قانون اول نیوتن : اگر نیروی برایند وارد بر ذره‌ای صفر باشد، اگر ابتدا ساکن باشد، ذره ساکن می‌ماند و اگر ابتدا در حرکت باشد، با تندی ثابت در امتداد یک خط راست حرکت می‌کند.

قانون دوم نیوتن : اگر نیروی برایند وارد بر ذره‌ای صفر نباشد، ذره شتابی متناسب با مقدار نیروی برایند و در جهت آن خواهد داشت.

که در آن F، m و a به ترتیب، نیروی برایند وارد بر ذره، جرم ذره و شتاب ذره هستند.

۱) $F = ma$

$1N = (1kg)(1m/s^2) = 1kg.m/s^2$

قانون سوم نیوتن : نیروهای کنش و واکنش بین اجسامی که با هم تماس دارند دارای مقدار برابر، خط اثر یکسان و در سوی مخالفند.

قانون گرانش نیوتن : طبق این قانون، دو ذره به جرم M و m با نیروهای برابر و ناهمسوی F و ‎-F یکدیگر را می‌ربایند:

۲) $F = G\dfrac{Mm}{r^2}$

که در آن r، فاصله بین دو ذره
G، ثابت عمومی گرانش

وزن : نیروی F وارده از زمین را وزن W ذره می‌گویند.

۳) $g = \dfrac{GM}{R^2}$ $\Rightarrow$ ۴) $W = mg$

$= (1kg)(9.81 m/s^2)$
$= 9.81\ N$

$g = 32.2\ ft/s^2$ یا $g = 9.81\ m/s^2$

واحد نیرو N (نیوتن) : نیرویی که شتاب $1m/s^2$ را به جرم 1kg می‌دهد.

۵) $1N = (1kg)(1m/s^2) = 1kg.m/s^2$

واحد اسلاگ (slug) : واحد جرم سازگار با فوت، پاوند و ثانیه، جرمی است که تحت نیروی 1lb (پوند) شتاب $1\ ft/s^2$ را دارد، این واحد، که اسلاگ نام دارد، با جاگذاری 1lb و $1\ ft/s^2$ به ترتیب، برای F و a بدست می‌آید.

$F = ma \Rightarrow 1\ lb = (1\ slug)(1\ ft/s^2) \Rightarrow$

۶) $1\ slug = \dfrac{1\ lb}{1\ ft/s^2} = 1\ lb.s^2/ft$

در دینامیک که با نیرو، جرم و شتاب سروکار دارد، جرم اجسام (m) برحسب اسلاگ و وزن (W) آنها برحسب پاوند بیان می‌شود.

$W = mg \Rightarrow$ ۷) $\underbrace{m}_{slug} = \dfrac{\overbrace{W}^{lb}}{g}$

که در آن g شتاب ثقل است.

$g = 32.2\ ft/s^2$

~~سیستم~~ آحاد U.S. که در مسائل مهندسی به کار می‌روند عبارتند از : اصلی => فوت (ft) ، پاوند (lb) ، ثانیه (s)

همچنین :

$mi = 5280\ ft$ مایل - $in = \frac{1}{12}\ ft$ اینچ - کیلوپاوند $(kip) = 1000\ lb$

تبدیل دستگاه‌های آحاد

آحاد طول : واحد طول در دستگاه .U.S طبق تعریف عبارت است از :

۸) $1\ ft = 0.3048\ m$

$1\ mi = 5280\ ft = 5280\,(0.3048\ m) = 1609\ m \Rightarrow$ ۹) $1\ mi = 1.609\ km$

$1\ in. = \frac{1}{12}\ ft = \frac{1}{12}\,(0.3048\ m) = 0.0254\ m \Rightarrow$ ۱۰) $1\ in. = 25.4\ mm$

آحاد نیرو : واحد نیرو در دستگاه .U.S (یعنی پاند) به عنوان وزن پاند استاندارد (به جرم $0.4536\ kg$) در سطح دریا در عرض جغرافیایی 45° ، که در آن $g = 9.807\ m/s^2$ تعریف می‌شود

$W = mg$

$1\ lb = (0.4536\ kg)(9.807\ m/s^2) = 4.448\ kg.m/s^2 \Longrightarrow$ ۱۱) $1\ lb = 4.448\ N$

آحاد جرم : واحد جرم در دستگاه .U.S (اسلاگ) یک واحد فرعی است .

۱۲) $1\ slug = 1\ lb.s^2/ft = 14.59\ kg$

گرچه از پاند استاندارد نمی‌توان به عنوان واحد سازگار جرم استفاده کرد ولی طبق تعریف :

۱۳) ۱ پاند جرم $= 0.4536\ kg$

برای تعیین جرم یک جسم در آحاد SI (برحسب کیلوگرم) که وزن آن در آحاد .U.S (برحسب پاند) داده شده است از ثابت بالا استفاده می‌شود.

برای تبدیل یک واحد فرعی .U.S به آحاد SI ، از ضرایب تبدیل استفاده می‌شود.

مثال

$M = 47\ lb.in. = 47\,(4.448\ N)(25.4\ mm) = 5310\ N.mm = 5.31\ N.m$

$M = 40\ N.m = (40\ N.m)\left(\frac{1\ lb}{4.448\ N}\right)\left(\frac{1\ ft}{0.3048\ m}\right) = 29.5\ lb.ft$

جمع بردارها:

۱) $P+Q=Q+P$ ۲) $P-Q=P+(-Q)$

۳) $P+Q+S=(P+Q)+S$ ۴) $P+Q+S=(P+Q)+S=P+(Q+S)$

۵) $P+Q+S=(P+Q)+S=S+(P+Q)=S+(Q+P)=S+Q+P$

مؤلفه‌های نیرو در صفحه:

۶) $\mathbf{F}_x=F_x\mathbf{i}$, $\mathbf{F}_y=F_y\mathbf{j}$ ۷) $\mathbf{F}=F_x\mathbf{i}+F_y\mathbf{j}$

۸) $F_x=F\cos\theta$ $F_y=F\sin\theta$ ۹) $\tan\theta=\dfrac{F_y}{F_x}$ ۱۰) $F=\sqrt{F_x^2+F_y^2}$

تعیین برایند نیروها از طریق جمع زدن مؤلفه‌های x و y:

۱۱) $R=P+Q+S$

۱۲) $R_x=P_x+Q_x+S_x$, $R_y=P_y+Q_y+S_y$ ۱۳) $R_x=\Sigma F_x$, $R_y=\Sigma F_y$

$\Rightarrow \mathbf{R}=R_x\mathbf{i}+R_y\mathbf{j}$

تعادل ذره در صفحه:

۱۴) $\mathbf{R}=\Sigma\mathbf{F}=0$ ۱۵) $\Sigma F_x=0$, $\Sigma F_y=0$

مؤلفه‌های نیرو در فضا:

۱۶) $F_y=F\cos\theta_y$, $F_h=F\sin\theta_y$

۱۷) $F_x=F_h\cos\phi=F\sin\theta_y\cos\phi$ $F_z=F_h\sin\phi=F\sin\theta_y\sin\phi$

۱۸) $F=\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}$ ۱۹) $F_x=F\cos\theta_x$, $F_y=F\cos\theta_y$, $F_z=F\cos\theta_z$

۲۰) $\mathbf{F}=F_x\mathbf{i}+F_y\mathbf{j}+F_z\mathbf{k}$ ۲۱) $\mathbf{F}=F(\cos\theta_x\mathbf{i}+\cos\theta_y\mathbf{j}+\cos\theta_z\mathbf{k})$

۲۲) $\boldsymbol{\lambda}=\cos\theta_x\mathbf{i}+\cos\theta_y\mathbf{j}+\cos\theta_z\mathbf{k}$ ۲۳) $\lambda_x=\cos\theta_x$, $\lambda_y=\cos\theta_y$, $\lambda_z=\cos\theta_z$

$\lambda_x^2+\lambda_y^2+\lambda_z^2=1 \Rightarrow$ ۲۴) $\cos^2\theta_x+\cos^2\theta_y+\cos^2\theta_z=1$

۲۵) $\cos\theta_x=\dfrac{F_x}{F}$, $\cos\theta_y=\dfrac{F_y}{F}$, $\cos\theta_z=\dfrac{F_z}{F}$

برایند نیروهای متقاطع در فضا:

۳۱) $R_x=\Sigma F_x$, $R_y=\Sigma F_y$, $R_z=\Sigma F_z$ ۳۲) $R=\sqrt{R_x^2+R_y^2+R_z^2}$

۳۳) $\cos\theta_x=\dfrac{R_x}{R}$, $\cos\theta_y=\dfrac{R_y}{R}$, $\cos\theta_z=\dfrac{R_z}{R}$

تعیین نیرو توسط مقدار و دو نقطه از خط اثرش :

۲۶) $\overrightarrow{MN} = d_x i + d_y j + d_z k$

۲۷) $\lambda = \frac{\overrightarrow{MN}}{MN} = \frac{1}{d}(d_x i + d_y j + d_z k)$

۲۸) $F = F\lambda = \frac{F}{d}(d_x i + d_y j + d_z k)$

۲۹) $F_x = \frac{F d_x}{d}$, $F_y = \frac{F d_y}{d}$, $F_z = \frac{F d_z}{d}$

۳۰) $\cos\theta_x = \frac{d_x}{d}$, $\cos\theta_y = \frac{d_y}{d}$, $\cos\theta_z = \frac{d_z}{d}$

تعادل ذره در فضا :

۳۴) $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$, $\sum F_z = 0$

استاتیک — فرمولهای فصل سوم

ضرب برداری دو بردار : ضرب برداری دو بردار P و Q برداری است مانند V با شرایط زیر :

۱) $V = PQ\sin\theta$

۱- خط اثر V بر صفحه شامل P و Q عمود است.

۲) $V = P \times Q$

۲- مقدار V برابر است با حاصل ضرب مقادیر P و Q و سینوس زاویه θ بین P و Q (همواره $\theta \leq 180^\circ$)

۳- جهت V از قاعده دست راست تعیین می شود.

۳) $V = P \times Q = P \times Q'$

۴) $Q \times P = -(P \times Q)$

۵) $P \times (Q_1 + Q_2) = P \times Q_1 + P \times Q_2$

۵') $P \times Q' = P \times Q'_1 + P \times Q'_2$

۶) $(P \times Q) \times S \neq P \times (Q \times S)$

ضرب برداری برحسب مؤلفه های قائم :

۷) $i \times i = 0$ $\quad j \times i = -k$ $\quad k \times i = j$

$i \times j = k$ $\quad j \times j = 0$ $\quad k \times j = -i$

$i \times k = -j$ $\quad j \times k = i$ $\quad k \times k = 0$

$V = P \times Q = (P_x i + P_y j + P_z k) \times (Q_x i + Q_y j + Q_z k)$

۸) $V = (P_y Q_z - P_z Q_y) i + (P_z Q_x - P_x Q_z) j + (P_x Q_y - P_y Q_x) k$

۹) $V_x = P_y Q_z - P_z Q_y \qquad V_y = P_z Q_x - P_x Q_z \qquad V_z = P_x Q_y - P_y Q_x$

۱۰) $V = \begin{vmatrix} i & j & k \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix}$

لنگر نیرو (گشتاور نیرو) نسبت به یک نقطه : ضرب برداری r و F را لنگر F نسبت به O گویند.

(M_O)

۱۱) $M_O = r \times F$

۱۲) $M_O = rF\sin\theta = Fd$

که در آن d فاصله عمودی از O تا خط اثر F است.

دو نیروی F و F' هم ارزند اگر و فقط اگر برابر باشند و لنگرهای آنها نسبت به نقطه داده شده O برابر باشند =>

۱۳) $F = F' \quad , \quad M_O = M'_O$

قضیه وارینیون :

۱۴) $r \times (F_1 + F_2 + \dots) = r \times F_1 + r \times F_2 + \dots$

مؤلفه های قائم لنگر نیرو :

۱۵) $r = x i + y j + z k$

۱۶) $F = F_x i + F_y j + F_z k$

$M_O = r \times F \Rightarrow$ ۱۷) $M_O = M_x i + M_y j + M_z k$

$$M_x = yF_z - zF_y$$

۱۸) $M_y = zF_x - xF_z$

$$M_z = xF_y - yF_x$$

۱۹) $M_O = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$

۲۰) $M_B = r_{A/B} \times F = (r_A - r_B) \times F$

۲۱) $M_B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_{A/B} & y_{A/B} & z_{A/B} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$

که در آن $x_{A/B}$ و $y_{A/B}$ و $z_{A/B}$ مؤلفه‌های بردار $r_{A/B}$ هستند.

$\Rightarrow$ $x_{A/B} = x_A - x_B$ و $y_{A/B} = y_A - y_B$ و $z_{A/B} = z_A - z_B$

درمسائلی که فقط با دو بعد سروکار دارند، می توان فرض کرد نیروی F درصفحه xy قرار دارد. با قرار دادن $z=0$ و $F_z=0$ در معادله ۱۸ داریم:

$M_O = (xF_y - yF_x)\,k \Rightarrow$ ۲۲) $\overset{\text{برداریت}}{M_O} = M_z = xF_y - yF_x$

۲۳) $M_B = (x_A - x_B)F_y - (y_A - y_B)F_x$ یا $M_B = x_{A/B}F_y - y_{A/B}F_x$

ضرب اسکالر دو بردار :

۲۴) $P.Q = PQ\cos\theta$

۲۵) $P.Q = Q.P$

۲۶) $P.(Q_1 + Q_2) = P.Q_1 + P.Q_2$

۲۷) $P.(Q_1 + Q_2) = P.Q = PQ\cos\theta_y = PQ_y$

۲۸) $P.Q_1 + P.Q_2 = P(Q_1)_y + P(Q_2)_y$

$P.Q = (P_x i + P_y j + P_z k).(Q_x i + Q_y j + Q_z k)$

۲۹) $i.i = 1 \quad j.j = 1 \quad k.k = 1$

$i.j = 0 \quad j.k = 0 \quad k.i = 0$

۳۰) $P.Q = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z$

۳۱) $P.P = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 = P^2$

کاربردها :

① تعیین زاویه بین دو بردار :

$P = P_x i + P_y j + P_z k$

$Q = Q_x i + Q_y j + Q_z k$

$\Rightarrow P.Q = PQ\cos\theta = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z$

۳۲) $\cos\theta = \dfrac{P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z}{PQ}$

② تعیین تصویر بردار روی یک محور :

۳۳) $P_{OL} = P\cos\theta$

۳۴) $P.Q = PQ\cos\theta = P_{OL}Q \Rightarrow$

۳۵) $P_{OL} = \dfrac{P.Q}{Q} = \dfrac{P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z}{Q}$

۳۶) $P_{OL} = P.\lambda$

۳۷) $P_{OL} = P_x\cos\theta_x + P_y\cos\theta_y + P_z\cos\theta_z$

که در آن θ_x و θ_y و θ_z زوایای محور OL با محورهای مختصات هستند.

ضرب سه‌گانه مختلط سه بردار :

۳۸) $S\cdot(P\times Q)$

۳۹) $S\cdot(P\times Q)=P\cdot(Q\times S)=Q\cdot(S\times P)=-S\cdot(Q\times P)=-P\cdot(S\times Q)=-Q\cdot(P\times S)$

$S\cdot(P\times Q)=S\cdot V=S_xV_x+S_yV_y+S_zV_z$

۴۰) $S\cdot(P\times Q)=S_x(P_yQ_z-P_zQ_y)+S_y(P_zQ_x-P_xQ_z)+S_z(P_xQ_y-P_yQ_x)$

۴۱) $S\cdot(P\times Q)=\begin{vmatrix} S_x & S_y & S_z \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix}$

لنگر نیرو نسبت به یک محور :

۴۲) $M_{OL}=\lambda\cdot M_O=\lambda\cdot(r\times F)$ ۴۳) $M_{OL}=\begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$

که در آن λ_x ، λ_y و λ_z = کسینوس‌های هادی محور OL ، x و y و z = مختصات نقطه اثر F ، F_x و F_y و F_z = مؤلفه‌های F

$M_{OL}=\lambda\cdot[(r_1+r_2)\times(F_1+F_2)]=\lambda\cdot(r_1\times F_1)+\lambda\cdot(r_1\times F_2)+\lambda\cdot(r_2\times F_1)+\lambda\cdot(r_2\times F_2)$

۴۴) $M_{OL}=\lambda\cdot(r_2\times F_2)$ ۴۵) $M_{BL}=\lambda\cdot M_B=\lambda\cdot(r_{A/B}\times F)$

۴۶) $M_{BL}=\begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x_{A/B} & y_{A/B} & z_{A/B} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$

که در آن : $x_{A/B}=x_A-x_B$ ، $y_{A/B}=y_A-y_B$ و $z_{A/B}=z_A-z_B$

λ_x و λ_y و λ_z = کسینوس‌های هادی محور BL

F_x و F_y و F_z = مؤلفه‌های نیروی F

لنگر کوپل : دو نیروی F و $-F$ با مقدار یکسان، خطوط اثر موازی و با سوی مخالف تشکیل کوپل می‌دهند. کوپل وارد بر یک جسم، باعث حرکت انتقالی جسم نمی‌شود، بلکه می‌خواهد آن را بچرخاند.

بردار M لنگر کوپل

$r_A\times F+r_B\times(-F)=(r_A-r_B)\times F \xrightarrow{r_A-r_B=r}$ ۴۷) $M=r\times F$

۴۸) $M=rF\sin\theta=Fd$ که در آن، d فاصله عمودی بین خطوط اثر F و $-F$ است. سوی M از قاعده دست راست تعیین می‌شود.

کوپل‌های هم‌ارز :

۴۹) $F_1d_1=F_2d_2$

مجموع کوپل‌ها :

طبق قضیه وارینیون

$M=r\times R=r\times(F_1+F_2) \Rightarrow M=r\times F_1+r\times F_2 \Rightarrow$ ۵۰) $M=M_1+M_2$

تجزیه یک نیروی معین به کوپل و نیرو در O :

$M_{O'}=r'\times F=(r+s)\times F=r\times F+s\times F$

۵۱) $M_{O'}=M_O+s\times F$

تبدیل سیستم نیروها به یک نیرو و یک کوپل :

۵۲) $R = \sum F \qquad M_O^R = \sum M_O = \sum (r \times F)$

۵۳) $M_{O'}^R = M_O^R + S \times R$ ۵۴) $r = xi + yj + zk$ ۵۵) $F = F_x i + F_y j + F_z k$

۵۶) $R = R_x i + R_y j + R_z k \qquad M_O^R = M_x^R i + M_y^R j + M_z^R k$

سیستم نیروهای هم ارز :

۵۷) $\sum F = \sum F'$ و $\sum M_O = \sum M_O'$

۵۸) $\sum F_x = \sum F_x' \qquad \sum F_y = \sum F_y' \qquad \sum F_z = \sum F_z'$

$\sum M_x = \sum M_x' \qquad \sum M_y = \sum M_y' \qquad \sum M_z = \sum M_z'$

تبدیل ساده تر سیستم نیروها : ۱) نیروهای هم صفحه :

۵۹) $R_x = \sum F_x \qquad R_y = \sum F_y \qquad M_z^R = M_O^R = \sum M_O$

اگر مختصات نقطه اثر برایند را با x و y نشان دهیم $\Rightarrow xR_y - yR_x = M_O^R$

۲) نیروهای موازی : در عمل، سیستم نیرو-کوپل با بردارهای متقابل عمود مشخص می شود :

۶۰) $R_y = \sum F_y \qquad M_x^R = \sum M_x \qquad M_z^R = \sum M_z$

این سیستم را می توان به تک نیرو تبدیل کرد. برای این منظور، R را به نقطه اثر جدید A(x, 0, z) انتقال می دهیم به طوری که لنگر R نسبت به O با M_O^R برابر شود.

$r \times R = M_O^R \Rightarrow (xi + zk) \times R_y j = M_x^R i + M_z^R k$

معادلات مختصات A : $\boxed{xR_y = M_z^R}$ $\boxed{-zR_y = M_x^R}$ طبق این معادله ها، لنگرهای R نسبت به محورهای x و z به ترتیب با M_x^R و M_z^R برابرند.

استاتیک

فرمولهای فصل چهارم

تعادل اجسام صلب : شرایط لازم و کافی برای تعادل جسم صلب عبارتست از :

1) $\sum F = 0$, $\sum M_O = \sum (r \times F) = 0$

با تجزیه هر یک از نیروها و لنگرها به مؤلفه های قائم، شش معادله اسکالر زیر بدست می آید :

شش معادله تعادل :

2) $\sum F_x = 0$ $\sum F_y = 0$ $\sum F_z = 0$

3) $\sum M_x = 0$ $\sum M_y = 0$ $\sum M_z = 0$

تعادل جسم صلب در دو بعد :

4) $\sum F_x = 0$ $\sum F_y = 0$ $\sum M_O = 0$

شش معادله تعادل برای سازه دو بعدی :

5) $\sum F_x = 0$ $\sum F_y = 0$ $\sum M_A = 0$

سایر معادله های تعادل :

6) $\sum F_x = 0$ $\sum M_A = 0$ $\sum M_B = 0$

7) $\sum M_A = 0$ $\sum M_B = 0$ $\sum M_C = 0$ $\Rightarrow$ که در آن نقاط A و B و C روی یک خط راست قرار ندارند.

مرکز ثقل جسم دوبعدی :

$\Sigma F_z:\quad W=\Delta W_1+\Delta W_2+\dots+\Delta W_n$

$$1)\ \begin{cases}\Sigma M_y: & \bar{x}W=x_1\Delta W_1+x_2\Delta W_2+\dots+x_n\Delta W_n\\ \Sigma M_x: & \bar{y}W=y_1\Delta W_1+y_2\Delta W_2+\dots+y_n\Delta W_n\end{cases}$$

وزن و مختصات $\bar{x}$ و $\bar{y}$ مرکز ثقل G یک ورق نازک : $2)\ W=\int dW \quad , \quad \bar{x}W=\int x\,dW \quad , \quad \bar{y}W=\int y\,dW$

نکته : مرکز ثقل G یک سیم معمولاً روی سیم قرار ندارد.

مرکز وار سطوح و خطوط :

مقدار وزن هر جزء ورق نازک همگن با ضخامت یکنواخت $\Leftarrow \Delta W=\gamma t\Delta A \Rightarrow$
$\gamma =$ وزن مخصوص ورق (وزن حجم واحد)
$t =$ ضخامت ورق
$\Delta A =$ مساحت جزئی

که در آن A مساحت کل ورق است. $\Rightarrow$ $W=\gamma t A \Leftarrow$ مقدار وزن تمام ورق

$\Sigma M_y:\quad \bar{x}A=x_1\Delta A_1+x_2\Delta A_2+\dots+x_n\Delta A_n$

$\Sigma M_x:\quad \bar{y}A=y_1\Delta A_1+y_2\Delta A_2+\dots+y_n\Delta A_n$

مختصات نقطه مرکزوار C مساحت A ورق $\Leftarrow$ $3)\ \bar{x}A=\int x\,dA \qquad \bar{y}A=\int y\,dA$

مقدار وزن هر جزء سیم همگن با مقطع عرضی یکنواخت $\Leftarrow \Delta W=\gamma a\Delta L \Rightarrow$ که در آن
$\gamma =$ وزن مخصوص سیم
$a =$ مساحت مقطع عرضی سیم
$\Delta L =$ طول جزئی

مختصات $\bar{x}$ و $\bar{y}$ مرکزوار منحنی L (مرکز ثقل سیم) $\Leftarrow$ $4)\ \bar{x}L=\int x\,dL \quad , \quad \bar{y}L=\int y\,dL$

ممان های اول سطوح و خطوط :

$5)$
$Q_y=\int x\,dA$ ممان اول سطح A نسبت به محور y
$Q_x=\int y\,dA$ ممان اول سطح A نسبت به محور x

$\Rightarrow 6)\ Q_y=\bar{x}A \quad , \quad Q_x=\bar{y}A$

ورق ها و سیم های مرکب :

مختصات $\bar{X}$ و $\bar{Y}$ مرکز ثقل ورق مرکب $\Leftarrow$ $7)\ \bar{X}\Sigma W=\Sigma\bar{x}W \quad , \quad \bar{Y}\Sigma W=\Sigma\bar{y}W$

ممان های اول سطح مرکب و نیز مختصات $\bar{X}$ و $\bar{Y}$ مرکزوار $\Leftarrow$ $8)\ Q_y=\bar{X}\Sigma A=\Sigma\bar{x}A \quad , \quad Q_x=\bar{Y}\Sigma A=\Sigma\bar{y}A$

تعیین مرکزوار با انتگرال گیری :

$9)\ Q_y=\bar{x}A=\int \bar{x}_{el}\,dA \quad , \quad Q_x=\bar{y}A=\int \bar{y}_{el}\,dA$

قضایای پاپوس - گولدینوس :

قضیه I . مساحت یک سطح دوار برابر است با طول منحنی مولد، ضرب در فاصله‌ای که مرکز وار منحنی ضمن ایجاد این سطح طی می‌کند.

۱۰) $A = 2\pi \bar{y} L$ مساحت یک سطح دوار

قضیه II . حجم یک جسم دوار برابر است با مساحت مولد، ضرب در فاصله‌ای که مرکز وار سطح در ضمن ایجاد جسم طی می‌کند.

۱۱) $V = 2\pi \bar{y} A$ حجم یک جسم دوار

بارهای توزیعی وارد بر تیرها :

$W=\int_0^L w\,dx \Rightarrow W=\int dA = A \Rightarrow (OP)W=\int x\,dW$ و چون: $W=A$, $dW = w\,dx = dA \Rightarrow$

۱۲) $(OP)A=\int_0^L x\,dA$ ممان اول سطح زیر منحنی بار نسبت به محور w

نیروهای وارد بر سطوح غوطه‌ور :

۱۳) $w = bp = b\gamma h$ که در آن $\Rightarrow$

$p=$ فشار پیمانه‌ای مایع

$b=$ عرض صفحه

$\gamma=$ وزن مخصوص مایع

$h=$ فاصله عمودی از سطح آزاد

$w=$ بار در طول واحد

$p=\gamma h$

حجم‌ها :

مرکز ثقل جسم سه بعدی ، مرکز وار حجم :

۱۴)
$$\begin{cases} \Sigma F: & -W\mathbf{j} = \Sigma(-\Delta W\mathbf{j}) \\ \Sigma M_O: & \bar{\mathbf{r}}\times(-W\mathbf{j}) = \Sigma[\mathbf{r}\times(-W\mathbf{j})] \end{cases}$$

۱۵) $\bar{\mathbf{r}}W\times(-\mathbf{j}) = (\Sigma \mathbf{r}\Delta W)\times(-\mathbf{j}) \Rightarrow W=\Sigma\Delta W$, $\bar{\mathbf{r}}W=\Sigma \mathbf{r}\Delta W$

با افزایش تعداد اجزا و کاهش اندازه هر جزء داریم $\Rightarrow$ ۱۶) $W=\int dW$, $\bar{\mathbf{r}}W=\int \mathbf{r}\,dW$

با تجزیه بردارهای $\bar{\mathbf{r}}$ و $\mathbf{r}$ به مؤلفه های قائم سه معادله اسکالر بدست می‌آید $\Rightarrow$ ۱۷) $\bar{x}W=\int x\,dW$, $\bar{y}W=\int y\,dW$, $\bar{z}W=\int z\,dW$

$dW=\gamma\,dV \Rightarrow W=\gamma V \Rightarrow$ ۱۸) $\bar{\mathbf{r}}V=\int \mathbf{r}\,dV$

۱۹) $\bar{x}V=\int x\,dV$, $\bar{y}V=\int y\,dV$, $\bar{z}V=\int z\,dV$

مرکز ثقل جسم مرکب :

۲۰) $\bar{X}\Sigma W=\Sigma\bar{x}W$, $\bar{Y}\Sigma W=\Sigma\bar{y}W$, $\bar{Z}\Sigma W=\Sigma\bar{z}W$

اگر جسم از ماده همگن باشد، مرکز ثقل بر مرکز وار حجم منطبق است.

۲۱) $\bar{X}\Sigma V=\Sigma\bar{x}V$, $\bar{Y}\Sigma V=\Sigma\bar{y}V$, $\bar{Z}\Sigma V=\Sigma\bar{z}V$

تعیین مرکز وار حجم با انتگرال گیری :

۲۲) $\bar{x}V=\int x\,dV$, $\bar{y}V=\int y\,dV$, $\bar{z}V=\int z\,dV$

۲۳) $\bar{x}V=\int \bar{x}_{el}\,dV$, $\bar{y}V=\int \bar{y}_{el}\,dV$, $\bar{z}V=\int \bar{z}_{el}\,dV$

اگر حجم تحت بررسی دارای دو صفحه تقارن باشد، مرکز وار آن روی فصل مشترک این دو صفحه است. $\bar{y}=\bar{z}=0$

۲۴) $\bar{x}V=\int \bar{x}_{el}\,dV$

روابط بین بار و برش : مجموع مؤلفه‌های قائم نیروهای وارد بر جسم آزاد CC' را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$V-(V+\Delta V)-w\Delta x=0 \qquad \Delta V=-w\Delta x \quad \Rightarrow \quad 1)\ \frac{dV}{dx}=-w$$

$$2)\ V_D-V_C=-\int_{x_C}^{x_D} w\,dx$$

$$2')\ V_D-V_C=-(\text{مساحت زیر منحنی بار بین } C \text{ و } D)$$

روابط بین برش و لنگر خمشی :

$$(M+\Delta M)-M-V\Delta x+w\Delta x\frac{\Delta x}{2}=0 \quad \Rightarrow \quad \Delta M=V\Delta x-\frac{1}{2}w(\Delta x)^2$$

$$3)\ \frac{dM}{dx}=V \quad \Rightarrow$$

نشان می‌دهد که شیب dM/dx منحنی لنگر خمشی با مقدار برش برابر است.

$$4)\ M_D-M_C=\int_{x_C}^{x_D} V\,dx$$

$$4')\ M_D-M_C=\text{مساحت زیر منحنی برش بین } C \text{ و } D$$

وقتی برش مثبت است، مساحت زیر منحنی برش را باید مثبت در نظر گرفت و وقتی برش منفی است، مساحت زیر منحنی برش را باید منفی در نظر گرفت. فرمولهای ۴ و ۴' حتی در صورت وجود بارهای متمرکز بین C و D نیز صحت دارند، ولی با اعمال کوپل بین نقاط C و D صحت نخواهند داشت زیرا در این فرمولها تغییر ناگهانی لنگر خمشی، که ناشی از کوپل وارده است، در نظر گرفته نشده است.

تعیین ممان دوم سطح با انتگرال گیری :

۱) $I_x = \int y^2 dA$ $I_y = \int x^2 dA$

ممان دوم مستطیل : (مهم)

$dA = b\,dy$ $dI_x = y^2 b\,dy \Rightarrow$ ۲) $I_x = \int_0^h b y^2 dy = \frac{1}{3} b h^3$

ممان اینرسی قطبی : یکی از انتگرال های مهم در مسائل پیچش شفت های استوانه‌ای و در مسائل چرخش تیغه‌ها عبارت است از :

ممان اینرسی قطبی سطح A نسبت به قطب O   فاصله بین O و جزء سطح $r = dA$ که در آن

۳) $J_O = \int r^2 dA$

از ممان های دوم قائم I_x و I_y یک سطح، ممان اینرسی قطبی آن را می‌توان به دست آورد :

$r^2 = x^2 + y^2$

$J_O = \int r^2 dA = \int (x^2 + y^2) dA = \int y^2 dA + \int x^2 dA \Rightarrow$ ۴) $J_O = I_x + I_y$

شعاع ژیراسیون سطح :

$I_x = k_x^2 A \Rightarrow$ ۵) $k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$ شعاع ژیراسیون

$I_y = k_y^2 A \Rightarrow$ ۶) $k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$, $J_O = k_O^2 A \Rightarrow$ ۷) $k_O = \sqrt{\frac{J_O}{A}}$

۸) $k_O^2 = k_x^2 + k_y^2$

قضیه محورهای موازی : ممان دوم I یک سطح نسبت به محور داده شده AA' برابر است با ممان دوم $\bar{I}$ این سطح نسبت به محور مرکزی BB' (که موازی AA' است) به علاوه حاصل ضرب مساحت A در مجذور فاصله d بین این دو محور.

۹) $I = \bar{I} + A d^2$

۱۰) $k^2 = \bar{k}^2 + d^2$ ۱۱) $J_O = \bar{J}_C + A d^2$ یا $k_O^2 = \bar{k}_C^2 + d^2$

حاصل ضرب اینرسی :

۱۲) $I_{xy} = \int x y\, dA$ حاصل ضرب اینرسی مساحت A نسبت به محورهای x و y

۱۳) $I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + \bar{x}\bar{y} A$ نشان دهنده مساحت کل A است.

محورهای اصلی و ممان های اینرسی اصلی :

۱۴) $I_x = \int y^2 dA \qquad I_y = \int x^2 dA \qquad I_{xy} = \int xy\, dA$

۱۵) $I_{x'} = I_x \cos^2\theta - 2 I_{xy} \sin\theta \cos\theta + I_y \sin^2\theta$

۱۶) $I_{y'} = I_x \sin^2\theta + 2 I_{xy} \sin\theta \cos\theta + I_y \cos^2\theta$

۱۷) $I_{x'y'} = (I_x - I_y)\sin\theta\cos\theta + I_{xy}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$

با توجه به روابط مثلثاتی که از قبل می دانیم :

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta \quad , \quad \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$\cos^2\theta = \dfrac{1+\cos 2\theta}{2} \quad , \quad \sin^2\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$

۱۸) $I_{x'} = \dfrac{I_x + I_y}{2} + \dfrac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta - I_{xy}\sin 2\theta$

۱۹) $I_{y'} = \dfrac{I_x + I_y}{2} - \dfrac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta + I_{xy}\sin 2\theta$

$\Rightarrow$ ۲۱) $I_{x'} + I_{y'} = I_x + I_y$

۲۰) $I_{x'y'} = \dfrac{I_x - I_y}{2}\sin 2\theta + I_{xy}\cos 2\theta$

۲۲) $\left(I_{x'} - \dfrac{I_x + I_y}{2}\right)^2 + I_{x'y'}^2 = \left(\dfrac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2$

۲۳) $I_{ave} = \dfrac{I_x + I_y}{2} \quad , \quad R = \sqrt{\left(\dfrac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$

۲۴) $(I_{x'} - I_{ave})^2 + I_{x'y'}^2 = R^2$

۲۵) $\tan 2\theta_m = -\dfrac{2 I_{xy}}{I_x - I_y}$

۲۶) $I_{max} = I_{ave} + R \quad : \quad I_{min} = I_{ave} - R$

۲۷) $I_{max,min} = \dfrac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$