ استفاده می‌کنیم یعنی

$$\mu + 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad , \quad \mu - 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

تخمین میانگین و واریانس (μ و σ) فرایند: در عمل معمولاً مقادیر μ و σ معلوم نیست

پس باید برآوردی از آن‌ها داشته باشیم معمولاً برآورد μ، میانگین کل می‌شود

یعنی در صورتی که $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_m$ میانگین m زیرگروه منطقی باشد بهترین برآورد

میانگین فرآیند یا μ می‌شود $\bar{\bar{X}} = (\mu)$ بهترین برآورد میانگین فرآیند

زیرگروه منطقی			n تا مشاهده از هر زیرگروه			میانگین هر زیرگروه
1	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i}{5}$
2	x'_1	x'_2	x'_3	x'_4	x'_5	$\bar{x}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i}{5}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m	x_{1m}	x_{2m}	x_{3m}	x_{4m}	x_{5m}	$\bar{x}_m = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i}{5}$

$$\bar{\bar{X}} = \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \cdots + \bar{x}_m}{m}$$

به این ترتیب می‌توان $\bar{\bar{X}}$ را به عنوان خط مرکزی نمودار $\bar{X}$ دانست

برای تعیین حدود کنترل فرآیند برآورد انحراف استاندارد فرآیند نیز لازم است

اگر $x_1, \ldots, x_n$ اندازه‌ی یک نمونه‌ی n تایی باشد در این صورت دامنه‌ی تغییرات

نمونه تفاوت بین بزرگترین و کوچکترین اندازه می‌باشد $R = X_{max} - X_{min}$

رابطه‌ی بین دامنه تغییرات یک نمونه از توزیع نرمال و انحراف استاندارد آن دامنه‌ی

تغییرات نسبی نامیده شده و برابر $W = \frac{R}{\sigma}$، میانگین W برابر d_2 است

پارامترهای توزیع W تابعی از اندازه‌ی نمونه n خواهد بود و میانگین آن برابر d_2 است

در نتیجه برآورد کارا از σ $\underbrace{\sigma = \frac{R}{d_2}}_{\text{برای یک زیرگروه}}$ بدست می‌آید و مقدار d_2 از جدول بدست می‌آید

فرض کنیم $R_1, R_2, \dots, R_m$ مقادیر دامنه تغییرات m زیرگروه منطقی باشد متوسط دامنه‌ی تغییرات $\bar{R}$ برابر است با

$$\bar{R} = \frac{R_1 + R_2 + \cdots + R_m}{m}$$

برآورد انحراف استاندارد فرآیند $\hat{\sigma}$ برابر است با

$$\underbrace{\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2}}_{\text{برای کل زیرگروه‌های منطقی}}$$

اگر از $\bar{\bar{x}}$ به عنوان یک برآوردکننده‌ی μ و از $\frac{\bar{R}}{d_2}$ به عنوان یک برآوردکننده برای σ استفاده کنیم حدود نمودار کنترل $\bar{x}$ برابر است با

$$UCL = \bar{\bar{x}} + 3\hat{\sigma} = \bar{\bar{x}} + \underbrace{\frac{3}{\sqrt{n}\, d_2}}_{A_2}\bar{R} = \bar{\bar{x}} + A_2\bar{R}$$

$$CL = \bar{\bar{x}} = \bar{\bar{x}} = \bar{\bar{x}}$$

$$LCL = \bar{\bar{x}} - 3\hat{\sigma} = \bar{\bar{x}} - \underbrace{\frac{3}{\sqrt{n}\, d_2}}_{A_2}\bar{R} = \bar{\bar{x}} - A_2\bar{R}$$

می‌توان بجای استفاده از $\frac{3}{d_2\sqrt{n}}$ از A_2 استفاده کرد که مقدار ثابتی است و از جدول بدست می‌آید

تغییرپذیری فرآیند را نیز می‌توان با رسم مقادیر R از نمونه‌های متوالی روی نمودار کنترل بررسی کرد خط مرکزی نمودار کنترل $\bar{R}$ است و برای محاسبه‌ی حدود کنترل برآورد σ لازم است

انحراف استاندارد W مثل d_3 تابع معلومی از n است پس انحراف استاندارد R برابر است با ←

$$\sigma_R = d_3 \sigma$$

چون σ نامعلوم است σ_R را می‌توان از رابطه‌ی زیر بدست آورد

$$\hat{\sigma}_R = d_3 \frac{\bar{R}}{d_2}$$

و حدود کنترل و خط مرکزی نمودار R برابر است با

$$UCL = \bar{R} + 3\frac{d_3}{d_2}\bar{R} = \bar{R}\left(1+3\frac{d_3}{d_2}\right) = \bar{R}D_4$$

$$CL = \bar{R} = \bar{R} = \bar{R}$$

$$LCL = \bar{R} - 3\frac{d_3}{d_2}\bar{R} = \bar{R}\left(1-3\frac{d_3}{d_2}\right) = \bar{R}D_3$$

اگر $D_3 = \left(1-\frac{d_3}{d_2}\right)$ و $D_4 = \left(1+\frac{d_3}{d_2}\right)$ باشد

وقتی از نمونه‌های اولیه برای رسم نمودارهای کنترل $\bar{X}$ و R استفاده می‌شود

هدف آن است که حدود کنترل محاسبه شود و آن را حدود کنترل آزمایشی می نامند بین K

میانگین و R دامنه ی تغییرات نمونه روی محور عمودی رسم می شود هر نقطه که خارج

از حدود کنترل قرار گیرد بررسی شده و در صورت کشف انحرافات با دلیل نقطه مربوطه

آن نقطه حذف شده و حدود کنترل جدید محاسبه می شود.

مثال: برای کنترل یک اندازه ی مخصوص یک قطعه ی ساخته شده که برحسب mm اندازه گیری می شود از

نمودارهای $\bar{X}$ و R اندازه گیری می شود حجم زیرگروه $n=4$ است برای هر نمونه مقادیر $\bar{X}$ و R محاسبه

می شود با فرض آنکه فرآیند تولید تحت کنترل است حدود نمودار و مقادیر انحراف استاندارد

$\bar{X}$ و R را بدست آورید در صورتی که بعد از ۲۰ نمونه گیری $\sum \bar{X}_i = 41.3$ و $\sum R_i = .32$ باشد؟

از جدول می بینیم با حجم نمونه $n=4$

$\bar{X}$ نمودار

$$UCL = \bar{\bar{X}} + A_2\bar{R} \rightarrow 2.06 + (.729)(.016) = 2.07$$

$$LCL = \bar{\bar{X}} - A_2\bar{R} \rightarrow 2.06 - (.729)(.016) = 2.05$$

$$\bar{\bar{X}} = \frac{\sum \bar{X}_i}{m} = \frac{41.3}{20} = 2.06 \qquad \bar{R} = \frac{\sum R_i}{m} = \frac{.32}{20} = .016$$

از جدول می بینیم

R نمودار

$$UCL = D_4\bar{R} = (2.282)(.016) = .0364$$

$$LCL = D_3\bar{R} \quad 0 \quad (.016) = 0$$

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2} = \frac{.016}{2.059} = .007$$

کارایی فرایند: مثال، اندازه‌ی قطر رینگ های پیستون با چندین بار نمونه گیری دارای میانگین کل $\bar{\bar{X}} = 74.001$ شده و برآورد انحراف استاندارد فرایند $\hat{\sigma} = 0.0099$ در صورتی که محدوده‌های مشخصات قابل قبول برای قطر این قطعه 74 ± 0.03 باشد کارایی فرایند پایین حدود مشخصات را مشخص کرده و نسبت رینگ های خارج از محدوده قابل قبول را مشخص کنید؟

$$P(73.97 < X < 74.03) \rightarrow P(X < 74.03) - P(X < 73.97)$$

$$P\left(\frac{X - \bar{\bar{X}}}{\hat{\sigma}} < \frac{74.03 - 74.001}{0.0099}\right) - P\left(\frac{X - \bar{\bar{X}}}{\hat{\sigma}} < \frac{73.97 - 74.001}{0.0099}\right) \rightarrow$$

$$P(Z < 2.93) - P(Z < -3.13) = 0.99831 - 0.00087 = 0.99744$$

روش دیگر بیان کارایی فرایند استفاده از نسبت کارایی فرایند است یا (PCR) و مقدار آن برای یک مشخصه‌ی کیفی با هر دو حد بالا و پایین حدود مشخصات برابر است با $PCR = \dfrac{USL - LSL}{6\hat{\sigma}}$

حدود مشخصات فنی

$$PCR = \frac{74.03 - 73.97}{6 \times 0.0099} = 1.01$$

اگر $PCR > 1$ باشد تعداد محصول کمی داریم که در فرایند نامنطبق تولید شده است

اگر $PCR < 1$ باشد تعداد محصول زیادی داریم که در فرایند نامنطبق تولید شده است

اگر $PCR = 1$ باشد تقریباً ۲۷ عیوب به ازای هر ۱۰۰۰۰ واحد تولید داریم

مثال: حدود مشخصات قابل قبول یک قطعه ۲/۰۵ ± ۰/۰۳ می‌باشد اگر اندازه‌ی قطعه کمتر از حد پایین مشخصات باشد باید دور ریخته شود و اگر بیشتر از حد بالا باشد با دوباره کاری قابل قبول است برای کنترل تولید این قطعه از نمودارهای $\bar{X}$ و R با حجم زیرگروه ۴ استفاده می‌شود پس از بررسی ۲۰ نمونه ۴۱/۳۴ = $\sum \bar{X}_i$ و ۰/۳۲ = $\sum R_i$ بدست آمده است. با فرض آنکه توزیع نرمال و تحت کنترل آماری است چه نتیجه‌ای درباره‌ی توانایی این فرآیند تولید در ساخت قطعات با این حدود مشخصات بدست می‌آید؟

$$\bar{R} = \frac{۰/۳۲}{۲۰} = ۰/۰۱۶ \quad و \quad d_2 = ۲/۰۵۹ \rightarrow \hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2} = \frac{۰/۰۱۶}{۲/۰۵۹} = ۰/۰۰۷۸$$

$$\frac{۲/۰۷ - ۲/۰۳}{۶ \times ۰/۰۰۷۸} = ۰/۸۵ \rightarrow ۰/۸۵ < ۱ \longrightarrow$$ مقدار زیادی معیوب تولید می‌شود

حدود کنترل اصلاح شده: مثال: جدول زیر مقادیر $\bar{X}$ و R را برای ۲۰ نمونه‌ی ۵ تایی را نشان می‌دهد حدود مشخصات قابل قبول برای مشخصه‌ی مورد نظر این محصول ۱۰ ± ۳۷ تعیین شده است حدود کنترل $\bar{X}$ و R را بدست آورید و بگویید آیا این فرآیند قادر به رعایت حدود مشخصات تعیین شده می‌باشد یا خیر؟

شماره زیرگروه	$\bar{X}$	R		شماره زیرگروه	$\bar{X}$	R		شماره زیرگروه	$\bar{X}$	R
۱	۳۴	۴		۸	۳۳/۶	۱۰		۱۵	۳۲/۸	۷
۲	۳۱/۶	۴	خارج از R	۹	۳۳/۸	۱۹		۱۶	۳۱/۶	۵
۳	۳۰/۸	۲	خارج از $\bar{X}$	۱۰	۳۷/۸	۶		۱۷	۳۱	۵
۴	۳۳	۳		۱۱	۳۵/۸	۴		۱۸	۳۰/۶	۳
۵	۳۵	۵	خارج از $\bar{X}$	۱۲	۳۸/۴	۴		۱۹	۳۶/۸	۹
۶	۳۲/۶	۲	خارج از R	۱۳	۳۴	۱۴		۲۰	۳۵/۶	۶
۷	۳۴	۸		۱۴	۳۵	۴				

۳۵

$\sum R_i = 124 \quad , \quad \bar{R} = 6.2$

حدود کنترل R $= UCL = D_4\bar{R} = 2.11 \times 6.2 = 13.08$

حجم نمونه ۵ است $\quad LCL = D_3\bar{R} = 0 \times 6.2 = 0$

پس علامت تغییرات زیرگروه‌های ۱۳ و ۹ خارج از حد بالای کنترل قرار می‌گیرد برای تعیین $\bar{R}$ مقادیر

معلوم شده و حدود کنترل نمودار تمام مربوط به زیرگروه‌های ۹ و ۱۳ را حذف می‌کنیم با فرض اینکه علت‌های

قابل تشخیص را شناخته و اصلاح لازم را به عمل آورده باشیم →

$$\bar{R}_{\text{جدید}} = \frac{124 - 19 - 14}{20 - 2} = \frac{91}{18} = 5.06$$

$$UCL = D_4\bar{R} = 2.11 \times 5.06 = 10.67$$

$$LCL = D_3\bar{R} = 0 \times 5.06 = 0$$

حال همه‌ی حدود در محدوده قرار گرفته‌اند پس حال بررسی نمودار $\bar{X}$ را شروع می‌کنیم با استفاده از

$$\bar{\bar{X}} = \frac{603.6}{18} = 33.53$$

داده‌های جدید و بدون در نظر گرفتن داده‌های حذف شده یعنی

$$UCL = \bar{\bar{X}} + A_2\bar{R}_{\text{جدید}} = 33.53 + 0.577(5.06) = 36.46$$

$$LCL = \bar{\bar{X}} - A_2\bar{R} = 33.53 - 0.577(5.06) = 30.59$$

حال ۱۸ داده باقیمانده را از لحاظ $\bar{X}$ بررسی می‌کنیم که آیا در محدوده نمودار $\bar{X}$ هستند یا خیر با مقایسه اعداد

$\bar{X}$ نمونه‌ها و حدود محاسبه شده متوجه می‌شویم که زیرگروه‌های ۱۰ و ۱۲ خارج از حدود کنترل $\bar{X}$ هستند

این نقاط را حذف کرده و حدود جدید $\bar{X}$ را برای ۱۶ داده دیگر محاسبه می‌کنیم

$\bar{\bar{X}}_{جدید} = \frac{603.6 - 37.8 - 38.4}{16} = 32.96$

$UCL = 32.96 + 0.577(5.06) = 35.89$

$LCL = 32.96 - 0.577(5.06) \quad 35.02$

نکته، در این گونه سوال‌ها ابتدا عدد R را بررسی می‌کنیم و بعد به سراغ نمودار $\bar{X}$ می‌رویم

کارایی فرآیند $= \frac{47 - 27}{6 \times 2.175} = \frac{20}{13.05} = 1.53 > 1 \rightarrow$ معیوبی کمی داریم

$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}_{جدید}}{d_2} = \frac{5.06}{2.326} = 2.175$

نکته، LSL و USL به مقادیر اصلاح شده ربطی ندارد و فقط به $\hat{\sigma}$ ربط دارد

بررسی نقاط روی نمودار کنترل: یک فرآیند کولیبوتی? وقتی تحت کنترل است که در شرایط زیر برقرار باشد

۱) هیچ نقطه‌ای خارج از حدود کنترل نباشد ۲- قرار گرفتن نقاط بین حدود کاملاً تصادفی بوده

و هیچ نقاط شکل خاصی را تشکیل ندهند

مشاهده هر یک از شرایط زیر به احتمال زیاد نشان می‌دهد که یک وضعیت غیرعادی در فرآیند داریم

۱) هرگاه ۷ نقطه‌ی متوالی روی نمودار کنترل همگی در یک طرف خط مرکزی قرار گیرند

۲) هرگاه از ۱۱ نقطه‌ی متوالی روی نمودار کنترل حداقل ۱۰ نقطه یک طرف خط مرکزی قرار گیرند

۳) ، ، ۱۴ ، ، ، ، ، ۱۲ ، ، ، ، ، ، ، ،

۴) هرگاه از ۱۷ نقطه متوالی روی نمودار کنترل حداقل ۱۴ نقطه یک طرف خط مرکزی قرار گیرند

۵) « « ۲۰ « « « « « « حداقل ۱۷ « « « « « « « «

مثال: از نمودارهای $\bar{X}$ و R براساس حجم زیرگروه های ۵ تایی برای کنترل یک فرایند تولید مدت طولانی استفاده شده است در طول ماه گذشته هیچ نقطه ای خارج از حدود کنترل قرار نگرفته و نتایج داده های این ماه $\bar{\bar{X}} = 0/7505$ و $\bar{R} = 0/045$ بدست آمده مقدار انحراف استاندارد فرایند را برآورد نمایید سپس) ۱۰ نقطه از ۱۱ نقطه نمودار (آخرین نقاط) یک طرف نمودار $\bar{X}$ قرار بگیرند می توان گفت باز هم فرایند تحت کنترل است؟

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2} = \frac{0/045}{2/326} = 0/0193$$

با اینکه ده نقطه از یازده نقطه آخر یک طرف نمودار هستند پس نمودار تحت کنترل نیست.

نمودار کنترل براساس مقادیر استاندارد: اگر از ابتدا برای میانگین و انحراف استاندارد فرایند تولید مقادیری تعیین شود محاسبه حدود کنترل نمودار $\bar{X}$ و R چنانچه مقادیر استاندارد با $\bar{X}'$ و σ' نمایش داده شود حدود نمودارهای فوق برابر است با:

برای نمودار $\bar{X}$ داریم:

$$\begin{cases} UCL_{\bar{X}}: \bar{X}' + A\sigma' \\ CL_{\bar{X}}: \bar{X}' \\ LCL_{\bar{X}}: \bar{X}' - A\sigma' \end{cases}$$

$$UCL: d_۲\sigma' + ۳\sigma_R = D_۲\sigma'$$

$$CL: d_۲\sigma'$$

$$LCL: d_۲\sigma' - ۳\sigma_R = D_۱\sigma'$$

مثال: نمودارهای کنترل $\bar{X}$ و R برای کنترل قدرت کشش یک نوع نخ استفاده می‌شود نتایج حاصل ۳۰ نمونه‌ی ۵ تایی در زیر نشان داده شده است خط مرکزی و حدود کنترل نمودارهای $\bar{X}$ و R را محاسبه کنید

ب) فرض کنید هر دو نمودار تحت کنترل آماری باشد و فقط یک حد مشخصه‌ی فنی پایین برابر ۱۶ پوند باشد اگر قدرت کشش از توزیع نرمال پیروی کند چند درصد از نخ‌های مورد نظر با مشخصه‌ی فنی مطابقت ندارند؟

$$\sum_{۱}^{۳۰} \bar{X}_i = ۶۰۷٫۸ \qquad \sum_{۱}^{۳۰} R_i = ۱۴۴$$

$$\bar{\bar{X}} = \frac{\sum \bar{X}_i}{m} = \frac{۶۰۷٫۸}{۳۰} = ۲۰٫۲۶ \qquad \bar{R} = \frac{\sum R_i}{m} = \frac{۱۴۴}{۳۰} = ۴٫۸$$

نمودار $\bar{X}$
$$\begin{cases} UCL = \bar{\bar{X}} + A_۲\bar{R} = ۲۰٫۲۶ + (۰٫۵۷۷)(۴٫۸) = ۲۳٫۰۳ \\ LCL = \bar{\bar{X}} - A_۲\bar{R} = ۲۰٫۲۶ - (۰٫۵۷۷)(۴٫۸) = ۱۷٫۴۹ \end{cases}$$

$$\text{نمودار } R \begin{cases} UCL = D_4 \bar{R} = (2.114)(4.8) = 10.14 \\ LCL = D_3 \bar{R} = (0)(4.8) = 0 \end{cases}$$

نکته: برای محاسبه ی سوالات که از نوع احتمال هستند از حدود مشخصات فنی یا LSL و USL استفاده می کنیم ← مثلا

$$P(X<LSL) = P(X<16) = P\left(\frac{X-\bar{\bar{X}}}{\hat{\sigma}} < \frac{16-20.26}{2.064}\right) \rightarrow P(Z<-2.064) = 0.0195 = 1.95\%$$

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2} = \frac{4.8}{2.326} = 2.064$$

تغییر اندازه (حجم) در نمودارهای $\bar{X}$ و R: گاهی به دلیل هزینه یا ثبات فرایند و تخصیص منابع به میزان کمتری می خواهیم اندازه ی نمونه را برای همیشه تغییر دهیم لذا حدود کنترل به صورت زیر محاسبه می شود ولی محاسبات نمودار کمتر می شود

$\bar{R}_{(old)}$ = متوسط دامنه برای اندازه نمونه ی قدیم

$\bar{R}_{(new)}$ = متوسط دامنه برای اندازه نمونه ی جدید

$n_{(old)}$ = اندازه نمونه ی قدیم

$n_{(new)}$ = اندازه نمونه ی جدید

$d_{2(old)}$ = ضریب d_2 برای اندازه ی قدیم

$d_{2(new)}$ = ضریب d_2 برای اندازه ی جدید

حدود نمودار کنترل $\bar{X}$ جدید:

برای تست

$$\bar{X}\begin{cases} UCL = \bar{\bar{X}} + A_{2(new)}\left[\dfrac{d_2\,(new)}{d_2\,(old)}\right]\bar{R}_{(old)} \\[2ex] LCL = \bar{\bar{X}} - A_{2(new)}\left[\dfrac{d_2\,(new)}{d_2\,(old)}\right]\bar{R}_{(old)} \end{cases}$$

$$R\begin{cases} UCL = D_{4(new)}\left[\dfrac{d_2\,(new)}{d_2\,(old)}\right]\bar{R}_{(old)} \\[1ex] CL = R_{new} = \left[\dfrac{d_{2\,new}}{d_{2\,old}}\right]R_{old} \\[1ex] LCL = \max\left\{0\,,\ D_{3(new)}\left[\dfrac{d_2\,(new)}{d_2\,(old)}\right]\bar{R}_{(old)}\right\} \end{cases}$$

مثال: نمودارهای $\bar{X}$ و R برای اندازه‌ی یک قطعه‌ای تهیه شده اند شرایط نمونه گیری بصورت ۲۵ تا زیرگروه

با حجم ۵ بوده است و داریم $\sum \bar{X}_i = 37{,}64$ و $\sum R_i = 8{,}1302$ فرض کنید به علت ثبات خوبی که

فرآیند دارد تصمیم گرفته ایم که اندازه‌ی نمونه را به ۳ کاهش دهیم در این صورت حدود نمودارهای کنترل

جدید را بنویسید؟ $m = 25 \quad n_{old} = 5 \quad n_{new} = 3 \quad \bar{R}_{old} = \dfrac{8{,}1302}{25} = /32521$

$\bar{\bar{X}} = \dfrac{37/64}{25} = 1{,}5056 \qquad d_{2(old)} = 2{,}326 \qquad d_{2\,(new)} = 1{,}693$

$$\bar{X}\text{ نمودار}\begin{cases} UCL = \bar{\bar{X}} + A_{2(new)}\left[\dfrac{d_2\,(new)}{d_2\,(old)}\right]\bar{R}_{old} = 1{,}7415 \\[2ex] LCL = \bar{\bar{X}} - A_{2(new)}\left[\dfrac{d_2\,(new)}{d_2\,(old)}\right]\bar{R}_{old} = 1{,}2634 \end{cases}$$

$$UCL = D_4 \left[\frac{d_2(new)}{d_2(old)} \right] \bar{R}_{(old)} = /\,۴۰۳۳$$

$$LCL = D_3 \left[\frac{d_2(new)}{d_2(old)} \right] \bar{R}_{(old)}$$ یا ۰ =

نکته: کاهش اندازه‌ی نمونه باعث فاصله بین حدود نمودار $\bar{X}$ می‌شود (از هم باز می‌شوند)

و کاهش خط مرکز و حدود کنترل نمودار R می‌گردد (به هم نزدیک می‌شوند)

نمودار برای واریانس ← تهیه و استفاده از نمودارهای $\bar{X}$ و S ؛ اگر واریانس (σ^2)

یک توزیع احتمال نامعلوم بود آن گاه می‌توان آن را بوسیله‌ی برآوردکننده‌ی نااریب σ^2

یعنی واریانس نمونه (S^2) بصورت زیر برآورد کرد

$$S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

ولی خود S یک برآوردکننده‌ی نااریب برای σ نیست یعنی $s \neq \sigma$ و $\sigma^2 \simeq s^2$

می‌توان آن را بصورت زیر بدست آورد

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{S}}{c_4}$$

$$E(S) = c_4 \sigma$$

نکته: از واریانس زمانی استفاده می‌کنیم که تعداد نمونه‌ها زیاد باشد حتی اگر حجم نمونه‌ها کم باشد

در غیر این صورت می‌توانیم از همان R استفاده کنیم

$$\sigma(S) = \sigma\sqrt{1 - c_4^2}$$

حدود کنترل برای نمودارهای S

$$UCL = C_4\sigma + 3\sigma(S) = C_4\sigma + 3\sigma\sqrt{1-C_4^2} = \sigma\overbrace{(C_4+3\sqrt{1-C_4^2})}^{B_6} = \sigma B_6$$

$$CL = C_4\sigma$$

$$LCL = C_4\sigma - 3\sigma(S) = C_4\sigma - 3\sigma\sqrt{1-C_4^2} = \sigma\overbrace{(C_4+3\sqrt{1-C_4^2})}^{B_5} = \sigma B_5$$

اگر مقدار استانداردی برای σ نداشتیم ← $\hat{\sigma} = \frac{\bar{S}}{C_4}$, $\bar{S} = \frac{\sum S_i}{m}$

$\rightarrow \bar{S} = \sigma C_4$

حدود کنترل برای نمودار S با استفاده از $\bar{S}$:

$$UCL: \bar{S} + \frac{3}{C_4}\sqrt{1-C_4^2} = B_4\bar{S}$$

$$CL: \bar{S}$$

$$LCL: \bar{S} - \frac{3}{C_4}\sqrt{1-C_4^2} = B_3\bar{S}$$

حدود کنترل برای نمودار $\bar{X}$ با استفاده از $\bar{S}$:

$$UCL: \bar{\bar{X}} + A_3\bar{S}$$

$$CL: \bar{\bar{X}}$$

$$LCL: \bar{\bar{X}} - A_3\bar{S}$$

مثال: یک مشخصه‌ی کیفی بوسیله‌ی نمودارهای $\bar{X}$ و S کنترل می‌شود نتایج حاصل از ۳۰ نمونه‌ی ۴ تایی در زیر نشان داده شده است الف) حدود کنترل سه انحراف معیار را برای نمودار S تعیین کنید ب) فرض کنید هر دو نمودار تحت کنترل هستند در این صورت پارامترهای μ و σ را برآورد کنید؟

$$\sum_{1}^{30} \bar{X}_i = 12870 \qquad \sum_{1}^{30} S_i = 410$$

$$\bar{\bar{X}} = \frac{12870}{30} = 429 \qquad \bar{S} = \frac{410}{30} = 13/667$$

الف) $UCL = B_4 \bar{S} = (2/266)(13/667) = 30/969$

$LCL = B_3 \bar{S} = (0)(13/667) = 0$

ب) $\mu = \bar{\bar{X}} = 429 \qquad \hat{\sigma} = \frac{\bar{S}}{C_4} = \frac{13/667}{0/9213} = 14/834$

نکته: n همواره نشان دهنده حجم زیرگروه (تعداد مشاهدات) و m نشان دهنده‌ی تعداد زیرگروه است.

مثال: یک مشخصه‌ی کیفی بوسیله‌ی نمودارهای $\bar{X}$ و S با $n = 4$ کنترل می‌شود پارامترهای این دو نمودار در زیر نشان داده شده است و هر دو نمودار تحت کنترل هستند مشخصات فنی مورد نظر ۱۹۷/۵ و ۲۰۲/۵ است در مورد توانایی یا ناتوانی فرآیند در رابطه با محصول تولید شده چه می‌توان گفت؟

نمودار $\bar{X}$	نمودار S
$UCL = ۲۰۱٫۸۸$	$UCL = ۲٫۲۶۶$
$CL = ۲۰۰$	$CL = 1$
$LCL = ۱۹۸٫۱۲$	$LCL = ۰$

$$PCR \text{ یا } \hat{C}_p = \frac{USL - LSL}{6\hat{\sigma}} = \frac{۲۰۲٫۵ - ۱۹۷٫۵}{6 \times \frac{1}{۰٫۹۲۱۳}} = ۰٫۷۶۷۸ < 1$$

توانایی لازم را ندارد یا تعداد معیوب زیادی تولید می‌کند

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{S}}{c_4} = \frac{1}{۰٫۹۲۱۳}$$

مثال: حدهای کنترل $\bar{X}$ و S برای کنترل یک مشخصه‌ی کیفی استفاده می‌شود طراحی این نمودار بر اساس مقادیر استاندارد $\sigma = 10$ و $\mu = 200$ و $n = 4$ است حدود کنترل S را بدست آورید

$B_6 = ۲٫۰۷۸$ $B_5 = 0$ $c_4 = ۰٫۹۲۱۳$

$$UCL = B_6\sigma = ۲٫۰۷۸ \times 10 = ۲۰٫۷۸$$
$$CL = c_4\sigma = ۰٫۹۲۱۳ \times 10 = ۹٫۲۱۳$$
$$LCL = B_5\sigma = 0 \times 10 = 0$$

نمودارهای $\bar{X}$ و S با اندازه نمونه‌ی متغیر به شکل زیر رسم کنید

	۱	۲	۳	۴	۵	$\bar{X}$
۱	x	x	x	x	x	$\bar{x}_1 \rightarrow \bar{x}_1 = n_1\bar{x}_1$
۲	x	x	x			$\bar{x}_2 \rightarrow \bar{x}_2 = n_2\bar{x}_2$
۳	x	x	x	x		$\bar{x}_3 \rightarrow \bar{x}_3 = n_3\bar{x}_3$

$$\bar{\bar{X}} = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2 + n_3\bar{x}_3}{\text{تعداد کل مشاهدات}} \quad , \quad \bar{S} = \left(\frac{\sum (n_i - 1) s^2}{\sum n_i - m}\right)^{\frac{1}{2}}$$

در کتاب حتماً مطالعه شود (۳۵۶)

نمودارهای کنترل برای مشاهدات انفرادی: گاهی اوقات نمونه فقط شامل یک واحد می‌باشد

$n=1$ در مواردی که نرخ تولید بسیار آهسته است و شاید نتوان برای انجام تحلیل‌های مورد نظر

منتظر جمع‌آوری $n>1$ بود در این موارد تغییرپذیری فرآیند به وسیله‌ی دامنه‌ی متحرک دو مشاهده‌ی

متوالی برآورد می‌شود و دامنه‌ی متحرک به صورت زیر تعریف می‌گردد

$$MR_i = |x_i - x_{i-1}|$$

حدود کنترل نمودارهای دامنه متحرک

به جای نمودار S یا R از این حدود استفاده می‌شود

$$\begin{cases} UCL = D_4 \overline{MR} \\ CL = \overline{MR} \\ LCL = D_3 \overline{MR} \end{cases}$$

نمودار $\bar{X}$

$$\begin{cases} UCL = \bar{X} + 3\dfrac{\overline{MR}}{d_2} \\ CL = \bar{X} \\ LCL = \bar{X} - 3\dfrac{\overline{MR}}{d_2} \end{cases}$$

مثال: نتایج حاصل از آزمایش سختی روی ۱۵ نمونه‌ی متوالی از یک آلیاژ آهن در

جدول زیر نشان داده شده است

شماره آلیاژ	سختی	MR	شماره آلیاژ	سختی	MR
۱	۵۲	—	۹	۵۸	۷
۲	۵۱	$\lvert 51-52 \rvert = 1$	۱۰	۵۱	۷
۳	۵۴	$\lvert 54-51 \rvert = 3$	۱۱	۵۴	۳
۴	۵۵	$\lvert 55-54 \rvert = 1$	۱۲	۵۹	۵
۵	۵۰	۵	۱۳	۵۳	۶
۶	۵۲	۲	۱۴	۵۴	۱
۷	۵۰	۲	۱۵	۵۵	۱
۸	۵۱	۱			

یک نمودار کنترل دامنه‌ی متحرک و یک نمودار کنترل اندازه‌گیری انفرادی جهت کنترل سختی این آلیاژ طراحی کنید.

$$\overline{MR} = \frac{\sum MR_i}{15} = 3.21 \qquad \bar{X} = 53.27$$

نکته: توجه کنید که باید $\boxed{n=2}$ قرار دهید چون در MR دو داده را انتخاب می‌کنیم و از هم کم می‌کنیم

خطای نوع دوم (β) $\qquad \beta = P(\text{پذیرش} \mid H_1)$

این نوع خطا در مباحث کنترل کیفیت آماری بدین صورت تعریف می‌شود

$\beta = P($ نمونه ما داخل حدود کنترل قرار بگیرد $\mid \mu = \mu_1$ یا میانگین فرآیند تغییر کرده باشد $)$

$$\beta = P\left(LCL < \bar{X} < UCL \mid \mu = \mu_1 \rightarrow \mu_1 = \mu_0 + k\sigma\right)$$

$\mu_0 - 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ $\quad \mu_{جدید} \quad$ $\mu_0 + 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ $\to \mu_{جدید}$

$$B = P\left(\frac{LCL - \mu_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{\bar{x} - \mu_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{UCL - \mu_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$$

$$B = P\left(\frac{\mu_0 - 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} - (\mu_0 + k\sigma)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{\bar{x} - (\mu_0 + k\sigma)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{\mu_0 + 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} - (\mu_0 + k\sigma)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$$

$B = Z(3 - k\sqrt{n}) - Z(-3 - k\sqrt{n})$ جمع

مثال ۹: فرض کنید می‌خواهیم احتمال پی بردن به وجود تغییری در میانگین را حساب کنید یعنی احتمال B

اگر میانگین فرایند در واقعیت به اندازه‌ی $\frac{2}{k}\sigma$ افزایش یافته باشد و تعداد اندازه نمونه‌ها ۵ باشد

B را حساب کنید؟ $B = Z(3 - 2\sqrt{5}) - Z(-3 - 2\sqrt{5}) = Z(-1.47) - Z(-7.47)$

$= 0.07 - 0 = 0.07$

اگر تغییر ایجاد شده در میانگین فرایند به اندازه‌ی $1\sigma+$ باشد و n برابر ۵ باشد آن‌گاه B برابر ۷۵٪

است و احتمال کشف چنین تغییری بوسیله‌ی اولین نمونه بعد از ایجاد آن برابر $1 - B$ می‌باشد

پس بطور خلاصه داریم $\quad$ احتمال کشف $= 1 - B$

احتمال عدم کشف $= B$

$B = 0.75 \to 1 - B = 0.25$ $\quad$ احتمال کشف

احتمال پی بردن به وجود این تغییر بوسیله‌ی نمونه‌ی دوم برابر $B(1 - B)$ خواهد بود

$B(1-B) = ۰/۷۵ (۰/۲۵) = ۰/۱۹$

احتمال پی بردن به وجود این تغییر بوسیله‌ی نمونه‌ی سوم برابر است با $B^2(1-B)$

« « « « « « « چهارم « $B^3(1-B)$

در این صورت احتمال پی بردن به وجود این تغییر بوسیله‌ی r امین نمونه برابر است با $B^{r-1}(1-B)$

متوسط طول تسلسل: (ARL) ← تعداد نمونه‌ی انتظاری که قبل از تشخیص تغییر انتخاب

می‌شود برابر متوسط طول تسلسل است $ARL = \frac{1}{\alpha}$ و $ARL = \frac{1}{1-B}$

فرایند خارج از کنترل — فرایند تحت کنترل

مثال: تعداد نمونه‌ی انتظاری برای تشخیص تغییر ۱/۵σ با k بار نمونه‌گیری با مقدار اندازه نمونه ۵ چقدر است؟

$ARL = \frac{1}{1-B} = \frac{1}{1-۰/۷۵} = ۴$ — B از قبل محاسبه شده بود و برابر ۰/۷۵ است

مثال: یک مشخصه‌ی کیفی بوسیله‌ی نمودارهای کنترل $\bar{X}$ و R کنترل می‌شود اگر اندازه‌ی نمونه ۴ در نظر گرفته شود آنگاه این دو نمودار دارای پارامترهای زیر هستند اگر هر دو نمودار حالت تحت کنترل را نشان دهند و میانگین فرایند به ۷۹۰ تغییر کند احتمال پی بردن به وجود این تغییر در اولین نمونه بعد از ایجاد آن چقدر است و متوسط طول دنباله (تسلسل) را بدست آورید

نمودار $\bar{X}$:
UCL = ۸۱۵
CL = ۸۰۰
LCL = ۷۸۵

نمودار R:
UCL = ۴۶٫۹۸
CL = ۲۰٫۵۹
LCL = ۰

احتمال خطای نوع دوم $\beta = P(LCL < \bar{x} < UCL \mid \mu_0 = \mu_1)$ ، $\sigma_{\bar{x}} = \hat{\sigma} = \dfrac{R}{d_2} = \dfrac{20.59}{2.059} = 10$

کشف $1-\beta = P(\bar{x} < LCL) + P(\bar{x} > UCL) \rightarrow \beta = P\left(\dfrac{\bar{x} - \mu_{\text{جدید}}}{\sigma_{\bar{x}}} < \dfrac{LCL - \mu_{\text{جدید}}}{\sigma_{\bar{x}}}\right)$

$+ P\left(\dfrac{\bar{x} - \mu_{\text{جدید}}}{\sigma_{\bar{x}}} > \dfrac{UCL - \mu_{\text{جدید}}}{\sigma_{\bar{x}}}\right) \rightarrow$

$1-\beta = P\left(Z < \dfrac{785 - 790}{\frac{10}{\sqrt{4}}}\right) + P\left(Z > \dfrac{815 - 790}{\frac{10}{\sqrt{4}}}\right) = Z(-1) + \left(1 - Z < \dfrac{815 - 790}{\frac{10}{\sqrt{4}}}\right)$

$Z(-1) + 1 - Z(5) \rightarrow Z(-1) - Z(5) + 1 = 0.1587$

$ARL = \dfrac{1}{1-\beta} = \dfrac{1}{0.1587} = 6.3 \rightarrow$ بعد از ۷ بار نمونه گیری

مثال: طراحی یک نمودار $\bar{x}$ بر اساس مقادیر استاندارد $\sigma = 12$ و $\mu = 600$ و $n = 9$ مورد

نظر است حدود کنترل را با در نظر گرفتن ریسک $\alpha = 0.01$ تعیین کنید.

نکته: به صورت عادی α را همیشه $\alpha = 0.0027$ قرار داده بودیم حال اگر α تغییر کند باید

بار دیگر از جدول نرمال Z را بیابیم و به جای آن ۳ که پیشتر قبل از $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ قرار می‌دادیم این عدد

جدید را قرار می‌دهیم یعنی داریم $Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{\frac{0.01}{2}} = Z_{0.005} = 2.576$

$UCL = \mu + 2.576 \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 600 + (2.576)\left(\dfrac{12}{\sqrt{9}}\right) = 610.3$

$LCL = \mu - 2.576 \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 600 - (2.576)\left(\dfrac{12}{\sqrt{9}}\right) = 589.7$

مثال: طراحی کنترل یک نمودار $\bar{X}$ برای یک مشخصه‌ی کیفی دارای توزیع نرمال با مقادیر $\sigma=8$

و $\mu=100$ و $n=4$ صورت گرفته است. در این صورت حدود کنترل دو انحراف معیار را محاسبه کنید؟

$$UCL = \mu + 2\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 100 + \frac{2\times 8}{\sqrt{4}} = 108$$

$$LCL = \mu - 2\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 100 - \frac{2\times 8}{\sqrt{4}} = 92$$

ب) حدود کنترل $\alpha=0.005$ را محاسبه کنید؟

$$Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{\frac{0.005}{2}} = Z_{0.0025} = 2.807$$

$$UCL = \mu + 2.807\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 100 + (2.807)\left(\frac{8}{\sqrt{4}}\right) = 111.228$$

$$LCL = \mu - 2.807\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 100 - (2.807)\left(\frac{8}{\sqrt{4}}\right) = 88.772$$

مثال: یک نمودار کنترل $\bar{X}$ با حدود کنترل ۳ انحراف معیار دارای پارامترهای زیر است

$LCL_{\bar{X}} = 96$ $\quad CL_{\bar{X}} = 100$ $\quad UCL_{\bar{X}} = 104$

فرض کنید مشخصه‌ی کیفی مورد نظر دارای توزیع نرمال با میانگین واقعی ۹۸ و انحراف معیار ۸ است

در این صورت با استفاده از $n=5$ احتمال اینکه نمودار در اولین بوسیله‌ی نمونه‌ی سوم حالت خارج

از کنترل را نشان دهد چیست؟ $\beta = P(LCL < \bar{X} < UCL \mid \mu = \mu_1)$ احتمال عدم کشف

$$\beta = P(\bar{X} < UCL) - P(\bar{X} < LCL) = P\left(\frac{\bar{X}-\mu_{جدید}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{UCL-\mu_{جدید}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) - P\left(\frac{\bar{X}-\mu_{جدید}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{LCL-\mu_{جدید}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$$

$$\beta = P\left(Z < \frac{104-98}{\frac{8}{\sqrt{25}}}\right) - P\left(Z < \frac{96-98}{\frac{8}{\sqrt{25}}}\right) \rightarrow \beta = P(Z < 1.68) - P(Z < -0.56)$$

$$= 0.9535 - 0.2877 = 0.6658 = \beta \rightarrow 1-\beta = 1 - 0.6658 = 0.3342$$ عدم کنترل

$$P(\text{حداقل تا نمونه سوم از کنترل خارج شود}) = 1 - P(\underbrace{\text{نمونه اول}}_{\text{خارج از کنترل نشان دهد}}) - P(\underbrace{\text{نمونه دوم}}_{\text{خارج از کنترل نشان دهد}})$$

$$1 - (0.3342 + (0.3342 \times 0.6658)) \Leftarrow 1 - (1-\beta + (1-\beta)\beta)$$

$$= 0.4433$$

نمودار P یا نمودار نسبت : نسبت اقلام نامنطبق نمونه با تقسیم تعداد واحدهای نامنطبق نمونه بر اندازه‌ی نمونه بدست می‌آید یعنی

$$\hat{p} = \frac{D}{n} \qquad D \rightarrow \text{اقلام نامنطبق}, \quad n \rightarrow \text{کل نمونه}$$

$$\mu_{\hat{p}} = P \quad , \quad \sigma^2_{\hat{p}} = \frac{P(1-P)}{n} \rightarrow \sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}$$

حدود کنترل نمودار P یا نمودار نسبت اقلام نامنطبق (معلوم) :

$$\begin{cases} UCL = P + 3\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}} \\ CL = P \\ LCL = P - 3\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}} \end{cases}$$

زمانی که نسبت اقلام نامنطبق معلوم نباشد باید مقدار آن را با توجه به داده‌های مشاهده

شده بر آورد شود روش متداول این است که ابتدا m نمونه‌ی اولیه را به اندازه‌ی n انتخاب

کسر اقلام نامطلوب $i = 1, 2, \dots, m$ $\hat{p}_i = \frac{D_i}{n}$ برای یک نمونه‌گیری

میانگین کل اقلام نامطلوب $= \bar{p} = \frac{\sum_{i=1}^{m} D_i}{nm} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \hat{p}_i}{m}$

حال داریم حدود کنترل نمودار P یا نسبت اقلام معیوب به عمل:

$$\begin{cases} UCL = \bar{p} + 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} \\ CL = \bar{p} \\ LCL = \bar{p} - 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} \end{cases}$$

مثال: داده‌های زیر نسبت تعداد پاتاقان‌ها و کلیه عنصرهای متصل رشته‌ی معیوب را در نمونه‌های ۱۰۰تایی نشان می‌دهد یک نمودار کنترل نسبت اقلام معیوب برای این داده‌ها تعیین کنید با فرض اینکه بتوان دلیلی برای نقاط خارج از کنترل تعیین نمود حدود کنترل حاسبه شده را مورد تجدید نظر قرار دهید.

شماره نمونه	تعداد اقلام معیوب	$\hat{p}$	شماره نمونه	تعداد اقلام معیوب	
۱	۷	۷/۱۰۰ = ۰/۰۷	۱۱	۶	۰/۶
۲	۴	۰/۴	۱۲	۱۵	۰/۱۵
۳	۱	۰/۱	۱۳	۰	۰
۴	۳	۰/۰۳	۱۴	۹	۰/۰۹
۵	۶	۰/۶	۱۵	۵	۰/۰۵
۶	۸	۰/۰۸	۱۶	۱	۰/۰۱
۷	۱۰	۰/۱	۱۷	۴	۰/۰۴
۸	۵	۰/۰۵	۱۸	۵	۰/۰۵
۹	۲	۰/۰۲	۱۹	۷	۰/۰۷
۱۰	۷	۰/۰۷	۲۰	۱۲	۰/۱۲

$n = 100 \quad m = 20 \quad \ldots \quad \sum P_i = 1/17 \qquad \bar{P} = \frac{\sum_{i=1}^{20} P_i}{mn} = \frac{117}{20 \times 100} = 0.058$

$$UCL = \bar{p} + 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} = 0.058 + 3\sqrt{\frac{0.058(1-0.058)}{100}} = 0.1289$$

$$LCL = \bar{p} - 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} = 0.058 - 3\sqrt{\frac{0.058(1-0.058)}{100}} = 0$$

برای تک تک نمونه ها P_i را حساب می کنیم هر کدام از آن ها از حالت کنترل (حدود کنترل) خارج شدند آن

نمونه را حذف کرده و دوباره حدود کنترل را محاسبه می کنیم در اینجا نمونه ۱۵ از کنترل خارج است پس آن

را حذف می کنیم $\quad \sum P_i = 117 - 15 = 102 \qquad \bar{P} = \frac{102}{100 \times 19} = 0.0537$

$$UCL = 0.0537 + 3\sqrt{\frac{0.0537-(1-0.0537)}{100}} = 0.1213$$

$LCL = 0$ تمامی داده ها در حدود کنترل هستند

مثال: مشتری یک نوع درپوش فلزی کوچک خریداری می کند که در جعبه های ۵۰۰۰ تایی حمل

می شوند ۱۰ جعبه از این درپوش ها منتظر تخلیه شدن در انبار هستند قبل از تخلیه ۲۵۰ درپوش

به طور تصادفی از هر جعبه انتخاب می شوند و بررسی می شوند. ارقام معیوب محاسبه شده برای هر نمونه

عبارت است از: آیا می توان نتیجه گرفت فرآیند در وضعیت کنترل آماری بوده است؟

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
نسبت اقلام معیوب	۰	۰	۰	۰.۰۰۴	۰.۰۰۸	۰.۰۱۲	۰.۰۰۴	۰	۰	۰.۰۰۸ p_i

$m=10 \quad n=250 \quad \sum P_i = 0.44 \quad \bar{P} = \frac{0.44}{10} = 0.044$

$$UCL = 0.044 + 3\sqrt{\frac{0.044(1-0.044)}{250}} = 0.17$$

$LCL = 0$

چون نمونه‌ی ششم خارج از حدود کنترل است فرآیند خارج از کنترل کیفیت آماری است

مثال: در طراحی یک نمودار کنترل نسبت اقلام معیوب با فرض $\underset{p}{0.2 = p}$ و $\underbrace{\text{حدود کنترل سه انحراف معیار}}_{L}$ چه

اندازه نمونه‌ای باید استفاده شود تا حد کنترل پایین نمودار مثبت باشد؟ اگر نسبت اقلام معیوب به ۰/۲۶

تغییر کند چه اندازه نمونه‌ای مورد نیاز است تا بتوان با احتمال ۵۰٪ به وجود آن پی ببرد؟

نکته: شرط مثبت بودن اندازه نمونه برای نسبت اقلام معیوب برابر است با $n > \frac{(1-p)}{p} L^2$

حدود کنترل انحراف معیار

الف) $n > \frac{(1-p)}{p} L^2 \rightarrow n > \frac{0.8}{0.2} 3^2 \rightarrow n > 36$

نکته: فرمول زیر نیز مهم است

$$n = \left(\frac{k}{s}\right)^2 \underbrace{p(1-p)}_{P_{old}}$$

حدود کنترل انحراف معیار یا همان L

$\cancel{S = P_{new}(1-P_{old})}$, $S = P_{new} - P_{old}$

ب) $n = \left(\frac{k}{s}\right)^2 p(1-p)$, $S = P_{new}(1-P_{old}) = 0.26(1-0.2) = 0.06$

$n = \left(\frac{3}{0.06}\right)^2 \times 0.2 \times 0.8 = 400$

مثال: یک فرآیند تحت کنترل نسبت اقلام معیوب دارای خط مرکزی برابر ۰/۰۲ است. اگر نسبت اقلام معیوب

افزایش به ۰/۰۴ تغییر کند احتمال اینکه روز بعد این تغییر ردیابی شود چقدر است؟ احتمال اینکه

در پایان روز سوم به این تغییر پی برده شود چقدر است؟ (نمونه‌ها هر روز به تعداد ۵۰تایی بازرسی می‌شوند)

$$UCL = 0.02 + 3\sqrt{\frac{0.02 \times 0.98}{50}} = 0.079$$

$$CL = 0.02$$

$$LCL = 0.02 - 3\sqrt{\frac{0.02 \times 0.98}{50}} = 0$$

نکته: در مثال بالا و حتی در مثال‌های قبل اگر LCL عدد منفی گردد به جای آن صفر می‌گذاریم

نکته: در مثال بالا چون n به اندازه کافی بزرگ است و احتمال نیز کم است می‌توان از تقریب پواسون

استفاده کرد که پارامتر λ برابر است با $n p_{new} = \lambda = np = 50 \times 0.04 = 2$ ، $n = 50$ ، $p = 0.04$

$P($ تغییر شناسایی شود در روز اول | p تغییر کرده باشد $) = 1 - \beta$

$$1 - \beta = 1 - P(LCL < \underbrace{\hat{p}}_{\frac{D}{n}} < UCL \mid \underbrace{p_{new}}_{\lambda})$$

نکته: اگر در مسائل مثال‌های قبل از توزیع نرمال می‌خواستیم استفاده کنیم رابطه بالا را قبلاً به

نرمال استاندارد تبدیل می‌کردیم و بعد مسئله را حل می‌کردیم اما چون داریم از توزیع پواسون

استفاده می‌کنیم در واقع p که بین حدود کنترل نوشتیم برابر $\frac{D}{n}$ می‌باشد در واقع ما

باید D را محاسبه کنیم که در این صورت خواهیم داشت و با این تفسیر پارامتر P نیز به λ تغییر می‌کند

$$1-\beta = 1-P\left(LCL < \frac{D}{n} < UCL \mid P_{new}\right) \rightarrow 1-\beta = 1-P(nLCL < D < nUCL \mid \lambda)$$

$$= 1-P(D < nUCL \mid \lambda) + P(D < nLCL \mid \lambda) = 1-P(D < 50 \times .079 \mid \lambda) + P(D < 50 \times [illegible] \mid \lambda)$$

$$= 1-\underbrace{P(\overset{\mu=nP \rightarrow \lambda}{D < 3.97 \mid 2})}_{\text{تابع توزیع تجمعی پواسون}} + \underbrace{P(\overset{\mu=nP \rightarrow \lambda}{D < 0 \mid 2})}_{\text{تابع توزیع تجمعی پواسون}}$$

[illegible]

حال این نتایج را از جدول پواسون پیدا می‌کنیم و احتمال را بدست می‌آوریم

$$1-(.857)+(.135) = .278 = 1-\beta$$

ب) $P(\text{شناسایی در نمونه سوم}) = \underbrace{(1-.278)}_{\beta}{}^{2}(.278) = .145$

مثال، در یک نمودار کنترل نسبت اقلام معیوب با پارامترهای $UCL = .19$ ، $CL = .1$ ، $LCL = .01$ برای کنترل فرآیندی استفاده می‌شود اگر از حدود کنترل سه انحراف معیار استفاده شود اندازه ی نمونه ی مورد نیاز برای این نمودار کنترل را تعیین کنید و با استفاده از تقریب پواسون خطای نوع I را محاسبه کنید (α)؟

$$UCL = P + 3\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}} \rightarrow$$

$$.09 = 3\sqrt{\frac{.09}{n}} \rightarrow \frac{.09}{3} = \sqrt{\frac{.09}{n}} \rightarrow$$

$$.19 = .1 + 3\sqrt{\frac{.1 \times .9}{n}} \rightarrow n = 100 \qquad \left(\frac{.09}{3}\right)^2 = \frac{.09}{n} \rightarrow n = \frac{.09}{.0009} =$$

ب) نکته منظور از خطای نوع اول این است که P بین حدود کنترل نباشد یا از UCL بزرگتر باشد یا از

LCL کوچکتر باشد $\lambda = np \rightarrow \lambda = 100 \times 0.1 = 10$

$$P(\alpha) = P(\hat{p} \le LCL \mid p_{\text{جدید}}) + P(\hat{p} > UCL \mid P_{new})$$

$$P(D < nLCL \mid \lambda) + P(D > nUCL \mid \lambda) =$$

$$P(D < nLCL \mid \lambda) + 1 - P(D < nUCL \mid \lambda))$$

$$P(D < 100 \times 0.01 \mid \lambda = 10) + 1 - P(D < 100 \times 0.19 \mid \lambda = 10) = 0.002$$

دقت: برای مثال تابع توزیع تجمعی پواسون با $x = 1$ و $\lambda = 10$ را می‌توان به صورت $POI(1,10)$ نوشت

ج) اگر نسبت اقلام واقعی معیوب فرآیند برابر $p = 0.2$ باشد با استفاده از تقریب پواسون احتمال خطای نوع دوم را مشخص کنید؟

$$\lambda = np = 100 \times 0.2 = 20$$

$$\beta = (LCL < p < UCL \mid p) \rightarrow (nLCL < D < nUCL \mid \lambda)$$

$$= P(D < nUCL \mid \lambda) - P(D < nLCL \mid \lambda) = P(D < 100 \times 0.19 \mid \lambda = 20) - P(D < 100 \times 0.01 \mid \lambda = 20)$$

$$P(D < 19 \mid \lambda = 20) - P(D < 1 \mid \lambda = 20) = POI(19, 20) - POI(1, 20) \xrightarrow[\text{پواسون}]{\text{جدول}}$$

$$= 0.47 - 0.00 = 0.47$$

د) اگر نسبت اقلام معیوب فرآیند به ۰/۲ تغییر یابد آنگاه متوسط طول دنباله مورد نیاز برای

؟ طول دنباله‌ی متوسط ARL برای پی بردن به وجود این تغییر را محاسبه کنید. برای $p=0.2 \Rightarrow \beta = 0.47$

$$ARL = \frac{1}{1-\beta} = \frac{1}{1-0.47} = 1.89 \simeq 2$$

نمودار کنترل np: این امکان وجود دارد که به جای نسبت اقلام نامنطبق نمودار کنترلی براساس تعداد اقلام نامنطبق تهیه کرد. چنین نمودارهایی را نمودارهای کنترل np می‌نامند و حدود کنترل آن برابر است با

$$\begin{cases} UCL = np + 3\sqrt{np(1-p)} \\ CL = np \\ LCL = np - 3\sqrt{np(1-p)} \end{cases}$$

اگر مقدار استانداردی برای p وجود نداشته باشد از $\bar{p}$ به عنوان برآورد کننده‌ی p می‌توان استفاده کرد.

مثال: نمودار کنترلی برای نسبت اقلام معیوب قطعات پلاستیکی که از طریق یک فرآیند قالب‌گیری تولید می‌شود استفاده می‌گردد و داده‌های زیر اطلاعات مربوط به ۱۰ نمونه‌ی ۱۰۰ تایی را نشان می‌دهد.

یک نمودار کنترل برای تعداد اقلام معیوب طراحی نمایید. اگر نسبت اقلام معیوب فرآیند به ۰٫۳ تغییر یابد و نمودار تهیه شده در قسمت الف برای پی بردن به وجود آن استفاده شود احتمال کشف این تغییر به وسیله‌ی اولین نمونه بعد از ایجاد آن چیست؟

شماره نمونه	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
تعداد قطعات معیوب	۱۰	۱۵	۳۱	۱۸	۲۴	۱۲	۲۳	۱۵	۸	۸

$\sum$ قطعات معیوب $= 164 = \sum D_i \quad m = 10$ و $n = 100$

مهم $\bar{p} = \dfrac{\sum D_i}{nm} = \dfrac{164}{10 \times 100} = 0.164$

$$UCL = np + 3\sqrt{np(1-p)} = 100 \times 0.164 + 3\sqrt{100 \times 0.164(1-0.164)} = 27.51$$

$$CL = np = 100 \times 0.164 = 16.4$$

$$LCL = np - 3\sqrt{np(1-p)} = 100 \times 0.164 - 3\sqrt{100 \times 0.164(1-0.164)} = 5.292$$

نکته: برای این نقشه می‌توان از تقریب دوجمله‌ای استفاده کرد چون n ها و $p\%1$ است

یعنی $\mu = np$ و $\sigma = np\sqrt{1-p}$ می‌شود

$$\left.\begin{array}{l} p = 0.3 \\ n = 100 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{دوجمله‌ای}} \mu = np = 0.3 \times 100 = 30$$

$$\sigma = np\sqrt{1-p} = 0.3 \times 100\sqrt{1-0.3} = 25.1$$

$P($احتمال کشف عیب$) = 1-\beta$

$$1-\beta = P(LCL < \overset{\frac{nD}{n}}{p} < UCL)$$

نکته: حال به جای p، $\frac{D}{n}$ را قرار می‌دهیم اما باید توجه کنیم که توزیع دوجمله‌ای است و حالا

$$LCL < n\overset{\frac{D}{n}}{p} < UCL \rightarrow LCL < n\frac{D}{n} < UCL \rightarrow LCL < D < UCL$$

کار را می‌توان برای n بار انجام دهیم در واقع به جای p می‌نویسیم $\frac{nD}{n}$ پس n ها ساده می‌شوند

با وجود D ما این را داریم $1-B = P(LCL < D < UCL)$

$$1-B = 1 - p(D < UCL) + p(D < LCL)$$

حال می‌توان آن را شبیه توزیع به صورت نرمال درآورد البته تبدیل به توزیع نرمال نمی‌شود بلکه شبیه آن

توزیع می‌گردد یعنی باید جواب را از جداول توزیع دوجمله‌ای پیدا کرد پس داریم

$$1 - \Phi\left(\frac{D-\overset{np}{\mu}}{\underset{np\sqrt{1-p}}{\sigma}} < \frac{UCL-np}{np\sqrt{1-p}}\right) + \Phi\left(\frac{D-np}{np\sqrt{1-p}} < \frac{LCL-np}{np\sqrt{1-p}}\right)$$

ضمیمه: در این جا ما توزیع گسسته داریم اگر بخواهیم آن را به توزیع پیوسته تبدیل کنیم باید

به C.T $\pm \frac{1}{2}$ اضافه و کم کنیم یا همان تصحیح پیوستگی اینجا هم همین کار را خواهیم داشت (تبدیل به نرمال)

$$1 - \Phi\left(\frac{D-np}{np\sqrt{1-p}} < \frac{UCL-np+\frac{1}{2}}{np\sqrt{1-p}}\right) + \Phi\left(\frac{D-np}{np\sqrt{1-p}} < \frac{LCL-np-\frac{1}{2}}{np\sqrt{1-p}}\right)$$

$$1 - \Phi\left(Z < \frac{۲۷/۵۱ - ۳۰ + \frac{1}{2}}{۲۵/۱}\right) + \Phi\left(Z < \frac{۵/۲۹۲ - ۳۰ - \frac{1}{2}}{۲۵/۱}\right)$$

$$1 - p(Z < -/۸) + p(Z < -1) = 1 - /۴۶۸۱۲ + /۱۵۸۶۶ = /۶۹۰۵۴$$

مثال: طراحی یک نمودار کنترل تعداد اقلام معیوب براساس اندازه نمونه‌های ۱۰۰ تایی مورد نظر است یعنی

منظور تعداد ۳۰ عدد انتخاب و تعداد اقلام معیوب هر یک را مشخص می‌کنیم اگر $\sum D_i = ۲۵۰$ باشد

حد کنترل‌های نمودار np دارای چه مقادیری هستند؟ $UCL \quad CL \quad LCL = ?$

$$\bar{p} = \frac{\sum p_i}{nm} = \frac{1200}{30 \times 400} = \frac{1200}{12000} = 0.1$$

$$UCL = 400 \times 0.1 + 3\sqrt{400 \times 0.1 (1 - 0.1)} = 40 + 18 = 58$$

$$CL = 400 \times 0.1 = 40 = 40$$

$$LCL = 400 \times 0.1 - 3\sqrt{400 \times 0.1 \times 0.9} = 40 - 18 = 22$$

مثال: چرا نمودار np با اندازه نمونه‌های متغیر نمودار مناسبی برای استفاده نیست؟ چون خط مرکزی تنها وتنها وابسته به $n\bar{p}$ چون n برای هر زیرگروه متفاوت می‌شود پس خط مرکز نیز تفاوت می‌کند یعنی $CL = n_i \bar{p}$

نمودار کنترل تعداد نقص‌ها: (نمودار C): در این گونه نمودارها دیگر پیش نمی‌گیریم و فقط تعداد نقص‌ها مورد نظر ماست و حدود کنترل برابر است با

در این نمونه $n=1$ می‌باشد

$$\text{C معلوم باشد} \begin{cases} UCL = c + 3\sqrt{c} \\ CL = c \\ LCL = c - 3\sqrt{c} \end{cases}$$

اگر c نامعلوم باشد از برآورد c که $\bar{c}$ هست استفاده می‌کنیم

c معلوم
بکشد

$$\begin{cases} UCL = \bar{c} + 3\sqrt{\bar{c}} \\ CL = \bar{c} \\ LCL = \bar{c} - 3\sqrt{\bar{c}} \end{cases}$$

مثال ۶: تعداد نقص های مشاهده شده روی سطح ۸ ورق فلزی در جدول زیر آمده است

با استفاده از این داده ها یک نمودار کنترل برای تعداد نقص ها طراحی کنید آیا فرایند تحت کنترل است؟

شماره ورق	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
تعداد نقص ها	۱	۰	۴	۳	۱	۲	۵	۰

$$\sum D_i = 16 \longrightarrow \bar{c} = \frac{\sum D_i}{m} = \frac{16}{8} = 2$$

$$UCL = \bar{c} + 3\sqrt{\bar{c}} = 2 + 3\sqrt{2} = 6.24$$

$$CL = \bar{c} = 2 = 2$$

$$LCL = \bar{c} - 3\sqrt{\bar{c}} = 2 - 3\sqrt{2} = 0$$

تحت کنترل است

نمودار کنترل براساس متوسط تعداد انطباق ها یا متوسط عدم انطباق ها

در هر واحد بازرسی U نمودار (U)

۱. اگر در یک نمونه که شامل n واحد بازرسی است تعداد کل X نقص مشاهده شود آنگاه

متوسط تعداد عدم انطباق‌ها در هر واحد بازرسی برابر است با $u = \frac{x}{n}$ و

$$\bar{u} = \frac{c}{n}$$

$$\begin{cases} UCL = \bar{u} + 3\sqrt{\dfrac{\bar{u}}{n}} \\ CL = \bar{u} \\ LCL = \bar{u} - 3\sqrt{\dfrac{\bar{u}}{n}} \end{cases}$$

فرض کنید می‌خواهیم نمودار کنترل را براساس n واحد بازرسی کنیم توجه داشته باشید که لزوماً n عدد صحیح نیست برای تعیین حدود کنترل در روش اول می‌توان واحد بازرسی جدید را به صورت واحد بازرسی قدیمی n X تعریف کرد در این صورت حدود کنترل به صورت زیر خواهد بود

روش اول

واحد بازرسی قدیمی

$$UCL = n\bar{c} + 3\sqrt{n\bar{c}}$$

$$CL = n\bar{c}$$

$$LCL = n\bar{c} - 3\sqrt{n\bar{c}}$$

در روش دوم نمودار کنترل را براساس متوسط تعداد عدم انطباق‌ها در هر واحد بازرسی بررسی می‌کنیم

اگر در یک نمونه که شامل n واحد بازرسی است تعداد کل c نقص مشاهده شود متوسط تعداد عدم

انطباق ها در هر واحد بازرسی $u = \frac{c}{n}$ درین دو ۳ حدها

در این شرایط n می تواند بیشتر از ۱ باشد

$$UCL = \bar{u} + 3\sqrt{\frac{\bar{u}}{n}}$$

$$CL = \bar{u}$$

$$LCL = \bar{u} - 3\sqrt{\frac{\bar{u}}{n}}$$

مثال: سازنده ی یک نوع اتومبیل قصد دارد تعداد نقص هایی که در قسمت گیربکس وجود دارد را کنترل کند واحد بازرسی در نظر گرفته شده شامل ۴ گیربکس است جدول زیر اطلاعات مربوط به ۱۶ نمونه که هر یک شامل ۴ گیربکس است را نشان می دهد یک نمودار کنترل برای کنترل تعداد نقص ها در هر واحد طراحی کنید (آیا می توان نتیجه گرفت داده های فوق از فرآیندی حاصل شده اند که تحت کنترل بوده؟

شماره نمونه	تعداد نقص ها	u_i	شماره نمونه	تعداد نقص ها c_i	u_i
۱	۱	$\frac{1}{4}$	۹	۲	$\frac{2}{4}$
۲	۳	$\frac{3}{4}$	۱۰	۱	$\frac{1}{4}$
۳	۲	$\frac{2}{4}$	۱۱	۰	۰
۴	۱	$\frac{1}{4}$	۱۲	۲	$\frac{2}{4}$
۵	۰	۰	۱۳	۱	$\frac{1}{4}$
۶	۲	$\frac{2}{4}$	۱۴	۱	$\frac{1}{4}$
۷	۱	$\frac{1}{4}$	۱۵	۲	$\frac{2}{4}$
۸	۵	$\frac{5}{4}$	۱۶	۳	$\frac{3}{4}$

$$\bar{c} = \frac{\sum c_i}{m} = \frac{\sum \frac{x_i}{n}}{m} = \frac{\frac{۲۷}{۴}}{۱۶} = ۰/۴۲۲$$

$$UCL = \bar{c} + ۳\sqrt{\frac{\bar{c}}{n}} = ۰/۴۲۲ + ۳\sqrt{\frac{۰/۴۲۲}{۴}} = ۱,۳۹۶$$

$$CL = \bar{c} = ۰/۴۲۲ = ۰/۴۲۲$$

$$LCL = \bar{c} - ۳\sqrt{\frac{\bar{c}}{n}} = ۰/۴۲۲ - ۳\sqrt{\frac{۰/۴۲۲}{۴}} = ۰$$

حال نمونه‌ها را بدست می‌آورید یعنی $\frac{\text{نمونه}}{۸}$ اگر از حدود خارج شد تحت کنترل نیست.

مثال ۶: در یک کارخانه‌ی نساجی هر روز تعداد نقص‌های مشاهده شده در توپ‌های کوچک پارچه که در آن روز تولید شده یادداشت می‌شود پس از ده روز بررسی، اطلاعات زیر بدست آمده است با رسم نمودار تعداد نقص‌ها در هر واحد وضعیت تولید شده را بررسی کنید؟

توپ تولیدی	تعداد نقص	روز	توپ تولیدی	تعداد نقص	روز
۲۲	۳۱	۶	۲۰	۲۷	۱
۲۳	۳۷	۷	۲۰	۲۳	۲
۲۴	۲۹	۸	۲۰	۳۰	۳
۲۳	۳۶	۹	۲۱	۲۸	۴
۲۸	۲۷	۱۰	۲۲	۲۹	۵

$\sum$ تعداد نقص‌ها $= ۲۹۷$

$\sum$ توپ تولیدی $= ۲۲۵$

متوسط تعداد نقص‌ها در واحد (خط مرکزی) $= \frac{۲۹۷}{۲۲۵} = ۱,۳۲$

$$UCL = \bar{u} + ۳\sqrt{\frac{\bar{u}}{n_i}} \rightarrow UCL_1 = ۱,۳۲ + ۳\sqrt{\frac{۱,۳۲}{۲۰}}$$

$$LCL = \bar{u} - ۳\sqrt{\frac{\bar{u}}{n_i}} \qquad LCL_1 = ۱,۳۲ - ۳\sqrt{\frac{۱,۳۲}{۲۰}}$$

$$u = \frac{۲۷}{۲۰} = ۱,۳۵$$

و به همین صورت برای تک تک نمونه‌ها ucl و lcl را به دست آورده و آن را مورد بررسی قرار می‌دهیم مثلا

$$UCL_2 = ۱,۳۲ + \sqrt{\frac{۱,۳۲}{۲۱}} \qquad LCL_2 = ۱,۳۲ - \sqrt{\frac{۱,۳۲}{۲۱}} \qquad u = \frac{۲۸}{۲۱}$$

مثال: حدود کنترل ۳ انحراف معیار را برای موارد زیر محاسبه کنید

الف) نمودار کنترل c با میزان متوسط ۴ نقص ← تعداد واحد بازرسی ۱ است

ب) نمودار کنترل u با $c=۴$ و $n=۴$ ← " " " غیر از ۱ است

الف)

$$UCL = \bar{c} + ۳\sqrt{\bar{c}} = ۴ + ۳\sqrt{۴} = ۱۰$$
$$LCL = \bar{c} - ۳\sqrt{\bar{c}} = ۴ - ۳\sqrt{۴} = ۰$$

ب) $\bar{u} = \frac{c}{n} \Rightarrow \bar{u} = \frac{۴}{۴} = ۱$

$$UCL = \bar{u} + ۳\sqrt{\frac{\bar{u}}{n}} = ۱ + ۳\sqrt{\frac{۱}{۴}} = ۲,۵$$
$$LCL = \bar{u} - ۳\sqrt{\frac{\bar{u}}{n}} = ۱ - ۳\sqrt{\frac{۱}{۴}} = ۰$$

مثال: یکی از تولیدکنندگان ساعت‌های الکتریکی را در نظر بگیرید میزان متوسط تعداد نقص‌ها

در هر ساعت برابر ۷۵٪ تخمین زده شده است مهندس کیفیت در نظر دارد از یک نمودار c

با واحد بازرسی ۶ عددی جهت کنترل این خط مونتاژ استفاده کند جدول کنترل ۳ انحراف

معیار برای این نمودار را محاسبه کنید. $\bar{u} = 0.75$ $n = 6$ (واحد بازرسی)

اشتباه $\bar{u} = \frac{a}{n} = \frac{\bar{c}}{n} \rightarrow \bar{c} = n\bar{u} = 6 \times 0.75 = 4.5$

$UCL = 4.50 + 3\sqrt{4.5} \leftarrow UCL = \bar{c} + 3\sqrt{\bar{c}}$

$LCL = 4.5 - 3\sqrt{4.5} \longleftarrow LCL = \bar{c} - 3\sqrt{\bar{c}}$

مثال: فرض کنیم می خواهیم یک نمودار کنترل برای تعداد نقص ها در هر واحد بازرسی

با حدود L انحراف معیار تعیین نماییم. کوچکترین اندازه نمونه ای که سبب شود

حد کنترل پایین نمودار مثبت باشد را تعیین کنید؛ L ضریب حدود کنترل c تعداد نقص ها در یک واحد

$n\bar{c} - L\sqrt{n\bar{c}} > 0 \rightarrow n\bar{c} > L\sqrt{n\bar{c}} \rightarrow (n\bar{c})^2 > L^2(\cancel{n\bar{c}}) \rightarrow$

$n\bar{c} > L^2 \rightarrow n > \frac{L^2}{\bar{c}}$

مثال: می خواهیم فرآیند تولید یک نوع یخچال را با استفاده از نمودار کنترل تعداد نقص ها

کنترل نماییم. واحد بازرسی را یک واحد یخچال تشکیل می دهد. در مطالعات اولیه تعداد ۲۵ یخچال

مورد بازرسی قرار گرفته و تعداد کل ۱۶ نقص مشاهده شده. الف) حدود کنترل ۳ انحراف

معیار را بدست آورید ب) احتمال خطای نوع یک را پیدا کنید ج) اگر تعداد متوسط نقص ها

برابر ۲ باشد احتمال خطای نوع دوم چقدر خواهد بود د) اگر تعداد متوسط نقص‌ها در صورت

واقعی برابر ۲ باشد متوسط طول دنباله چه مقداری خواهد بود ؟

نکته: برای بدست آوردن احتمال برای عددهای C از توزیع گسسته پواسون استفاده می‌شود

الف) $\bar{c} = \frac{16}{30} = 0.533$

$UCL = \bar{c} + 3\sqrt{\bar{c}} = 0.533 + 3\sqrt{0.533} = 2.723$

$LCL = \bar{c} - 3\sqrt{\bar{c}} = 0.533 - 3\sqrt{0.533} = 0$

ب) $P(D<LCL|c) + P(D>UCL|c) \rightarrow P(D<0|0.533) + P(D>2.723|0.533)$

$POI(0, 0.533) + 1 - POI(2, 0.533) = 1 - 0.983 = 0.017$

ج) $P(D<UCL|c) - P(D<LCL|c) \rightarrow P(D<2.723|2) - P(D<0|2)$

$POI(2,2) - 0 = 0.67$

د) $ARL = \frac{1}{1-\beta} = \frac{1}{1-0.67} = 3.09 \sim 3$

استفاده و تفسیر C_p یا PCR یا نسبت قابلیت فرآیند.

$C_p = \frac{USL-LSL}{6\sigma}$ $\qquad$ $\hat{C}_p = \frac{USL-LSL}{6\hat{\sigma}}$

این شاخص واقع شدن میانگین فرآیند نسبت به حدود مشخصه را در نظر نمی‌گیرد

وقتی فاصله‌ی بین حدود مشخصات نسبت به فاصله‌ی ۶σ انحراف معیار فرایند را می‌سنجد

بنابراین اگر بخواهیم مکان واقع شدن میانگین را در نظر بگیریم از شاخص C_{pk}

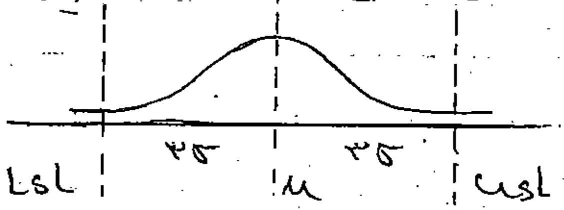
استفاده می‌کنیم که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$C_{pk} = \min(C_{pu} , C_{pL})$$

$$C_{pu} = \frac{USL - \mu}{3\sigma} \quad , \quad C_{pL} = \frac{\mu - LSL}{3\sigma}$$

نکته: اگر $C_p = C_{pk}$ باشد میانگین فرایند در وسط فاصله‌ی بین حدود مشخصات

است



نکته: اندازه‌ی C_{pk} نسبت به C_p معیار مستقیمی برای تعیین میزان انحراف میانگین

فرایند از وسط فاصله‌ی بین حدود مشخصه‌ها است

نکته: C_p را معمولاً قابلیت بالقوه فرایند و C_{pk} را قابلیت واقعی فرایند

می‌نامند

نکته: اگر $C_{pk} = 1$ فرایند محصولاتی تولید می‌کند که با مشخصات فنی تطابق دارد

اگر $C_{pk} < 1$ 〃 〃 〃 〃 〃 〃 ندارد

اگر C_{pk} منفی شد یعنی میانگین توزیع فرایند خارج از حدود مشخصات فنی است

اگر $C_{pk}=0$ شد یعنی میانگین توزیع فرایند با یکی از مشخصات فنی منطبق است

مثال ۶: فرآیندی با مقادیر $\bar{\bar{x}}=100$ و $\bar{S}=1.05$ و $n=5$ در شرایط تحت کنترل

بسر می برد. مشخصات فنی این فرایند 95 ± 10 است و دلیل توزیع نرمال است

الف) قابلیت بالقوه‌ی فرایند را برآورد کنید ب) قابلیت واقعی فرایند را برآورد کنید.

$$\mu=\bar{\bar{x}}=100 \qquad \hat{\sigma}=\frac{\bar{S}}{C_4}=\frac{1.05}{0.94}=1.117$$

$$\hat{C}_p=\frac{USL-LSL}{6\hat{\sigma}}=\frac{105-85}{6\times1.117}=2.98$$

$$\hat{C}_{PU}=\frac{USL-\mu}{3\hat{\sigma}}=\frac{105-100}{3\times1.117}=1.49$$

$$\hat{C}_{PL}=\frac{\mu-LSL}{3\hat{\sigma}}=\frac{100-85}{3\times1.117}=4.48$$

$$C_{pk}=\min\{C_{PU},C_{PL}\}=1.49$$

پس قابلیت فرایند C_{pk} به دلیل نصف C_p که میانگین در وسط حدود مشخصات

قرار داشت کم شده است. با این وجود C_{pk} نیز نمی‌تواند به تنهایی شاخص مناسبی

برای سرگذشت فرایند باشد چون رابطه‌ی معکوس با کاهش یا رفتن σ به سمت صفر

شاخص C_{pk} بزرگ می شود ولی مقدار بزرگ C_{pk} چیزی در مورد واقع شدن مکان میانگین در فاصله‌ی USL و LSL منعکس نمی کند برای برطرف کردن این مشکل شاخص C_{pm} را تعریف می کنیم.

$$C_{pm} = \frac{USL - LSL}{6\tau}$$

τ: جذر امید ریاضی مربعات انحرافات از مقدار هدف.

$$T = \frac{USL - LSL}{2} \quad \text{مقدار هدف}$$

$$\tau^2 = E\left((x-T)^2\right) = \sigma^2 + (\mu - T)^2$$

$$C_{pm} = \frac{USL - LSL}{6 \times \sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}} = \frac{C_p}{\sqrt{1 + \left(\frac{T-\mu}{\sigma}\right)^2}}$$

$$C_{pm} = \frac{C_p}{\sqrt{1+V^2}} \quad , \quad V = \frac{\bar{x} - T}{S}$$

نکته: اگر بجای C_p، C_{pk} قرار دهیم، برابر C_{pm}، C_{pkm} می شود یعنی

$$C_{pkm} = \frac{C_{pk}}{\sqrt{1+V^2}} \quad , \quad V = \frac{\bar{x} - T}{S}$$

مثال: خروجی یک فرآیند نرمال دارای حدود مشخصات فنی $LSL = 75$ و $USL = 85$ است. با استفاده از یک نمونه تصادفی ۱۵تایی نتیجه گیری می شود که فرآیند در وسط حدود مشخصات فنی

با انحراف معیار $S=1.5$ تخمین زده شده است. الف) یک تخمین نقطه‌ای برای C_p مشخص کنید. ب) یک فاصله اطمینان ۹۵٪ برای C_p بدست آورید. الف)

$$\hat{C}_p = \frac{USL-LSL}{6\hat{\sigma}} = \frac{USL-LSL}{6S}$$

$$= \frac{85-75}{6\times 1.5} = 1.11$$

نکته: برای بدست آوردن فاصله اطمینان C_p از توزیع خی دو استفاده می‌کنیم و طبق این توزیع فاصله اطمینان برابر است با

$$\hat{C}_p\sqrt{\frac{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}{n-1}} < C_p < \hat{C}_p\sqrt{\frac{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}}{n-1}}$$

ب) $\alpha = 0.05$, $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} = \chi^2_{1-\frac{0.05}{2},24} = \chi^2_{0.975,24} = 12.4$

$$\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1} = \chi^2_{0.025,24} = 39.36$$

$$1.11\sqrt{\frac{12.4}{24}} < C_p < 1.11\sqrt{\frac{39.36}{24}} \rightarrow 0.8 < C_p < 1.42$$

مثال: فرض کنید یک مشخصه کیفی دارای توزیع نرمال با حدود مشخصه فنی $LSL=90$ و $USL=100$ می‌باشد. یک نمونه تصادفی ۲۵ تایی که در آن $\bar{X}=97$ و $S=1.6$ می‌باشند. الف) یک برآورد نقطه‌ای برای C_{pk} محاسبه کنید. ب) یک فاصله اطمینان ۹۵٪ برای C_{pk} بدست آورید.

$$C_{pk} = \min(C_{pu}, C_{pl}) \rightarrow \min(0.63, 1.46) = 0.63$$

$$C_{pu} = \frac{USL-\mu}{3\hat{\sigma}_{\approx S}} = \frac{100-97}{3\times 1.6} = 0.63$$

$$C_{pl} = \frac{\mu-LSL}{3\hat{\sigma}} = \frac{97-90}{3\times 1.6} = 1.46$$

نکته: برای بدست آوردن فاصله اطمینان C_{pk} از توزیع نرمال یا Z استفاده می شود و طبق این توزیع فاصله اطمینان عبارتست از:

$$\hat{C}_{pk}\left(1 - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{1}{9n\hat{C}_{pk}^2}+\frac{1}{2(n-1)}}\right) < C_{pk} < \hat{C}_{pk}\left(1+Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{1}{9n\hat{C}_{pk}^2}+\frac{1}{2(n-1)}}\right)$$

ب) $\alpha = \%5 \qquad Z_{\alpha/2} = Z_{0.025} = 1.96$

$$0.63\left(1 - 1.96\sqrt{\frac{1}{9\times 30\times 0.63^2}+\frac{1}{2\times 29}}\right) < C_{pk} < 0.63\left(1+1.96\sqrt{\frac{1}{9\times 30\times 0.63^2}+\frac{1}{2\times 29}}\right)$$

$$0.4422 < C_{pk} < 0.8177$$

طرح نمونه گیری یک مرحله ای: یک طرح بازرسی نمونه ای یک مرحله ای با اندازه انباشته N و اندازه نمونه n و عدد پذیرش c بصورت (c و n و N) تعریف می شود این سه اصطلاح به این معناست که از انباشته ای به حجم N یک نمونه تصادفی n اندازه ای انتخاب کرده و بازرسی می کنیم اگر تعداد c عیب یا کمتر در نمونه کشف شود انباشته پذیرفته می شود و چنانچه تعداد $c+1$ یا بیشتر عیب در نمونه n تایی کشف شود انباشته رد می شود هرگاه در مورد پذیرش یا رد انباشته براساس نتایج حاصل از بازرسی یک نمونه تصادفی که از انباشته مورد بررسی انتخاب شده تصمیم گیری شود طرح بازرسی نمونه را یک مرحله ای می گوییم

مثال: یک طرح بازرسی $N=9000$ و $n=300$ و $c=2$ چگونه تعریف می شود؟

یعنی از یک انباشته‌ی ۹۰۰۰تایی ۳۰ نمونه بازرسی شده و اگر تعداد دو معیوب یا کمتر در نمونه کشف

شد انباشته پذیرفته و در غیر این صورت انباشته رد می شود

طرح نمونه گیری دو مرحله‌ای : این طرح با اندازه‌ی انباشته‌ی N و اندازه نمونه اول n_1 و عدد

پذیرش نمونه اول c_1 و عدد رد نمونه اول r_1 و اندازه نمونه‌ی دوم n_2 و عدد پذیرش نمونه c_2 و عدد

برای هر دو نمونه

رد نمونه دوم r_2 تعریف می شود $(N, n_1, c_1, r_1, n_2, c_2, r_2)$

مثال: طرح نمونه‌ی مقابل چگونه تعریف می شود $(N=9000, n_1=60, c_1=1, r_1=4, n_2=150, c_2=4, r_2=5)$

یعنی از یک انباشته ۹۰۰۰تایی یک نمونه ۶۰تایی استخراج و بازرسی می شود اگر تعداد اقلام معیوب ۱ یا کمتر

باشد انباشته پذیرفته می شود و اگر تعداد اقلام معیوب ۴ یا بیشتر از ۴ باشد انباشته رد می شود

و اگر تعداد اقلام معیوب برابر ۲ یا ۳ باشد نمونه ثانوی دوم به اندازه ۱۵۰ انتخاب کرده و استخراج

می کنیم حال اگر مجموع تعداد اقلام معیوب در نمونه‌ی اول و دوم کمتر یا مساوی c_2 یا ۴ باشد انباشته

پذیرفته و اگر این مجموع بزرگتر یا مساوی r_2 یا ۵ باشد انباشته رد می شود

مثال: در طرح جفت نمونه گیری $c_1=2$ و $n_1=40$ و $c_2=6$ و $n_2=200$ چنانچه در نمونه اول

$d_1=3$ و در نمونه‌ی دوم $d_2=3$ باشند کدام یک از عوامل صحیح است؟

تعداد معیوب

الف) انباشته بر اساس نمونه اول پذیرفته می شود و نیازی به نمونه گیری دوم نیست.

ب) ... رد می شود ...

ج) پس از نمونه اول انباشته ~~...~~ نمونه دوم برداشته نمونه گیری را ادامه داده و در نهایت رد می شود!

د) پس از نمونه گیری اول، نمونه گیری دوم برداشته و بازرسی می شود و نهایتاً انباشته پذیرفته می شود

$d_1 + d_2 = 3+3 = 6$ و $c = 6$ پذیرفته می شود

منحنی OC، (منحنی مشخصه ی عملکرد) یکی از معیارهای ارزیابی عملکرد طرح نمونه گیری

این منحنی می باشد که احتمال پذیرش یک انباشته را برحسب نسبت اقلام معیوب انباشته

نشان می دهد احتمال اینکه تعداد اقلام معیوب در یک نمونه ی n تایی دقیقاً برابر d باشد

برابر است با
$$P(d\ \text{محصول معیوب}) = \frac{n!}{d!\,(n-d)!}\, p^{d} (1-p)^{n-d}$$

توزیع دوجمله ای

$$\text{احتمال پذیرش انباشته} = P_a = P(d \leq c) = \sum_{d=0}^{c} \frac{n!}{d!\,(n-d)!}\, p^{d} (1-p)^{n-d}$$

یا احتمال اینکه d کوچکتر یا مساوی عدد پذیرش c باشد

مثال: اگر نسبت اقلام معیوب انباشته $p = \%1$ باشد و داشته باشیم $n = 89$ و $c = 2$

احتمال پذیرش انباشته را محاسبه کنید؟

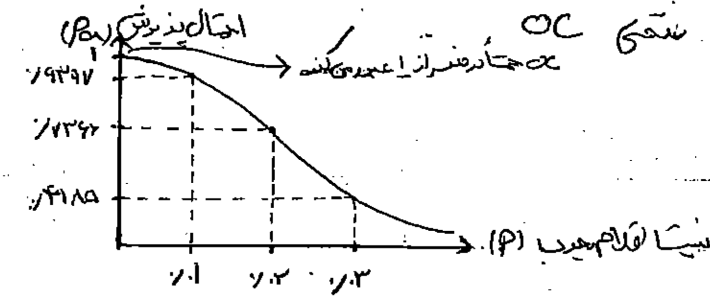
$$Pa = P(d \le 2) = \sum_{d=0}^{2} \frac{89!}{d!\,(89-d)!} (0.01)^{d} (1-0.01)^{89-d} =$$

$$\frac{89!}{0! \times 89!} (0.01)^{0} (1-0.01)^{89} + \frac{89!}{1! \times 88!} (0.01)^{1} (1-0.01)^{88} + \frac{89!}{2! \times 87!} (0.01)^{2} (1-0.01)^{87} = 0.9397$$

p	Pa
۰/۰۱	۰.۹۳۹۷
۰/۰۲	۰.۷۳۶۶
۰/۰۳	۰.۴۹۸۵

مثل حالت قبل محاسبه می‌شوند

منحنی OC



ریسک تولیدکننده (α): احتمال رد شدن یک انباشته‌ی قابل قبول ←

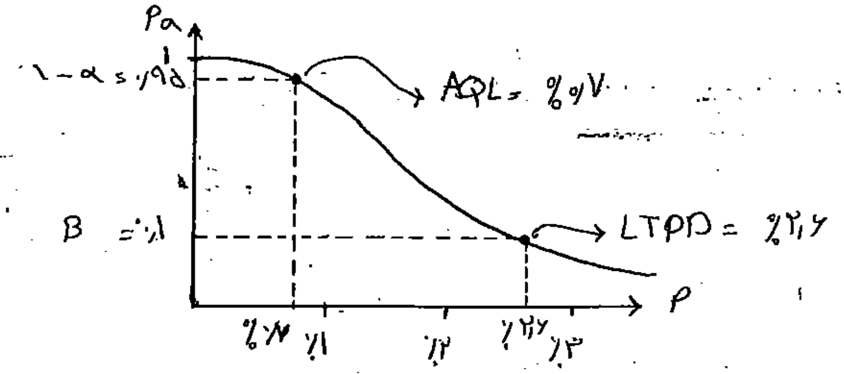
یک تعریف عددی از پذیرش انباشته به نام سطح کیفیت قابل پذیرش یا AQL وجود دارد و آن حداکثر درصد اقلام معیوبی است که می‌توانند برای بازرسی نمونه‌ای رضایت‌بخش باشد به عنوان مثال برای یک طرح بازرسی نمونه‌ای با N=۲۰۰۰ و n=۳۲ و c=۴ مقدار AQL برای α=۰/۰۵ یا احتمال پذیرش Pa=۰.۹۵ برابر ۰/۷% است (ادامه مثال دارد)

ریسک مشتری (β): احتمال پذیرش یک انباشته غیر قابل قبول ←

برای این ریسک هم یک عدد پذیرش انباشته به نام سطح کیفیت حدی یا LQL یا درصد اقلام معیوب انباشته LTPD وجود دارد

LTPD: درصد اقلام معیوب در انباشته که مشتری همواره خواهان کاهش آن است

نکته: در مورد موضوع ریسک تولیدکننده و ریسک مشتری ابتدا باید منحنی OC را رسم کرد و برای رسم منحنی OC نیز باید Pa را در هر P حساب کرد و در نهایت آن را رسم کرد و سپس نوع ریسک‌ها را تحلیل کرد



مثال: برای $\beta = 0.1$ مقدار LTPD برابر ۲/۶ ٪ است که یعنی انباشته‌ای دارای ۲/۶٪ اقلام معیوب است که با احتمال ۰/۱٪ پذیرفته می‌شود و برای $\alpha = 0.05$ مقدار AQL برابر ۰/۷ ٪ است یعنی انباشته دارا $95 = 5\% - 1$ اقلام سالم است که با احتمال ۰/۷٪ رد می‌شود

متوسط کیفیت خروجی (AOQ): فرض کنید اندازه‌ی انباشته‌ای N است و کلیه‌ی واحدهای معیوب با واحدهای بدون عیب جایگزین شوند در این صورت بعد از انجام بازرسی n واحد که نمونه را تشکیل می‌دهند به علت جایگزین کردن اقلام معیوب با بدون عیب فاقد هیچ گونه معیوبی خواهد بود پس اگر انباشته رد شود $N-n$ واحد فاقد معیوب خواهد بود و اگر انباشته پذیرش شود $N-n$ دارای میزان متوسط $P(N-n)$ معیوب خواهد بود بنابراین داریم

$$AOQ = \frac{P_a \cdot \overbrace{P(N-n)}^{\text{تعداد اقلام معیوب}}}{N}$$

مثال: فرض کنید $N=1000$ و $n=89$ و $c=2$ باشد و انباشته های ورودی دارای کیفیت

$p=0.01$ باشند. وقتی داشتیم احتمال پذیرش به ازای $p=0.01$ برابر $P_a=0.9397$ است

در این صورت AOQ را حساب کنید؟ $AOQ = \frac{0.9397 \times 0.01 \times (1000-89)}{1000} = 0.0093 = \%0.93$

نکته: اگر نسبت N به n خیلی بزرگ باشد آن گاه می‌توان AOQ را به صورت $AOQ = P_a \times P$ محاسبه کرد

متوسط تعداد کل بازرسی (ATI) که برابر است با $ATI = n+(1+P_a)(N-n)$

مثال: فرض کنید طرح $N=1000$ و $n=89$ و $c=2$ با $p=0.01$ داریم

متوسط کل بازرسی چقدر خواهد بود؟ P_a را در مثال قبل حساب کردیم

$ATI = 89+(1+0.9397)(1000-89) = 686.63 \simeq 687$ عدد

منحنی OC نوع A و B: اگر اندازه‌ی انباشته حداقل ده برابر نمونه اول باشد منحنی های

OC نوع A و B غیر قابل تمایز هستند

نکته: وقتی از توزیع دوجمله ای برای محاسبه‌ی احتمال پذیرش انباشته استفاده شود منحنی OC از

نوع B است

نکته: اگر تعداد محصولات معیوب در نمونه‌ی انتخاب شده از توزیع فوق هندسی پیروی کند

منحنی OC از نوع A خواهد بود

مثال: فرض کنید محصولی در انباشته‌هایی به اندازه‌ی $N=500$ حمل می‌شود این انباشته‌ها در محل دریافت به وسیله‌ی طرح نمونه‌گیری $n=50$ و $c=1$ بازرسی می‌شوند (الف) منحنی OC نوع A را رسم کرده (ب) منحنی OC نوع B را نیز رسم کنید.

برای نوع B

$$P_a = P(d \le c) = \sum_{d=0}^{1} \frac{n!}{d!\,(n-d)!}\, p^d (1-p)^{n-d}$$

برای نوع A

نکته: برای بدست آوردن P_a از روی منحنی OC نوع A، P_a به صورت زیر محاسبه می‌شوند

$$P_a = P(d \le c) = \sum_{x=0}^{c} \frac{\binom{D}{x}\binom{N-D}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad \text{و} \quad D = NP$$

P	دوجمله‌ای (B)	هندسی (A)			
		$D=NP$	$f(d=0)$	$f(d=1)$	$f(d\le 1)$ جمع دو مقدار
۰/۰۱	۰/۹۱۰۵۶	۵۰	۰/۵۸۳۵	۰/۳۲۷۸۵	۰/۹۱۱۳۵
۰/۰۲	۰/۷۳۵۷۷	۱۰۰	۰/۳۶۲۳۴	۰/۳۷۳۴۷	۰/۷۳۵۸۱

۰/۹۱۰۵۶ $\sim$ ۰/۹۱۱۳۵

و

۰/۷۳۵۷۷ $\sim$ ۰/۷۳۵۸۱