

مقدمه

موسسه پارسه با هدف حداکثر کردن تعداد قبولی‌ها به حد بالای ۹۰٪ ساختار جزوه‌ای را طراحی کرده که دانشجویان بتوانند در زمانی کوتاه جمع‌بندی نکات مطرح شده در درس را قرار گیرند. در همین راستا جزوه حاضر مجموعه فشرده شده از نکات مهم و سوالات کلیدی است که لازم است دانشجویان در هفته آخر قبل از برگزاری امتحان مطالعه کنند. در این مجموعه فقط به نکات اشاره شده است و سعی شده تا دانشجو با در نظر گرفتن این نکات بتواند سریعاً دوره گذرانده شده به صورت حضوری یا غیرحضوری را در ذهن خود بازنگری کند. به طور قطع حداقل ۹۵٪ نکات موجود در پس سوالات کنکور خارج از نکات ذکر شده در این مجموعه نمی‌باشد. به طوری که می‌توان با ۹۵٪ اطمینان گفت نکات سوالات کنکور در لابلای نکات همین جزوه می‌باشد. این جزوه برای دانشجویان رشته‌های مهندسی صنایع سیستم‌های اقتصادی اجتماعی، مدیریت سیستم‌بهره‌وری و دانشجویان رشته مدیریت بسیار مفید می‌باشد. در خاتمه آرزوی توفیق همه دانشجویان را از خداوند منان خواهانم.

با آرزوی موفقیت

اشجری

دی‌ماه ۸۹

در جدول ذیل دروس به سرفصلهای مهم آن طبقه بندی شده و مشخص شده است که در هر سال از هر مبحث چند تست سوال شده است و دانشجوی محترم می تواند زمان باقیمانده خود را با توجه به اهمیت مباحث مدیریت نماید.

		رشته: مهندسی صنایع					درس: تحقیق در عملیات	
نسبت از کل	مجموع ۵ سال	۱۳۸۹	۱۳۸۸	۱۳۸۷	۱۳۸۶	۱۳۸۵	مبحث	ردیف
		تعداد تست	تعداد تست	تعداد تست	تعداد تست	تعداد تست		
3%	3	2	0	0	0	1	مدل سازی ریاضی و تعریف مساله	1
2%	2	1	0	0	1	0	مدل های غیر خطی و تبدیل به خطی	2
2%	2	1	0	1	0	0	فضای حل	3
4%	4	1	0	0	3	0	روش ترسیمی حل مسائل برنامه ریزی خطی	4
4%	4	0	1	0	1	2	روش جبری حل مسائل برنامه ریزی خطی	5
8%	9	0	3	1	3	2	روش سیمپلکس حل مسائل برنامه ریزی خطی	6
9%	10	2	2	1	2	3	حالات خاص در مسائل برنامه ریزی خطی	7
1%	1	0	1	0	0	0	روش M بزرگ	8
4%	4	2	0	0	0	2	روش دوفاز	9
19%	21	3	7	4	3	4	ریاضیات در جدول سیمپلکس	10
17%	19	3	2	5	3	6	تحلیل حساسیت در جدول سیمپلکس	11
5%	5	0	0	0	1	4	قضایای دوگان	12
4%	4	2	0	2	0	0	تفسیر اقتصادی دوگان	13
7%	8	0	2	1	2	3	ارتباط اولیه و دوگان	14
3%	3	0	2	0	0	1	نتایج دوگان	15
2%	2	0	0	1	0	1	روش دوال سیمپلکس	16
0%	0	0	0	0	0	0	آنالیز حساسیت	17
5%	6	2	0	3	1	0	مدل های حمل و نقل و روش های حل آن و آنالیز حساسیت	18
0%	0	0	0	0	0	0	روش پله ای	19
1%	1	0	0	1	0	0	روش ضرایب MODI	20
0%	0	0	0	0	0	0	مدل های شبکه ای	21
0%	0	0	0	0	0	0	مدل تخصیص	22
2%	2	1	0	0	0	1	سیمپلکس تجدید نظر شده	23
0%	0	0	0	0	0	0	متغیر های کراندار	24
0%	0	0	0	0	0	0	متفرقه	25
100%	110	20	20	20	20	30	جمع	

مدل سازی

مدل مونتاژ - مدل تولید - مدل برش

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 3x_1 + 2x_2 \\ \text{st: } &x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ &2x_1 + x_2 \leq 8 \\ &-x_1 + x_2 \leq 1 \\ &x_2 \leq 2 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

مدل تولید

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= \min \{10x_{11} + 15x_{21}, 10x_{12} + 13x_{22}\} \\ \text{st: } &x_{11} + x_{12} \leq 100 \\ &x_{21} + x_{22} \leq 300 \\ &x_{ij} \geq 0 \end{aligned}$$

مدل مونتاژ

$$\begin{aligned} \text{Min } Z &= 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 \\ \text{st: } &x_1 + 2x_2 + x_3 - 5y_1 = 100 \\ &2x_1 + 3x_3 + x_4 - 7y_2 = 150 \\ &+ 2x_2 + x_3 - 9y_3 = 200 \\ &\geq 0 \\ &x_{1,2,3}, y_{1,2,3} \end{aligned}$$

مدل برش

روش های حل ترسیمی

روش ترسیمی

رسم محدودیت ها و رسم تابع هدف به دو شیوه یکی رسم خط دیگری رسم بردار گرادیان (خط عمود بر بردار گرادیان) تابع هدف Z را نشان می دهد. گرادیان برداری است که جهت افزایش تابع را نشان می دهد.

مثال ۱: محدودیت دوم از مجموعه محدودیت های زیر زائد خواهد شد اگر:

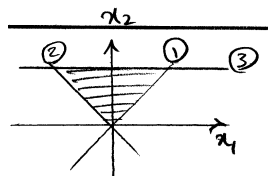
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\leq 0 \\ x_1 + x_2 &\geq 0 \\ x_2 &\leq 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &\geq 0 \quad (۲) \\ x_1, x_2 &\geq 0 \quad (۱) \\ x_1 &\geq 0 \quad (۳) \end{aligned}$$

(۴) هیچ کدام

حل: گزینه ۳ درست است.

ابتدا رسم می کنیم.



اگر خط $x_1 \geq 0$ را رسم کنیم محدودیت دوم زائد می باشد.

یادداشت:

.....

.....

.....

.....

مثال ۲: در مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر در چه صورت نقطه $(x_1, x_2) = (1, 1)$ بهینه است؟

$$\text{Max } Z = C_1 x_1 + C_2 x_2$$

$$\text{st: } x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_2 \leq 1$$

$$x_{1,2} \geq 0$$

$$\frac{C_1}{C_2} \leq 0 \quad (۲)$$

$$\frac{C_1}{C_2} \leq 1 \quad (۱)$$

$$0 \leq \frac{C_1}{C_2} \leq 1 \quad (۴)$$

$$\frac{C_1}{C_2} \geq 1 \quad (۳)$$

حل : گزینه ۴ درست است.

نکته این سوال در روش ترسیمی می‌باشد. به شرطی نقطه $(1,1)$ بهینه است که تابع هدف یا موازی محدودیت اول شود یا موازی محدودیت دوم.

$$\begin{cases} \frac{C_1}{1} = \frac{C_2}{1} \Rightarrow \frac{C_1}{C_2} = 1 \\ \frac{C_1}{0} = \frac{C_2}{1} \Rightarrow \frac{C_1}{C_2} = \frac{0}{1} = 0 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq \frac{C_1}{C_2} \leq 1$$

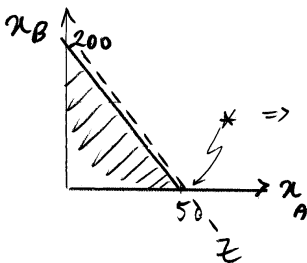
مثال ۳: در یک سیستم تولیدی در طول یک دوره زمانی ۲۰۰ ساعته دو محصول A و B تولید می‌گردد تولید هر واحد محصول A، ۴ برابر وقت تولید هر محصول B است و سود هر واحد B، ۰.۲۵ سود هر واحد محصول A است ماکزیمم سود حاصله در این دوره ۲۰۰ ساعته ۱۰۰۰۰ واحد پول است سود هر واحد محصول A چقدر است؟

حل :

$$4x_A + x_B \leq 200 \quad C_B = 0.25C_A$$

$$\text{Max } Z = C_A x_A + 0.25C_A x_B$$

تابع هدف و محدودیت موازی یکدیگرند لذا با رسم متوجه می‌شوید که جواب بهینه چندگانه است و داریم:



$$\Rightarrow Z = 10000 = C_A \times 50 + 0.25C_A \times 0$$

$$C_A = 200$$

مثال ۴: منطقه موجه مسئله زیر چگونه است؟

(۱) مثلث

(۲) مربع

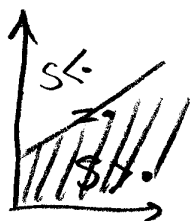
(۳) چهارضلعی غیرمنتظم

(۴) منطقه موجه ندارد.

حل : گزینه ۲ درست است.

شکل را رسم کنید. ابتدا محدودیت‌ها را به دو محدودیت تبدیل کرده و رسم کنید.

یادداشت:



$$\begin{cases} |2x_1 + x_2| \leq 6 \\ |x_1 - 2x_2| \leq 6 \end{cases}$$

.....

.....

.....

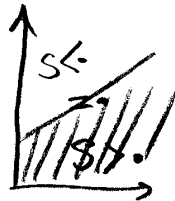
.....

روش جبری

نکته : فضای حل مسئله LP محدب است. تعریف محدب بودن فضا (هیچ نقطه‌ای از این فضا را نمی‌توان از ترکیب محدب هیچ دو نقطه دیگری از همین فضا نشان داد)

نکته : جواب بهینه مسئله LP حداقل در یکی از گوشه‌ها رخ می‌دهد. تعداد گوشه‌های یک مسئله LP استاندارد $\binom{n}{m}$ و برای مسئله غیراستاندارد $\binom{m+n}{m}$ می‌باشد.

معانی surplus & slack در محدودیت‌ها (منبع بلااستفاده و مازاد منبع) مقادیر این متغیرها در درون و بیرون و لبه‌های یک فضای حل به صورت زیر است:



نکته : در هر مسئله LP با n متغیر و m محدودیت $m \leq n$ باشد هر گوشه از حل یک سیستم m معادله و m مجهول حاصل می‌گردد.

نکته : در هر مسئله LP با n متغیر و m محدودیت که $m > n$ می‌باشد هر گوشه از حل یک سیستم n معادله و n متغیر حاصل می‌گردد و اگر مسئله دارای فضای حل باشد. مابقی محدودیت‌ها زائد می‌باشند که می‌توانند باعث تباهی‌دگی شوند.

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= CX \\ \text{st : } Ax &\leq b \\ b, x &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= CX \\ \text{st : } Ax &\leq b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

حتماً دارای فضای حل است.

ممکن است جواب یا فضا نداشته باشد.

نکته : تعداد گوشه‌های یک مسئله LP محدود ولی تعداد جواب‌های یک مسئله LP می‌تواند نامحدود باشد. فرق است بین FS و BS و BFS (جواب شدنی، جواب گوشه یا پایه و جواب گوشه شدنی) تعداد گوشه‌های شدنی را فقط با شمارش و یا ترسیم می‌توان بدست آورد.

روش سیمپلکس:

نکته : عنصر لولا همواره عنصری مثبت است.

$$Z_{\text{بعدی}} = Z_{\text{قبلی}} - \underbrace{(Z_j - C_j)}_{\text{متغیر وارده به پایه}} \times \min\{\text{نسبت‌ها}\}$$

یادداشت:

.....

.....

.....

.....

نکته : اشتباه در انتخاب متغیر وارده به پایه یا باعث می‌شود تا مسیر حل طولانی گردد و یا باعث می‌شود از گوشه‌ای قابل قبول با Z بهتر به گوشه‌ای قابل قبول با Z بدتر منتقل شویم.

نکته : اشتباه در انتخاب متغیر خروج از پایه، RHS را منفی خواهد کرد.

مقادیر متغیرهای پایه در جدول بعدی افزایش (کاهش) می‌یابند هرگاه ضریب متغیر وارده به پایه در جدول قبلی در سطر مربوط به این متغیر پایه منفی (مثبت) باشند.

	x_j		
	> 0		α
	< 0		β
	0		γ

سستون لولا

با ورود x_j به پایه، در جدول بعدی α کاهش مقدار و β افزایش مقدار و γ بدون تغییر باقی خواهد ماند.

مثال ۵: آیا در مسئله LP زیر x_1 و x_2 پایه بهینه‌اند؟

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 2x_1 + 3x_2 \\ \text{st : } \quad x_1 + 2x_2 &\leq 6 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 8 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

جدول سیمپلکس را رسم و پایه را بروز می‌کنیم:

	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
x_1	1	2	1	0	6
x_2	2	1	0	1	8
Z	-2	-3	0	0	0

	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
x_1	1	2	1	0	6
x_2	0	-3	-2	1	-4
Z	0	1	2	0	12

	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
x_1	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{10}{3}$
x_2	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$
Z	0	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{32}{3}$

بلی پایه فوق بهینه است.

یادداشت:

.....

.....

.....

.....

مثال ۶: در جدول زیر تعداد گوشه‌های مجاور به گوشه فعلی چه تعدادی است از این تعداد چه تعدادی قابل قبول و چه تعدادی غیر قابل قبولند؟

x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	RHS
x_1	1	0	2	1	1	2	1
x_2	0	1	1	1	-2	0	0.5
Z	0	0	3	-1	3	1	8

5 گوشه قابل قبول
و دو گوشه غیر قابل قبول

پایه‌های شدنی مجاور (x_1, x_3) , (x_3, x_2) , (x_1, x_4) , (s_1, x_2) , (s_2, x_2)
پایه‌های نشدنی مجاور (x_4, x_2) , (x_1, s_1)

مثال ۷: در مثال 5 با حرکت از گوشه فعلی در راستای x_3 به اندازه یک واحد به چه جوابی خواهیم رسید؟

از فضای حل خارج می‌شویم زیرا:

$$x_3 = 1 \Rightarrow x_1 = 1 - 2 = 1$$

$$x_2 = 0.5 - 1 = -0.5$$

$$x_4 = s_1 = s_2 = 0$$

نکته: سیمپلکس از تکراری به تکرار دیگر فقط بهبود را تضمین می‌کند نه حداکثر بهبود را.

مثال ۸: دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید، نقطه $(0 \ 0 \ 4 \ 12)$ یک گوشه قابل قبول برای دستگاه فوق است. گوشه مجاور در

این گوشه کدام گزینه است؟

$$x_1 + x_2 + 4x_3 + 12x_4 + 2x_5 = 16$$

$$x_2 + x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 4$$

$$x_1 \text{ تا } x_5 \geq 0$$

(۱) $(0 \ 0 \ 4 \ 0 \ 0)$

(۲) $(0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2)$

(۳) $(0 \ 0 \ 0 \ \frac{4}{3} \ 0)$

(۴) $(0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0)$

حل: گزینه ۱ و ۲ درست است.

گوشه مجاور این گوشه یعنی جدول سیمپلکس بعدی چگونه است؟ جدول سیمپلکس فعلی با پایه (x_1, x_2) به صورت زیر است:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_1	1	1	4	12	2	16
x_2	0	1	1	3	-4	4

یادداشت:

.....

.....

.....

.....

پایه را در ستون دوم بروزآوری می‌کنیم یعنی به صورت $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ لذا داریم. (سطر دوم ضرب در -1 و حاصل با سطر اول جمع می‌کنیم) داریم

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_1	1	0	3	9	6	12
x_2	0	1	1	3	-4	4

این همان پایه‌ای است که صورت مسئله از آن خبر داده بود. در این جدول هم x_3 می‌تواند جایگزین یکی از متغیرهای x_1 یا x_2 گردد و هم متغیر x_4 و جدول بعدی هم تباهیده است لذا هم گزینه یک صحیح است و هم گزینه 3 بنابراین سوال دارای ۲ گزینه صحیح است.

روش M بزرگ و دو فاز

- هرگاه پس از استاندارد کردن مسئله LP به تعداد محدودیت‌ها بردار واحد مستقل موجود نباشد باید از روش M بزرگ و دو فاز استفاده کرد.

فلسفه این دو روش:

اضافه کردن فضای مصنوعی به فضای واقعی مسئله و حرکت از گوشه‌ای در فضای مصنوعی، گوشه به گوشه تا رسیدن به گوشه‌ای در فضای واقعی مسئله بنابراین اضافه کردن متغیر مصنوعی فضای حل واقعی را به‌طور مصنوعی بزرگ می‌کند.

نکته: اضافه کردن متغیر به مسئله LP مقدار Z را می‌تواند بهتر کند.

نکته: اضافه کردن محدودیت به مسئله LP مقدار Z را نمی‌تواند بهتر کند.

برای صفر کردن مقدار متغیر مصنوعی باید ضریب آن را در تابع هدف ماکزیمم -M و در تابع هدف می‌نیمم مقدار M قرار دهیم.

روش دو فاز از هر نظر شبیه روش M بزرگ بوده و فقط به دلیل احتمال اشتباه در برآورد M توسط ماشین مطرح شده است.

مقدار بهینه w در انتهای فاز I یا مثبت بوده یا صفر است. در صورتی که مثبت باشد مسئله اصلی فضای حل ندارد و در صورتی که صفر شود مسئله اصلی دارای فضای حل واقعی است و می‌توان فاز 2 را شروع کرد.

بنابراین شرط ورود به فاز II صفر شدن w در انتهای فاز I است.

مثال ۹: فرض کنید پایان فاز I حل یک مسئله LP با روش دو فاز به صورت زیر است. در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	R_1
w	0	-2	0	-1	-3	0
x_1	1	1	0	4	1	0
x_3	0	0	1	5	0	0
R_1	0	0	0	0	0	1

(۱) دستگاه معادلات همزمان مسئله $AX = b$ ناسازگار است.

(۲) سیستم معادلات همزمان مسئله سازگار است لیکن $x \geq 0$

(۳) با حذف R_1 از سطر و ستون فاز I را می‌توان شروع کرد.

(۴) فاز II را می‌توان با جایگزین کردن R_1 با یکی از متغیرهای

اصلی شروع کرد.

یادداشت:

.....

.....

.....

.....

حل : گزینه ۱ درست است.

مقدار ω برابر 10 بوده و پایان فاز I است و $R > 0$ لذا مسئله فضای حل واقعی ندارد لذا گزینه ۱ درست است.

مثال ۱۰: جدول مسئله مینیم سازی را در نظر بگیرید. اگر $a = 3$ باشد یک جواب شدنی با $Z = -200$ کدام است؟

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_1		-2		1		c
x_3		-1		2		d
x_5		0		3		e
		a		b		-8

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
(۱)	$c+64$	64	$d+128$	0	e	
(۲)	c	0	d	0	e	
(۳)	$c+128$	64	$d+64$	0	e	
(۴)	$c+128$	0	$d+64$	0	e	

حل : گزینه ۳ صحیح است.

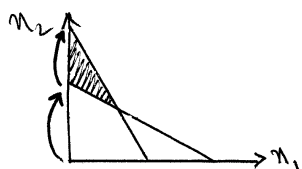
اگر در راستای x_2 به اندازه α حرکت کنیم داریم:

$$\alpha a - 8 = -200 \Rightarrow \alpha = 64 \Rightarrow x_2 = 64 \Rightarrow$$

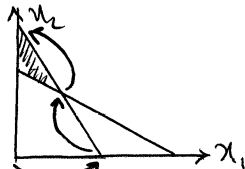
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +2 \\ +1 \\ 0 \end{pmatrix} 64 + \begin{pmatrix} c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c+128 \\ d+64 \\ e \end{pmatrix}$$

مثال ۱۱: آیا اگر در جدول نهایی یک مسئله LP متغیر مصنوعی در پایه باشد مسئله فضای حل دارد؟ در صورتی که مقدار متغیر مصنوعی صفر باشد بلی در غیراین صورت خیر.

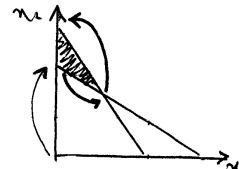
مثال ۱۲: در کدام یک از مسائل LP زیر روش متغیر مصنوعی به درستی عمل می کند؟



(1)



(2)



(3)

مسئله دارای یک محدودیت از نوع بزرگتر یا مساوی بوده و لذا یک متغیر مصنوعی دارد لذا با اولین حرکت وارد فضای واقعی می شود (مسائل ۱ و ۳) ولی مقدار Z کمتر و سپس بیشتر نمی شود لذا گزینه صحیح ۱ می باشد.

مثال ۱۳: در مراحل حل یک مسئله LP با تابع هدف ماکزیم سازی تغییرات Z به صورت $0 \rightarrow 5 \rightarrow 10 \rightarrow 8 \rightarrow 11$ می باشد علت این تغییر چیست؟

اشتباهی در انتخاب متغیر وارده به پایه رخ داده است.

مثال ۱۴: اگر در مثال ۸ تغییرات Z به صورت زیر باشد چه حادثه ای رخ داده است؟

$$9 \rightarrow 2 \rightarrow 0 \rightarrow 8 \rightarrow 10$$

مسئله را با روش دو فاز حل کرده اند که ابتدا در جدول نهایی فاز I مقدار ω صفر شده و سپس وارد فاز II شده و جواب بهینه $Z^* = 10$ به دست آمده است.

یادداشت:

.....

.....

.....

.....

حالات خاص در مسئله LP

حالت اول - فضا و جواب بیکران

نکته : شرط کافی برای داشتن فضای بیکران وجود حداقل یک متغیر که با بردن آن به سمت ∞ یا $-\infty$ کلیه محدودیت‌ها برقرار گردند. هرگاه ضریب متغیری در محدودیت‌ها همگی صفر یا منفی باشد فضای آن مسئله می‌تواند کراندار یا بیکران باشد. به طوری که:

اگر مسئله به صورت زیر باشد	اگر مسئله به صورت زیر باشد
st : \geq	st :
$AX \leq b$	$AX = b$
$x \geq 0$	$x \geq 0$
فضا بیکران است.	فضا ممکن است بیکران باشد.

در صورتی که مسئله دارای فضای حل بیکران باشد حتماً بردار جهت دور شونده‌ای موجود است ولی اگر در مسئله بردار جهت دور شونده‌ای موجود باشد دلیلی بر بیکرانی فضا نمی‌باشد زیرا ممکن است مسئله فضای حل نداشته باشد.

بردار جهت رأسی زیر مجموعه بردارهای جهت دور شونده می‌باشد گوشه‌های فضای حاصل از $d \geq 0 \& Ad \leq 0$ را جهت رأسی می‌نامند و در مسئله‌ای که فضا دارد ولی گوشه ندارد مانند مثال زیر حداکثر یک جهت رأسی می‌توان داشت:

st:
 $x_1 + x_2 < 2$

در مسئله‌ای از نوع ماکزیم‌سازی با وجود بردارهای جهت رأسی داریم:

$$\begin{cases} cd > 0 \\ cd \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{فضا } Z + \text{ هر دو بیکران} \\ \text{فضا بیکران ولی } Z \text{ کراندار است.} \end{array}$$

در مسئله Min برعکس فوق می‌باشد.

چنانچه در جدول سیمپلکس ورودی موجود بوده ولی خروجی موجود نباشد و یا تست حداقل نسبت مقدار ∞ را نتیجه بدهد فضا و بیکران است. الزامی نیست تا نشانه فوق در زیر متغیری با منفی‌ترین ضریب در سطر Z در مسئله ماکزیم‌سازی رخ دهد کافی است این نشانه زیر یک متغیر کاندید برای ورود به پایه ظاهر شود.

برای پی‌بردن به بیکران فضا، 4 راه وجود دارد:

- ۱- ظاهر مسئله
- ۲) ترسیم
- ۳) به دست آوردن بردار d
- ۴) جدول سیمپلکس

یادداشت:

.....

.....

.....

.....

حالت دوم - تباهدگی دائم و موقت

هرگاه در یک مسئله n بعدی، بیش از n محدودیت از گوشه‌ای عبور کند گوشه مزبور را تباهیده می‌نامند. محدودیت زائد می‌تواند تباهدگی ایجاد کند. در تباهدگی موقت علت تباهدگی حتماً محدودیت زائد است.

نکته: تباهدگی تعدد پایه را نتیجه نمی‌دهد ولی تعدد پایه الزاماً تباهدگی را نتیجه می‌دهد.

مثال ۱۵: محدودیت زائد محدودیتی است:

(۱) حتماً از ترکیب سایر محدودیت‌ها حاصل شده باشد. (۲) ایجاد تباهدگی کند.

(۳) که با حذف آن مقدار Z تغییر نکند. (۴) هیچ کدام ✓

مثال ۱۶: کدام عبارت صحیح نمی‌باشد.

(۱) به‌ازاء هر پایه شدنی یک نقطه رأسی منحصر به فرد وجود دارد.

(۲) به‌ازاء هر نقطه رأسی تک، پایه وجود دارد.

(۳) ✓ به‌ازاء هر نقطه رأسی تباهیده بیش از یک پایه وجود دارد.

(۴) اگر نقطه رأسی بیش از یک پایه داشته باشد یک نقطه رأسی تباهیده است.

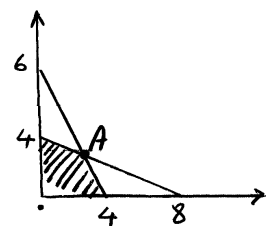
حالت سوم - جواب بهینه چندگانه

نشانه‌های جدول در این حالت عبارت است از:

۱- جدول نهایی باشد. ۲- $z_j - c_j$ متغیر غیرپایه صفر باشد. ۳- $\{ \text{نسبت‌ها} \} \neq \min$.

مثال ۱۷: در مسئله LP زیر با فرض آنکه A نقطه‌ای بهینه باشد بازه C_1 را تعیین کنید تا A همواره گوشه بهینه باشد.

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= c_1 x_1 + 16x_2 \\ \text{st: } x_1 + 2x_2 &\leq 8 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 12 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



در صورتی A گوشه بهینه باقی خواهد ماند که تابع هدف موازی یکی از دو محدودیت گردد. لذا نسبت ضرائب را به دو محدودیت برابر یکدیگر قرار می‌دهیم:

$$\frac{C_1}{1} = \frac{16}{2} \quad \frac{C_1}{3} = \frac{16}{2} \Rightarrow 8 \leq C_1 \leq 24$$

$$C_1 = 8 \quad C_1 = 24$$

یادداشت:

.....

.....

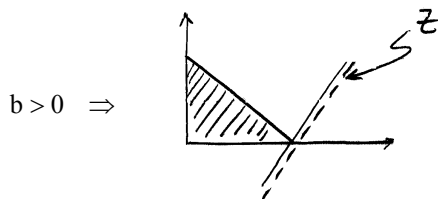
.....

.....

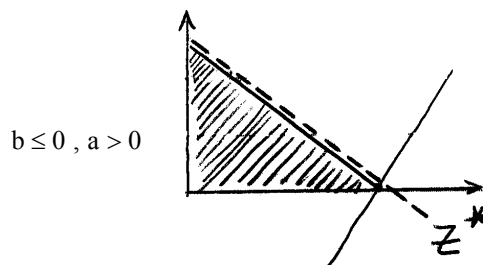
مثال ۱۸: جدول نهایی یک مسئله LP از نوع ماکزیم سازی به صورت زیر است:

	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
x_1	1	0	a	3	2
x_2	0	1	b	2	0
Z	0	0	0	2	10

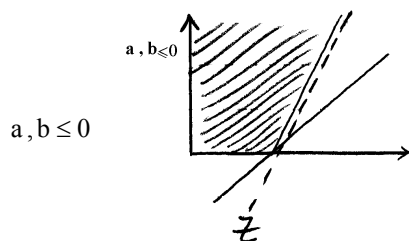
در چه صورت دارای جواب بهینه منحصر به فرد می‌باشیم و در این حالت شکل مسئله به چه صورت است؟



در مثال ۱۳ در چه صورت دارای چندین گوشه بهینه می‌باشیم و شکل مسئله در این حالت چگونه است؟



در مثال ۱۳ در چه صورت مسئله دارای یک گوشه بهینه و بیشمار غیر گوشه بهینه است؟ شکل مسئله را در این حالت رسم کنید.



مثال ۱۹: در جدول نهایی زیر اگر در راستای x_4 ، 2 واحد حرکت کنیم به چه جوابی خواهیم رسید:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_1	1	0	0	-3	-1	11
x_2	0	1	0	-1	2	18
x_3	0	0	1	0	-1	15
Z	0	0	0	0	1	48

یادداشت:

.....

.....

.....

.....

$$\begin{pmatrix} 11 \\ 18 \\ 15 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_4 = 2 \\ x_1 = 17 \\ x_2 = 20 \\ x_3 = 15 \end{cases} \quad Z = 48$$

اگر در راستای x_5 ، 10 واحد به جلو حرکت کنیم داریم:

$$\begin{pmatrix} 11 \\ 18 \\ 15 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} +1 \\ -2 \\ +1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ -2 \\ 25 \end{pmatrix} \Rightarrow 7 = 48 - 10 = 38 \text{ می‌شویم}$$

حالت چهارم: مسئله جواب یا فضا ندارد.

نکته: در روش سیمپلکس:

اگر در روش متغیر مصنوعی، در جواب بهینه R با مقدار مثبت در پایه باشد و یا در روش دو فاز در پایان فاز $I \neq 0$ باشد مسئله فضا ندارد.

نکته: در روش دو ال سیمپلکس:

هرگاه خروجی داشته باشیم و ورودی نداشته باشیم مسئله فضا یا جواب ندارد.

مثال ۲۰: مقدار بهینه تابع هدف زیر برابر و جواب بهینه می‌باشد.

Min	$Z = x_1 + x_2$	(۱) 2 منحصر به فرد
sT:	$x_1 + x_2 + x_3 = 2$	(۲) 3 و نشدنی
	$x_1 + x_4 = 1$	(۳) 3 و چندگانه
	$x_2 + x_5 = 1$	(۴) 2 و نامتناهی
	$x_1 \text{ تا } x_5 \geq 0$	

حل: هیچ‌کدام از گزینه‌ها درست نیست.

زیرا جواب $x_1 = x_2 = 0$ و $x_1 = x_2 = 0$ ، $x_3 = 2, x_4 = 1, x_5 = 1$ دارای $Z = 0$ بوده و جواب بهینه است بنابراین مقدار تابع هدف صفر بوده و منحصر به فرد است.

ریاضیات در جدول سیمپلکس:

جدول زیر را به‌خاطر بسپارید:

	x_B	x_j	RHS
x_B	I	$B^{-1}a_j$	$B^{-1}b$
Z		$C_B B^{-1}a_j - C_j$	$C_B B^{-1}b$

یادداشت:

.....

.....

.....

.....

نکته : متغیرهای مثبتی که جانشین متغیر آزاد می‌شوند، هیچگاه هر دو متغیر مثبت با هم را وارد پایه نمی‌گردند. بنابراین $Z = C|x|$ وقتی x آزاد است برابر است با $Z = C(x' + x'')$

نکته : شرط وجود جواب برای $Ax = b$ آن است که $R(A/b) = R(A)$

نکته : شرط وجود جواب برای $Ax = b, x \geq 0$ ، آن است که b باید در درون مخروط حادث از بردارهای ستونی A قرار گیرد.

نکته : با داشتن B^{-1} در هر جدولی همراه با صورت مسئله می‌توان با استفاده از فرمول‌های $B^{-1}a_j$ و $C_B B^{-1}a_j - c_j$ و $I = B^{-1}.B$ کلیه مقادیر مجهول در جدول سیمپلکس را به دست آورد.

مثال ۲۱: مسئله LP زیر را در نظر بگیرید. جدول زیر یکی از تکرارهای این مسئله است:

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 3x_1 + 7x_2 + 5x_3 \\ \text{st : } a_1 x_1 + x_2 + a_2 x_3 &\leq 15 \\ a_3 x_1 + 3x_2 + a_4 x_3 &\leq 25 \\ x_{1,2,3} &\geq 0 \end{aligned}$$

x_B	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHs
x_1		a		-1	1	10
x_3		b		2	-1	5
z		c		d	e	55

برای پیدا کردن $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_3 \end{pmatrix}$ از $B^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ استفاده می‌شود. برای پیدا کردن $\begin{pmatrix} a_2 \\ a_4 \end{pmatrix}$ به ترتیب از $B^{-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ و $B^{-1} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ استفاده می‌شود.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow a = 2, \quad b = -1$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_3 - a_1 = 1 & a_1 = 1 \\ 2a_1 = a_3 & a_3 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_4 = a_2 & a_2 = 1 \\ 2a_2 - a_4 = 1 & a_4 = 1 \end{cases}$$

$$y = (3 \ 5) \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = (7 \ -2) = (d \ e)$$

$$c = (3 \ 5) \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}} - 7 = -6$$

یادداشت:

.....

.....

.....

.....

از آنجائی که تمام ضرائب a_1 تا a_4 بزرگتر یا مساوی صفر بوده و ضرائب متغیرها در مسئله استاندارد شده در جدول همگی بزرگتر یا مساوی صفر هستند لذا فضای حل مسئله محدود است.

نکته: با داشتن بدنه جدول سیمپلکس و با استفاده از رابطه $d \geq 0$ و $Ad = 0$ و پیدا کردن بردار غیرصفر می توان به بیکرانی فضا پی برد.

Dual دوال

تعریف دوال:

$$\begin{array}{ll} \text{Max } Z = Cx & \text{Min } \omega = yb \\ \text{st : } Ax \leq b & \text{st : } yA \geq C \\ x \geq 0 & y \geq 0 \end{array}$$

نکته: نحوه دوال داشتن:

آزاد بودن متغیر \Leftrightarrow تساوی بودن محدودیت

متغیر طبق عرف \Leftrightarrow محدودیت طبق عرف

علامت یک متغیر را در هر مسئله در سه محل می توان تغییر داد. (هم در متغیرها و هم در محدودیتها و هم در تابع هدف)

نکته: قضیه ضعیف دوال: مقدار تابع هدف در مسئله \min به ازاء هر جواب شدنی بزرگتر یا مساوی است از مقدار تابع هدف در مسئله Max در ازاء هر جواب شدنی.

قضیه قوی دوال:

اگر x^* و y^* جواب های بهینه باشند آنگاه $Z^* = \omega^*$ یا

قضیه فرجه مکمل:

همواره در جواب بهینه دو مسئله اولیه و ثانویه داریم:

$$S'x^* = 0, \quad y^*s = 0$$

s و s' متغیرهای surplus , slack در محدودیت های دو مسئله اند و x^* و y^* جواب های بهینه دو مسئله اند.

نتایج قضایای دوال

I- اگر هر دو مسئله دارای فضای حل (جواب قابل قبول) باشند هر دو باید بهینه برسند.

- اگر یکی به بهینه برسد دیگری هم باید به بهینه برسد.

- مقدار تابع هدف در مسئله $(\text{Min})\text{Max}$ به ازاء هر جواب قابل قبول یک حد پایین (بالا) برای مقدار بهینه تابع هدف در مسئله Max یا Min (یا Max) می باشد.

II- $C_B B^{-1}$ های جدول نهایی یک مسئله = جواب های بهینه مسئله دیگر

یادداشت:

.....

.....

.....

.....

- تا یکی از دو مسئله به بهینه نرسد، دیگری به شدنی بودن نمی‌رسد.

III- فقط Z_j های زیر ماتریس B^{-1} در جدول نهایی یک مسئله = جواب‌های بهینه مسئله دیگر.

IV- اگر یکی از دو مسئله بیکران بشود دیگری غیرقابل قبول است.

V- اگر یکی از دو مسئله غیرقابل قبول باشد دیگری یا بیکران است یا غیرقابل قبول.

چنانچه نتیجه V مشروط به روش دوال سیمپلکس گردد آنگاه غیرقابل قبول بودن یک مسئله بیکران بودن مسئله دیگر را باعث می‌گردد.

VI- اگر یکی از دو مسئله دارای جواب بهینه تباهیده باشد آنگاه دیگری دارای جواب بهینه چندگانه می‌باشد.

VII- اگر هر دو مسئله اولیه و ثانویه دارای فضای حل باشند حداقل فضای یکی از دو مسئله بیکران است.

مثال ۲۲: در مسئله ماکزیمم‌سازی زیر اگر محدودیت سومی به صورت $x_1 + x_2 \leq 3$ به مسئله اضافه شود تابع هدف مسئله ثانویه در

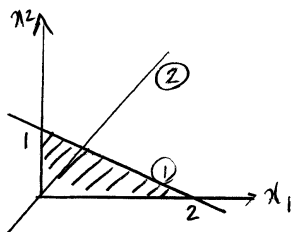
کدام گزینه است؟

Min $Z = y_1 + 3y_3$ (۱)

Min $Z = 2y_1 + 3y_2$ (۲)

Min $Z = 3y_1 + 2y_3$ (۳)

(۴) هیچ کدام



گزینه ۱ صحیح می‌باشد، زیرا مقدار سمت راست محدودیت دوم که مبدأ می‌گذرد صفر است و تنها گزینه ۱ با توجه به مقدار $b_3 = 3$ صحیح است.

$$\omega = y_1 b_1 + y_2 b_2 + y_3 b_3$$

(چرا؟) هر مقداری می‌تواند باشد.

$$\omega = ?y_1 + 0y_2 + 3b_3$$

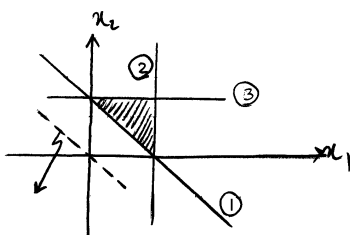
مثال ۲۳: تابع هدف ثانویه در مثال زیر کدام گزینه است؟

Min $\omega = y_1 - y_2 + y_3 + 10$ (۱)

Min $\omega = -y_1 + y_2 + y_3 + 10$ (۲)

Min $\omega = y_1 - y_2 + y_3 - 10$ (۳)

Min $\omega = -y_1 + y_2 + y_3 - 10$ (۴)



$$\text{MAX } Z = x_1 + x_2 + 10$$

گزینه صحیح ۲ می‌باشد، در مسئله Max محدودیت ۱ مطابق عرف نمی‌باشد لذا متغیر اول دوگان هم به صورت غیرمتعارف $r_1 \leq 0$ ر.

که اگر علامت y_1 را در سه محل (در متغیرها - در محدودیت‌ها و در تابع هدف) تعویض کنیم، گزینه ۲ صحیح خواهد بود مقدار $+10$

هم در هر دو تابع هدف به صورت $+10$ قرار می‌گیرد.

یادداشت:

.....

.....

.....

.....

مثال ۲۴: جواب بهینه مسئله ثانویه زیر چیست؟

ثانویه این مسئله فضای حل ندارد زیرا این مسئله بیکران است چرا؟ زیرا اگر متغیرهای x_1 و x_2 و x_3 هر سه هر چه مقدار بیشتری بگیرند همواره در محدودیت‌ها صدق می‌کنند و Z هم ماکزیمم‌تر خواهد شد.

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 3x_1 + 2x_2 + x_3 \\ \text{st : } x_1 + 2x_3 &\geq 10 \\ x_2 + x_3 &\geq 20 \\ x_1 + x_2 &\geq 30 \\ x_{1,2,3} &\geq 0 \end{aligned}$$

مثال ۲۵: مسئله LP زیر را در نظر بگیرید. در جواب بهینه این مسئله متغیرهای S_3, S_1, x_1 متغیرهای پایه هستند کدام گزینه

نادرست است؟ (فرض کنید $a_{21}, a_{22}, a_{23} > 0$)

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3 \\ \text{st : } a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &\leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &\geq b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &\leq b_3 \\ x_{1,2,3} &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\frac{c_1}{a_{21}} \leq 0 \quad (۲) \quad \frac{b_2}{a_{21}} \geq 0 \quad (۱)$$

$$\frac{c_1}{a_{21}} \geq \frac{c_2}{a_{22}} \quad (۴) \quad \frac{c_1}{a_{21}} \leq \frac{c_3}{a_{23}} \quad (۳)$$

حل : گزینه ۴ درست است.

از آن جایی که S_3, S_1 در پایه بهینه‌اند لذا $0 = y_3^* = y_1^*$ است (قضیه سوم) و از آن جایی که x_1 در پایه بهینه است لذا متغیر کمکی محدودیت اول دوال صفر است و داریم:

$$\text{محدودیت اول دوال} \Rightarrow y_2 a_{21} = C_1 \Rightarrow y_2 = \frac{C_1}{a_{21}}$$

محدودیت دوم خلاف عرف مسئله Max است لذا $y_2 \leq 0$ است و داریم $\frac{C_1}{a_{21}} \leq 0$

بنابراین گزینه ۲ صحیح است اگر $0 = x_3 = x_2 = S_2$ قرار دهیم در صورت مسئله فوق از محدودیت دوم داریم:

$$a_{21}x_1 = b_2 \Rightarrow x_1 = \frac{b_2}{a_{21}} \geq 0 \Rightarrow \text{گزینه ۱ صحیح است.}$$

محدودیت دوم دوال را نوشته و در آن به جای $y_2 = \frac{C_1}{a_{21}}$ را قرار داده داریم:

$$y a_{22} \geq C_2 \Rightarrow \frac{C_1}{a_{21}} \geq \frac{C_2}{a_{22}} \Rightarrow \text{گزینه ۳ غلط است.}$$

برای محدودیت سوم دوال هم این عمل را تکرار کرده و داریم:

$$\frac{C_1}{a_{21}} \geq \frac{C_3}{a_{23}}$$

بنابراین گزینه ۴ هم صحیح است. بنابراین تنها گزینه نادرست گزینه ۳ است.

یادداشت:

.....

.....

.....

.....

مثال ۲۶: مسئله LP زیر را در نظر بگیرید فرض کنید این مسئله دارای فضای حل باشد دوگان این مسئله چگونه است؟

$$\text{Max } Z = C_1x_1 + C_2x_2$$

(۱) حتماً تباهیده است.

$$\text{st: } ax_1 + bx_2 = b_1$$

(۲) ممکن است جواب نداشته باشد.

$$Cx_1 + dx_2 = b_2 \quad \frac{a}{b} \neq \frac{c}{d} \neq \frac{k}{m}$$

(۳) دارای جواب بیکران است.

$$Kx_1 + mx_2 = b_3$$

(۴) جواب بهینه چندگانه دارد.

$$b_1, b_2, b_3, x_1, x_2 \geq 0$$

حل : گزینه ۴ صحیح است.

مسئله فوق دارای سه محدودیت بوده که معادله سه خط می‌باشد، سه خط در دویبعدی به سه حالت قرار دارند، یا در یک نقطه مشترکند یا

اشتراکی ندارند یا ∞ نقطه مشترک دارند (بر هم منطبق‌اند) بنابراین گفته مسئله که مسئله دارای جواب است $\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d} \neq \frac{k}{m}$ (شیب‌های این

سه خط متفاوتند) لذا این مسئله تنها یک گوشه دارد و آن هم تباهیده است لذا دوال آن دارای جواب بهینه چندگانه است و گزینه ۴ صحیح است.

مثال ۲۷: ثانویه مسئله زیر در چه حالتی به سر می‌برد؟

$$\text{Max } Z = y + 3x$$

$$\text{st: } -\frac{1}{2}x + y \leq 3 \quad y \leq 4 \quad y \leq x^2 \quad y, x \geq 0$$

ثانویه این مسئله هم دارای فضای حل نمی‌باشد زیرا اگر در این مسئله x در محدودیت‌ها به ∞ میل کند کلیه محدودیت‌ها برقرارند و Z به ∞ میل خواهد کرد.

مثال ۲۸: در مسئله زیر مقدار تابع هدف چقدر است؟

$$\text{Max } Z = 2x_1 + 2x_2 + 2x_3$$

$$\text{st: } x_1 + 2x_2 \leq 2$$

$$2x_1 - x_3 \leq 2$$

$$-x_2 + x_3 \leq 2$$

$$x_{1,2,3} \geq 0$$

دوال این مسئله ضرائبی مشابه این مسئله دارد فقط محدودیت‌های آن از نوع بزرگتر یا مساوی می‌باشد برای آنکه جوابی در محدودیت‌های اولیه و ثانیه صدق کند باید این جواب در حالت = در این محدودیت‌ها صدق کند لذا محدودیت‌ها را به صورت تساوی در قالب سه معادله و سه مجهول حل کرده خواهیم داشت:

$$Z^* = 8$$

$$x_1 = x_3 = 2 \quad x_2 = 0$$

یادداشت:

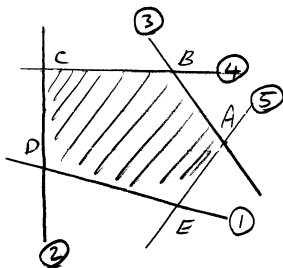
.....

.....

.....

.....

مثال ۲۹: در جواب بهینه دوال مسئله‌ای که شکل آن به صورت زیر است و جواب بهینه در نقطه A می‌باشد چه متغیرهایی در پایه بهینه می‌باشند؟



این مسئله دارای دو متغیر و ۵ محدودیت است بنابراین دوال آن دارای ۲ محدودیت و ۵ متغیر است لذا دو متغیر پایه دارد. با توجه به قضیه سوم از آنجائی که محل برخورد محدودیت‌های ۳ و ۵ گوشه بهینه A را حاصل می‌کند بنابراین در دوال مسئله هم متغیرهای y_3 و y_5 در پایه بهینه‌اند.

مثال ۳۰: مسئله LP زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 50x_1 + 80x_2 + 30x_3 \\ \text{st : } x_1 + 2x_2 + 4x_3 &\leq 8 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\leq 5 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 &\leq 6 \end{aligned}$$

اگر قیمت‌های سایه محدودیت‌های دوم و سوم به ترتیب ۲۳ و -۴ باشد و s_1 مقداری مثبت داشته باشد (s_1 متغیر کمبود محدودیت اول است) در جواب بهینه چه متغیرهایی در پایه بهینه نمی‌باشند؟

$$s_3, s_1, x_3 \quad (۴) \qquad s_3, s_2, x_2 \quad (۳) \qquad s_3, x_3, x_2 \quad (۲) \qquad s_2, s_1, x_1 \quad (۱)$$

حل : گزینه ۳ درست است.

زیرا $0 < s_1 < \infty$ با قراردادن مقادیر دوال (۰ ۲۳ -۴) در محدودیت‌های دوال (نیاز به نوشتن دوال نمی‌باشد) محدودیت‌های اول و سوم دوال عمل کننده بوده لذا x_1 و x_3 در پایه بوده بنابراین x_2 غیرپایه بوده و s_2 و s_3 هم غیرپایه می‌باشند زیرا $0 < s_1$ است.

مثال ۳۱: با توجه به مسئله زیر و اطلاعات ناقص از جدول بهینه مقدار Z^* چقدر است؟

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 3x_1 - 2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 \\ \text{st : } x_1 + \alpha x_3 + \beta x_4 &= b_1 \\ x_2 + 8x_3 + \theta x_4 &= b_2 \\ x_{1,2,3,4} &\geq 0 \end{aligned}$$

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \theta \end{pmatrix}, \quad Z_1 = C_1 = 4 \quad Z_2 - C_2 = 5$$

$$Z^* = 7b_1 + 3b_2 \quad (۴) \qquad Z^* = 9b_1 + 2b_2 \quad (۳) \qquad Z^* = c_3b_1 + c_4b_2 \quad (۲) \qquad Z^* = 4b_1 + 5b_2 \quad (۱)$$

حل : گزینه ۴ درست است.

یادداشت:

.....

.....

.....

.....

زیرا از خاصیت III داریم: شروع کننده x_1 و x_2 بوده لذا B^{-1} در جدول نهایی زیر x_1 و x_2 است حال z_j های زیر B^{-1} یعنی x_1 و x_2 را به دست می آوریم.

$$\begin{array}{r} x_1 \\ Z_j - C_j \\ 4 \end{array} \quad \begin{array}{r} x_2 \\ Z_j - C_j \\ 5 \\ 3 \leftarrow C_j \\ y_2 = 3 \end{array} \Rightarrow \omega^* = Z^* = 7b_1 + 3b_2$$

$$\begin{array}{r} 3 \leftarrow C_j \\ y_1 = 7 \end{array}$$

مثال ۳۲: اگر یک مسئله LP دارای فضای حل بیکران باشد در مورد ثانویه آن چه می توان گفت:

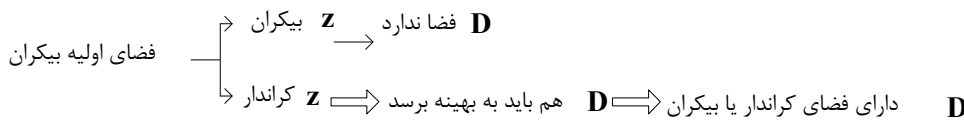
(۱) یا فضای حل ندارد یا دارای جواب بهینه است.

(۲) فضای حل مسئله ثانویه یا وجود ندارد یا ممکن است کراندار نباشد.

(۳) فضای حل ندارد.

(۴) 1 یا 2

حل : گزینه ۴ درست است.



آنالیز حساسیت در مدل LP

نکته : با مقادیر $\frac{\partial Z}{\partial x_N}$ یا $\frac{\partial Z}{\partial b}$ و ... آشنا باشید و بدانید که این مقادیر چه معنی دارند و به کجای جدول سیمپلکس اشاره می کنند.

نکته : تغییر در مقادیر b بر شدنی بودن اثر می گذارد. در صورت اثر گذاشتن مقدار تابع هدف بدتر می شود.

نکته : تغییر در مقادیر C بر بهینگی اثر می گذارد. در صورت اثر گذاشتن مقدار تابع هدف بهتر می شود.

نکته : تغییر در ماتریس A می تواند بر بهینگی و شدنی بودن به طور همزمان اثر بگذارد.

نکته : کلیه حالات آنالیز حساسیت با استفاده از فرمول های $B^{-1}b$, $C_B B^{-1}a_j - c_j$ و $B^{-1}a_j$ پاسخ داده می شود.

www.ieun.ir

نکته : تفاوت مقدار سمت چپ از سمت راست محدودیتها در یک مسئله به ازاء مقادیر متغیرهای آن مسئله مقادیر $Z_j - C_j$ های مسئله

دیگر را نتیجه می دهد.

یادداشت:

.....

.....

.....

.....

مثال ۳۳: اگر در یک مسئله متعارف از نوع ماکزیمم‌سازی ضرائب تابع هدف و ضرائب متغیرها در محدودیت‌ها 100 برابر گردند. آن‌گاه:

مقادیر متغیرها در مسئله اولیه $\frac{1}{100}$ می‌گردد زیرا در

$$x_B = B^{-1} b \Leftarrow Ax = b$$

$$\Leftarrow Ax = \frac{b}{100} \Leftarrow 100Ax = b$$

قدیم $x_B = \frac{1}{100} x_B$ جدید

ولی Z^* جدید تغییر نمی‌کند. زیرا ضرائب تابع هدف 100 برابر شده‌اند. بنابراین ω^* جدید هم نباید تغییر کند. اما تابع هدف به صورت زیر است:

$$\omega = \frac{1}{100} b_1 y_1 + \frac{1}{100} b_2 y_2 + \dots + \frac{1}{100} b_n y_n$$

بنابراین متغیرهای دوال باید 100 برابر گردند تا ω تغییر نکند.

مثال ۳۴: مسئله LP زیر را در نظر بگیرید.

$$\text{Max } Z = Cx$$

$$\text{st } : Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

جواب‌های بهینه دوال این مسئله را $y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*$ می‌نامیم حال کلیه اعضاء بردار B را به صورت $b_i + k_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$) تغییر می‌دهیم، k_i مقادیری ثابت هستند. اگر مسئله تغییر یافته دارای فضای حل باشد و مقدار Z^{**} جواب بهینه مسئله تغییر یافته باشد داریم:

$$Z^{**} \geq Z^* + \sum_{i=1}^m y_i^* k_i \quad (۴) \quad Z^{**} \leq Z^* + \sum_{i=1}^m y_i^* k_i \quad (۳) \quad Z^{**} < Z^* + \sum_{i=1}^m y_i^* k_i \quad (۲) \quad Z^* = Z^{**} \quad (۱)$$

حل : گزینه ۳ درست است.

زیرا از قضیه اول دوال داریم:

$$Z^{**} \leq \sum_{i=1}^m y_i^* (b_i + k_i) = \underbrace{\sum_{i=1}^m y_i^* b_i}_{Z^*} + \sum_{i=1}^m y_i^* k_i$$

یادداشت:

.....

.....

.....

.....

مثال ۳۵: گاهی اوقات لازم است تا با بررسی صورت مسئله سریعاً پی به جواب‌های بهینه برد.

در مسئله زیر اگر تابع هدف به صورت $\text{Max } Z = (1 + \theta)x_1 + (2 + 2\theta)x_2 + 4x_3$ تغییر کند بازه θ را به گونه‌ای بدست آورید که مسئله بهینه باقی بماند؟

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= x_1 + 2x_2 + 4x_3 & \theta &\leq 1 \quad (1) \\ \text{st } : x_1 + x_2 + x_3 &\leq 100 & \theta &\leq -1 \quad (2) \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &\leq 60 & \theta &\geq 1 \quad (3) \\ x_{1,2,3} &\geq 0 & \theta &\leq 7 \quad (4) \end{aligned}$$

حل : گزینه ۱ درست است.

زیرا: ابتدا با بررسی دوبدوی متغیرها متوجه می‌شویم که فقط پایه (x_3, s_1) بهینه می‌باشد. پایه (s_2, x_3) و (x_1, x_3) شدنی نبوده و از طرفی x_3 با x_2 هم نمی‌تواند در پایه باشد زیرا دترمینان ماتریس پایه صفر می‌باشد.

$$x_B = \begin{pmatrix} x_3 \\ s_1 \end{pmatrix} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$Z_j - C_j \Big|_{x_{1,2}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}}_{(0 \ 4)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - (1 + \theta \quad 2 + 2\theta) \geq 0$$

$$(8 \ 4) - (1 + \theta \quad 2 + 2\theta) \geq 0$$

$$(7 - \theta \quad 2 - 2\theta) \geq 0 \Rightarrow \begin{matrix} \theta \leq 7 \\ \theta \leq 1 \end{matrix} \Rightarrow \theta \leq 1$$

نکته : نام دیگر $Z_j - C_j$ ها هزینه‌های تقلیل یافته Reduced cost می‌باشد.

نکته : معنی متغیرهای دوال در مسئله ماکزیم‌سازی، سهم سود هر واحد از هر یک از منابع می‌باشد.

مثال ۳۶: جدول نهایی یک مسئله LP به صورت زیر است. در چه صورت می‌توان سود بهینه را افزایش داد؟

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS
x_1	1	3	0	1	$-\frac{1}{2}$	15
x_3	0	-1	1	-1	1	10
Z	0	5	0	1	2	140

آیا اگر سود محصول دوم 6 واحد اضافه شود سود بهینه افزایش می‌یابد؟ بلی زیرا

$$Z_2 - C_2 = 5 \Rightarrow Z_2 - (C_2 + 6) = (Z_2 - C_2) - 6 = -1$$

آیا اگر محصول جدیدی با سودآوری 4 و میزان مصرف از منابع 1 و 1 به مسئله اضافه شود سود بهینه افزایش می‌یابد؟ بلی زیرا

$$y_1 + y_2 - 4 = (1 + 2) - 4 = -1 = Z_j - C_j$$

یادداشت:

.....

.....

.....

.....

مثال ۳۷: برای یک مسئله Lp متغیرهای ثانویه به ترتیب 1 و 3- و 9 شده‌اند انتخاب کدام گزینه پرهزینه‌تر است؟

- (۱) برای مسئله‌ای بصورت Max، افزایش یک‌واحد به سمت راست محدودیت دوم
- (۲) برای مسئله‌ای بصورت Max، کاهش یک‌واحد از سمت راست محدودیت اول
- (۳) برای مسئله‌ای بصورت Min، افزایش یک‌واحد به سمت راست محدودیت سوم
- (۴) برای مسئله‌ای بصورت Min و کاهش یک‌واحد از سمت راست محدودیت دوم

حل : گزینه ۳ درست است.

زیرا:

$$Z^* = W^* = \alpha$$

از سود سه‌واحد کم می‌شود $Z = \alpha - 3$ سود = $Z = \alpha$ ⇒ گزینه 1

از سود یک‌واحد کم می‌شود $Z = \alpha - 1$ سود = $Z = \alpha$ ⇒ گزینه 2

هزینه 9 واحد اضافه شد $Z = \alpha + 9$ هزینه = $Z = \alpha$ ⇒ گزینه 3

هزینه 3 واحد اضافه شد $Z = \alpha + 3$ هزینه = $Z = \alpha$ ⇒ گزینه 4

مثال ۳۸: در روش دوال سیمپکس چنانچه متغیر خروجی موجود بوده ولی تمام عناصر در این سطر خروجی همگی مثبت باشند می‌توان

نتیجه گرفت که:

(۱) دوال بیکران است و مسئله اولیه نشدنی می‌باشد.

(۲) دوال کراندار است و مسئله اولیه بیکران است.

(۳) دوال نشدنی و مسئله اولیه بیکران است.

(۴) هیچ کدام.

حل : گزینه ۱ درست است.

مثال ۳۹: مسئله LP زیر جدول نهایی آن را در نظر بگیرید بازه b_1, b_2 به‌طور همزمان برای آن که جدول بهینه بماند چیست و شبه

قیمت منبع دوم چقدر است؟

Min	$W = 5x_1 + 2x_2 + x_3$		x_1	x_2	x_3	S_2	S_1	RHS
st :	$x_1 + 4x_2 + x_3 \leq b_1$	S_1	-1	3	0	1	1	4
	$2x_1 + x_2 + x_3 \geq b_2$	x_3	2	1	1	-1	0	2
	$x_{1,2,3} \geq 0$	ω	-3	-1	0	-1	0	

$$y_2^* 1 \& b_2 \geq b_1 \geq 0 \quad (۲)$$

$$y_2^* = 1 \& b_1 \geq b_2 \geq 0 \quad (۱)$$

$$y_2^* = -1 \& b_2 \geq b_1 \geq 0 \quad (۴)$$

$$y_2^* = -1 \& b_1 \geq b_2 \geq 0 \quad (۳)$$

حل : گزینه ۱ درست است.

توجه کنید ماتریس B^1 زیرمتغیرهای ابتدا S_1 و سپس R است علیرغم آن که در جدول S_2, S_1 را جایجا داده است و مسئله را با R در محدودیت دوم شروع به عمل کرده‌ایم.

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & +1 \end{pmatrix}$$

یادداشت:

.....

.....

.....

.....

بنابراین B^{-1} از متغیر R و S_2 قرینه‌اند.

$$B^{-1}b \geq 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & +1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \geq 0 \Rightarrow b_1 - b_2 \geq 0 \ \& \ b_2 \geq 0 \Rightarrow b_1 \geq b_2 \geq 0$$

و Z_j زیر S_2 و R هم قرینه‌اند لذا $y_2 = Z_j = 1$ بنابراین گزینه ۱ صحیح است.

کاربردهای L_p - مدل حمل و نقل و تخصیص

۱- مدل حمل و نقل

نکته : شرط وجود جواب شدنی $\sum a_i = \sum b_j$

نکته : مسئله حمل و نقل همواره دارای جواب بهینه محدود است. بنابراین هیچ‌گاه حالت خاص بیکران بودن و غیرقابل قبول بودن در مسئله حمل و نقل صدق نمی‌کند.

نکته : شرط لازم و کافی برای آن‌که جواب‌های پایه مسئله حمل و نقل صحیح باشند آن است که عرضه‌ها و تقاضاها صحیح باشند.

نکته : در صورتی که بخواهیم مقدار X_{ij} را صفر کنیم باید $C_{ij} = M$ قرار دهیم.

نکته : هر مسئله نامتعادلی را می‌توان متعادل کرد (با اضافه‌کردن سطر یا ستون مجازی)

نکته : ساختار خاص در ماتریس ضرائب مدل حمل و نقل وجود دارد در هر ستون دو عدد یک و مابقی صفر می‌باشند.

نکته : مسئله حمل و نقل دارای m متغیر بوده و $m + n$ محدودیت و اگر با روش سیمپلکس حل شود هر گوشه‌شدنی آن حتماً تباهیده خواهد بود.

نکته : همواره یکی از محدودیت‌های مسئله حمل و نقل زائد است.

نکته : تعداد متغیرها با مقدار مثبت در هر جواب پایه مسئله حمل و نقل $m + n - 1 =$

نکته : صفر نشانه تباهیدگی و محدودیت زائد که در جدول سیمپلکس در گوشه‌شدنی ظاهر می‌شود در جدول حمل و نقل مشاهده نمی‌شود.

نکته : دوال مسئله حمل و نقل همواره دارای جواب بهینه چندگانه می‌باشد و محدودیت‌های دوال مسئله حمل و نقل (هزینه) به صورت زیر است:

$$U_i + V_j \leq C_{ij}$$

U_i, V_j آزاد

یادداشت:

.....

.....

.....

.....

نکته : دوال مسئله حمل و نقل همواره دارای یک درجه آزادی است.

نکته : تعداد خانه‌هایی که در حلقه بررسی کننده یک خانه غیر پایه مورد استفاده قرار می‌گیرند زوج بوده.

نکته : تعداد عناصر با مقدار مثبت در هر جواب‌شدنی مسئله حمل و نقل حداکثر mn تا می‌باشد.

نکته : اگر به C_{ij} های یک سطر جدول حمل و نقل مثل سطر i به اندازه k واحد اضافه می‌شود مقدار Z بهینه آن به اندازه $K \sum a_i$ افزایش می‌یابد.

مثال ۴۰: یک جواب پایه موجه در مسئله حمل و نقل به صورت زیر است در چه صورت x_{11} متغیر وارده به پایه است؟

	a	7	q
	100		50
6		b	5
200			150

۴) $a \geq 10, a \geq b+7$

۳) $a \leq 10, a \leq b+7$

۲) $a \leq 10, a \geq b$

۱) $a \geq 10, a \leq b$

حل : گزینه ۳ درست است.

زیرا: باید $Z_j - C_j$ متغیر x_{11} بزرگتر یا مساوی صفر باشد و درثانی $Z_j - C_j$ متغیر x_{22} مثبت تر باشد.

۱) $(a+5) - (6+9) \leq 0 \Rightarrow a \leq 10$

۲) $(a-10) \leq (b+9) - (12) \Rightarrow a - 10 \leq b - 3$

$a \leq b + 7$

مثال ۴۱: روش MODI بر چه اساسی طراحی شده است؟

جواب: بر اساس مسئله ثانویه در روش سیمپلکس طراحی شده است.

مثال ۴۲: جدول حمل و نقل زیر را در نظر بگیرید مقدار هزینه کل در صورتی که $30 < \theta < 40$ باشد چقدر است؟

	1	2	
1		5	1
			$20 + \theta$
2		8	5
			$80 - \theta$
	50	50	

۴) $570 - 4\theta$

۳) $570 - 3\theta$

۲) $540 - 3\theta$

۱) $540 - 5\theta$

یادداشت:

.....

.....

.....

.....

جواب در گزینه ۲ می باشد زیرا:

	5		1
$\theta - 30$		50	
	8		5
$80 - \theta$			

$$7 = 50 + 50 - 150 + 640 - 80 = 540 - 30$$

مثال ۴۳: در مسئله حمل و نقل زیر C_{12} چقدر باشد تا مسئله در جواب بهینه در حالت خاص قرار گیرد.

	1	2	
1		1	C_{12}
2		4	9
3		2	7
	10	20	

(۴) همه موارد درست است.

(۳) 8

(۲) 7

(۱) 6

حل : گزینه ۴ درست است.

زیرا با گزینه 1 یعنی $C_{12} = 6$

مسئله را اگر با روش گوشه شمال غربی یا حداقل هزینه یا جواب اولیه‌ای به دست آوریم این جواب بهینه و چندگانه و تباهیده است.

با گزینه‌های 2 و 3 هم مسئله دارای جواب تباهیده است.

www.iueun.ir

مثال ۴۴: خانه‌های پایه در loop بررسی کننده خانه‌های غیر پایه آیا مستقل خطی می باشند؟

بلی ولی تمام خانه‌های شرکت کننده در loop (در کنجها) مستقل از یکدیگر نمی باشند زیرا یکی از کنجها را در loop خانه غیر پایه تشکیل داده و متغیرهای غیر پایه متغیرهای وابسته اند زیرا هر متغیر غیر پایه‌ای را می توان از ترکیب متغیرهای پایه نوشت.

یادداشت:

.....

.....

.....

.....

مدل تخصیص:

نکته: همان مدل حمل و نقل است وقتی که $a_i = b_j = 1$

نکته: جواب‌های پایه مسئله تخصیص همواره صحیح می‌باشند زیرا $b_j = a_i$ مقادیری صحیح هستند

نکته: تعداد متغیرها با مقدار مثبت در هر جواب پایه مسئله تخصیص n می‌باشد.

نکته: تعداد متغیرهای پایه مسئله تخصیص $2n-1$ که از این تعداد n تا 1 و مابقی صفرند.

نکته: تعداد متغیرهای پایه مسئله تخصیص اگر با روش سیمپلکس حل شود، $2n$ می‌باشد. (به تعداد محدودیت‌ها)

نکته: تعداد پایه‌های شدنی مسئله تخصیص n بعدی، $n!$ است.

نکته: تعداد متغیرها با مقدار مثبت در هر جواب شدنی مسئله تخصیص n بعدی می‌تواند $n^2 =$ کل تعداد متغیرها باشد.

نکته: تعداد متغیرها با مقدار صفر در هر جواب پایه مسئله تخصیص چه تعدادی است؟

$$n^2 - n = n(n-1) \begin{cases} \text{صفر پایه } n-1 \\ \text{صفر غیر پایه } n(n-1) - (n-1) = (n-1)^2 \end{cases}$$

کل صفرها

نکته: هر چه از هزینه‌ها (C_{ij} ها) در مسئله تخصیص کم شود تأثیری در جواب بهینه نخواهد داشت فقط Z بهینه را تغییر می‌دهد.

نکته: جهت جلوگیری از تخصص خاص می‌توان C_{ij} آن خانه را به M تغییر داد.

مثال ۴۵: مسئله تخصص زیر چند جواب بهینه دارد؟

	A	B	C
1	8	9	11
2	11	12	14
3	10	11	13

2 (۱)

4 (۲)

5 (۳)

6 (۴)

حل: گزینه ۴ درست است.

زیرا با انجام قدم‌های 1 و 2 از روش مجارستانی کلیه اعداد جدول صفر می‌شوند بنابراین هر 6 جواب (3!) مسئله بهینه است.

یادداشت:

.....

.....

.....

.....

مثال ۴۶: مسئله تخصیص زیر را در نظر بگیرید: اعداد داخل جدول نمره آزمون سه شرکت کننده برای سرپرستی سه بخش از ۴ بخش می باشد چه شخصی سرپرست بخش ۴ خواهد شد؟

	1	2	3	4
A	30	78	78	70
B	40	87	80	75
C	20	65	75	65

A (۱)

B (۲)

C (۳)

A و C شرایط برابر دارند.

حل : گزینه ۱ درست است.

زیرا اولاً مقادیر جدول از نوع سود می باشد لذا راحت تر آن است که اعداد جدول را در -1 ضرب کرده و سپس الگوریتم مجارستانی (هزینه) را اجرا کنیم خواهیم داشت:

	1	2	3	4
A	-30	-78	-78	-70
B	-40	-87	-80	-75
C	-20	-65	-75	-65
D	0	0	0	0

	1	2	3	4
A	48	0	0	8
B	47	0	7	8
C	55	10	0	10
D	0	0	0	0

www.ieun.ir

	1	2	3	4
A	40	0	0	0
B	34	0	7	0
C	47	10	0	2
D	0	1	1	0

B یا A → 4,1 یا 1,4
 C → 3
 D → 1

روش سیمپلکس تجدید نظر شده - متغیرهای حد دار - بحث سیکل

نکته : تنها تفاوت روش سیمپلکس تجدید نظر شده با روش سنتی در استفاده از حافظه کمتر می باشد.

نکته :

$B_K^{-1} = E_{K-1} E_{K-2} \dots E_2 E_1$ قبلی $B^{-1} \times E$ بعدی در حالت کلی

نکته : تنها تفاوت فقط در قدم پنجم روش سیمپلکس می باشد.

یادداشت:

.....

.....

.....

.....

نکته: از آنجائیکه ماشین در هر تکرار فقط B^{-1} را در حافظه نگهداری می‌کند لذا هر چه مسئله دارای B^{-1} کوچکتر می‌باشد سرعت حل مسئله بیشتر می‌باشد.

نکته: تغییر متغیر روی حد پایین $X = L + X'$

نکته: تغییر متغیر روی حد بالا $X_j = U_j - X'_j$ یا $X_i = U_i - X'_i$

نکته: در روش متغیرهای کراندار از عناصر مثبت ستون لولا برای تضمین غیر منفی شدن متغیرها در جدول بعدی استفاده می‌شود و از عناصر منفی ستون لولا برای تضمین اینکه متغیرهای پایه در جدول بعدی از حد بالای خود فراتر نرود استفاده می‌شود بنابراین در این روش عنصر لولا هم می‌تواند مثبت باشد و هم منفی

نکته: تعداد متغیرها با مقدار مثبت در هر جواب پایه مسئله با متغیرهای کراندار می‌تواند از m هم بیشتر باشد.

نکته: مقدار متغیر وارد شونده به پایه از رابطه:

$$x_j = \min \left\{ U_j, \theta_1 = \min \left\{ \frac{\beta_i^0}{\alpha_{ij}} / \alpha_{ij} > 0 \right\}, \theta_2 = \min \left\{ \frac{U_i - \beta_i}{-\alpha_{ij}} / \alpha_{ij} < 0 \right\} \right\}$$

پیروی می‌کند.

نکته: کاربرد روش لکزیکو گراف هنگامی است که خروجی منحصر به فرد نباشد.

نکته: پدیده سیکل احتمالی است.

مثال ۴۷: برای محاسبه ماتریس‌های مقدماتی از چه اطلاعاتی از جدول سیمپلکس استفاده می‌شود؟ از ستون لولا و سطر لولا یا محل عنصر لولا در ستون لولا

مثال ۴۸: اگر یک مسئله Lp که دارای ۱۰۰ متغیر و ۱۰۰۰ محدودیت است، ثانویه این مسئله را در نظر بگیریم در این صورت ماشین مسئله اولیه را راحت‌تر حل می‌کند یا مسئله ثانویه را؟

مسئله ثانویه را راحت‌تر حل می‌کنند زیرا ابعاد B^{-1} در مسئله ثانویه 100×100 بوده که معادل ۱۰۰۰۰ خانه از حافظه می‌باشد ولی در مسئله اولیه ابعاد B^{-1} 1000×1000 بوده که یک میلیون خانه از حافظه را شامل می‌گردد.

مثال ۴۹: در یک مسئله Lp یکی از متغیرها بصورت $x_2 \geq -7$ تعریف شده برای حل این مسئله با روش سیمپلکس از کدام گزینه برای جایگزین کردن این متغیر استفاده می‌شود:

$$\begin{array}{llll} x_2 \geq 0, x_2 = x'_2 - 7 & (۴) & x_2 = x'_2 + 7 & (۳) \\ & & x'_2 > 0 & \\ & & x'_2 \leq 7 & (۲) \\ & & -x_2 \leq 7 & (۱) \end{array}$$

حل: گزینه ۴ درست است.

زیرا باید تغییر متغیر روی حد پایین اعمال گردد.

$$\begin{array}{l} x_2 = -7 + x'_2 \\ x'_2 \geq 0 \end{array}$$

یادداشت:

.....

.....

.....

.....