جزوه آمار و احتمال (۱)
مهندسی
خانم پهلوان ۲

اسفند ۱۳۹۳

2014-15
۱۴۳۵-۳۶
February . March
جمادی الاولی

۵- ولادت حضرت زینب (س) و روز پرستار - روز بزرگداشت خواجه نصیر الدین طوسی - روز مهندسی . ۹- روز ملی حمایت از حقوق مصرف کنندگان . ۱۳- شهادت حضرت فاطمه زهرا (س) به روایتی . ۱۴- روز احسان و نیکو کاری . ۱۵- روز درخت کاری . ۱۸- روز بزرگداشت سید جمال الدین اسد آبادی . ۲۲- روز بزرگداشت شهدا (سالروز صدور فرمان حضرت امام خمینی (ره) مبنی بر تاسیس بنیاد شهید انقلاب اسلامی) . ۲۵- روز بزرگداشت پروین اعتصامی - بمباران شیمیایی حلبچه توسط ارتش بعث عراق . ۲۹- روز ملی شدن صنعت نفت ایران (تعطیل)

جمعه	۱	20
شنبه	۲	21
یکشنبه	۳	22
دوشنبه	۴	23
سه شنبه	۵	24
چهارشنبه	۶	25
پنج شنبه	۷	26
جمعه	۸	27
شنبه	۹	28
یکشنبه	۱۰	1
دوشنبه	۱۱	2
سه شنبه	۱۲	3
چهارشنبه	۱۳	4
پنج شنبه	۱۴	5
جمعه	۱۵	6
شنبه	۱۶	7
یکشنبه	۱۷	8
دوشنبه	۱۸	9
سه شنبه	۱۹	10
چهارشنبه	۲۰	11
پنج شنبه	۲۱	12
جمعه	۲۲	13
شنبه	۲۳	14
یکشنبه	۲۴	15
دوشنبه	۲۵	16
سه شنبه	۲۶	17
چهارشنبه	۲۷	18
پنج شنبه	۲۸	19
جمعه	۲۹	20

سه شنبه ۱۳ آذر تا آخر فصل ۴

■ یادداشت —/—/—

اصل سیماس: (اصل ضرب)

مثال: یک جامعه که شامل ۱۰ مادر که هر کدام ۳ فرزند دارند. اگر بخواهیم یکی از مادران را به عنوان مادر نمونه و یکی از فرزندانش را به عنوان فرزند نمونه انتخاب کنیم به چند طریق این روش ممکن است: ۳۰ = ۳ × ۱۰ حالت

تعمیم اصل ضرب:

آزمایش اول به n_1 طریق

دوم به n_2 طریق — آزمایش را با هم انجام دهیم این مرحله به $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_r$

r ام به n_r طریق — طریق ممکن است:

سه شنبه ۱۳ آذر می دهم
چهار فصل

چند عدد ۶ رقمی بین ۱۰۰۰۰۰ و ۱۰۰۰۰۰۰ وجود دارد به صورتی که ارقام متوالی یکی نباشد

$100000,\ 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 = 9^6\ 1000000$

هر کدام از اعداد اول را به حرف کنیم

۱ - ۲ - ۳ - ۴ - ۵ - ۶ - ۷ - ۸ - ۹

۹ عدد باقی می‌ماند که نتوان در جای خالی قرار داد.

با ارقام صفر، ۱، ۲، ۳ و ۴ چند عدد زوج سه رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان ساخت؟

۰ - ۱، ۲، ۳، ۴ حالت اول فقط یکان صفر باشد $4 \times 3 \times 1 = 12$

~~۰~~ - ۱، ~~۲~~، ۳، ۴ $\quad 3 \times 3 \times 2 = 18 \quad 18 + 12 = 30$

مثال: ۰ تا ۹ چند عدد سه رقمی بزرگتر از ۴۱۰ می‌توان نوشت (بدون تکرار)

$1 \times 8 \times 8 = 64$ ← ۴۱۰ تا ۴۹۹

۵ تا ۹

از ۴۱۰ به بعد ← بالای ۵۰۰ $5 \times 9 \times 8$

$64 + 5 \times 9 \times 8 = 424$ کل حالات.

۴) جایگشت (ترتیب) به تعداد چینش‌ها و یا طرقی که می‌توان n شیء یا n فرد متفاوت را کنار هم قرار داد جایگشت یا ترتیب گویند.

مثال: به چند طریق می‌توان ۵ دختر و ۵ پسر را در یک ردیف کنار هم قرار داد به طوری که الف) دخترها کنار هم و پسرها کنار هم بنشینند ب) تعداد دخترها کنار هم

کنار هم ننشینند ج) دختر و پسرها یک در میان کنار هم بنشینند؟

الف) $5! \times 5! \times 2$ $\quad$ ب) $5! \times 6!$ $\quad$ پ | د | پ | د | پ | د | پ | د | پ | د

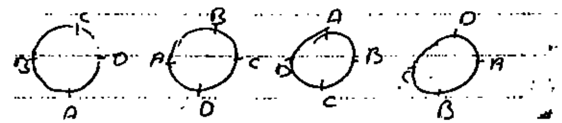
امکان دارد اول دختر یا پسر باشد $2 \times 5! \times 5!$ یا $1 \times 1 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 4 \times 4 \times 5 \times 5$ ج)

با حروف ABC چند کلمه سه حرفی می‌توان ساخت؟ $3!$

با حروف a, a, c چند کلمه می‌توان ساخت؟ $\frac{3!}{2!} = \frac{2! \times 3}{2!} = 3$

با حروف ۲ تا a و ۲ تا b چند کلمه چهار حرفی می‌توان نوشت؟ $\frac{4!}{2! \times 2!} \rightarrow \frac{4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2!} = \frac{12}{2} = 6$

نکته: تعداد طرقی که می‌توان n نفر را دور یک میز نشاند ⇐ $(n-1)!$



تعداد حالت‌ها یکی است
ملاک فقط n

$(n-1)! = \frac{n!}{n} = \frac{n \times (n-1)!}{n} = (n-1)!$

۵) انتخاب با ترتیب عناصر (جایگشت r تایی از n شیء متمایز)

$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$

مثال: به چند طریق می‌توان از بین ۱۰ نفر ۳ نفر را به عنوان مدیر، معاون اول و معاون دوم انتخاب کرد؟

$10 \times 9 \times 8 = 720$

$8\times9\times10$

$\frac{10!}{(10-3)!}=\frac{7!\ \cdots}{7!}=720$

④ ترکیب: هرگاه فرض کنید n شیء متمایز داریم تعداد طرقی که می‌توان r شیء را از این n شیء را انتخاب نمود ترکیب r از n گویند و با علامت C نمایش داده می‌شود.

$C\binom{n}{r}=\frac{n!}{(n-r)!\,r!}$

مثال: از بین یک شورا شامل هفت مرد و پنج زن باشد به چند طریق می‌توان یک کمیته سه نفره از بین آنها انتخاب نمود؟

$7+5=12 \quad C\binom{12}{3}=\frac{12!}{3!\,9!}=\frac{9!\times10\times11\times12}{9!\times1\times2\times3}=220$

ب: به چند طریق می‌توان یک کمیته پنج نفره شامل دو مرد و سه زن انتخاب کرد.

$C\binom{7}{2}\times C\binom{5}{3}=\frac{7!}{2!\times5!}\times\frac{5!}{3!\times2!}$

مجموعه‌ای با $m+n$ شیء در نظر بگیرید. n تعداد اشیاء معیوب و m تعداد سالم

اشیاء معیوب و سالم هر دو متمایزند. به چند طریق می‌توان آنها را کنار هم قرار داد

به طوری که هیچ دو شیء معیوبی کنار هم نباشد.

$C\binom{m+1}{n}=\frac{(m+1)!}{n!\,(m+1-n)!}$

مثال با حروف aaa bb cc چند رشته هفت حرفی

چند رشته می‌توان ساخت که دو حرف a هیچ‌گاه کنار هم نباشند؟

$\_\,b\,\_\,b\,\_\,c\,\_\,c\,\_$

برخی روابط مهم در ترکیبات:

$\frac{4!}{2!\times2!}\binom{5}{3}$

① $C\binom{n}{r}=C\binom{n}{n-r} \quad 0\le r\le n$

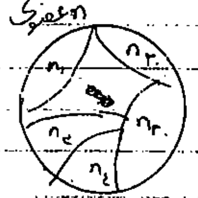
② $C\binom{n}{r}=C\binom{n-1}{r-1}+C\binom{n-1}{r} \quad 1\le r\le n$

قضیه ضرایب دو جمله‌ای:

③ $(x+y)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i y^{n-i}$

④ $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}=2^n$ تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی $\sum_{i=0}^{5}\binom{5}{i}=\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5}$

ب: ~~...~~ افراز: تعداد روش‌های n شیء متمایز در r ظرف متفاوت به شرط آنکه در ظرف اول n_1 شیء، در ظرف دوم n_2 شیء ... در ظرف r‌ام n_r شیء متمایز



$n_1+n_2+n_3+\dots+n_r$

$\sum_{i=1}^{r} n_i=n$

$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-n_1-n_2-\dots-n_{r-1}}{n_r}$

$$\frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \times \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \cdots = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

مثال: به چند طریق می‌توان هفت نفر را در سه اتاق با شماره‌های ۳ و ۲ و ۱ تقسیم نمود به طوری که در اتاق اول ۳ نفر در اتاق دوم ۲ نفر و در اتاق سوم ۲ نفر بماند؟

$1 \to 3$

$2 \to 2$

$3 \to 2$

$$C\binom{7}{3,2,2} = \frac{7!}{3!2!2!} \qquad \binom{n}{n_1,n_2,\dots,n_r} = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}$$

~~قرار دادن n شیء متفاوت~~

ب: زمانی که هیچ محدودیتی در قرار دادن افراد در اتاق‌ها نباشد $3\times3\times3\times3\times\cdots 3 = 3^7$

① تعداد عناصر هر زیرمجموعه مشخص باشد: $\binom{n}{n_1,n_2,\dots,n_r} = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}$

② هیچ محدودیتی در تعداد عناصر هر زیرمجموعه نداشته باشیم: r^n

ج- قرار دادن n شیء یکسان در r ظرف متفاوت

مثال: تعداد جواب‌های صحیح نامنفی معادله زیر را بیابید؟

$x_1+x_2+x_3=7$

$x_1=0,\ x_2=3,\ x_3=4$

$$\binom{9}{2} = \binom{n+r-1}{r-1} =$$

n شیء، r-1

به چند طریق می‌توان ۱۱ پرتقال سالم را بین ۴ پسر بچه تقسیم نمود؟

$$\binom{11+4-1}{4-1} = \binom{14}{3}$$

در بسط $(x_1+x_2+x_3+x_4)^4$ ضریب x_1 و x_3^2 و x_4 چند است؟

$$(x_1+x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$$

مجموع توان‌ها باید ۴ باشد

$$(x_1+x_2+x_3+x_4)^4 = \begin{cases} x_1^4 \quad x_2^4 \\ \vdots \\ x_1x_2x_3x_4 \end{cases}$$

برای حالت دوم ۲ تا انتخاب

$$(x_1+x_2+x_3+x_4)(x_1+x_2+x_3+x_4)(x_1+x_2+x_3+x_4)(x_1+x_2+x_3+x_4)$$

حالت اول: ۱ انتخاب از ۴ انتخاب، حالت سوم: ۱ انتخاب

حالت دوم: ۲ انتخاب از ۳ حالت، از انتخاب

$$\binom{4}{1}\binom{3}{2}\binom{1}{1} = \frac{4!}{1!2!1!}$$

در بسط $(x_1+2x_2+3x_3+x_4)^4$ ضریب x_1 و x_3^2 و x_4 چند است

حل: جواب بالا ... چون ضریب x_3، ۳ است به توان ۲ $\Rightarrow \frac{4!}{1!2!1!} \times 3^2$

اصول فضای نمونه، آزمایش تصادفی: پیشامد

آزمایش تصادفی: آزمایشی که نتیجه آن از قبل معلوم نباشد ولی همه نتایج ممکن آن معلوم باشد.

فضای نمونه: مجموعه کل نتایج ممکن یک آزمایش تصادفی را فضای نمونه می‌نامیم و آن را با حرف S نشان می‌دهند.

شیء مدی ... هر ... یک پیشامد می‌گوییم $S=\{H, T\}$

فضای نمونه

$S=\{1,2,3,4,5,6\}$ زیرمجموعه از فضای نمونه — پیشامد

در پرتاب دو تاس فضای نمونه را (اعضای فضای نمونه را) مشخص کنید.

$6\times 6=36$

$$S=\begin{Bmatrix}(1,1),(1,2),(1,3)\ldots(1,6)\\(2,1),(2,2),(2,3)\ldots(2,6)\\ \vdots\\(6,1),(6,2),(6,3)\ldots(6,6)\end{Bmatrix}$$

مثال: در دو تاس ... مجموع اعداد روی تاس‌ها ۴ شود. تعداد اعضای پیشامد چندتاست؟

$S=\{(1,3),(2,2),(3,1)\}$ متمم یک پیشامد

اگر E و F ، $(E\cap F)$ اشتراک ، $(E\cup F)$ اجتماع

$(E\cap E^c)=\emptyset$ $\quad (E\cup E^c)=S$

جبر مجموعه‌ها:

① قانون جابه‌جایی
$E\cup F=F\cup E$
$E\cap F=F\cap E$

② قانون ... پذیری
$E\cup(F\cap G)=(E\cup F)\cap(E\cup G)$
$E\cap(F\cup G)=(E\cap F)\cup[E\cap G)$

③ قانون توزیع‌پذیری یا قانون پخش: $(E\cap F)\cup G=(E\cup G)\cap(\underset{F\cup G}{\cancel{\ }})$

④ قانون دمورگان:
$(E\cap F)^c=E^c\cup F^c$
$(E\cup F)^c=E^c\cap F^c$
$(E_1\cap E_2\cap E_3\cdots\cap E_n)^c=E_1^c\cup E_2^c\cdots\cup E_n^c$

احتمال = تابعی است که به هر عضو یا پیشامد از فضای نمونه عددی در بازه [۰،۱] نسبت می‌دهد.

$S=\{1,2,3,4,5,6\}$ $\quad A=\{2,4,6\}$ $\quad P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=0<\bigcirc<1$

$P(S)=1$ اصل ۱ $\quad 0\le P(A)\le 1$ اصل ۲

مثال: اگر سکه‌ای را پرتاب کنیم و فرض کنیم نتیجه شیر و خط هم شانس باشد، احتمالات زیر برابر است.

$P(\{H\})=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{1}{2}$

$S=\{H,T\}$ $\quad P(\{H\})+P(\{T\})=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=1=P(S)$

حال فرض کنیم به دلیل ... بودن سکه شانس آمدن شیر دو برابر خط باشد احتمال آن را حساب کنید.

$P(\{H\})=2P(\{T\})\Rightarrow x+2x=1$ احتمال خط آمدن ، احتمال شیر آمدن

$3x=1$ $\quad x=\frac{1}{3}$ احتمال خط آمدن $\quad 1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

$P(S)=1\Rightarrow P(\{H\})=\frac{2}{3}$ احتمال شیر آمدن

چند احتمال خاص:

$P(E^c) = 1 - P(E)$

$P(E^c) + P(E) = 1$

اگر $E \subset F \Rightarrow P(E) \leq P(F)$

$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$

فرض کنید شخصی با وجود یک مغازه کتاب فروشی کتاب E را با احتمال ۰/۸ و کتاب F را با احتمال ۰/۴ و هر دو کتاب را با احتمال ۰/۳ خریداری می کند مطلوب است احتمال اینکه این شخص یکی از این دو کتاب را بخرد.

$P(E) = 0/8$

$P(F) = 0/4$

$P(E \cap F) = 0/3$

$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F) = 0/8 + 0/4 - 0/3 = 0/9$

$1/2 - 0/3 = 0/9$

اگر دو تاس را پرتاب کنیم احتمال اینکه ۵ ظاهر شود چقدر است:

مجموع اعداد دو تاس

A

مجموع اعداد روی دو تاس ۵ شود. $\begin{cases} (1,4)\ (2,3) \\ (4,1)\ (3,2) \end{cases}$ $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{36}$

مستقل

اگر دو پیشامد ناسازگار باشند

$A \cap B = \emptyset$

مستقل

پیشامد ناسازگار

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$P(A \cap B) = \emptyset$ در ناسازگار

پیشامد مستقل

روز

اگر امروز ۰/۹ باران ببارد و ابر فردا ۰/۸ باران ببارد احتمال اینکه هر دو روز باران ببارد

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0/8 \times 0/9 = 0/72$

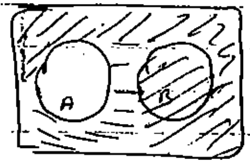
✓ × مثال: اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند کدام پیشامد صحیح است!

$P(A)$

الف: $P(A - B) = P(B)$

ب: $P(B - A^c) = 0$ ✓

ج: $P(B - A^c) = P(B)$



متمم A = هر جا به غیر از خود A

د: $P(A - B^c) = P(A \cap B^c)$

سه عدد صحیح به صورت تصادفی از بین اعداد ۱ تا ۲۰ انتخاب می کنیم احتمال اینکه حاصلضرب آن ها زوج شود چقدر است:

مجموع حالات ممکن

P (حاصلضرب زوج شود) $= 1 - P$ (همه اعداد انتخاب شده فرد باشند)

$P(A) = 1 - \frac{\binom{10}{3}}{\binom{20}{3}}$

۲۰ کل اعداد

۱۰ فرد

۱۰ زوج

مثال: در جعبه ای ۵ مهره سالم و ۳ مهره خراب وجود دارد اگر مهره ها را یکی یکی خارج کنیم احتمال اینکه آخرین مهره خراب در انتخاب چهارم بیرون بیاید چقدر است؟

۴

کل

مهره خراب

$n(A) = \binom{3}{2} \times 3 \times 2 \times 5$

$\frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{3}{2} \times 3 \times 2 \times 5}{8 \times 7 \times 6 \times 5}$

$n(S) = 8 \times 7 \times 6 \times 5$

$\binom{4}{2} \times 3 \times 2 \times 8$

احتمال شرطی:

$P(E|F) = \frac{P(E\cap F)}{P(F)}$ اتفاق افتاده باشد

مثال: در یک بازی شانسی به هر نفر یک جفت تاس می‌دهند تا انتصادفاً پرتاب کنند. اگر مجموع اعداد حاصل شده عدد اول باشد به او یک جایزه می‌دهند. اگر بدانیم یک شخص در انجام یک بازی جایزه دریافت کرده است احتمال اینکه مجموع اعداد روی تاس‌ها هفت بوده باشد چقدر است؟

F: پیشامد ظاهر شدن مجموع اعداد اول روی تاس

E: پیشامد مجموع اعداد رو شده هفت باشد.

$F = \{(2,5)(5,2)(1,1)(1,4)(4,1)(1,2)(2,1)(1,6)(6,1)(3,4)(4,3)(6,5)(5,6)(2,3)(3,2)\}$

$P(F) = \frac{15}{36}$, $P(E) = \frac{6}{36}$, $\frac{P(E\cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{6}{36}}{\frac{15}{36}} = \frac{6}{15}$

مثال: جعبه I شامل دو مهره سفید و ۴ مهره سیاه است و جعبه II شامل سه مهره سفید و دو مهره سیاه است. یک جعبه به تصادف انتخاب می‌کنیم و دو مهره از این جعبه خارج می‌شود.

الف: احتمال اینکه هر دو مهره سفید باشد چقدر است؟

ب: جعبه II انتخاب شده به شرط اینکه هر دو مهره سفید باشد؟

I	II
۲ سفید	۳ سفید
۴ سیاه	۲ سیاه

$P(E) = P($هر دو مهره سفید و از جعبه I انتخاب شود$) + P($هر دو مهره سفید و جعبه II انتخاب شود$)$

هر دو مهره سفید باشند: $P(E\cap F) + P(E\cap F')$

معادله: $P(E|F) = \frac{P(E\cap F)}{P(F)} \Rightarrow P(E\cap F) = P(F)\times P(E|F)$

$P(E\cap F) = P(E|F)\cdot P(F) + P(E|F')\cdot P(F')$

$\frac{\binom{2}{2}}{\binom{6}{2}} \times \frac{1}{2} + \frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} \times \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{30} + \frac{3}{20} = \frac{2+9}{60} = \frac{11}{60}$

چرا از ۶ تا ۲ انتخاب شود

$P($جعبه II انتخاب شود $|$ هر دو مهره سفید باشد$) = \frac{P(F'\cap E)}{P(E)} = \frac{\frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} \times \frac{1}{2}}{\frac{11}{60}} = \frac{9}{11}$

مثال: دو تاس را باهم می‌اندازیم اگر بدانیم مجموع ۵ شده است احتمال اینکه هر دو عدد اول باشد کدام است؟

$F = \{(1,4)(4,1)(2,3)(3,2)\}$ عوامل

$P(E|F) = \frac{P(E\cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{4}{36}} = \frac{1}{2}$

هر دو عدد اول باشند ، مجموع ۵

اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند و پیشامد $(A\cup B)$ = ۰/۴ باشد و $P(A)$ = ۰/۲ باشد مقدار $P(B)$ چقدر است؟

$P(A\cup B) = 0.4 \qquad P(A) = 0.2 \qquad P(B) = ?$

$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B) \Rightarrow P(A\cup B) = P(A) + P(B) - \underbrace{P(A\cap B)}_{P(A)\cdot P(B)}$

$\Rightarrow 0.4 = 0.2 + P(B) - 0.2\times P(B)$

$0.4 - 0.2 = P(B)(1-0.2) \Rightarrow P(B) = \frac{0.2}{0.8} = \frac{1}{4} = 0.25$

$P(B') = 1 - P(B) = 1 - 0.25 = 0.75$

فصل سوم:

توزیع احتمالی:

۱- متغیر تصادفی: اگر S یک فضای نمونه و X یک تابع حقیقی باشد روی عناصر S تعریف شود و به هر عضوی یک عدد حقیقی را اختصاص دهد آنگاه X را یک متغیر تصادفی می‌نامند

انواع متغیرهای تصادفی: ۱- متغیر تصادفی گسسته (پرتاب تاس) ۲- متغیر تصادفی پیوسته (زمان رسیدن اتوبوس به ایستگاه)

تابع احتمالی که روی متغیر تصادفی گسسته تعریف می‌شود را توزیع احتمالی می‌نویسیم $P(X)$

تابع احتمالی که روی متغیر تصادفی پیوسته تعریف می‌شود را چگالی احتمالی می‌نویسیم $f(x)$

مثال: ظرفی شامل ۳ توپ سفید ۳ توپ قرمز و ۵ توپ سیاه است فرض کنید شما ۳ توپ را از این ظرف انتخاب می‌کنید و برای هر توپ سیاه ۱ دلار جایزه می‌گیرید اگر متغیر تصادفی X نشان دهنده مبلغ جایزه شما باشد مقادیر مختلف آن و احتمال

$X = \{0, 1, 2, 3\}$ هرکدام را به دست آورید؟

$P(X=0) = \frac{\binom{6}{3}}{\binom{11}{3}} \qquad P(X=1) = \frac{\binom{5}{1}\times\binom{6}{2}}{\binom{11}{3}} \qquad P(X=2) = \frac{\binom{5}{2}\binom{6}{1}}{\binom{11}{3}}$

$P(X=3) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{11}{3}}$

برای حل مسائل مربوط به متغیرهای تصادفی باید گام‌های زیر را طی کرد:

۱- تعیین فضای نمونه ۲- تعریف متغیر تصادفی ۳- تعیین مقادیر مربوط به متغیرهای تصادفی

۴- محاسبه احتمال هر یک از مقادیر ... بررسی کنید مجموع احتمال‌ها ۱ می‌شود یا نه

$1-\ 0 \le P(x) \le 1 \qquad 2-\ \sum P(x_i) = 1 \qquad 3-\ P(X \le a) = \sum_{i=0}^{a} P(X=i)$

$4-\ P(X \ge a) = 1 - P(X < a)$

تابع توزیع تجمعی = تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی

X در نقطه a برابر است با احتمال اینکه متغیر تصادفی x مقداری کمتر یا مساوی مقدار a بگیرد

$F_X(a) = P(X \le a) = \sum_{i=0}^{a} P(X=i)$

$X = \{0, 1, 2, 3\} \quad F_X(3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = 1$

$F_X(2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$

۲- فرض کنید متغیر تصادفی x مقادیر ۱ و ۲ و ۳ را با احتمال‌های $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ بگیرد در این صورت تابع احتمالی و تابع توزیع تجمعی این متغیر تصادفی را به دست آورید

$X=\{1,2,3\}$; $P(X=1)=\frac{1}{4}$, $P(X=2)=\frac{1}{2}$, $P(X=3)=\frac{1}{4}$

$$P(X=i)=\begin{cases}\frac{1}{4} & i=1\\ \frac{1}{2} & i=2\\ \frac{1}{4} & i=3\end{cases}\qquad F_X(i)=\begin{cases}\frac{1}{4} & 1\leq x<2\\ \frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4} & 2\leq x<3\\ \frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=1 & x\geq 3\end{cases}$$

$F_X(1)=P(X=1)=\frac{1}{4}$, $F_X(2)=\underbrace{P(X=2)}_{P(X=1)+}=\frac{3}{4}$

$F_X(3)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=1 \Rightarrow \frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=1$

خواص تابع توزیع تجمعی:

1) $F(+\infty)=1$, $F(-\infty)=0$

2) $F_X(a)\leq F_X(b) \Leftarrow a\leq b$ برای هر دو عدد حقیقی a و b داریم

3) $F_X(b)-F_X(a)=P(a\leq X\leq b)$

تابع توزیع احتمال متغیر تصادفی که در ۴ بار پرتاب یک سکه شیر ظاهر شدن به دست آید را بیابید.

$X=\{0,1,2,3,4\}$

$$P(X)=\begin{cases}\frac{\binom{4}{0}}{2^4}=\frac{1}{16} & x=0\\ \frac{\binom{4}{1}}{2^4}=\frac{4}{16} & x=1\\ \frac{\binom{4}{2}}{2^4}=\frac{6}{16} & \\ \frac{\binom{4}{3}}{2^4}=\frac{4}{16} & x=3\\ \frac{\binom{4}{4}}{2^4}=\frac{1}{16} & x=4\end{cases}$$

$$F_X(i)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{1}{16}+\frac{4}{16}=\frac{5}{16} & 0\leq x<1\\ \frac{5}{16}+\frac{6}{16}=\frac{11}{16} & 2\leq x<3\\ \frac{11}{16}+\frac{4}{16}=\frac{15}{16} & 3\leq x\leq 4\\ \frac{15}{16}+\frac{1}{16}=\frac{16}{16} & x\geq 4\end{cases}$$

۴- تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی X به صورت زیر داده شده است:

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{1}{2} & 0\leq x<1\\ \frac{2}{3} & 1\leq x<2\\ \frac{11}{12} & 2\leq x<3\\ 1 & x\geq 3\end{cases}$$

مطلوب است محاسبه:

الف: $P(X<3)$

ب: $P(X=1)$

ج: $P(2\leq X\leq 4)$

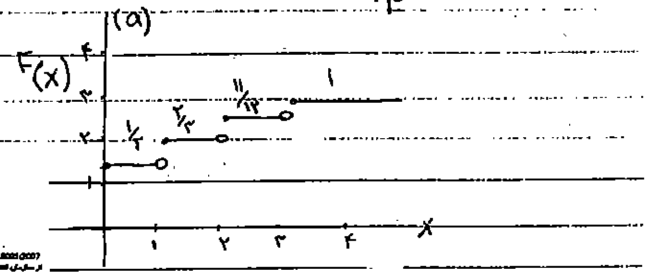
د: $P(2<X\leq 4)$

الف = $\frac{11}{12}$

ب = $\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

ج = $1-\frac{11}{12}$ [illegible]

$> = 1-\frac{2}{3}$



متغیر تصادفی پیوسته: نوعی دیگر از متغیرهای تصادفی وجود دارند که مقادیر آنها غیر قابل شمارش است و یا پیوسته است مانند طول عمر یک لامپ و یا زمان رسیدن یک اتوبوس به ایستگاه ...

خواص تابع چگالی احتمال:

۱. $0 \le f(x) \le 1$ ۲. $P(X \le a) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

۳. $P(a<x<b) = P(a \le x < b) = \int_a^b f(x)\,dx$ ۴. $f(x=a) = 0$

هرگاه تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی x به صورت زیر باشد مطلوبست محاسبه مقدار k؟

$$f(x) = \begin{cases} kxe^{-x^2} & x>0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$$

تابع چگالی — تابع احتمالی است

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \Rightarrow \int_0^{+\infty} kxe^{-x^2}\,dx = 1$$

$e^{-x^2} = u \quad -2xe^{-x^2}dx = du$

$$\Rightarrow \frac{k}{-2}\int_0^{+\infty} -2xe^{-x^2}\,dx = 1 \Rightarrow \frac{-k}{2}\int_0^{\infty} du = \frac{-k}{2} e^{-x^2}\Big|_0^{\infty}$$

$$\left(\frac{k}{2}e^{0}\right) = \frac{k}{2} = 1 \quad \boxed{k=2}$$

س: به چند طریق می‌توان ۵ نفر روی یک صندلی بنشینند که دو نفر خاص آنها کنار هم ننشینند؟

حالت اول: $\Rightarrow 5! - 4! \times 2! = 120 - 24 \times 2 = 72$

دو نفر خاص — چون دو حالت می‌شود در داخل خودشان جابجا شوند

حالت دوم: $3! \times \binom{4}{2} \times 2 \times 1 = 72$

س: در بسط $(2x+3y+4z+w)^9$ ضریب $x^3 y^2 z^3 w$ چند است؟

راهنمایی: اول توان‌ها را با هم جمع می‌کنیم سپس ضریب x و y و z را ضرب در یکدیگر می‌کنیم.

$$\frac{9!}{3!\times 2! \times 3! \times 1} \times (2)^3 \times (3)^2 \times (4)^3 \times 1 = \frac{9! \times 4608}{3! \times 2! \times 3!}$$

س: جواب احتمال زیر را پیدا کنید.

$$\binom{1/2}{4} = \text{فرمول ثابت برای کسری‌ها} \Rightarrow \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} = \frac{(n-r)!(n-r+1)\cdots n}{(n-r)! \times r!} = \frac{(n-r+1)\cdots n}{r!}$$

$$\frac{(\frac12-3)(\frac12-2)(\frac12-1)(\frac12)}{4!} = \frac{-15}{4! \times 16} = \frac{-15}{24 \times 16} = \frac{-15}{384}$$

۴. در ظرفی ۴ مهره سفید و ۳ مهره سیاه وجود دارد. دو مهره متوالی و بدون جایگذاری خارج می‌کنیم احتمال اینکه مهره بار دوم سیاه باشد چند است؟

مهره بار دوم (بار اول سفید و بار دوم سیاه) + (بار اول سیاه و بار دوم سیاه)

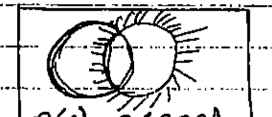
$\frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \quad \frac{3}{7} \times \frac{2}{6}$

$$\frac{12}{42} + \frac{6}{42} = \frac{18}{42} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$$

۱۰. اگر $P(A \cap B) = 0.2$ باشد و $P(A) = 0.5$ و $P(B) = 0.4$، $P(B'|A)$ کدام است؟

$$P(B'|A) = \frac{P(B' \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)}$$

$\frac{0/5-0/2}{0/5} = \frac{0/3}{0/5} = \frac{3}{5} = 0/6$



$P(A) - P(A \cap B)$

اگر تاسی را دوبار پرتاب کنیم و بدانیم مجموع شماره‌ها ۷ است احتمال اینکه شماره تاس اول ۵ یا بیشتر باشد.

مجموع شماره‌ها ۷: $F = \{(1,6)(6,1)(2,5)(5,2)(3,4)(4,3)\} = 6$

احتمال شماره تاس اول: $E = \{(6,1)(5,2)\} = 2$ $\quad P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{6}{36}} = \frac{1}{3}$

ب) $A = \{1,2,4\}$ و $B = \{1,3\}$ مجزا نیست ولی مستقل هستند ✓

شرط مستقل بودن: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$(A \cap B) = \{1\}$ $\quad P(A \cap B) = 1/4$ $\quad P(A) = 3/4$ $\quad P(B) = 2/4$

$P(A) \cdot P(B) = 3/4 \times 2/4 = 1/4$

۳- فرض کنید تابع توزیع متغیر تصادفی X به شکل زیر باشد

آیا این تابع توزیع احتمال هست یا نه؟

X	-1	0	2
$p(x)$	$1/8$	$2/8$	$6/8$

$\frac{1}{8}+\frac{2}{8}+\frac{6}{8} = \frac{9}{8} > 1$ تابع احتمال نیست

شرط تابع احتمال $\sum_x p(x) = 1$

■ یادداشت
ایزوگام کیان گستر دلیجان

۲- فرض کنید X دارای تابع توزیع زیر باشد: الف) $P(X \leq 3)$ ب) $P(X=3)$

ج) $P(X<5)$ د) $P(X \geq 5)$ هـ) $P(X<3)$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x<-1 \\ \frac{1}{4} & -1 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \leq x < 3 \\ \frac{3}{4} & 3 \leq x < 5 \\ 1 & x \geq 5 \end{cases}$$

الف) $F_X(3) = \frac{3}{4}$

ب) $F_X(3) - F_X(2) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{3-2}{4} = \frac{1}{4}$ خودش و قبلش

ج) $F_X(5) = 1$

د) $1 - F_X(5) = 1 - 1 = 0 = 1 - P(X<5)$ مساوی / خودش نمی‌آید

هـ) $\frac{1}{2}$

توزیع‌های چند متغیره = توزیع توأم: اگر دو متغیر تصادفی X و Y روی فضای نمونه S تعریف شوند آنگاه احتمال رخ دادن توأم شماره‌های مربوط به آنها با تابع احتمال توأم x,y به صورت $P(X,Y)$ نمایش داده می‌شود که برابر است با:

$P(X,Y) = P(X=x, Y=y)$ $\quad$ 1) $0 \leq P(X,Y) \leq 1$

2) $\sum_y \sum_x P(x,y) = 1$

۴- فرض کنید سه توپ به تصادف از ظرفی شامل ۳ توپ قرمز ۴ توپ سفید و ۵ توپ آبی انتخاب می‌کنیم. اگر X و Y به ترتیب نشان دهنده توپ‌های قرمز و سفید انتخابی باشد، جدول تابع احتمال توأم X و Y را بدست آورید.

«توزیع توأم ، فرض کنید دو متغیر تصادفی ... روی ...
پیش آمدهای مربوط به آنها را تابع احتمال توأم X و Y می‌نامند و با تابع $P(X,Y)$ نشان می‌دهند»

۳ توپ قرمز
۴ توپ سفید
۵ توپ آبی

$X =$ تعداد توپ‌های قرمز
$Y =$ تعداد توپ‌های سفید
$0 \le (x+y) \le 3$

$$P(X=x, Y=y) = \frac{\binom{3}{x}\binom{4}{y}\binom{5}{3-x-y}}{\binom{12}{3}}$$

از جمع نه شد.
تابع احتمال توأم X و Y

$$P(X=1, Y=2) = \frac{\binom{3}{1}\binom{4}{2}\binom{5}{0}}{\binom{12}{3}} = \frac{18}{220}$$

ج $= P(X=1) = ?$ $X = 0, 1, 2, 3$ — $Y = 0, 1, 2, 3$ $P(X=x) = P(X=x, Y=0) + P(X=x, Y=\ldots)$

$P(X=1) = P(X=1, Y=0) + P(X=1, Y=1) + P(X=1, Y=2) \Rightarrow$ تابع احتمال حاشیه‌ای X

$$\Rightarrow \frac{\binom{3}{1}\binom{4}{0}\binom{5}{2}}{\binom{12}{3}} + \frac{\binom{3}{1}\binom{4}{1}\binom{5}{1}}{\binom{12}{3}} + \frac{\binom{3}{1}\binom{4}{2}\binom{5}{0}}{\binom{12}{3}} =$$

$P_X(x) = P(X=x) = \sum_y P(X=x, Y=y) \Rightarrow$ تابع حاشیه‌ای X
روی y جمع بسته می‌شود.

$P_Y(y) = P(Y=y) = \sum_x P(X=x, Y=y)$ — y
روی x جمع بسته می‌شود.

تابع احتمال حاشیه‌ای Y را بدست آورید.

$$P_Y(y) = P(Y=y) = \sum_x P(X=x, Y=y) = \frac{\binom{4}{y}\binom{8}{3-y}}{\binom{12}{3}}$$

$P(Y=y)$: $P(Y=0) = \frac{56}{220}$, $P(Y=1) = \frac{112}{220}$, $P(Y=2) = \frac{48}{220}$, $\frac{4}{220}$

X قرمز، Y سفید

X \ Y	0 ($\frac{10}{220}$)	1 ($\frac{40}{220}$)	2 ($\frac{30}{220}$)	3 ($\frac{4}{220}$)	$P(X=x)$
0	$\frac{\binom{4}{0}\binom{3}{0}\binom{5}{3}}{\binom{12}{3}}$	$\frac{\binom{4}{0}\binom{3}{1}\binom{5}{2}}{\binom{12}{3}}$	$\frac{\binom{4}{0}\binom{3}{2}\binom{5}{1}}{\binom{12}{3}}$	$\frac{\binom{4}{0}\binom{3}{3}\binom{5}{0}}{\binom{12}{3}}$	$\frac{84}{220}$
1	$\frac{30}{220}$	$\frac{60}{220}$	$\frac{18}{220}$	0	$\frac{108}{220}$
2	$\frac{15}{220}$	$\frac{12}{220}$	0	0	$\frac{27}{220}$
3	$\frac{1}{220}$	0	0	0	$\frac{1}{220}$

احتمال اتفاق حضر با هم جمع می‌شود.

تمرین: با توجه به داده‌های جدول زیر مطلوب است مقدار a و بیاید مطلوب است مقدار احتمالات زیر:

X \ Y	0	1	2
-1	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{12}$
1	$\frac{2}{12}$	a	$\frac{1}{12}$

۱) $P(x=1, y=1)$

۲) $P(x<2, y\le 1)$

۳) $Z = X+Y$ جدول احتمال متغیر تصادفی Z با تغییر زیر

$$\sum_y \sum_x P(X=x, Y=y) = 1$$

الف) $\frac{1}{12} + \frac{2}{12} + \frac{3}{12} + \frac{2}{12} + a + \frac{1}{12} = 1 \Rightarrow a = 1 - \frac{9}{12} = \frac{3}{12} \Rightarrow \frac{1}{4}$

$1) = \frac{1}{4}$

$۲) = P(x<2 , y\le 1) \Rightarrow P(X=-1 , Y=0) + P(X=-1 , Y=+1) +$

$P(X=1 , Y=0) + P(X=1 , Y=1) = \frac{8}{12}$

شرکت

Z	-1	0	1	2	3
$P(Z=z)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{1}{12}$

$(-1+0)=-1 , (-1+1)=0 , (-1+2)=1$

$(1+0)\ 1 , (1,1)$

۳= ظرفی با دو مهره سفید و ۳ مهره سیاه ... دو مهره با هم بیرون می‌آوریم احتمال اینکه حداقل یک مهره سیاه بیرون آمده باشد چقدر است؟

$P($ حداقل یک مهره سیاه $) \Rightarrow 1 - \frac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} = 1 - \frac{1}{10} = 0/9$

$1 - P($ هیچ مهره سیاهی بیرون نیاید $)$

نکته = صفت اسم از حداقل که آمد از فرمول زیر حل می‌شود: $1 - P($ حداقل $)$

مقدار c چقدر باشد تا تابع $f(x)$ با این تعریف یک تابع احتمال باشد

$\sum_x f(x) = 1 \Rightarrow \sum f(x) = 1 \Rightarrow \sum c\left(\frac{1}{6}\right)^{x-1} = 1 \Rightarrow c\sum_x \left(\frac{1}{6}\right)^{x-1} = 1$ ، $\frac{6}{5}$

تابع احتمال

$$f(x) = \begin{cases} c\left(\frac{1}{6}\right)^{x-1} & x=1,2,3,\dots \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

جواب

$\sum \left(\frac{1}{6}\right)^{x-1} = \left(\frac{1}{6}\right)^0 + \left(\frac{1}{6}\right)^1 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \dots = 1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36\times 6} + \dots$

$\sum (q)^n = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{6}} = \frac{1}{\frac{5}{6}} = 1\times\frac{6}{5} = \frac{6}{5}$

$c \cdot \frac{6}{5} = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{\frac{6}{5}} = \frac{5}{6}$

۴، مقدار k چقدر باشد تا تابع $f(x)$ تابع چگالی احتمال پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-3x} & x>0 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_0^\infty ke^{-3x}dx = 1 \Rightarrow \frac{k}{-3}\int -3e^{-3x}dx = 1$

$u = e^{-3x}$ ، $du = -3e^{-3x}dx \Rightarrow -\frac{k}{3}\int_0^\infty du = -\frac{k}{3}e^{-3x}\Big|_0^\infty = -\frac{k}{3}e^{-\infty} - \left(-\frac{k}{3}e^{0}\right) \Rightarrow \frac{k}{3} - 0 = 1$

$\frac{k}{3} = 1 \Rightarrow k = 3$

اگر x دارای تابع احتمال زیر باشد مقدار $P(x>2)$ چقدر است؟

x	0	1	2	3
$f(x)$	$0/3$	$0/4$	$0/2$	$0/1$

$P(x=2) = 0/2 + P(x=3) = 0/1$

$0/2 + 0/1 = 0/3$

هر موقع گسسته بود جمع می‌کنیم ولی اگر پیوسته بود تابع تجمعی

با توجه به توزیع توأم داده شده مقدار احتمال $x=1$ و $y<2$ برابر با کدام گزینه است؟

(x,y)	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,2)$
$P(X=x, Y=y)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$

$P(x=1), (y<2)$

$P(x=1) , y=1 = \frac{1}{7} + P(x=1) , y=2 = \frac{1}{7} \Rightarrow \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{2}{7}$

چگالی توأم زیر مفروض است

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{3}(x+2y) & 0<x<1 \quad 0<y<1 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

فرمول

$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy \Rightarrow$ چگالی حاشیه‌ای x

$P(Y=y) = P(X=x , Y=y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$ چگالی حاشیه‌ای y

$P(X=x) = \int_0^1 f(x,y)\,dy$ چگالی حاشیه‌ای x را dy می‌نویسیم

$\int_0^1 \frac{2}{3}(x+2y)\,dy = \frac{2}{3}\int_0^1 (x+2y)\,dy = \frac{2}{3}(x+1)$

$\int x\,dy + 2\int y\,dy = xy + \frac{2y^2}{2} = xy + y^2 \Big|_0^1 = (x+1)$

$P(Y=y) = \int_0^1 f(x,y)\,dx$ چگالی حاشیه‌ای y را dx می‌نویسیم $\int_0^1 \frac{2}{3}(x+2y)\,dx = \frac{2}{3}\int_0^1 (x+2y)\,dx = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}+2y\right)$

$\int_0^1 x\,dx + \int_0^1 2y\,dx = \frac{x^2}{2} + 2y\int_0^1 dx = \frac{x^2}{2} + 2yx \Big|_0^1 \Rightarrow \frac{1}{2} + 2y$

توزیع توأم متغیرهای تصادفی پیوسته: متغیر تصادفی X و Y روی یک فضای نمونه دارای توزیع توأم پیوسته هستند اگر تابعی غیرمنفی مانند $f(x,y)$ وجود داشته باشد به‌طوری که برای هر ناحیه مانند E در فضای $R \times R$ داشته باشیم

$P(X,Y) = \iint_E f(x,y)\,dx\,dy$

تابع چگالی توأم x و y

1) $0 \le f(x,y) \le 1$

2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$

$f(x,y) = \begin{cases} K(x^2+y^2) & 0<x<1,\ 1<y<2 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$

تابع چگالی توأم متغیر تصادفی x و y باشد مقدار K را به دست آورید.

$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$

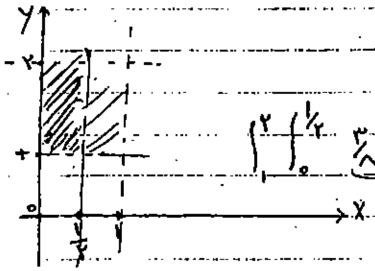
$\int_1^2\int_0^1 K(x^2+y^2)\,dx\,dy \Rightarrow K\int_1^2\int_0^1 (x^2+y^2)\,dx\,dy = 1$

$K\int\left(\frac{1}{3}+y^2\right)dy \Rightarrow K\left[\frac{1}{3}y + \frac{y^3}{3}\right]_1^2 = K\left(\frac{2}{3}+\frac{8}{3}\right) - \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)$

$K \cdot \frac{8}{3} = 1 \qquad K = \frac{1}{\frac{8}{3}} = \frac{3}{8}$

ب. احتمال اینکه $P(X<\frac{1}{2}, Y<2)$ باشد چقدر است؟

نکته (برای محاسبه توزیع توأم در فضای پیوسته رسم شکل الزامی است.)



$\int_1^2\int_0^{1/2} \frac{3}{8}(x^2+y^2)\,dx\,dy \qquad \frac{3}{8}\left(\frac{1+12y^2}{24}\right)$

$\frac{3}{8}\left(\frac{x^3}{3}+y^2x\right)\Big|_0^{1/2} = \frac{3}{8}\left(\frac{1}{24}+\frac{y^2}{2}\right) - 0$

$\int_1^2 \frac{1}{64}(1+12y^2)\,dy = \frac{1}{64}\left(y+\frac{12y^3}{3}\right)\Big|_1^2 = \frac{1}{64}(2+32) - (1+4) = \frac{29}{64}$

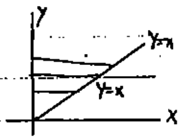
تابع چگالی توأم (x و y) به صورت زیر داده شده است.

$f(x,y) = e^{-(x+y)} \quad x \ge 0,\ y \ge 0$

الف: $P(X<a) = ?$ ب: $P(X<Y) = ?$

الف: $-\int e^{-(x+2)}\,dx = -\int e^u\,du = -e^u = -e^{-(x+2)}$

$\int_0^\infty\int_0^y e^{-(x+y)}\,dx\,dy \Rightarrow \int_0^y e^{-(x+y)}\,dx = -e^{-(x+y)}\Big|_0^y =$



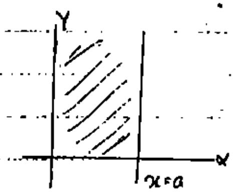
$-e^{-2y} + e^{-y} = e^{-y} - e^{-2y} \Rightarrow \int_0^\infty \left(e^{-y} - e^{-2y}\right)dy =$

$-e^{-y} + \frac{1}{2}e^{-2y}\Big|_0^{+\infty} = \left(-e^{-\infty} + \frac{1}{2}e^{-\infty}\right) - \left(-e^{0} + \frac{1}{2}e^{0}\right) = \frac{1}{2}$

$\int e^{ax} = \frac{1}{a}e^{ax}$

ادامه

$$\int_0^\infty\int_0^a e^{-(x+y)}\,dx\,dy$$



$$\int_0^a e^{-(x+y)}dx=-e^{-(x+y)}\Big|_0^a=-e^{-(a+y)}+e^{-y}$$

$$\int_0^\infty e^{-y}-e^{-(a+y)}\,dy=-e^{-y}-(-e^{-(a+y)})\Big|_0^\infty$$

$$e^{-(a+y)}-e^{-y}\Big|_0^\infty=0-e^{-a}-e^{0}=-(e^{-a}-1)=1-e^{-a}$$

اگر $P(A)=1/3$ ، $P(B)=1/4$ ، $P(A|B)+P(B|A)=2/3 \Leftarrow P(A'\cap B')=?$

$P(A\cup B)'=P(A'\cap B')$ ، $P(A\cap B)'=P(A'\cup B')$ ؛ طرفین: $\frac{P(A\cap B)}{P(B)}+\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=2/3$

$$\frac{P(A)+P(B)\,(P(A\cap B))}{P(B)P(A)}=2/3$$

$$\frac{(\frac13+\frac14)\,P(A\cap B)}{(\frac14)(\frac13)}=2/3\Rightarrow \frac{7}{12}P(A\cap B)\cdot\frac{12}{1}=\frac{2}{3}\Rightarrow 7P(A\cap B)=2/3$$

$$P(A\cap B)=\frac{2}{21}\Rightarrow P(A\cup B)'=1-P(A\cup B)=1-\left[\frac13+\frac14-\frac{2}{21}\right]=\frac{43}{84}$$

$P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

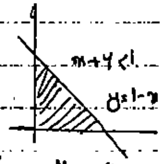
تابع چگالی حاشیه‌ای متغیر تصادفی پیوسته:

$h_X(x)=P(X=x)=\int f(x,y)\,dy$ ← تابع حاشیه‌ای X

$g_Y(y)=P(Y=y)=\int f(x,y)\,dx$ ← Y

مثال: در ... تابع چگالی حاشیه‌ای X و Y را به دست آورید.

$$f(x,y)=\begin{cases}24y(1-x-y) & x>0,\ y>0\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$$



$$h_X(x)=\int f(x,y)\,dy=\int_0^{1-x}f(x,y)\,dy=\int_0^{1-x}24y(1-x-y)\,dy$$

$$24\int_0^{1-x}y-yx-y^2\Rightarrow 24\left(\frac{y^2}{2}-\frac{y^2x}{2}-\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^{1-x}\quad \frac{24}{6}\left(3y^2-3xy^2-2y^3\right)$$

$$4\left(3y^2-3xy^2-2y^3\right)\Big|_0^{1-x}\Rightarrow 3(1-x)^2(1-x)-2(1-x)^3-0\Rightarrow 3(1-x)^3-2(1-x)^3=4(1-x)^3$$

فاکتورگیری: $3y^2(1-x)-2y^3$

$$g_Y(y)=\int f(x,y)\,dx=\int_0^{1-y}24y(1-x-y)\,dx=24\int_0^{1-y}(y-yx-y^2)\,dx\quad \frac{24}{2}\left(2yx-yx^2-2y^2x\right)$$

$$24\left[yx-\frac{x^2y}{2}-y^2x\right]_0^{1-y}\Rightarrow 24\left[\left(y(1-y)-\frac{(1-y)^2y}{2}-y^2(1-y)-0\right)\right]\quad 12\left(2yx-yx^2-2y^2x\right)\Big|_0^{1-y}$$

$$2-(1-y)-2y$$

$$=12\left[y(1-y)\left[2-(1-y)-2y\right]\right]=12\left(2y(1-y)-y(1-y)^2-2y^2(1-y)\right)$$

$$12\left[\frac{y(1-y)^2}{1}\right]=12y(1-y)^2$$

$$h_X(x)=\begin{cases}4(1-x)^3 & x>0\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}\qquad g_Y(y)=\begin{cases}12y(1-y)^2 & 0<y<1\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$$

۱۵ توزیع شرطی متغیرهای پیوسته و گسسته:

$$f(y|x)=\frac{f(x,y)}{h_X(x)}\qquad f(x|y)=\frac{f(x,y)}{g_Y(y)}$$

اگر توزیع توأم متغیرهای تصادفی X و Y به صورت ... تمرین ۱۵ الف

۱۵ توزیع حاشیه‌ای X ، ب- تابع توزیع حاشیه‌ای Y ، ج- توزیع شرطی X به شرطی ...

$P(X|Y=1)$

$Y \backslash X$	-1	1	
-1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}=\frac{4}{8}$	$\frac{5}{8}$
0	0	$\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{8}$	$0=\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{4}$	

x	-1	1
$P(X=x)$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{4}$

توزیع حاشیه‌ای

y	-1	0	1
$P(Y=y)$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

توزیع حاشیه‌ای Y

$$P(X\mid Y=-1)=\frac{P(x,y=-1)}{P(y=-1)} \Rightarrow \frac{P(X=-1,Y=-1)}{P(Y=-1)}=\frac{1/8}{5/8}=\frac{1}{8}\times\frac{8}{5}=\frac{1}{5}$$

$$\frac{P(X=1,Y=-1)}{P(Y=-1)}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{8}}=\frac{1}{2}\times\frac{8}{5}=\frac{4}{5}$$

	-1	1
$P(X\mid Y=-1)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$

اگر تابع چگالی توام X و Y به صورت زیر باشد.

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4}(2x+y) & 0<x<1,\ 0<y<2\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$$

$f(y\mid X=\frac{1}{4})$

$$f(y\mid X=\tfrac{1}{4})=\frac{f(y,x=\frac{1}{4})}{f(X=\frac{1}{4})}=\frac{\frac{1}{4}\left(2(\frac{1}{4})+y\right)}{\frac{3}{4}}=\frac{\frac{1}{4}(y+\frac{1}{2})}{\frac{3}{4}}$$

X چگالی حاشیه‌ای $= f(X=\frac{1}{4})$

$$h_X(x)=\int_0^2 \tfrac{1}{4}(2x+y)\,dy \Rightarrow \tfrac{1}{4}\int_0^2 2x+y\,dy=\tfrac{1}{4}\left(2xy+\tfrac{y^2}{2}\right)\Big|_0^2=$$

$$\tfrac{1}{4}\left(2x\times 2+\tfrac{4}{2}\right)-(0+0)=\tfrac{1}{4}(4x+2)=\tfrac{2x+1}{2}=\tfrac{2x}{2}+\tfrac{1}{2}\Rightarrow x+\tfrac{1}{2}$$

$$\frac{\frac{1}{4}\left(2(\frac{1}{4})+y\right)}{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{8}+\frac{1}{4}y}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}y$$

$$h_X(x)=\begin{cases}\frac{2x+1}{2} & 0<x<1\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}\qquad h(x)\tfrac{1}{4}=\frac{2\times\frac{1}{4}+1}{2}=\frac{\frac{3}{2}}{2}=\frac{3}{4}$$

فصل ۴

امید ریاضی: یکی از مهمترین مفاهیم نظریه احتمال مفهوم امید ریاضی می‌باشد و برای یک متغیر تصادفی

گسسته X با E نمایش داده و به صورت زیر نمایش داده می‌شود

$$E(X)=\sum_x x\,P(X=x)$$

متغیر تصادفی گسسته: $E(X)=\sum_x x\,P(X=x)$

پیوسته: $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$

امید ریاضی نتیجه پرتاب یک تاس منظم را بنویسید

$X=\{1,2,3,4,5,6\}$ $\quad P(X=1)=\frac{1}{6}\ \cdots\ P(X=6)=\frac{1}{6}$

$$E(x)=\sum x\,P(X=x)=1\times\tfrac{1}{6}+2\times\tfrac{1}{6}+3\times\tfrac{1}{6}+\cdots 6\times\tfrac{1}{6}=\tfrac{7}{2}$$

امید ریاضی نتیجه مجموعه پرتاب دو تاس را به دست آورید

$$X=\{2,3,4,\ldots,12\}\Rightarrow E(X)=\sum x\,P(X=x)=2P(X=2)+3P(X=3)+\cdots+12P(X=12)$$

$$2\times\tfrac{1}{36}+3\times\tfrac{2}{36}\quad 12\times\tfrac{1}{36}$$

امید ریاضی تابعی از یک متغیر تصادفی:

۱) $E(g_X(x))=\sum_x g(x)P(X=x)$ → گسسته

۲) $E(g)=\int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)\,dx$ → پیوسته

اگر X نتیجه حاصل از پرتاب یک تاس باشد امید ریاضی (X^2) را حساب کنید.

$X:\{1,2,3,4,5,6\}$ $\quad (X^2):\{1^2,2^2,3^2,4^2,5^2,6^2\}$

$E(X^2)=\sum x^2 P(X=x)=1^2\times\frac{1}{6}+2^2\times\frac{1}{6}+\dots+6^2\times\frac{1}{6}=\frac{91}{6}$

نکته: $E(x)=\frac{7}{2} \Rightarrow (E(X))^2=\frac{49}{4}$ بر تست‌ها تاکید شده $\quad E(x^2)\neq(E(X))^2$

$\frac{91}{6}\neq\frac{49}{4}$

خواص امید ریاضی:

$E(a)=a \qquad E(bx)=bE(x) \qquad E(bx+a)=bE(x)+a$

امید ریاضی متغیرهای تصادفی پیوسته:

اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی $f(x)$ باشد آنگاه امید ریاضی این متغیر به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$

۳= اگر تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر باشد آنگاه امید ریاضی این متغیر را پیدا کنید؟

$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}(2x-3x^2) & -1<x<1\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$

$E(X)=\int_{-1}^{1} x f(x)\,dx=\int_{-1}^{1} x\left(-\frac{1}{2}\right)(2x-3x^2)\,dx$

$-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(2x^2-3x^3)\,dx=-\frac{1}{2}\left(\frac{2x^3}{3}-\frac{3x^4}{4}\right)\Big|_{-1}^{1}=$

$-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\right)-\left(-\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\right)=-\frac{1}{12}+\frac{17}{12}=\frac{16}{12}\Rightarrow -\frac{1}{2}\times\frac{16}{12}=-\frac{8}{12}=-\frac{2}{3}$

۴- تجربه نشان داده است که مدت زمان بین ورود دو مشتری متوالی به یک فروشگاه یک متغیر تصادفی می‌باشد که تابع چگالی آن به صورت زیر است:

$f(x)=\begin{cases}ce^{-2x} & x>0\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$

الف- مقدار c را پیدا کنید. سوال خیلی خیلی مهم

ب- امید ریاضی این متغیر تصادفی را پیدا کنید.

$\int_{-\infty}^{+\infty} ce^{-2x}\,dx=1 \qquad c\int_{0}^{+\infty} e^{-2x}\,dx=1 \qquad c\cdot -\frac{1}{2}e^{-2x}\Big|_{0}^{\infty}=1$

$\left(c\times-\frac{1}{2}e^{-\infty}\right)-\left(c\times-\frac{1}{2}e^{0}\right)=\frac{c}{2}=1 \qquad c=2$

$c\int e^{-2x}\,dx=c\cdot-\frac{1}{2}e^{-2x}$

ب= $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx \Rightarrow E(x)=\int_{0}^{+\infty} x\,2e^{-2x}\,dx \Rightarrow 2\int_{0}^{\infty} x e^{-2x}\,dx$

x	$+$	e^{-2x}
1	$-$	$-\frac{1}{2}e^{-2x}$
0		$\frac{1}{4}e^{-2x}$

$-\frac{1}{2}x e^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}$ $\qquad 2\left[-\frac{1}{2}x e^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}\right]_{0}^{+\infty}$

$2\left[\left(-\frac{1}{2}(\infty)e^{-\infty}-\frac{1}{4}e^{-\infty}\right)-\left(-\frac{1}{2}\times 0\times e^{0}-\frac{1}{4}e^{0}\right)\right]=2\times\frac{1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

تمرین: الف) امید ریاضی $E(x)$ را برای $f(x)=e^{-x}$ ، $x\in[0,+\infty)$

$E(x)=\int_0^{+\infty} x f(x)\,dx \Rightarrow \int_0^{\infty} xe^{-x}\,dx \Rightarrow -xe^{-x}-e^{-x}\Big|_0^{\infty} \Rightarrow$

$(\infty e^{-\infty}-e^{-\infty})-(0e^{-0}-e^{-0})=0+1=1$

$x \quad + \quad e^{-x}$

$1 \quad - \quad -\frac{1}{1}e^{-x}$

$0 \quad \quad -\frac{1}{1}\cdot -\frac{1}{1}e^{-x}$

گشتاور متغیرهای تصادفی: $\mu=E(x)=\mu_1'$ (میانگین)

گشتاور اول حول مبدأ

گشتاور دوم حول میانگین $\mu_2=E(X-\mu_X)^2$ واریانس — پراکندگی متغیرهای تصادفی حول میانگین

میانگین متغیرهای تصادفی

$\mu_1'=E(x)=\mu_X$ گشتاور اول حول مبدأ — گشتاور دوم حول مبدأ $\mu_2'=E(x-0)^2$ — $\mu_2=E(X-\mu_X)^2$

حول مبدأ — به دو روش محاسبه — گشتاور — مبدأ

گشتاور دوم حول میانگین

$\mathrm{var}\,X=\mu_2=E(X-\mu_X)^2=E(X^2-2X\mu_X+\mu_X^2)\Rightarrow E(X^2)-2\mu_X E(X)+\mu_X^2 \Rightarrow$

$-2\mu_X^2+\mu_X^2=E(X^2)-\mu_X^2=E(X^2)-(E(X))^2$

$\mathrm{var}\,X=E(X^2)-(E(X))^2=\sigma^2 \Rightarrow \sqrt{\sigma^2}=\sigma$ انحراف معیار

$E(X)=\mu_X$ گشتاور اول حول مبدأ — $E(X-\mu_X)^2$ گشتاور دوم حول میانگین

واریانس متغیر تصادفی X:

خواص واریانس:

1) $\mathrm{var}(a)=0$ 2) $\mathrm{var}(bX)=b^2\mathrm{var}(X)$

3) $\mathrm{var}(X\pm Y)=\mathrm{var}(X)\pm\mathrm{var}(Y)\pm 2\,\mathrm{cov}(X,Y)$

در صورت استقلال دو متغیر تصادفی: $\mathrm{var}(X+Y)=\mathrm{var}(X)+\mathrm{var}(Y)$

مثال: $\mathrm{var}(a+bX)=b^2\mathrm{var}(X)$ واریانس $2x-20$ var آنگاه $\mathrm{var}X=10$ اگر

$\mathrm{var}(2X-20)=?$ $4\mathrm{var}(X)=4\times10=40$

$\mathrm{var}(X)=10$

کوواریانس: برای بررسی میزان همبستگی متغیرهای تصادفی از ضریبی استفاده می‌شود به نام کوواریانس

$\mathrm{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)$

$\mathrm{cov}(X,Y)=E(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)$

میانگین متغیر تصادفی X — میانگین متغیر تصادفی Y

گسسته $\sum_Y\sum_X (X-\mu_X)(Y-\mu_Y)P(x,y)$

پیوسته $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu_X)(y-\mu_Y)f(x,y)\,dx\,dy$

اگر X, Y مستقل باشند $\Rightarrow \mathrm{cov}(X,Y)=0 \Rightarrow E(XY)-E(X)\cdot E(Y)=0$

★ $E(XY)=E(X)\cdot E(Y)$

مثال: اگر $f(x,y)=x+y$ آنگاه $0<x<1$, $0<y<1$

$\mathrm{cov}(x,y)$ را حساب کنید؟

$E(XY) - E(X).E(Y) \Rightarrow \int_0^1\int_0^1 xy(x+y)\,dx\,dy = \int_0^1 (x^2y + xy^2)\,dx \Rightarrow$

$E(X,Y) = \int_0^1\int_0^1 xy\, f(x,y)\,dx\,dy \Rightarrow \int y\frac{x^3}{3} + y^2\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 \Rightarrow \frac{y}{3} + \frac{y^2}{2} \Rightarrow$

$\int_0^1 \left(\frac{y}{3} + \frac{y^2}{2}\right)dy = \frac{y^2}{6} + \frac{y^3}{6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$E(X) = \int_0^1 x f(x)\,dx \Rightarrow h_X(x) = \int_0^1 f(x,y)\,dy = \int_0^1 (x+y)\,dy \Rightarrow xy + \frac{y^2}{2}\Big|_0^1 = x + \frac{1}{2}$

تبدیل دو متغیره به یک متغیره با استفاده از تابع چگالی حاشیه‌ای

$E(X) = \int_0^1 x f(x)\,dx = \int_0^1 x\left(x + \frac{1}{2}\right)dx = \int_0^1 x^2 + \frac{1}{2}x\,dx \Rightarrow$

$\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$

$E(Y) = \int_0^1 y f(y)\,dy \Rightarrow \qquad g_Y(y) = \int_0^1 f(x,y)\,dx = \int_0^1 (x+y)\,dx = \frac{x^2}{2} + yx\Big|_0^1 = \frac{1}{2} + y$

$\int_0^1 y\left(\frac{1}{2} + y\right)dy = \int_0^1 \frac{y}{2} + y^2 = \frac{y^2}{4} + \frac{y^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$

$\Rightarrow \frac{1}{3} - \left(\frac{7}{12} \times \frac{7}{12}\right) = \frac{1}{3} - \frac{49}{144} = -\frac{1}{144}$

امید ریاضی $E(x)$ را بیابید.

x	2	3	5
$f(x)$	a	$1/3$	$1/6$

$E(X) = \sum x.P(X=x)$

$E(X)\,P(X=x) = 1 \Rightarrow \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + a = 1$

$\frac{1+2}{6} + a = 1 \Rightarrow \frac{3}{6} + a = 1 \Rightarrow a = 1 - \frac{3}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$5 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{6} + \frac{3}{3} + \frac{2}{2} = \frac{5+6+6}{6} = \frac{17}{6}$

C	0/25	0/9
D	0/03	0/63

مقدار $P(A|D) = ?$ را بدست آورید.

$P(A|D) = \frac{P(A\cap D)}{P(D)} = \frac{0/03}{0/03 + 0/63} = \frac{3}{66} = \frac{1}{22}$

تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر است. $f(x) = 1 \quad 0 < x \le 1$

$E(e^x) = ?$ مقدار مقابل را بیابید.

$E(e^x) = \int e^x \times f(x)\,dx = \int_0^1 e^x \times 1\,dx = \int e^x\,dx = e^x\Big|_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$

اگر تابع چگالی احتمال X به صورت زیر باشد $E(X^2)$ کدام است.

$f(x) = \frac{1}{x\ln 3} \quad 1 \le x \le 3$

$E(X^2) = \int x^2 . f(x)\,dx = \int_1^3 x^2 \frac{1}{x\ln 3} \Rightarrow \int_1^3 \frac{x}{\ln 3}\,dx \Rightarrow \frac{1}{\ln 3}\int_1^3 x\,dx \Rightarrow$

$\frac{1}{\ln 3}\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^3 \Rightarrow \frac{1}{\ln 3}\left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{4}{\ln 3}$

اگر $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{x}e^{-x} & 0 < x < \infty,\ 0 \le y \le x \\ 0 \end{cases}$ باشد $cov(x,y)$ مقدار است؟

$E(XY) - E(X).E(Y) \Rightarrow E(XY) = \int\int (x.y) \times f(x,y)\,dx\,dy \Rightarrow$

$\int_0^\infty\int_0^x xy\frac{2}{x}e^{-x}\,dy\,dx \Rightarrow \int_0^x 2y e^{-x}\,dy \Rightarrow 2e^{-x}\int_0^x y\,dy \Rightarrow e^{-x} \times \frac{y^2}{2}\Big|_0^x$

$\Rightarrow e^{-x}(x^2) - 0 \Rightarrow x^2e^{-x} \Rightarrow \int_0^\infty x^2 e^{-x}\,dx = -x^2(e^{-x}) - 2xe^{-x} - 2e^{-x}\Big|_0^\infty = 2$

$x^2 \quad + \quad e^{-x}$

$2x \quad - \quad -e^{-x}$

$2 \quad + \quad e^{-x}$

$0 \quad \quad -e^{-x}$

تبدیل به یک متغیره با استفاده از چگالی حاشیه‌ای:

$E(x) = \int x f(x) dx$

$f(x) = \int f(x,y) dy = \int_0^x 2/x\, e^{-x} dy = 2/x\, e^{-x} y \Big|_0^x \Rightarrow 2/x\, e^{-x}(x - 0) = 2e^{-x}$

$\Rightarrow \int x \times 2e^{-x} dx = \int 2x e^{-x} dx = -2xe^{-x} - 2e^{-x} \Big|_0^\infty = 2$

$2x \; + \; e^{-x}$

$2 \; - \; -e^{-x}$

$0 \; \; e^{-x}$

اگر $f(x|y)$ باشد $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x} & 0 < y \leq x < 1 \\ 0 & \end{cases}$

$f(x|y) = \frac{f(x \cap y)}{f_Y(y)} = \frac{1/x}{-\ln y} = \frac{1}{x \ln y}$

y چگالی حاشیه‌ای — جا به جا

$f_Y(y) = \int f(x,y) dx = \int_y^1 1/x\, dx = \ln x \Big|_y^1 \Rightarrow \ln 1 - \ln y = -\ln y$

واریانس:

م : اگر در پرتاب یک تاس سالم متغیر x عدد ظاهر شده باشد در این صورت مقدار گشتاور دوم

x حول میانگین را حساب کنید.

$\mu_2 = \sigma^2 = E(X-\mu)^2 = E(x)^2 - (E(x))^2$

σ^2

گشتاور دوم حول میانگین = واریانس = σ^2

X نشان دهنده عدد ظاهر شده روی تاس

X	1	2	3	4	5	6
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$Var(x) = E(x)^2 - (E(x))^2$

$E(x^2) = \sum_x x^2 P(X=x) = 1 \times \frac{1}{6} + \frac{4}{6} + 9/6 + \frac{16}{6} + \frac{25}{6} + \frac{36}{6} = \frac{91}{6}$

امید

$E(x) = \sum xP(X=x) = 1 \times \frac{1}{6} + \ldots 6 \times \frac{1}{6} = 7/2$

خودش را امتحان

$\frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}$

اگر در پرتاب سه بار یک سکه سالم متغیر X نشان دهنده شیرهای ظاهر شده باشد

مقدار μ_2 را حساب کنید.

X	0	1	2	3
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

X نشان دهنده شیرهای ظاهر شده $X = \{0, 1, 2, 3\}$

$\binom{3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{8}$ $\qquad E(X^2) = \sum_x x^2 P(X=x)$

$\binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{8}$ $\qquad E(X)^2 = 0 \times 1/8 + 1 \times \frac{3}{8} + 2^2 \times \frac{3}{8} + 3^2 \times 1/8 = \frac{24}{8}$

$\binom{3}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$ $\qquad E(X) = \sum_x xP(X=x) = 0 \times 1/8 + 1 \times \frac{3}{8} +$

$\binom{3}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ $\qquad 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times 1/8 = \frac{12}{8}$ $\qquad \mu_2 = \frac{24}{8} - \left(\frac{12}{8}\right)^2$

۴ : اگر $f(x) = e^{-x}$ و $x > 0$ نسبت باشد مقدار گشتاور اول و دوم متغیر X حول میانگین را به

دست آورید.

$\mu_1 = E(X - \mu)^1 = E(x) - E(\mu)$ گشتاور اول

حول میانگین

$\mu - \mu = 0$

$\mu_2 = E(X^2) - (E(x))^2 \Rightarrow E(X^2) = \int_0^\infty x^2 e^{-x} dx \Rightarrow -x^2 e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} \Big|_0^\infty$

$x^2 + e^{-x}$

$2x - e^{-x}$

$2 + e^{-x}$

$0 \; -e^{-x}$

$0 - (0 - 0 - 2) = 2$

$E(x) = \int_0^\infty x f(x) = \int_0^\infty xe^{-x} = -xe^{-x} - e^{-x} \Big|_0^\infty$

$0 - (0 - 1) = 1$

μ_2 گشتاور دوم $2 - 1^2 = 1$

مقادیر توزیع احتمال توأم X و Y به صورت زیر می‌باشد. کوواریانس X و Y را به دست آورید.

X \ Y	-1	0	1
-1	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0

$cov(X,Y) = E(XY) - E(X).E(Y)$

$E(XY) = \sum (xy)\, P(X=x)(Y=y) =$

$1\times\frac{1}{8} + 0\times 0 - 1\times\frac{1}{8} + (-1)\frac{1}{2} + 0\times\frac{1}{4} + 1\times 0 =$

$\frac{1}{8} + 0 - \frac{1}{8} - \frac{1}{2} + 0 + 0 = -\frac{1}{2}$ P(Y=y)

$E(X) = \sum x P(X=x) = (-1\times\frac{2}{8}) + (1\times\frac{3}{4})$

X	-1	1
P(X=x)	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{4}$

$-\frac{2}{8} + \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$

$E(y) = \sum (y) P(Y=y)$

y	-1	0	1
P(Y=y)	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

$\frac{1}{8}+\frac{1}{2}=\frac{5}{8}$, $0+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}+0=\frac{1}{8}$

$-1\times\frac{5}{8} + 0\times\frac{1}{4} + 1\times\frac{1}{8} = -\frac{5}{8} + 0 + \frac{1}{8} = -\frac{1}{2}$

$cov(X,Y) = -\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$

نامساوی مارکوف:

$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a} \quad a>0$

مثال: اداره پست شهری به طور متوسط ده هزار نامه توزیع می‌کند. الف) در مورد احتمال اینکه اداره پست فردا حداقل ۱۵۰۰۰ نامه توزیع کند چه قدر است؟

ب) در مورد احتمال اینکه فردا حداکثر ۱۵۰۰۰ نامه توزیع کند چه می‌توان گفت؟

الف) $P(X \geq 15000) \leq \frac{E(X)}{15000} = \frac{10000}{15000} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$ حد بالا

مقدار متوسط همان $E(x)$ است

ب) $P(X < 15000) = 1 - P(X \geq 15000) \geq 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ → حد پایین

نامساوی چبیشف: اگر X یک متغیر تصادفی با میانگین μ و واریانس متناهی σ^2 باشد

آنگاه برای $k>0$ داریم احتمال اینکه

(1) $P\{|X-\mu| < k\} \geq 1 - \frac{\sigma^2}{k^2}$

(2) $P\{|X-\mu| \geq k\} \leq 1 - \frac{\sigma^2}{k^2}$

م: فرض کنید اداره پست روزانه ۱۰۰۰۰ نامه با واریانس ۲۰۰۰ توزیع می‌کند. در مورد احتمال اینکه فردا بین ۸ هزار و ۱۲ هزار نامه توزیع کند چه قدر است؟

$P\{8000 \leq X \leq 12000\} = P\left\{\frac{8000-10000}{2000} \leq X-10000 \leq \frac{12000-10000}{2000}\right\}$

$P\{|X-10000| \leq 2000\} \geq 1 - \frac{2000}{(2000)^2} = 1 - \frac{1}{2000} = 0.9995$

(جایزه: میانگین، واریانس) ← چبیشف

م: اگر $E(X)=2$ و $E(X^2)=8$ آنگاه $P(|X| \geq 8)$ را به دست آورید.

$E(X) = 2 = \mu \quad Var = \sigma^2 = E(X^2) - (E(X))^2 = 8 - 4 = 4$ هر قدر میانگین و واریانس داشته باشد حتماً از چبیشف استفاده

$P(|X| \geq 8) = 1 - P(|X| < 8) = 1 - P(-8 < X < 8)$

$1 - P(-8-2 < X-2 < 8-2) =$ ضعیف

$1-P(-10<X-2<6) \geq 1-P(-6<X-2<6) = 1-P(|X-2|<6) \leq$

$\frac{\sigma^2}{k^2} = \frac{1-4}{36} = \frac{32}{36}$

$1-\frac{32}{36}=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$ $k=6$ {چون انحراف معیار ۶ است}

متغیرهای تصادفی گسسته خاص:

۱- برنولی: آزمایشهای با دو پیامد همچون ... که در نظر بگیرید با احتمال P نتیجه موفقیت و با احتمال $1-P$ نتیجه شکست بینجامد اگر موفقیت حاصل شود به متغیر تصادفی X عدد ۱ و اگر شکست حاصل شود به آن ۰ را اختصاص می‌دهیم

در این صورت تابع احتمال X به شکل زیر خواهد بود:

$$X: \begin{cases} 1 \to p \\ 0 \to 1-p \end{cases} \quad \underset{\text{تابع احتمال متغیر تصادفی برنولی}}{P(X=x)} = \begin{cases} p & x=1 \\ 1-p & x=0 \end{cases} \to P(X=x)=p^x(1-p)^{1-x} \quad x=0,1$$

$$E(X)=1\times p+0(1-p)=p \qquad E(X^2)-(E(X))^2 = 1^2 p + 0^2(1-p) - p^2$$

$$= p - p^2 = p(1-p)$$

متغیر تصادفی دوجمله‌ای: تعداد موفقیت‌ها در n بار انجام مستقل آزمایش

برنولی را متغیر تصادفی دوجمله‌ای می‌نامند که تابع احتمال آن به صورت زیر می‌باشد

$$P(X=i)=\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i} \quad i=0,1,\dots,n$$

۳- احتمال بهبود یافتن هر فرد مبتلا به نوعی بیماری خونی ۴۰٪ است اگر بدانیم ۱۵ نفر مبتلا به این بیماری هستند احتمال

پیشامدهای زیر به دست آورید: الف- دقیقاً ۵ نفر از این ۱۵ نفر بهبود یابند.

ب- حداقل ۱۰ نفر از این بیماران بهبود یابند

الف: $p=0.4 \to$ احتمال بهبودی

$1-p=1-0.4=0.6$ عدم بهبودی $\quad P(X=5)=\binom{15}{5}(0.4)^5(0.6)^{10}$

ب: $\sum_{x=10}^{15} P(X=x)=P(X\geq 10)=P(X=10)+P(X=11)+\dots+P(X=15)$

$$\sum_{x=10}^{15}\binom{15}{x}(0.4)^x(0.6)^{15-x}$$

$$E(X)=\sum xP(X=x)=\sum_{x=1}^{n} x\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}=np$$

$Var(X)=np(1-p)$ واریانس متغیر تصادفی X دوجمله‌ای و با احتمال موفقیت p

$$\text{برنولی}\begin{cases} E(X)=p \\ Var(X)=(1-p)p \end{cases} \qquad \text{دوجمله‌ای}\begin{cases} E(X)=np \\ Var(X)=np(1-p) \end{cases}$$

متغیر تصادفی پواسون:

پواسون روشی برای تقریب احتمال دوجمله‌ای در شرایطی است که تعداد آزمایشها زیاد و احتمال موفقیت کم باشد ($p\to 0$) و متوسط تعداد موفقیت‌ها ثابت بماند در این نوع متغیر تصادفی X مقادیر (صفر، ۱، ۲، ...) را با تابع احتمال زیر خواهد داشت:

$$P(X=i)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} \quad x=0,1,2,\dots \quad \lambda>0$$

از جمله مثال‌های دیگری این متغیر تصادفی وجود دارد عبارتند از: ۱- تعداد زنگ‌های موجود در یک ... تلفن

مایع ۲- تعداد مشتریانی که در یک روز مشخص به یک مرکز مراجعه می‌کنند ۳- تعداد تصادف‌های یک خیابان در یک روز

$E(X)=\lambda \qquad Var(X)=\lambda$

۴- فرض کنید تعداد ماشین‌هایی که در یک روز مشخص تابلو ورود ممنوع یک خیابان را نادیده می‌گیرند یک متغیر تصادفی پواسن با پارامتر $\lambda=4$ است مطلوب است احتمال اینکه در یک روز حداکثر ۲ ماشین این تابلو را نادیده بگیرند.

$P(X\leq 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$

$\frac{e^{-4}(4)^0}{0!}+\frac{e^{-4}(4)^1}{1!}+\frac{e^{-4}(4)^2}{2!}$

نکته: فرایند پواسن بیان می‌کند که اگر تعداد دفعات رخ دادن یک پیشامد در واحد زمان از توزیع پواسن با پارامتر λ پیروی کند آنگاه تعداد دفعات رخ دادن همان پیشامد در بازه زمانی t از توزیع پواسن با پارامتر λt پیروی می‌کند.

۵- در مثال قبل احتمال اینکه در دو روز جمعاً ۵ ماشین تابلو ورود ممنوع را نادیده بگیرند چقدر است؟

$P(X=5)=\frac{e^{-8}(8^5)}{5!} \qquad \lambda \xrightarrow{\text{یک روز}} 4 \qquad \lambda=2\times4=8$

۶- X دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامتر n و θ باشد و $Y=\frac{X}{n}$ در این صورت $E(Y)=?$ و واریانس را محاسبه کنید.

$E(Y)=? \qquad Var(Y)=?$

$E(Y)=E\left(\frac{X}{n}\right)=\frac{1}{n}E(X)=\frac{1}{n}\times n\theta=\theta \qquad E(aX)=aE(X) \qquad Var(aX)=a^2Var(X)$

$\sigma_Y^2=Var\left(\frac{X}{n}\right)=\frac{1}{n^2}Var(X)=\frac{1}{n^2}\,n\theta(1-\theta)=\frac{1}{n}\theta(1-\theta)$

۷- تعداد خطاهای تایپی در هر صفحه از یک کتاب متغیر تصادفی است که توزیع پواسن با پارامتر ۱/۸ دارد. احتمال اینکه این کتاب در یک صفحه تنها یک خطای تایپی داشته باشد چقدر است؟

$P(X=x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \Rightarrow P(X=1)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^1}{1!}=e^{-1.8}\times1.8=0.29$

۸- احتمال اینکه یک بازیکن توپ را وارد سبد کند ۰/۲ است ($\theta=0.2$) اگر این بازیکن ۵ بار توپ را به سبد رها کند انتظار می‌رود چند بار موفق شود؟

متغیرهای برنولی در دوجمله‌ای: $\theta=0.2$ ، $1-\theta=0.8$ ؛ دوجمله‌ای: $E(X)=n\theta=5\times0.2=1$

۹- در X یک متغیر تصادفی نامنفی با مقدار ... باشد به طوری که $E(X)=2$ و $Var(X)=7$ ، کران بالای احتمال زیر کدام است؟

$P(X\geq3.5) \qquad E(X)=2 \qquad Var(X)=7$

نکته (نامساوی چبیشف) ... احتمال ... از پیش ... می‌شود

$P\{|X-\mu|<k\}\geq1-\frac{\sigma^2}{k^2}$

$P(X\geq3.5)=1-P(0<X<3.5)=1-P(0-2<X-2<3.5-2)=$

$1-P(-2<X-2<1.5) \Rightarrow -2<X-2<1.5 \Rightarrow 1-P(-1.5<X-2<1.5)$

$1-P|X-2|<1.5<1-\left(1-\frac{7}{1.5^2}\right)=\frac{7}{1.5^2}$

۲. فرض کنید X متغیر تصادفی با $E(X)=3$ و $E(X^2)=13$ ؛ با استفاده از نامساوی چبیشف مقدار $P(-2<X<8)$

$P(-2<X<8)=P(-2-3<X-3<8-3)$ $\qquad P\{|X-\mu|<k\}\geq 1-\frac{\sigma^2}{k^2}$

$P(-5<X-3<5)\Rightarrow P\{|X-3|<5\}\geq 1-\frac{4}{25}=\frac{21}{25}$ حاصل ✓

۳. برای متغیر تصادفی X با تابع چگالی احتمال $f(x)=\frac{x}{2}$ ، $0<x<2$ ، $Var(X)$ را بیابید.

چون f دارای حدود بازه مشخص شده پیوسته است

$Var(X)=E(X^2)-(E(X))^2$

$E(X^2)=\int x^2\cdot\frac{x}{2}\,dx=\frac{1}{2}\int x^3\,dx=\frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^2\Rightarrow\frac{1}{2}(4-0)=2$

$E(X)=\int x\cdot\frac{x}{2}\,dx=\frac{1}{2}\int x^2\,dx=\frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2=\frac{1}{2}\left(\frac{8}{3}-0\right)=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$

$Var(X)=2-\left(\frac{4}{3}\right)^2=2-\frac{16}{9}=\frac{2}{9}$ ★

۴. اگر احتمال به دنیا آمدن پسر در خانواده‌ای دو برابر تولد دختر باشد احتمال اینکه در خانواده سه فرزندی هیچ فرزند پسری به دنیا نیاید چقدر است؟

الف) $\frac{1}{27}$ ✓ ب) $\frac{1}{8}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{2}{7}$

$P(B)=2P(G)$

$P(B)+P(G)=1\Rightarrow 2P(G)+P(G)=1\Rightarrow 3P(G)=1$ $\quad P(G)=\frac{1}{3}$

$P(B)=\frac{2}{3}$ ، برنولی: موفقیت پسر $P(B)=\frac{2}{3}$ ، شکست دختر $P(B')=\frac{1}{3}$

ویژگی دوجمله‌ای: ... (دوجمله‌ای)

$P(X=0)=\binom{3}{0}\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{27}$

ادامه خواص کوواریانس:

1) $cov(X,Y)=cov(Y,X)$ ★

2) $cov(X,X)=Var(X)$ ★

3) $cov(aX,Y)=a\,cov(X,Y)$ ★

4) $cov(aX,bY)=ab\,cov(X,Y)$ ★

5) $cov(X,Y_1+Y_2)=cov(X,Y_1)+cov(X,Y_2)$ ★

6) $cov(X_1+X_2,Y_1+Y_2)=cov(X_1,Y_1)+cov(X_1,Y_2)+cov(X_2,Y_1)+cov(X_2,Y_2)$ ★

هرگاه کوواریانس دو متغیر تصادفی صفر باشد الزاماً استقلال را نتیجه نمی‌دهد.

X,Y مستقل باشند $\longrightarrow cov(X,Y)=0$

تست‌های کوواریانس:

X,Y مستقل‌اند $\not\longleftarrow$

۱. اگر $Var(X_1)=5$ و $Var(X_2)=4$ و $cov(X_1,X_2)=6$ باشد

$cov(X_1-2X_2,-2X_1+3X_2)=?$

$-2Var(X_1)+3cov(X_1,X_2)+4cov(X_2,X_1)-6Var(X_2)$

$-2\times5+3\times6+4\times6-6\times4\Rightarrow-10+18+\cancel{24}-\cancel{24}=8$

۲. اگر دو تاس را پرتاب کنیم احتمال اینکه مجموع دو عدد ظاهر شده

■ یادداشت

ایروکام کیان گستر دلیجان

برابر با ۵ باشد کدام است ۱) $\frac{9-|i|}{36}$ ۲) $\frac{|i-2|}{36}$ ۳) $\frac{|i-7|}{36}$ ۴) $\frac{7-|i-6|}{36}$

$i=5$ مجموع ۲ عدد $\left\{\begin{matrix}(1,4) & (2,3) \\ (4,1) & (3,2)\end{matrix}\right. \Rightarrow p=\frac{4}{36}$

۲. اگر X_1 دارای توزیع پواسون با میانگین α و X_2 دارای توزیع پواسون با میانگین β باشد

X_1 و X_2 مستقل می‌باشند آنگاه $E\left(\frac{1}{\alpha}X_2-\frac{1}{\beta}X_1\right)=?$ طبق خواص واریانس

$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 var(X_2)+\left(\frac{1}{\beta}\right)^2 var(X_1)-2cov\left(\frac{1}{\alpha}X_2,\frac{1}{\beta}X_1\right)$ چون مستقل است

در پواسون میانگین با واریانس برابرند.

$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2(\beta)+\left(\frac{1}{\beta}\right)^2\alpha=\frac{\beta}{\alpha^2}+\frac{\alpha}{\beta^2}=\frac{\beta^3+\alpha^3}{\alpha^2\beta^2}$

متغیر تصادفی هندسی:

برنولی	p	$p(1-p)$
دوجمله‌ای	np	$np(1-p)$
پواسون	λ	λ

فرض کنید آزمایشهای ساده مستقل برنولی که احتمال موفقیت هر بار p است و آنقدر تکرار

کنیم تا اولین موفقیت برسیم اگر X نشان دهنده تعداد آزمایشهای انجام شده باشد آنگاه

$P(X=i)=(1-p)^{i-1}\times p \quad i=1,2,3,\dots$ $\left\{\begin{matrix} p & \text{موفقیت} \\ 1-p & \text{شکست}\end{matrix}\right.$

مثال: یک تاس سالم را پرتاب می‌کنیم تا اولین نتیجه ۴ ظاهر شود اگر X نشان دهنده

تعداد آزمایشهای لازم برای رسیدن به اولین نتیجه ۴ باشد مطلوبست؟

$R=\frac{1}{6}$ ۴ بار پرتاب کنیم تا ۴ بیاید $P(X=4)=?$

■ یادداشت

ایروکام کیان گستر دلیجان

$1-p=\frac{5}{6}$ $\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}=\left(\frac{5}{6}\right)^3\frac{1}{6}$

$P(X<5)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)$

$\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^3\frac{1}{6}$

۳. دو فرد A و B به ترتیب به سوی هدفی شلیک می‌کنند اگر فرد A با احتمال $\frac{1}{2}$

و فرد B با احتمال $\frac{3}{4}$ هدف را مورد اصابت قرار دهند احتمال اینکه فرد B زودتر از فرد A

هدف را بزند چقدر است (در صورتی که فرد A اول مسابقه را شروع کند)

فرد B زودتر از فرد A هدف را بزند. فرد A $\left\{\begin{matrix} p=\frac{1}{2} \\ 1-p=\frac{1}{2}\end{matrix}\right.$ B $\left\{\begin{matrix} p=\frac{3}{4} \\ 1-p=\frac{1}{4}\end{matrix}\right.$

$\underbrace{\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}}_{\text{بار اول}}+\underbrace{\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}}_{\text{بار دوم}}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}+\dots$

$q=\frac{1}{8}$ درست، مجموع جملات تصاعد هندسی $\frac{\text{جمله اول}}{1-q}=\frac{\frac{3}{8}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{3}{8}\times\frac{8}{7}=\frac{3}{7}$

حفظ شود

امید ریاضی و واریانس متغیر تصادفی هندسی

$E(X)=\frac{1}{p}$

$var(X)=\frac{1-p}{p^2}$

متغیر تصادفی دوجمله‌ای منفی:

فرض کنید آزمایشهای ساده مستقل برنولی که احتمال موفقیت

هر بار p است آنقدر تکرار کنیم تا به r امین موفقیت برسیم

اگر X نشان دهنده تعداد آزمایش‌های لازم باشد تا r امین موفقیت ... تابع احتمال آن به صورت زیر خواهد بود

$$P(X=i)=\binom{i-1}{r-1}p^r(1-p)^{i-r} \qquad i=r, r+1, \dots$$

اگر یک تاس سالم را به طور مرتب پرتاب کنیم احتمال اینکه دومین نتیجه ۶ در پنجمین پرتاب حاصل شود

$p=\frac{1}{6}$ احتمال موفقیت $\qquad 1-p=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$ احتمال شکست

یا رسیدن به نتیجه ۶

تعداد آزمایشات منهای موفقیت ۳

$$\binom{4}{1}\times\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\left(\frac{5}{6}\right)^3$$

حفظ شود

$$E(X)=\frac{r}{p} \qquad Var(X)=\frac{r(1-p)}{p^2}$$

متغیر تصادفی فوق هندسی: فرض کنید از جعبه‌ای که دارای N مهره، m معیوب و N-m سالم باشد n مهره به تصادف و بدون جایگذاری انتخاب کنیم. اگر X تعداد مهره‌های معیوب خارج شده باشد تابع احتمال داریم

$$P(X=i)=\frac{\binom{m}{i}\binom{N-m}{n-i}}{\binom{N}{n}}$$

مثال: یک کارخانه تولیدی محصولات خود را در بسته‌های ۱۰ تایی به فروش می‌رساند. اگر در یک بسته تولیدی که این کارخانه ۳ محصول معیوب وجود داشته باشد مطلوب است احتمال اینکه در یک نمونه ۴ تایی (بدون جایگذاری) از این بسته دو محصول معیوب مشاهده شود؟

$m=3 \quad N=10 \quad n=4 \quad X=2 \quad N-m=7$

$$P(X=2)=\frac{\binom{3}{2}\binom{7}{1}}{\binom{10}{3}}=\frac{3\times 7}{120}=\frac{7}{40}$$

$$E(X)=\frac{mn}{N} \qquad Var(X)=\frac{nm}{N}\left(1-\frac{m}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

* متغیر تصادفی یکنواخت گسسته:

اگر متغیر تصادفی X مقادیر $x_1, x_2, \dots, x_n$ را با احتمال یکسان $\frac{1}{n}$ اختیار کند، این متغیر تصادفی را یکنواخت گسسته گویند.

حفظ شود

$$P(X=x_i)=\frac{1}{n}$$

$$E(X)=\frac{n+1}{2} \qquad Var(X)=\frac{n^2-1}{12}$$

اگر X مقادیر ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ را با احتمال $\frac{1}{5}$ اختیار کند مطلوب است $E(X)=?$ و $Var(X)=?$

$$E(X)=\frac{5+1}{2}=3 \qquad Var(X)=\frac{5^2-1}{12}=\frac{24}{12}=2$$

اگر X دارای توزیع یکنواخت گسسته باشد نشان دهید $E(X)=?$ $\Leftarrow$ $E(X)=\frac{n+1}{2}$

اگر احتمال وصل شدن به شبکه اینترنت ۵٪ باشد با این شرایط انتظار داریم با چند تماس به اولین اتصال برسیم؟

$$p=5\% \qquad E(X)=\frac{1}{p}=\frac{1}{\frac{5}{100}}=\frac{100}{5}=20$$

■ یادداشت

ایزوگام کیان گستر دلیجان

تعریف	نوع توزیع	$E(x)$	$Var(x)$
آزمایش دارای دو حالت شکست و موفقیت باشد (مثل پرتاب سکه)	برنولی	p	$p(1-p)$
آزمایش برنولی چندبار تکرار شود مثل پرتاب سکه	دوجمله‌ای	np	$np(1-p)$
تعداد در واحد	پواسون	λ	λ
تعداد آزمایشات برنولی تا رسیدن اولین موفقیت	هندسی	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
تعداد آزمایشات لازم برنولی برای رسیدن به r امین موفقیت	دوجمله‌ای منفی	$\frac{r}{p}$	$\frac{r(1-p)}{p^2}$
m معیوب، N-m سالم، n قطعه خارج می‌کنیم، تعداد قطعات معیوب؟ (بدون جایگذاری)	فوق هندسی	$\frac{nm}{N}$	$\frac{nm}{N}\left(1-\frac{m}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$

زمان همیشه دارای توزیع پیوسته است
چرا که در شمارش نیست
پیوسته است

میانترم تا آخر فصل ۵

■ یادداشت

ایزوگام کیان گستر دلیجان

متوسط تعداد تلفن‌هایی که به یک مدیر مربوط می‌شود در طول هفته ۷ مورد است مطلوبست احتمال اینکه برای این مدیر n تلفن اشتباه شود.

$$P(X=x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}=\frac{e^{-1}1^{n}}{n!}=\frac{1}{e\,n!}\qquad e^{-1}=\frac{1}{e}$$

$E(x)=1 \rightarrow \lambda=1$

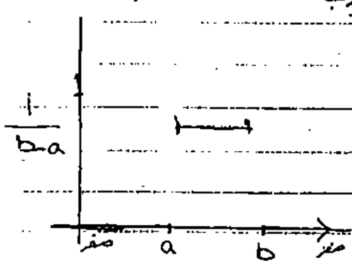
دقیقا یک تلفن در طول هفته اشتباه شده باشد.

در طول یک هفته یک تلفن اشتباهی شود

فصل ۶ یکنواخت

متغیر تصادفی پیوسته: متغیر تصادفی X دارای توزیع یکنواخت در فاصله (a,b) است هرگاه تابع چگالی آن به صورت زیر باشد.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & a<x<b\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$$



میانگین (متوسط) $E(x)=\frac{a+b}{2}$

$Var(x)=\frac{(b-a)^2}{12}$

زمان رسیدن شخصی به محل کار خود دارای توزیع یکنواخت در فاصله ساعت [8:00 و 9:00] است احتمال اینکه این شخص در بین ساعت 8:20 تا 8:40 دقیقه به محل کار خود برسد چقدر است؟

$$P(20<X<40)=\int_{20}^{40}\frac{1}{60}dx=\frac{1}{60}\int_{20}^{40}dx=\frac{1}{60}x\Big|_{20}^{40}$$

$\frac{1}{40}(60-40)=\frac{1}{40}\times 20=\frac{1}{2}$

م) شخصی ساعت ۷:۱۵ تا ۷:۳۰ صبح منتظر اتوبوس می‌ماند احتمال اینکه این شخص حداقل ۵ دقیقه منتظر بماند چقدر است؟

$15-5=10$

$\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$

توزیع نرمال: پرکاربردترین توزیع در مدل‌سازی تجارب تصادفی است که برای تقریب توزیع دوجمله‌ای با پارامتر n و $p=\frac{1}{2}$ به کار می‌رود. این توزیع به این دلیل نرمال نامیده می‌شود که بسیاری از متغیرهای واقعی موجود در طبیعت سازگار است. تابع چگالی آن به صورت زیر می‌باشد:

$$f_{(x)}(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} \qquad -\infty<x<\infty$$

تابع چگالی احتمال توزیع نرمال

توزیع نرمال کاملاً متقارن است.

یعنی از مثال‌های توزیع نرمال عبارتند از:

خطای اندازه‌گیری طول یک قطعه، قطر سیب‌های برداشت شده یا میزان باران سالیانه یک منطقه

$E(x)=\mu \qquad var(X)=\sigma^2$

نکته مهم *** مهمترین نتیجه‌ای که می‌توان از توزیع نرمال گرفت این است که اگر X دارای توزیع نرمال با پارامترهای μ و σ^2 باشد آنگاه متغیر تصادفی Z با این تعریف

$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$ توزیع نرمال استاندارد دارد $\sim N(0,1)$ توزیع نرمال

$E(ax)=aE(x)$

یعنی توزیع نرمال با میانگین $\mu=0$ و $var=1$

(z) $E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)=\frac{1}{\sigma}E(X-\mu)\Rightarrow\frac{1}{\sigma}[E(X)-E(\mu)]$ 0

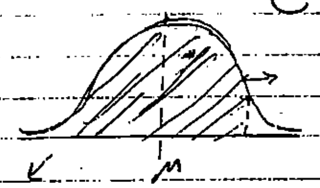
$var(Z)=var\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)=\frac{1}{\sigma^2}var(X-\mu)=\frac{1}{\sigma^2}\sigma^2=1$

$var\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)=\frac{1}{\sigma^2}var(X-\mu)=\frac{1}{\sigma^2}(var(X)-var(\mu))$

$var(aX+b)=a^2var(X)+var(b)$ تعریف خواص

نکته: تابع توزیع تجمعی توزیع نرمال با ϕ نشان می‌دهند و برابر است با:

$F_X(a)=\phi(a)=P(X\le a)$ نشان می‌دهد



نمودار توزیع نرمال

$P(X\le a)=F_X(a)=\phi(a)$

*** مثال: فرض کنید طول قد مردان ۲۵ ساله یک متغیر تصادفی نرمال با پارامتر $\mu=71$ و $\sigma^2=6.25$ اینچ باشد.

الف) چه درصدی از مردان ۲۵ ساله کمتر از ۷۴ اینچ قد دارند؟

ب- چه درصدی از مردان ۲۵ ساله بیشتر از ۷۲ اینچ قد دارند؟

نکته: X را باید تبدیل به توزیع نرمال کرد

الف $= P(X \leq 74)$

$$P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{74-71}{\sqrt{6.25}}\right) = P\left(Z \leq \frac{3}{2.5}\right) = P(Z \leq 1.2) = \Phi(1.2) = 0.8$$

از طرفی $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$

ب $= P(X \geq 72) = 1 - \Phi(0.4) = \Phi(-0.4)$

$$P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \geq \frac{72-71}{\sqrt{6.25}}\right) = P\left(Z \geq \frac{1}{2.5}\right) = P(Z \geq 0.4) = 1 - P(Z \leq 0.4) = 0.6$$

به خاطر اینکه ... دادیم در ... مقدار ...

۲- فرض کنید ~~...~~ متغیر تصادفی X نمره تست دانش‌آموزان ... کلاس در امتحان

$\sigma = 10$ $\quad \mu = 70$

با میانگین ۷۰ و انحراف معیار ۱۰ است ... ۱۲٫۳ از دانش‌آموزان

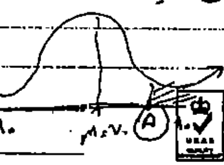
دارای توزیع نرمال با میانگین

آموزان این کلاس نمره A بیاورند، پایین‌ترین مقدار a را در این کلاس حساب کنید.

به احتمال اینکه $P\left(\frac{A}{x} < 1.1\right) = ?$

اطلاعات مسئله

$\Phi(1.14) = 0.877$ $\quad 12.3 \longrightarrow A$



A که باشد

پایین‌ترین مقدار A باشد

$\Phi(1) = 0.8413$ $\quad P(X > A) = 0.123$

$\Phi(0.14) = 0.591$

$$P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{A-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \geq \frac{A-70}{10}\right) = 0.123$$

چون فرمول بیشتر ... کمتر ... (۱) ...

$$\Rightarrow 1 - P\left(Z > \frac{A-70}{10}\right) = 1 - 0.123 \Rightarrow P\left(Z < \frac{A-70}{10}\right) = 0.877$$

$$\Phi\left(\frac{A-70}{10}\right) = 0.877 \Rightarrow \frac{A-70}{10} = 1.14 \Rightarrow A - 70 = 11.4$$

$A = 11.4 + 70 = 81.4$

ب $= P\left(\frac{A}{x} < 1.1\right) : P\left(x < \ldots\right) \ldots P\left(\frac{A}{1.1} > x\right) = P(x < 80)$

$$P\left(\frac{x-70}{10} < \frac{80-70}{10}\right) = P(Z < 1) = \Phi(1) = 0.8413$$

$\Phi(-a) = 1 - \Phi(a)$ $\quad$ توزیع نمایی: اگر X نشان دهنده تعداد دفعات

$\Phi(-0.4) = 1 - \Phi(0.4)$ $\quad$ وقوع پیشامدی باشد که از توزیع پواسون با

پارامتر λ پیروی می‌کند، آنگاه فاصله زمانی بین وقوع هر دو اتفاق متوالی ... این

متغیر تصادفی پواسون دارای توزیع نمایی با تابع چگالی احتمال زیر خواهد بود:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \end{cases}$$

سایر جاها

$$\int_2^\infty 2e^{-2x}dx = -e^{-2x}\Big|_2^\infty = -e^{-2\infty} - (-e^{-2\cdot 2}) = 0 + e^{-4} = \frac{1}{e^4} = 0/02$$

$E(X) = \frac{1}{\lambda}$ $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

(مرور) توزیع ها:

۱- نرمال: $E(X) = \mu$ $Var(X) = \sigma^2$

۲- یکنواخت: $E(X) = \frac{a+b}{2}$ $Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

۳- نمایی: $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

۴- گاما: $E(X) = \alpha\beta$ $Var(X) = \alpha\beta^2$

گاما: متغیر تصادفی X دارای توزیع گاما با پارامترهای +α و +β است هرگاه تابع چگالی آن به صورت زیر باشد.

$$f(x) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} e^{-\frac{x}{\beta}} x^{\alpha-1}$$

$\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1) = (\alpha-1)! \Rightarrow (\alpha-1)(\alpha-2)\Gamma(\alpha-2) \ldots (\alpha-e)\Gamma(\alpha-e)$

$E(X) = \alpha\beta$ $Var(X) = \alpha\beta^2$

اگر X دارای توزیع پواسون با پارامتر λ باشد $\lambda = \frac{1}{\beta}$ آنگاه مدت زمانی که طول می‌کشد تا n [illegible]

۴. فروشگاهی از ساعت ۸ صبح شروع به کار می‌کند. اگر تعداد مشتریانی که در ساعت وارد فروشگاه می‌شوند دارای توزیع پواسون با پارامتر λ=۳ (نفر در ساعت) باشد آنگاه الف- احتمال اینکه بین ورود مشتری دوم و سوم حداقل ۴۰ دقیقه انتظار بکشیم چقدر است؟

$$P(Y > \frac{40}{60}) = P(Y > \frac{2}{3}) = \int_{\frac{2}{3}}^\infty 3e^{-3x}dx = -e^{-3x}\Big|_{\frac{2}{3}}^\infty$$

$$= -e^{-3(\infty)} - (-e^{-3(\frac{2}{3})}) = -e^{0} ... = e^{-2} = \frac{1}{e^2} = 0/135$$

نکته: توزیع نمایی بی حافظه است. این عبارت بدان معنی است که اگر در یک توزیع نمایی t واحد زمانی گذشته باشد و هنوز اتفاق نیفتاده باشد احتمال اینکه در t واحد زمانی آینده اتفاق نیفتد برابر است با احتمال اینکه از لحظه صفر تا لحظه t اتفاق رخ ندهد.

$$P(X > t+s \mid X > s) = P(X > t)$$

۵. مدت زمان کارکردن یک دستگاه [illegible]

فرض کنید دارای توزیع نمایی با پارامتر λ=۲ در ساعت باشد و بدانیم این دستگاه در یک ساعت اول خراب نشده احتمال اینکه تا ساعت سوم خراب نشود چقدر است؟

۳-۱=۲

$P(X > 2)$

$$P(X > 3 \mid X > 1) = P(X > 2)$$

اتفاق از این توزیع رخ دهد، دارای توزیع Γ با پارامترهای $\lambda=\frac{1}{\beta}$ و $\alpha=n$ خواهد بود

توزیع β = متغیر تصادفی X دارای توزیع β با پارامتر α و β + است اگر تابع چگالی آن به صورت زیر باشد

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} & \alpha,\beta>0,\ x>0\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$$

$$E(X)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\qquad Var(X)=\frac{\alpha\beta}{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta+1)}$$

توزیع کی دو: در توزیع Γ اگر قرار دهیم $\alpha=\frac{r}{2}$ و $\beta=2$ آنگاه توزیع Γ تبدیل به توزیع جدیدی خواهد شد به نام کی دو با r درجه آزادی.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2^{\frac{r}{2}}\Gamma(\frac{r}{2})}e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{r}{2}-1} & x>0,\ r=1,2,\dots\end{cases}$$

$Var(X)=2r$ $\qquad E(X)=r$

نمونه سؤال: از یک جعبه شامل ۴ مهره سفید و ۱ مهره سیاه یک نمونه تصادفی ۲ تایی انتخاب می‌کنیم امید ریاضی تعداد مهره‌ها در نمونه برابر است با

منبع ۸ س ۱۹

$$E(x)=\sum_x x\,p(X=x)=0\times0+1\times\frac{4}{10}+2\times\frac{6}{10}=\frac{4}{10}+\frac{12}{10}=\frac{16}{10}=1.6$$

تابع مولد گشتاور در حقیقت بعد از ... نقطه شود.

برای امید ریاضی اول جدول احتمال را رسم کنید

جدول احتمال را روی تعداد ... می‌نویسیم

X	0	1	2
$P(X=x)$	0	$\frac{\binom{4}{1}\binom{1}{1}}{\binom{5}{2}}=\frac{4}{10}$	$\frac{\binom{4}{2}\binom{1}{0}}{\binom{5}{2}}=\frac{6}{10}$

سؤال ۲۰ نیمسال ۹۴-۹۳

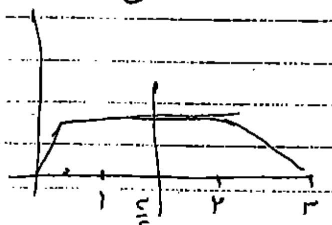
فرض کنید تابع احتمال توأم X و Y از جدول زیر تبعیت می‌کند مقدار E(XY) چقدر است

y,x	0,0	0,1	1,0
f(y,x)	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$

$$E(XY)=\sum xy\,p(x,y)=0\times1=0$$

xy	0
	$\frac{2}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}=1$

سؤال ۱۷



$\frac{3}{2}$

ضریب همبستگی خطی:

$\rho=-1$ همبستگی معکوس و کامل

$\rho=1$ ... مستقیم و کامل

$-1<\rho<0$ همبستگی معکوس و ناقص

$0<\rho<1$ همبستگی مستقیم و ناقص

■ یادداشت

۱۹- اگر X دارای چگالی احتمال $f(x) = e^{-x}$, $x>0$ باشد مقدار ...

۲۱- امید ریاضی متغیر تصادفی $g(x) = e^{\frac{3x}{4}}$ را حساب کنید.

فصل ۴: تابعهای متغیرهای تصادفی:

۱- تکنیک تابع توزیع ۲- تکنیک تبدیل یک متغیره ۳- تکنیک تبدیل چند متغیره ۴- روش تابع مولد گشتاور

روش تابع مولد گشتاور: تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی X به صورت $m_x(t)$ نشان داده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$m_x(t) = E(e^{tx})$$

توزیع گسسته

• توزیع برنولی $= (pe^t + 1 - p)$ p: احتمال موفقیت، $1-p$: احتمال شکست

• توزیع دوجمله‌ای $= (pe^t + 1 - p)^n$

• هندسی $= \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$ • پواسون $= e^{\lambda(e^t - 1)}$

• دوجمله‌ای منفی $= \boxed{\left(\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right)^r}$

■ یادداشت

برای اینکه گشتاور دوم حول مبدأ هر متغیر تصادفی را به دست آوریم لازم است از تابع مولد گشتاور ۲ بار مشتق بگیریم.

$$E(X(X-1)) = E(X^2 - X) = E(X^2) - E(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda = 25$$

X متغیر تصادفی با توزیع پواسون با پارامتر $\lambda = 5$ $\Rightarrow m_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)} = e^{\lambda e^t - \lambda}$

$$m'_{(x)}(t) = \lambda e^t \left(e^{\lambda e^t - \lambda}\right)$$

$$m''_{(x)}(t) = \lambda e^t \left(e^{\lambda e^t - \lambda}\right) + \lambda e^t e^{(\lambda e^t - \lambda)} \Rightarrow \lambda + \lambda \cdot \lambda = \lambda^2 + \lambda$$

$$E(X(X-1)) = E(X^2 - X) = E(X^2) - E(X) = 25 \qquad E(X) = 5 \quad Var(X) = 5$$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 5 = E(X^2) - \cancel{(E(X))^2}_{25} = E(X^2) = 5 + 25 = 30$$

تابع مولد گشتاور توزیع‌های پیوسته

توزیع یکنواخت در بازه (a,b) $= \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}$

توزیع نمایی با پارامتر λ $= \frac{\lambda}{\lambda - t}$ توزیع گاما $= \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^\alpha$

توزیع نرمال با پارامتر (μ, σ^2) $= e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$

انحراف معیار σ

اگر متغیر (X) دارای تابع مولد گشتاور $M_X(t)=\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}e^{t}\right)$ باشد مقدار امید ریاضی چقدر است؟

$E(X)=\frac{2}{3}$

$m'_X(t)=\frac{2}{3}$ یک بار مشتق می‌گیریم

م- اگر متغیر نرمال (X) دارای تابع مولد گشتاور $M_X(t)=e^{5t+8t^2}$ باشد σ چیست؟

$M_X(t)=e^{5t+8t^2} \Rightarrow E(X)=\mu=5 \qquad \frac{1}{2}\sigma^2=8 \Rightarrow \sigma^2=16 \quad \sigma=\sqrt{16}=4$

(طبق توزیع نرمال با پارامتر (μ و σ^2))

* تابع‌های متغیرهای تصادفی: ۱- تکنیک تابع توزیع: یکی از روش‌های راحت در به دست آوردن

چگالی احتمال تابعی از متغیرهای تصادفی پیوسته عبارت است از اینکه ابتدا تابع توزیع

(توزیع تجمعی) آن را به دست آورده و سپس از آن مشتق بگیریم که چگالی آن را به دست آوریم بنابراین

اگر $X_1, X_2, \dots, X_n$ متغیرهای تصادفی پیوسته با چگالی احتمال مفروض باشند

چگالی احتمال $Y=u(X_1,X_2,\dots,X_n)$ به صورت زیر به دست می‌آید که ابتدا عبارت

$F(y)=P(Y\le y)=P[u(x_1,x_2,\dots,x_n)\le y]$ تعیین کرده و آن را نسبت به y مشتق بگیریم $f(y)=\frac{dF(y)}{dy}$ چگالی

احتمال (Y) را محاسبه می‌کنیم.

اگر چگالی احتمال (X) به صورت $f(x)=\begin{cases}6x(1-x) & 0<x<1\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$ باشد چگالی $Y=X^3$ را به دست آورید.

① تابع توزیع را پیدا کنیم.

$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^3\le y)$

$P(X\le\sqrt[3]{y})=F(\sqrt[3]{y}) \Rightarrow \int_0^{\sqrt[3]{y}}6x(1-x)\,dx=\frac{6x^2}{2}-\frac{6x^3}{3}\Big|_0^{\sqrt[3]{y}}$

ریشه سوم

$3x^2-2x^3\Big|_0^{\sqrt[3]{y}}=3y^{2/3}-2y$

$F(y)=3y^{2/3}-2y \Rightarrow f_y=\frac{dF(y)}{dy} \Rightarrow 2y^{-1/3}-2$

$Y=X^3 \Rightarrow f(y)=\begin{cases}2y^{-1/3}-2 & 0<y<1\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$ *

م- اگر X تعداد شیرهایی باشد که در چهار پرتاب یک سکه سالم به دست می‌آید توزیع احتمال $Y=\frac{1}{1+X}$ را به دست آورید. توزیع دو جمله‌ای است

x	0	1	2	3	4
$p(x)$	$\frac{1}{16}$	$\binom{4}{1}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

$\left(\frac{1}{1+x}\right) \quad \left(\frac{1}{1+4}\right)=\frac{1}{5}$

Y	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$
$P(Y=y)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

$P\left(Y \le \frac{1}{1+X}\right) = P(Y + YX = 1)$

$P(YX = 1-Y) = P\left(X = \frac{1-Y}{Y}\right)$

$P(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \Rightarrow P(Y=y) = \binom{n}{\frac{1-y}{y}} p^{\frac{1-y}{y}} (1-p)^{n-\left(\frac{1-y}{y}\right)}$

* حل در حالت کلی با تکنیک تبدیل متغیره: فرض کنید $f(x)$ مقدار چگالی احتمال متغیر تصادفی X در نقطه (x) باشد اگر تابعی به صورت $y = u(x)$ داده شود مشتق پذیر و برای تمام مقادیر (X) که برای آنها $f(x) \neq 0$ مخالف صفر، صعودی یا نزولی باشد آنگاه برای این مقادیر چگالی احتمال $y = u(x)$ را به صورت زیر داریم.

$g(y) = \begin{cases} f[w(y)]\,|w'(y)| & u'(x) \neq 0 \text{ به شرط} \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$

۳. اگر X دارای توزیع نمایی به صورت $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x>0 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$ باشد چگالی احتمال متغیر تصادفی $Y = \sqrt{x}$ را پیدا کنید.

اول متغیر را

$y = \sqrt{x} \Rightarrow y^2 = x \xrightarrow{\text{مشتق}} 2y\,dy = dx$

طبق تعریف $g(y) = \begin{cases} e^{-y^2} \times 2y & y>0 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$

۴. اگر X دارای توزیع نرمال استاندارد باشد، تابع چگالی احتمال $Y = |X|$ را به دست آورید.

$X \sim N(\mu = 0, \sigma^2 = 1)$

تابع توزیع ← $F_Y(y) = P(Y \le y) = P(|X| \le y) = P(-y \le X \le y) = F_X(y) - F_X(-y)$

مشتق می‌گیریم $\Longrightarrow f(x) + f(x) = 2f(x) \Rightarrow 2N(x;0,1)$

تکنیک تبدیل چند متغیره:

فرض کنید $f(x_1, x_2)$ مقدار چگالی احتمال توأم متغیرهای تصادفی پیوسته X_1 و X_2 در نقطه (x_1, x_2) اگر توابع داده شده

$y_1 = u_1(x_1, x_2)$

و توزیع احتمال توأم آنها خواسته شود به شرط اینکه

$y_2 = u_2(x_1, x_2)$

توابع u_1 و u_2 مشتق پذیر بوده و یک به یک باشند چگالی احتمال توأم

$Y_1 = u_1(X_1, X_2)$

$Y_2 = u_2(X_1, X_2)$ و

می‌شود $\Rightarrow g(y_1, y_2) = f[w_1(y_1, y_2), w_2(y_1, y_2)]\,|J|$ ژاکوبین تبدیل

اگر چگالی های توأم X_1 و X_2 به صورت $f(x_1, x_2) = \begin{cases} e^{-(x_1+x_2)} & x_1>0, x_2>0 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$

$Y_1 = X_1 + X_2$

$Y_2 = \frac{X_1}{X_1 + X_2}$

الف. چگالی احتمال توأم Y_1 و Y_2 را به دست آورید.

ب: چگالی حاشیه‌ای y_2 را به دست آورید.

الف: x_1 و x_2 را ... بر حسب

$$y_1 = x_1 + x_2 \Rightarrow y_1 - x_2 = x_1 \Rightarrow y_1 - \underbrace{y_1(1-y_2)}_{x_2\ \text{حاصل}} = x_1 \Rightarrow \cancel{y_1} - \cancel{y_1} + y_1 y_2 = x_1 \Rightarrow \boxed{x_1 = y_1 y_2}$$

$$y_2 = \frac{x_1}{x_1+x_2} \Rightarrow y_2 = \frac{y_1 - x_2}{y_1 - \cancel{x_2} + \cancel{x_2}} \Rightarrow y_1 y_2 = y_1 - x_2$$

$$y_1 - y_1 y_2 = x_2 \Rightarrow \boxed{y_1(1-y_2) = x_2}$$

مشتق X_1 به y_2 میشه ضریب y_1

ردمشتق

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_2 & y_1 \\ 1-y_2 & -y_1 \end{vmatrix}$$

$$|J| = |-y_1|$$

$$J = -y_1 y_2 - y_1(1-y_2) = -\cancel{y_1 y_2} - y_1 + \cancel{y_1 y_2} = -y_1$$

$$g(y_1, y_2) = \begin{cases} e^{-(y_1 y_2 + y_1(1-y_2))}\, y_1 = y_1 e^{-(\cancel{y_1 y_2} + y_1 - \cancel{y_1 y_2})} = y_1 e^{-y_1} \\ 0 \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

$$g(y_1, y_2) = \{ y_1 e^{-y_1} \quad y_1 > 0 \quad 0 < y_2 < 1$$

چون $\frac{x_1}{x_1+x_2}$

$$\frac{2}{2+2} \quad \frac{2}{5}$$

توزیعات ... ۵ و ۱ است

ج: چگالی حاشیه‌ای

$$h(y_2) = \int_0^{\infty} y_1 e^{-y_1}\, dy_1 = -y_1 e^{-y_1} - e^{-y_1} \Big|_0^{\infty} = (\infty \cdot \cancel{e^{-\infty}} - e^{-\infty}) - (0 \cdot \cancel{e^{0}} - e^{0}) = 1$$

$$h(y_2) = \begin{cases} 1 & 0 < y_2 < 1 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

$$y_1 \xrightarrow{+} e^{-y_1}$$
$$1 \xrightarrow{-} -e^{-y_1}$$
$$0 \longrightarrow e^{-y_1}$$