Subject:
Year. Month. Date. ( )

تحقیق در عملیات 1

فصل 1 : تعاریف مقدماتی و مدل سازی ریاضی

ieun.ir

* تعریف دقیق و مشخصی برای OR وجود ندارد اما می توان گفت :

تحقیق در عملیات در واقع استفاده از "مدل سازی ریاضی" در حل مسائل واقعی تصمیم گیری،

به منظور تعیین "بهترین تصمیم ممکن" است

* تحقیق در عملیات شاخه ای از ریاضیات کاربردی است

* OR در دیدگاه های کلی به دو شاخه اصلی تقسیم می شود :

1. مدل های احتمالی 2. مدل های قطعی (Deterministic Models)

در مدل های قطعی فرض می شود کلیه داده ها و پارامترهای مدل قطعی و مشخص است

در مدل های احتمالی (probabilistic Models) حداقل یکی از داده ها یا پارامترهای

مدل، حالت عدم قطعیت دارد.

قطعی : برنامه ریزی خطی 21 - 711 21 - 751

" غیر خطی 712 -

" عدد صحیح 715 -

" پویا 716

" حمل و نقل 761 -

" شبکه 536 -

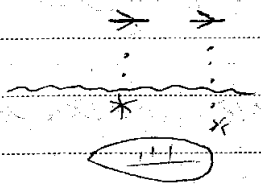
Subject: صفحه
Year. Month. Date. ( )

احتمالی: تئوری صف 21 - 742
تئوری تصمیم گیری 138
فرآیندهای تصادفی 746
شبیه سازی 942
پیش بینی
کنترل موجودی

تاریخچه تحقیق در عملیات:

در طول جنگ جهانی دوم تیمی متشکل از تعدادی ریاضیدان، فیزیکدان و مهندس در انگلستان تحت نظر فیزیکدانی به نام Blackett تشکیل شد که سعی آن ها در تحقیق بر روی عملیات نظامی، و ارائه راه حل عملی برای آن بود. مسئله اول:

در چه ارتفاعی عمق رها شود تا بیشترین صدمه را به زیر دریایی بزند؟



مسأله دوم: محل استقرار رادارها در کجای شهر باشد تا با کمترین تعداد رادارها کل شهر پوشش داده شود؟

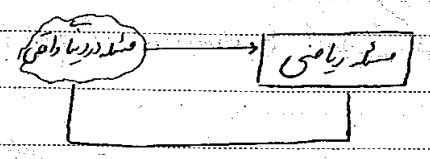
PAPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

OR در اقتصاد بسیار مؤثر است

اولین گام در جهت حل یک مسئله تصمیم گیری، مدل سازی مسئله است.



تمرین: جهت تبدیل یک مسئله در دنیای واقعی به یک مدل ریاضی باید فرضیات مطرح شده را چگونه در نظر گرفت؟

مدل سازی ریاضی مسائل در قالب زیر را برنامه ریزی ریاضی (Mathematical programing) گویند.

* یک مدل برنامه ریزی ریاضی از عناصر زیر تشکیل می شود:

I) متغیرهای تصمیم گیری (Decision Varrables) مجهولات (متغیرهایی) هستند که در مدل وجود دارند و هدف از حل مدل تعیین "بهترین مقدار" برای آنها با توجه به عناصر بعد است.

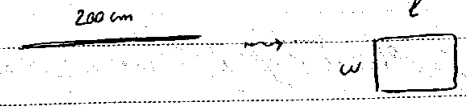
II) تابع هدف (Objective function) تابع ریاضی از متغیرهای تصمیم گیری است

Subject:
Year Month Date ( )

که بیانگر هدف مسئله در قالب یک تابع ریاضی است. در اغلب مسائل این تابع هدف به صورت حداکثر سازی (بیشینه سازی) (Maximization) یا حداقل سازی / کمینه سازی (Minimization) است که به ترتیب آنها را با Max و Min نشان می دهیم.

II) محدودیت ها (constaints): محدودیت هایی موجود در مدل هستند که متغیرهای تصمیم گیری مجاز به نقض آن نیستند.

مثال: یک میله پلاستیکی که قابلیت انعطاف و تغییر شکل را دارد به طول 200 cm در اختیار داریم. می خواهیم آن را به صورت مستطیل در آوریم که مساحت آن حداکثر باشد. ابعاد آن؟



متغیرهای تصمیم گیری: طول l

عرض w

تابع هدف: $\max Z = lw$

محدودیت ها: $l+w=100$ s.t. Subject to

(مستقیماً از صورت مسئله نتیجه شده)

$l, w \geq 0$ (محدودیت علامت: دانسته، علامت متغیرها)

P4PCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$l^* = w^* = 50$

$z^* = 2500$

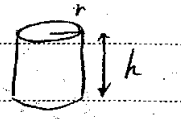
حل می کنیم:

* به بهترین مقدار متغیرها که ضمن ارضای کلیه محدودیت ها مسئله، مقدار تابع هدف را نیز بهترین مقدار ممکن می رساند، جواب بهینه (Optimal Solution) گویند.

* به جواب هایی که در کلیه محدودیت ها مسئله صدق می کند اما ضرورتاً جواب بهینه نیستند جواب موجه (Feasible Solution) گویند.

* جواب بهینه حتماً جواب موجه هم هست اما برعکس نه

مثال: در یک کارخانه تولید رنگ، رنگ ها تولیدی در قوطی های استوانه ای بسته بندی شده و به دست مشتری می رسد. می دانیم که هر cm^2 از ماده تشکیل دهنده این قوطی ها 0.5g وزن دارد. با من خواهیم وزن قوطی ها بیش از 250g شود (مثل از بین رفتن رنگ) ابعاد قوطی ها چقدر باشد تا حجم قوطی ها max؟



متغیرها تصمیم گیری: شعاع r

ارتفاع h

تابع هدف: $\max v = \pi r^2 h$

s.t

P4PCO

ieun.ir

Subject:
Year. Month. Date. ( )

محدودیت ها: $\text{وزن} \leq 250 \Rightarrow \text{مساحت کل} \times 0.5 \leq 250$

$\Rightarrow (2\pi r^2 + 2\pi r h) \times 0.5 \leq 250 \qquad r, h \geq 0$

* در مدل های برنامه ریزی ریاضی علامت کار رفته جهت محدودیت ها باید $\geq$ یا $\leq$ یا $=$ باشد ($<$ و $>$ نداریم) :

r, h اگر 0 باشند جواب موجه هستند اما بهینه نیستند

اگر محدودیت ها نباشند r و h ، ∞ را Max می کنند اما محدودیت داریم

← روش حل مسئله ؟ تمرین تشویقی

* چارچوب کلی یک مدل برنامه ریزی ریاضی :

$$\max(\min)\ z = f(x_1, \dots, x_n)$$

$$\text{s.t.}$$

محدودیت ها : $g_i(x_1, \dots, x_n) \begin{Bmatrix} \leq \\ \geq \\ = \end{Bmatrix} b_i \qquad x_1, \dots, x_n \geq 0$

$i = 1, \dots, m$

* یک تابع نظیر $f(x_1, \dots, x_n)$ را تابع خطی (Linear Function) گویند اگر :

$f(x_1, \dots, x_n) = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n + k$ که در آن $c_1, \dots, c_n$ و k مقادیر ثابت هستند

PAPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

* اگر در مدل برنامه ریزی ریاضی، کلیه توابع موجود خطی باشند به آن "مدل برنامه ریزی خطی" (Lineur Pragramming) گویند که آن را به اختصار با LP نمایش می دهند

ولی اگر حداقل یکی از این توابع خطی نباشد، یا قابل تبدیل به مدل خطی نباشد آن را مدل برنامه ریزی غیرخطی (Nonlinear P-) یا NLP گویند.

* چارچوب کلی یک برنامه ریزی خطی (LP) :

$$\max(\min)\ Z = c_1X_1 + \cdots + c_nX_n \quad *$$

محدودیت s.t.

$$1)\quad a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n \ \{\ \}\ b_1$$

$$2)\quad a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2n}X_n \ \{\ \}\ b_2$$

$$m)\quad -a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots + a_{mn}X_n \ \{\ \}\ b_m$$

$$, X_1, \ldots, X_n \geq 0$$

* فرم ماتریسی مدل LP :

$$\max(\min)\ Z = CX$$

s.t.

$$AX \{\leq\} b$$

$$X \geq 0$$

P4PCO

ieun.ir

Subject:
Year Month Date ( )

بردار متغیرها $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ بردار ضرایب متغیرها در تابع هدف $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$

ماتریس ضرایب $= A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ ← n متغیر

متغیرها در محدودیت‌ها و m محدودیت

بردار ضرایب سمت راست $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

* اگر در محدودیت علامت متغیرها، بعضی یا تمام متغیرها از جنس اعداد صحیح غیرمنفی باشند، مدل برنامه‌ریزی اعداد صحیح (Integer Programming Model) گوییم.

به اختصار با IP آن را نشان می‌دهیم:

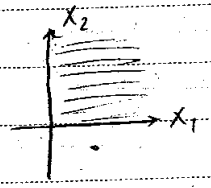
$X_i \geq 0$, Int

(X_1 عدد صحیح غیرمنفی)

(LP)

$X_1, X_2 \geq 0$

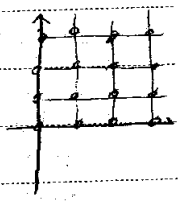
فضا پیوسته



(IP)

$X_1, X_2 \geq 0$, Int

فضا گسسته



Subject:
Year. Month. Date. ( )

** مدل سازی مسائل به صورت مدل های LP :

مدل برنامه ریزی تولید (Production Planning Model)

3 محصول مختلف در یک کارگاه کوچک تولیدی با توجه به 3 نوع عملیات مختلف تولید می شوند. مدت زمان انجام هریک از عملیات برروی هر واحد از محصولات برحسب دقیقه و سایر اطلاعات در جدول زیر داده شده. می خواهیم میزان هفتگی تولید روزانه هر محصول را با هدف حداکثر سازی سود کارگاه تعیین کنیم.

	محصول 1	محصول 2	محصول 3	حداکثر زمان عملیات برحسب دقیقه در روز
تراشکاری	1	2	1	430
جوشکاری	3	0	2	460
ورق کاری	1	4	0	420
سود حاصل از تولید هر واحد محصول (بر حسب تومان)	3000	2000	5000	

متغیرها تصمیم گیری : X_i : تعداد محصول i که در روز تولید می شود $\quad i = 1, 2, 3$

تابع هدف : $\max Z = 3000X_1 + 2000X_2 + 5000X_3$

Subject:
Year: Month: Date: ( )

محدودیت‌ها:

(1) $X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 430$

(2) $3X_1 + \cdot + 2X_3 \leq 460$

(3) $X_1 + 4X_2 \leq 420$

(4) $-X_1, X_2, X_3 \geq 0$

نوع محصول مشخص نشده ← می‌تواند Int هم باشد

* حل مدل با استفاده از نرم افزارها

* نرم افزارهای حل مدل های LP:

* CPLEX ، TORA ، MPL ، Lindo ، Lingo

ادامه مسئله برنامه ریزی تولید:

جواب بهینه: $Z^* = 1,350,000$ $X_1^* = 0$ ، $X_2^* = 100$ ، $X_3^* = 230$

* طبق جواب بهینه، برنامه تولیدی جهت حداکثر سازی سود کارگاه به میزان 1,350,000 تومان در روز، تولید محصول 2 و 3 به میزان به ترتیب 100 و 230 واحد در روز و عدم تولید محصول 1 است.

حال فرض می‌کنیم مدیر کارگاه تمایل دارد از محصول شماره 1، حداقل 20 واحد تولید داشته باشد ← محدودیت پنجم:

(5) $X_1 \geq 20$

← جواب بهینه تغییر می‌کند.

P4PCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

در این حالت جواب بهینه برای Z کم می شود : $Z^* = 1,260,000$

$X_1^* = 20 \;,\; X_2^* = 100 \;,\; X_3^* = 200 \Rightarrow$ (حداقل محصول 1 باید تولید شود)

حال مدیر کارگاه خواهان این است که مجموع تعداد محصولات 1 و 2 حداقل 150 تا باشد

(چون در مقدار بهینه قبلی صدق نمی کند، محدودیت جدید اضافه شده)

⑥ $X_1 + X_2 \geq 150$

$\Rightarrow Z^* = 1,060,000 \;,\; X_1^* = 60 \;,\; X_2^* = 90 \;,\; X_3^* = \overset{140}{0}$

(اهمیت محصول 1 و 2 بالا رفته ⇐ اینگونه شده)

تمرین تشویقی : درصورتی که ترتیب عملیات انجام گرفته مهم بود به این ترتیب که :

محصول 1 ① → ③ → ② ~ مراحل

محصول 2 ③ → ①

محصول 3 ② → ①

و مابین هر عملیاتی 2min زمان تلف شده

و کلاً نیز 440 min در روز وقت داشته باشیم

PAPCO

6

Subject:
Year: Month: Date: ( )

مسئله برنامه ریزی رژیم غذایی (Diet Problem) :

اولین مدل واقعی که به وسیله LP مدل سازی و حل شد این مسئله بود که شامل تعیین رژیم غذایی برای نظامیان یک واحد نظامی بود که توسط Stigler مدل ساز و حل شد.

فرض کنید بخواهید برنامه تغذیه روزانه خود (دو وعده ی صبحانه و ناهار خود را برنامه ریزی کنید با توجه به تنقلات موجود در بوفه دانشگاه شریف. اطلاعات زیر :

	کالری	کربوهیدرات (g)	چربی (g)	قند (g)	هزینه (تومان)
هر قطعه کیک	400	3	2	2	500
هر قطعه بستنی (Scoop)	200	2	2	4	200
هر بطری نوشابه	150	-	4	1	300
هر بسته آجیل	500	-	4	5	800

با توجه به برنامه غذایی خود می خواهیم روزانه حداقل 500 کالری، 6g کربوهیدرات، 10g قند و 8g چربی را استفاده کنیم و کمترین هزینه را داشته باشیم. برنامه ؟

متغیرها تصمیم گیری :

X_1 = تعداد قطعه های کیک
X_2 = بستنی
X_3 = نوشابه
X_4 = آجیل

P4PCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\text{Min } Z = 500X_1 + 200X_2 + 300X_3 + 800X_4$$

s.t.

محدودیت ها :

① $400X_1 + 200X_2 + 150X_3 + 500X_4 \geq 300$

② $3X_1 + 2X_2 \geq 6$

③ $2X_1 + 2X_2 + 4X_3 + 4X_4 \geq 10$

④ $2X_1 + 4X_2 + 1X_3 + 5X_4 \geq 8$

⑤ $X_j \geq 0$, Int

Lingo : اینجا تأثیر ندارد

حل ← $Z^* = 900$ $X_2^* = 3$ $X_3^* = 1$ $X_1^* = X_4^* = 0$

این رژیم به صورت زیر است :

750 کالری

6 g کاکائو

10 g قند (سمت چپ محدودیت ها)

13 g چربی

اگر در مسئله داده شده ، حداقل ها تبدیل به حداکثر شود ، در اینصورت در محدودیت ها

$\geq$ به $\leq$ تبدیل می شود . در اینصورت : $Z^* = 0$, $X_1^* = X_2^* = X_3^* = X_4^* = 0$

حال فرض کنید که حداقل سازی هزینه مورد نظر ما نباشد بلکه حداقل کالری را با توجه به

سایر محدودیت ها داشته باشیم (تابع هدف عوض می شد)

PAPCO

7

ieun.ir

Subject:
Year: Month: Date: ( )

$$\min \; w = 400X_1 + 200X_2 + 150X_3 + 500X_4$$

s.t.

(1) $3X_1 + 2X_2 \geq 6$

(2) $2X_1 + 2X_2 + 4X_3 + 4X_4 \geq 10$

(3) $X_1 + 4X_2 + X_3 + 5X_4 \geq 8$

(4) $X_j \geq 0$

حل $\rightarrow$ $w^* = 750$ $\quad X_1^* = X_4^* = 0$ $\quad X_2^* = 3$ $\quad X_3^* = 1$

جواب عین متن ، چگونه بدون حل می توان گفت ؟

تمرین تشویقی :- خلاصه یک مقاله که کاربرد مدل سازی ریاضی در رژیم غذایی می پردازد (10-15 سال اخیر) 1 صفحه A_4

$\leftarrow$ ⊗ $\leftarrow$ چطور حل کرده؟!!

مسئله برنامه ریزی پرسنل (Work scheduling Prag.) :

یک بیمارستان نیازمند استخدام تعدادی پرسنل تمام وقت است. جدول زیر حداقل پرستار لازم در هر روز کاری را نشان می دهد. طبق قوانین بیمارستان هر پرستار باید 5 روز متوالی کار کند و سپس 2 روز متوالی استراحت کند. می خواهیم ممن برآوردن نیازها و قوانین بیمارستان، تعداد کل پرستار استخدامی min شود؟

PAPCO

ieun.ir

Subject:
Year. Month. Date. ( )

روز کاری	1	2	3	4	5	6	7
تعداد پرستار لازم	17	13	15	19	14	16	11

X متغیر ~~تصادفی~~ تصمیم گیری : تعداد پرستار روز iام : X_i

(روش غلط)

$$\text{Min } Z = X_1 + X_2 + \dots + X_7$$
s.t

① $X_1 \geq 17$

② $X_2 \geq 13$ $\xrightarrow{\text{جواب}}$ $X_1^* = 17$, $X_2^* = 13$, $\vdots$, $X_7^* = 11$

⑦ $X_7 \geq 11$

⑧ $X_1, \dots, X_7 \geq 0$, Int $\qquad Z^* = 105$

مشکل عمده ؟؟ تعریف متغیر تصمیم گیری : این متغیرها مستقل از هم نیستند و تلفیق دارند (تداخل و وابستگی)

✓ متغیر تصمیم گیری : X_i = تعداد پرستارهایی که شیفت کاری خود را روز i-ام شروع می کنند

$i = 1, \dots, 7$

(اینها مستقل اند چون هر دسته با دسته دیگر متفاوت است روز کاری اش)

* با تعریف متغیر تصمیم گیری به این صورت در واقع عدم تداخل و استقلال متغیرهای تصمیم گیری تضمین می شود.

PAPCO

Subject:
Year Month Date ( )

① $X_1 + \quad + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 \geq 17$

② $X_1 + X_2 \quad + X_5 + X_6 + X_7 \geq 13$

③ $X_1 + X_2 + X_3 \quad + X_6 + X_7 \geq 15$

④ $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \quad + X_7 \geq 19$

⑤ $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 \quad \geq 14$

⑥ $X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 \quad \geq 16$

⑦ $X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 \geq 11$

⑧ $X_j \geq 0, \ Int$

حل $Z^* = 23 \therefore \quad X_1^*, X_2^*, X_6^* = 4, \ X_3^* = 2, \ X_4^* = 6, \ X_5^* = 0, X_7^* = 3$

تعداد پرستار بهینه در هر روز :

روز کاری	1	2	3	4	5	6	7
تعداد بهینه پرستار (سمت چپ کمتر مساوی ها)	17	15	17	19	16	16	15
	↕ =			↕		↕	
مورد نیاز	17	13	15	19	14	16	11

⇐ هیچ روزی کمبود نداریم.

تمرین تشویقی : قانون : 2 روز کار، 2 روز استراحت (متوالی)

و در روزهای زوج نیازمند حداقل 15 نفر و در روزهای فرد نیازمند 18 پرستار.

کمینه کاری پرستاری ... ؟

X_{ij}

PAPCO

ieun.ir

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مسئله کاستن ضایعات برش : (Trim-loss Problem)

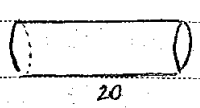
در یک کارخانه‌ی کاغذسازی رول‌های کاغذ به پهنای استاندارد 20 واحد تولید می‌شوند. طول رول‌های کاغذ نیز استاندارد بوده و آنرا L در نظر می‌گیریم. سفارشات مختلفی که به این کارخانه می‌رسد براساس عرض مورد درخواست بریده می‌شود. هدف مدیریت کارخانه آن است که سفارشات مورد نظر با کمترین ضایعات بریده شوند.

منظور از ضایعات هم دور ریز کاغذ و هم تولید کاغذ اضافه بر سفارشات دریافتی است.

فرض کنید یک مشتری سفارشات زیر را به کارخانه داده باشد. مطلوب است تعیین تعداد رول کاغذی که جهت انجام این سفارش باید بریده شود تا کل ضایعات حداقل شود؟

شماره سفارش	عرض درخواستی	تعداد رول درخواستی
1	5	150
2	7	200
3	9	300

اگر مجموع عرض‌ها 20 بود و تعداد یکسان

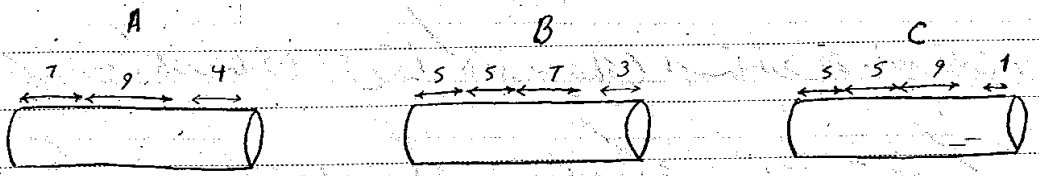


← همان تعداد لازم بود

P4PCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

الگوی برش کارخانه :



جهت درک بهتر مسئله ابتدا فرض کنیم (مدیریت کارخانه) 3 الگوی فوق را جهت برش استفاده می کنیم

طرح تولیدی I جهت پاسخ گویی : 300 رول با A + 75 با B

— II — : 200 با A + 100 با C

کدام بهتر است ؟

اول باید ببینیم نیاز مشتری را برطرف می کند ؛ (موجه بودن) بررسی هر دو امکان پذیرند

	مساحت ناشی از دور ریز کاغذ	مساحت ناشی از اضافه تولید	کل مساحت ضایعات
طرح I	300 x 4 x L + 75 x 3 x L	100 x 7 x L + 75 x 7 x L	2650 L
طرح II	200 x 4 x L + 100 x 1 x L	50 x 5 x L	✓ 1150 L

یا مساحت ضایعات = کل تولید − نیاز

I: 300 x 20 x L + 75 x 20 x L − 4850 L = 2650 L ✓

II : 200 x 20 L + 100 x 20 x L − 4850 L = 1150 L ✓

PAPCO

ieun.ir

Subject:
Year. Month. Date. ( )

حال می خواهیم الگوها و طرح های مختلف تولید کنیم.

عرض	1	2	3	4	5	6	~~7~~
5	0	2	2	4	1	0	3
7	1	1	0	0	2	0	0
9	1	0	1	0	0	2	0
ضایعات	4	3	1	0	1	2	

این الگو در 4 جا می گیرد در واقع الگوهای دیگر تکراری خواهند بود.

← طرح ها ؟؟

{ تمرین تشویقی: الگوریتمی بنویسید و اجرا کنید که با توجه به رول داده شده (مثلاً l) و عرض های مورد درخواست مثلاً ($l_1, \dots, l_k$) بتواند الگوهای برش تولید کند }

X_j : تعداد رول هایی که با الگوی j برش داده می شود.

$Min\ Z =$ کل مساحت ضایعات

کل مساحت ضایعات = کل مساحت تولیدی − کل مساحت مورد نیاز

$$= 20L(X_1 + \dots + X_6) - L(150 \times 5 + 200 \times 7 + 300 \times 9)$$

$$= 20L(X_1 + \dots + X_6) - 4850L$$

مقادیر ثابت در تعیین جواب بهینه نقش ندارند.

PAPCO

10

Subject:
Year: Month: Date: ( )

$\Rightarrow$ هدف : $\text{Min } Z = X_1 + \dots + X_6$

s.t

① $2X_2 + 2X_3 + 4X_4 + X_5 \geq 150$

② $X_1 + X_2 + \quad + 2X_5 \geq -200$

③ $X_1 + X_3 \quad + 2X_6 \geq 300$

④ $X_1, \dots, X_6 \geq 0$, Int

اگر = بگذاریم یک شرط اضافی اضافه کرده ایم

که لازم نیست. چون می تواند اضافه تولید هم داشته باشد و اگر جواب همان مساوی

باشد، در این حالت هم بدست می آید

$37.5 \xrightarrow{\text{گرد پایین}} 37$ جواب فرق می کند

← حل تشویقی : حل با = و $\geq$ و با Int و بدون Int

تمرین تشویقی : در مورد مسئله مورد نظر و تاریخچه آن و روش های حل و انواع مختلف آن

No Int : 0، 0، 0، 12.5، 100، 150 $\quad Z = 262.5$

Int : 0، 0، 25، 0، 100، 130 $\quad Z = 263$

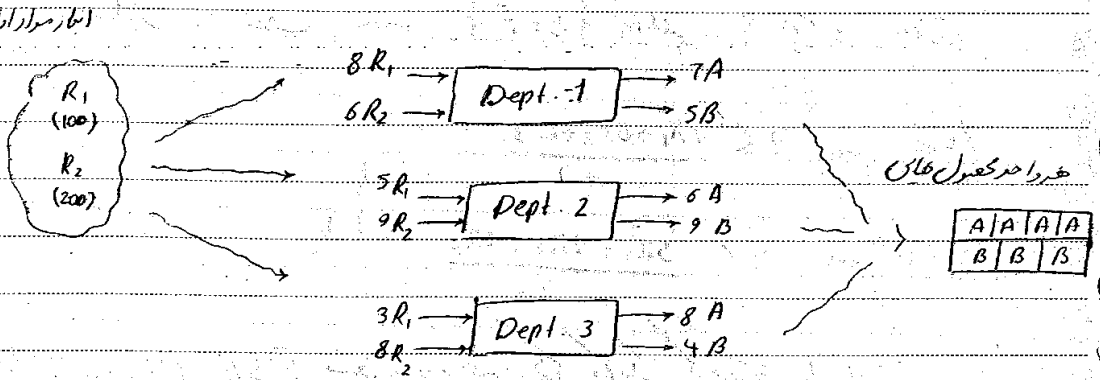
PAPCO

Subject:

Year Month Date ( )

مسئله متوازن کردن خطوط مونتاژ: Assembly Line Balancing Problem

فرض کنید در یک کارگاه یک واحد محصول از مونتاژ 4 واحد قطعه A و 3 واحد قطعه B بدست می آید. قطعات A و B از مواد خام R_1 و R_2 تولید می شوند که به ترتیب 100 واحد و 200 واحد از آن در دسترس است. قطعات A و B در 3 دپارتمان تولیدی تهیه می شوند که تعداد قطعات تولیدی آنها متفاوت و سیکل تولیدی (Production Cycle) آن دپارتمان در طی روز دارد. تعداد قطعات تولیدی A و B در هر سیکل تولیدی دپارتمان ها در جدول زیر آمده. هدف تعیین تعداد سیکل تولیدی هر دپارتمان جهت Max سازی محصول های است.



{ یک محصول باید از 4 مرحله رد شود

50 35 15 60 ظرفیت تولید

{ ← کمترین تولید تعیین کننده ← مطلوب نیست ← باید متوازن شود مثلاً 45 ← 15

PqPCO

ieun.ir

Subject:
Year. Month. Date. ( )

X_j : تعداد سیکل تولیدی هر دپارتمان

محدودیت ها : ① $8X_1 + 5X_2 + 3X_3 \leq 100$

② $6X_1 + 9X_2 + 8X_3 \leq 200$

③ $X_1, X_2, X_3 \geq 0$, Int

تعداد کل A تولیدی : $7X_1 + 6X_2 + 8X_3 \xrightarrow[\text{به درد محصول نهایی}]{\text{تعداد قطعه A که}} (7X_1 + 6X_2 + 8X_3)/4 = E$

تعداد کل B تولیدی : $5X_1 + 9X_2 + 4X_3 \xrightarrow[\text{تعداد B که}]{\text{می خورد}} (5X_1 + 9X_2 + 4X_3)/3$

تعداد محصول نهایی $= \min\{E, F\}$ ⟶ در قالب مدل سازی چنین تابعی نداریم (باید خطی شود)

هدف :

$$\max Z = \min\left\{\frac{7X_1 + 6X_2 + 8X_3}{4}, \frac{5X_1 + 9X_2 + 4X_3}{3}\right\}$$

محدودیت : ④ $Y = \min\{E, F\}$ ⟶ هدف : $\max Z = Y$

$$Y \leq E \rightsquigarrow Y \leq \frac{7X_1 + 6X_2 + 8X_3}{4}$$

$$Y \leq F \rightsquigarrow Y \leq \frac{5X_1 + 9X_2 + 4X_3}{3}$$

می خواهیم Y برابر E یا F شود، با توجه به اینکه دیکامیک کوچکترند با اضافه شدن این دو محدودیت.

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

از کجا بفهمیم Y مساوی E یا F می شود؟ چون تابع هدف $Max\ Z = Y$

است، حتماً Y که بدست می آید max مقدار خود را که E یا F است می گیرد.

محدودیت ④
$$\begin{cases} \rightarrow 7X_1 + 6X_2 + 8X_3 - 4Y \geq 0 & \text{(خطی شد)} \\ \rightarrow 5X_1 + 9X_2 + 4X_3 - 3Y \geq 0 & , \quad Y \geq 0 , \ \underline{Int} \end{cases}$$

تمرین تشویقی: حل مدل فوق

1. $Y \geq 0 , Int$ $\quad Y = 44 = Z \quad 1 \quad 7 \quad 16$
2. $Y \geq 0$ $\quad Y = \ldots \quad 2 \quad 7 \quad 15$

if: $Max\ Z = Max\{\ldots, \ldots\} \xrightarrow{How(?)}$

مدل فرآیند تولید: Production Process Model

شرکت عطرسازی طرشت دو نوع عطر بهار و یاس تولید می کند. ماده اولیه مورد نیاز

جهت هر نوع عطر به مبلغ 3 هزار تومان به ازای هر کیلو خریداری می شود

این ماده اولیه سپس به آزمایشگاه ارسال می شود بنحوی که برای هر کیلوی آن،

1 ساعت کار آزمایشگاهی جهت ادامه فرآیند لازم است که در نهایت از هر کیلوی آن

3 گرم عطر بهار معمولی و 4 گرم عطر یاس معمولی تولید می شود. هر گرم بهار معمولی

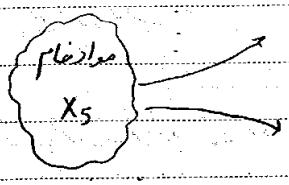
7 هزار تومان و هر گرم یاس معمولی 6 هزار تومان فروخته می شود.

PAPCO

2

Subject:
Year Month Date ( )

البته با ادامه فرآیند تولید می توان عطر ممتاز و پاس ممتاز را تولید کرد که به ترتیب هر گرم آنها 18 و 14 هزار تومان قابل فروش است. برای تولید هر گرم عطر ممتاز باید 3h کار آزمایشگاهی انجام داد و 4 هزار تومان هزینه اضافی به آن هر گرم عطر معمولی و برای پاس ممتاز (هر گرم) ÷ 2h + 4 هزار تومان برای هر گرم پاس معمولی انجام داد. شرکت حداکثر تا 6000h کار آزمایشگاهی و تا 4000 کیلو ماده خام دارد. می خواهیم برنامه تولید شرکت را با هدف حداکثر سازی سود با مدل LP بدست آوریم.



X_5 = مقدار کیلو ماده خام خریداری شده

X_1 = مقدار گرم تولید عطر عطر معمولی

X_2 = عطر عطر ممتاز

X_3 = پاس پاس معمولی

X_4 = پاس پاس ممتاز

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date.

مقدار کیلو X_5 ماده اولیه

$3X_5$ گرم عطر بهار
- X_1 گرم بهار معمولی
- X_2 گرم بهار ممتاز

$4X_5$ گرم عطر یاس
- X_3 گرم ~~بهار~~ معمولی یاس
- X_4 گرم ~~بهار~~ ممتاز

رابطه ریاضی :

$$X_1 + X_2 = 3X_5$$
$$X_3 + X_4 = 4X_5$$

روابط تعادلی

$$\text{Max } Z = 7X_1 + (18-4)X_2 + 6X_3 + (14-4)X_4 - 3X_5$$

s.t.

(1) $X_5 \leq 4000$ → 5000 (?)

(2) $3X_2 + \quad + 2X_4 + X_5 \leq 6000$

(3) $X_1 + X_2 \quad - 3X_5 = 0$

(4) $X_3 + X_4 - 4X_5 = 0$

(5) $X_j \geq 0$, ~~Int~~

جواب : $Z^* = 172,666$ هزار تومان $X_1^* = 11333\frac{1}{3}$ گرم

$X_2^* = 666\frac{2}{3}$ گرم $X_3^* = 16000$ گرم $X_4^* = 0$ گرم

$X_5^* = 4000$ کیلو

برنامه تولید : کیلو 4000 ماده اولیه
- 12000 گرم بهار
  - $11333\frac{1}{3}$ معمولی
  - $666\frac{2}{3}$ ممتاز
- 16000 گرم یاس — فقط معمولی

PAPCO

3

Subject:
Year Month Date ( )

در محدودیت ها، هر مجموعه‌ای که سناریو را ارضا کند، تعیین کننده است.

ممکن است تغییر در سمت راست آن جواب بهینه را تغییر دهد

مسئله امتزاج: Blending Problem

شرکت ملی نفت ایران 3 نوع بنزین: I، II، III تولید می کند که از طریق مخلوط کردن 3 نوع نفت خام بدست می آید: نفت نوع 1، 2، 3.

بنزین های تولیدی از نظر نرخ اکتان و میزان گوگرد باهم متفاوت اند:

نوع بنزین	حداقل متوسط نرخ اکتان	حداکثر متوسط درصد گوگرد	تقاضا روزانه هرشکه	قیمت فروش بشکه
بنزین I	10	1	3000	70
بنزین II	8	2	2000	60
بنزین III	6	1	1000	50

	نرخ اکتان	درصد گوگرد	قیمت هر شکه $
نفت 1	12	0.5	45
نفت 2	6	2	35
نفت 3	8	3	25

PqPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

هزینه تبدیل هر شبکه نفت به هر شبکه بنزین به طور ثابت 4$ است. شرکت توانایی

تولید روزانه 14000 شبکه بنزین را دارد و حداکثر 5000 شبکه نفت را می‌تواند استفاده

کند. از هر کدام هم چنین مدیریت فروش شرکت ادعا می‌کند که به ازای هر دلار جهت تبلیغ هر نوع بنزین

می‌تواند 10 شبکه تقاضای آن نوع بنزین را زیاد کند. برنامه‌ریزی تولید شرکت نفت را

با هدف حداکثر سازی سود خالص بدست آورید

تصمیم گیری

تولید X_{ij} = تعداد شبکه نفت نوع i که به بنزین نوع j تبدیل

هزینه تبلیغات a_i = میزان هزینه تبلیغ بنزین نوع i

درآمد:

$$\max Z = 70(X_{11}+X_{21}+X_{31}) + 60(X_{12}+X_{22}+X_{32}) + 50(X_{13}+X_{23}+X_{33})$$

$$- \Big[45(X_{11}+X_{12}+X_{13}) + 35(X_{21}+X_{22}+X_{23}) + 25(X_{31}+X_{32}+X_{33})$$

C_1 هزینه تولید انواع نفت

هزینه تبدیل — هزینه تبلیغ

$$+ 4(X_{11}+X_{12}+\cdots+X_{33}) + a_1 + a_2 + a_3 \Big]$$

s.t.

محدودیت‌های رابطه تولید و تقاضا

$$X_{11}+X_{21}+X_{31} = 3000 + 10a_1$$
$$X_{12}+X_{22}+X_{32} = 2000 + 10a_2$$
$$X_{13}+X_{23}+X_{33} = 1000 + 10a_3$$

فرض: کلیه تولید ما به مصرف تقاضاها می‌رسد

PAPCO

ieun.ir

Subject:
Year. Month. Date: ( )

محدودیت حداکثر میزان تولید بنزین : $X_{11} + X_{12} + \dots + X_{33} \leq 14000$ if: 16000 → زاید

محدودیت میزان شبکه نفت استفاده شده : $X_{11} + X_{12} + X_{13} \leq 5000$

$X_{21} + X_{22} + X_{23} \leq 5000$

زاید $X_{31} + X_{32} + X_{33} \leq 5000$

محدودیت حداقل متوسط نرخ اتکان : $\dfrac{12X_{11} + 6X_{21} + 8X_{31}}{X_{11} + X_{21} + X_{31}} \geq 10$

هر 3 زاید

$\dfrac{12X_{12} + 6X_{22} + 8X_{32}}{X_{12} + X_{22} + X_{32}} \geq 8$

$\dfrac{12X_{13} + 6X_{23} + 8X_{33}}{X_{13} + X_{23} + X_{33}} \geq 6$

خطی نیستند ← برنامه ریزی ریاضی اند نه برنامه ریزی خطی

← تبدیل به خطی

حداکثر متوسط درصد گوگرد : $\dfrac{\frac{5}{1000}X_{11} + \frac{2}{100}X_{21} + \frac{3}{100}X_{31}}{X_{11} + X_{21} + X_{31}} \leq \frac{1}{100}$

$\dfrac{\frac{5}{1000}X_{12} + \frac{2}{100}X_{22} + \frac{3}{100}X_{32}}{X_{12} + X_{22} + X_{32}} \leq \frac{2}{100}$

$\dfrac{\frac{5}{1000}X_{13} + \frac{2}{100}X_{23} + \frac{3}{100}X_{33}}{X_{13} + X_{23} + X_{33}} \leq \frac{1}{100}$

تمرین تشویقی : بود و نبودش در جواب بهینه تأثیر ندارد

محدودیت علامت : $X_{ij} \geq 0$, Int

$a_i \geq 0$

آیا در مدل محدودیت زاید وجود دارد؟

2. Int , no Int هر دو :

$X_{11} = 2000$ $X_{12} = 2200$ $X_{13} = 800$ $X_{21} = 1000$

$X_{22} = 4000$ $X_{23} = X_{31} = 0$ $X_{32} = 3300$ ← حل ؟

$X_{33} = 200$ $a_1 = a_3 = 0$ $a_2 = 750$ $Z = 287{,}750$

PAPCO

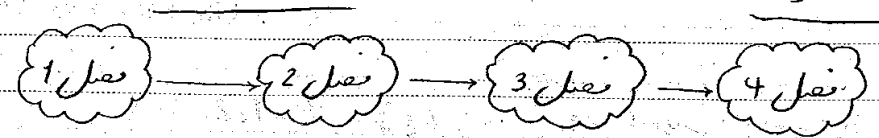
Subject:

Year. Month. Date. ( )

مسئله کنترل موجودی : (Inventory Control)

در یک شرکت قایق سازی مشغول به دستان، تعدادی قایق را در طول فصل های سال تولید می نماید. میزان تقاضاهای شرکت در ابتدای هر سال مشخص می شود و در طی چهار فصل به ترتیب 40، 60، 75، 25 قایق است. شرکت میخواهد کلیه تقاضاها به موقع ارضا شوند. در طی هر فصل شرکت توانایی تولید حداکثر 40 قایق در وقت معمولی دارد که این کار موجب می شود هزینه تولید هر قایق در وقت معمولی 4000000 تومان باشد. شرکت هم چنین می تواند کارگران را وادار سازد که در وقت اضافه کاری قایق تولید کنند. این کار موجب می شود هزینه تولید هر قایق 4500000 تومان شود. در انتهای هر فصل پس از ارضای تقاضاها قایق ها موجود با هزینه 20000 تومان برای هر فصل نگهداری می شود. با استفاده از LP مشخص کنید این شرکت در هر فصل چه مقدار قایق تولید کند تا کل هزینه اش حداقل شود؟ (در ابتدای سال 10 قایق در انبار وجود دارد)

مدل دینامیکی (Dynamic Model) یا مدل چند دوره ای (Multiperiod Model)



PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

این دوره‌ها را هم تأثیر گذارید (انبار و ...)

در یک مدل دینامیکی نیز روابط ریاضی مابین دوره‌ها مهم است.

موجودی + تقاضای فصل t − مقدار تولید در فصل t = موجودی در انتهای فصل t

انتهای فصل $t-1$

عادی اضافه کاری

Y_t : اضافه کاری — X_t : مقدار تولید عادی در فصل t

i_t : مقدار کالایی که در فصل t به انباری رود

$$\rightarrow \quad i_t = (X_t + Y_t) - d_t + i_{t-1}$$

(عدد ثابت)

$$\text{Min } Z = 4000000(X_1+X_2+X_3+X_4) + 4500000(Y_1+Y_2+Y_3+Y_4) + 200000(i_1+i_2+i_3+i_4)$$

s.t. محدودیت‌ها تعادل :

$$i_1 = (X_1+Y_1) + 10 - 40$$
$$i_2 = (X_2+Y_2) + i_1 - 60$$
$$i_3 = (X_3+Y_3) + i_2 - 75$$
$$i_4 = (X_4+Y_4) + i_3 - 25$$

محدودیت موضع بودن : $i_t \geq 0 \quad t = 1, 2, 3, 4$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

محدودیت تولید در وقت عادی : $X_t \leq 40 \quad t = 1,2,3,4$

حداکثر

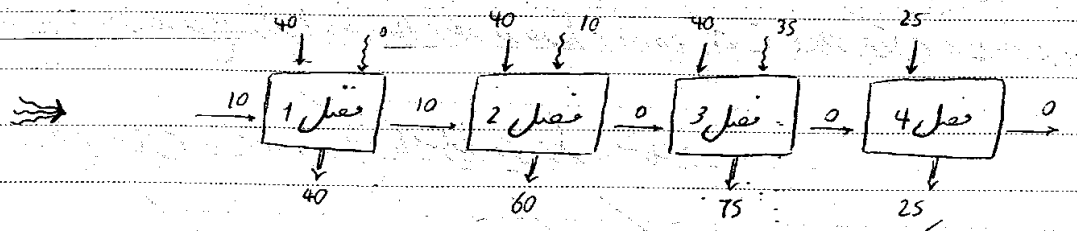
محدودیت علامت : $X_t, i_t, Y_t \geq 0, Int$

جواب :

$$X_1^* = X_2^* = X_3^* = 40, \quad X_4^* = 25$$

$$Y_1^* = Y_4^* = 0, \quad Y_2^* = 10, \quad Y_3^* = 35$$

$$i_2^* = i_3^* = i_4^* = 0, \quad i_1^* = 10 \quad , \quad Z^* = 784\,500\,000$$



می خواهیم تا زمانی که تولید در وقت عادی = 40 نرسیده، اضافه تولید نداشته باشیم :

$X_t < 40 \Rightarrow Y_t = 0 \qquad X_t < 40 \times Y_t > 0$

اینجا به دلیل وجود تابع هدف که ضریب Y ها بزرگتر از ضریب X هاست ← خود تابع هدف X را max کرده و بسمت راست Y می رود

اگر تابع هدف نباشد ؟؟ ← محدودیت ها ؟ ← تشویق

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مدل سازی مسائل با استفاده از متغیرهای صفر و یک :

مسئله بودجه بندی سرمایه :

Capital budgeting problem

یک شرکت 5 طرح مختلف جهت سرمایه گذاری با نام طرح های I_1 ، I_2 ، I_3 ، I_4 ، I_5 بررسی می کند. مقدار سرمایه شرکت در حال حاضر (سال 0) 40 میلیون تومان و در سال 1 مقدار 20 میلیون تومان است. و پیش بینی سود حاصل ناشی از هر سرمایه گذاری به همراه سرمایه مورد نیاز هر طرح در ابتدا و سال بعد در جدول آمده. جهت max کردن سود حاصل مطلوب چه طرح هایی را انتخاب کنیم تا شرایط زیر برآورده شود :

I) اگر در I_2 سرمایه گذاری کند باید در I_1 هم سرمایه گذاری کند.

II) شرکت می تواند همزمان در I_2 و I_4 سرمایه گذاری کند.

III) شرکت حداکثر در 3 طرح می تواند سرمایه گذاری کند.

	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5
سرمایه مورد نیاز در حال حاضر	11	14	15	5	29
سرمایه مورد نیاز در سال 1	3	6	5	8	14
سود حاصل بعد طرح (NPV)	13	17	14	8	20

P4PCO

ieun.ir

Subject:
Year. Month. Date. ( )

با استفاده از روابط اقتصاد مهندسی، همه ارزش ها را به سال ۰ می بریم.

* در مسائلی که باید در مورد انتخاب یا عدم انتخاب یک طرح، گزینه، تصمیم گیری نمائیم از

متغیر صفر و یک (Zero-one Variable) استفاده می کنیم $X_j = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$

(متغیری گسسته است) طرح I_j انتخاب شود

$$\text{Max } Z = 13X_1 + 17X_2 + 14X_3 + 8X_4 + 20X_5$$

s.t.

محدودیت (1) $11X_1 + 14X_2 + 15X_3 + 5X_4 + 29X_5 \leq 40$

سرمایه گذاری (2) $3X_1 + 6X_2 + 5X_3 + 8X_4 + 14X_5 \leq 20$

* اگر در طرح I_2 سرمایه گذاری باید در I_1 هم: $X_2 = 1 \rightarrow X_1 = 1$

$X_1 \bigcirc X_2$? $=$ $\leq$ $\geq$ ✓ if $X_2 = 1 \rightarrow X_1 = 1$

if $X_2 = 0 \rightarrow X_1 = 0, 1$

$\Rightarrow$ (3) $X_2 \leq X_1$

* شرکت نمی تواند در I_2 و I_4 همزمان سرمایه گذاری کند:

(4) $X_2 + X_4 \leq 1$

* حداکثر در 3 طرح: (5) $X_1 + \dots + X_5 \leq 3$

(6) $X_j = (0, 1)$

PAPCO

17

Subject:
Year. Month. Date. ( )

تمرین تشویقی: 1. حل کنید با Lingo

$X_1 = X_2 = X_3 = 1$

$X_4 = X_5 = 0$

2. حل مدل با محدودیت های جدید:

$X_2 \leq X_1 + X_3$

سرمایه گذاری در I_2 منوط به اینکه در I_1 یا I_3 سرمایه گذاری کرده باشیم (جایگزین (4))

وقتی هم I_2 و I_4 انتخاب شود، دیگر طرح I_3 انتخاب نشود (") ⇐ همان جواب

(همزمان)

$X_2 + X_4 + X_3 \leq 2$

* این مدل برنامه ریزی خطی نیست. خطی پیوسته است اما این مدل گسسته است

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

Knapsack Problem — مسئله کوله پشتی :

هنگام عزیمت به کوه جهت تمدید اعصاب، کوله پشتی شما توانایی حمل حداکثر 14 kg بار را دارد. با توجه به محدودیت وزنی کوله، می خواهید از این 8 قلم جنسی که برای صعود نیاز دارید، اقلام ارزشمندتر را انتخاب نمائید. برای این منظور به هر قلم جنس یک ارزش عددی را در مقیاس [0-20] طبق جدول، اختصاص می دهید، با برنامه ریزی مشخص کنید چه اقلامی بیاورید؟

شماره	1	2	3	4	5	6	7	8
وزن (kg)	5	4	3	6	7	9	8	2
ارزش عددی	17	16	20	18	14	19	15	12

$$X_j = \begin{cases} 1 & \text{جنس } j \text{ ام انتخاب} \\ 0 & \end{cases}$$

$$\text{Max } Z = 17X_1 + 16X_2 + 20X_3 + 18X_4 + 14X_5 + 19X_6 + 15X_7 + 12X_8$$

s.t.

$$(1) \quad 5X_1 + 4X_2 + 3X_3 + 6X_4 + 7X_5 + 9X_6 + 8X_7 + 2X_8 \leq 14$$

$$X_j = (0, 1)$$

* مسئله کوله پشتی یک مسئله ی تک محدودیتی است ⇐ جواب های موجه را به راحتی پیدا می کنیم

PAPCO

Subject:
Year: Month: Date:

* مسئله بهینه سازی ترکیبی (COP) Combinatorial Optimization Problem :

مسئله‌ای است که در آن تعداد جواب‌ها موجه خیلی زیاد یا نه است و یافتن جواب بهینه به دلیل گستردگی فضای موجه کار ساده‌ای نیست.

• مثلاً در این مسئله در کل 2^8 جواب وجود دارد (۰ یا ۱) می‌توانیم همه را امتحان کنیم تا جواب‌های موجه بدست آیند. (اما با زیاد شدن تعداد متغیرها خیلی سخت می‌شود)

2^n

ارزش هر وقا از هر جنس :

3.4 4 6.6 3 2 2.1 1.8 6

$X_3 = 1$ (هر وقا ارزش بیشتر) ← ظرفیت وزن باقیمانده : $14-3=11$

$X_8 = 1$ $11-2=9$ باقی

$X_2 = 1$ $9-4=5$

$X_1 = 1$ $5-5=0$ ⇒ $(1,1,1,0,0,0,0,1)$

$Z = 65$

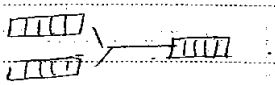
تمرین تشویقی : آیا جواب بدست آمده از روش فوق برای مسئله کوله‌پشتی همواره جواب بهینه است؟ یا نه

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

برای حل مسائل COP در دهه‌های اخیر روش‌های متعددی موسوم به «روش‌های متاهیوریستیک» (Metaheuristic) توسعه پیدا کرده که این روش‌ها جواب‌هایی را تولید می‌کند که هم موجه‌اند و هم بسیار نزدیک به نقطه بهینه (حتی ممکن است نقطه‌ی بهینه نیز باشند) و هم بسیار سریع‌اند. از جمله روش‌های ... می‌توان به الگوریتم ژنتیک (Genetic Algorithm) = GA، الگوریتم کلونی مورچگان (Ant Colony Optimazation) = ACO، الگوریتم جست‌وجوی ممنوع (Tabu Search) = TS

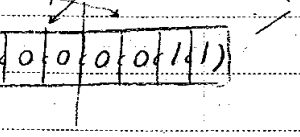
* علم ژنتیک به مطالعه قوانین توارث در موجودات زنده می‌پردازد. بر مبنای این قوانین از ترکیب کروموزوم‌های پدر و مادر که خود از ژن‌های مختلفی تشکیل شده است، کروموزوم فرزند به وجود می‌آید که برخی از ژن‌های آن مشابه پدر یا مادر است.



در مسئله کوله:

45 $X_1^{(1)} = (1|1|0|0|0|0|0|1)$

27 $X_2^{(1)} = (0|0|0|0|0|0|1|1)$



$X_3 = \boxed{0|0|1|1|0|0|0|0}$ 38

X_4 $\boxed{0|0|0|1|1|1|0|0}$ غیرموجه

(روش معاوضه)

جواب‌های جدید که ممکن است موجه نباشند

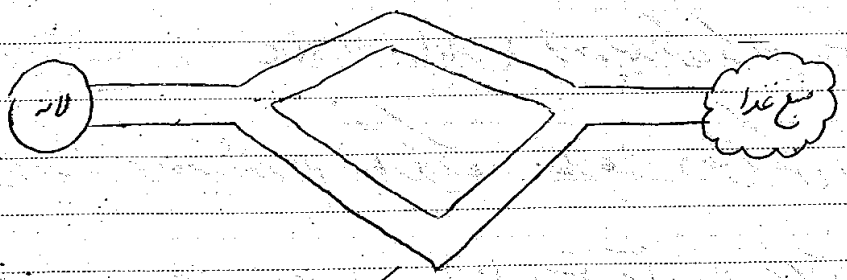
تمرین تشویقی: طراحی و اجرای یک الگوریتم GA برای حل مسئله کوله

PAPCO

9

Subject:
Year. Month. Date. ( )

ACO



مورچه ها وقتی از لانه خارج می شوند دسته ای از راه کوتاه و دسته ای از راه طولانی می روند. تعدادی که از راه کوتاه تر رفته اند زودتر باز می گردند و از مورچه های بعدی به علت تراکم ماده های ترشح شده تعداد زیادی، مسیر کوتاه را برمی گزینند و به تدریج تعداد مورچه های راه کوتاه زیاد می شود

ieun.ir

PAPCO

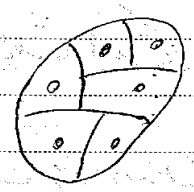
Subject:
Year. Month. Date. ( )

Set Covering Problem

مسئله پوشش مجموعه:

سازمان آتش نشانی استان تهران طرح احداث ایستگاه های آتش نشانی را در 6 منطقه شهری در دست بررسی دارد. در جدول زیر فواصل مراکز این مناطق نسبت به هم داده شده سازمان می خواهد یا در هر مرکز، ایستگاه باشد و یا در فاصله حداکثر 15 km آن ایستگاه موجود باشد و در ضمن، کل تعداد ایستگاه های تاسیس شده، حداقل شود. مدل برنامه ریزی آن را رسیدن به این هدف؟

	2	3	4	5	6
منطقه 1	10	20	30	30	20
منطقه 2	25	35	20	10	
3	15	30	20		
4	15	25			
5	14				



$$X_j = \begin{cases} 1 & \text{اگر ایستگاه در مرکز منطقه } j \text{ احداث شود} \\ 0 & \end{cases}$$

$$\min Z = X_1 + \cdots + X_6$$

s.t.

(1) $X_1 + X_2 \geq 1$ یا در خود 1 باید باشد یا در فاصله کمتر از 15 km آن

(2) $X_1 + X_2 + X_6 \geq 1$

(3) $X_3 + X_4 \geq 1$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

(4) $X_3 + X_4 + X_5 \geq 1$

(5) $X_4 + X_5 + X_6 \geq 1$

(6) $X_2 + X_5 + X_6 \geq 1$

(7) $X_j = (0, 1)$

* اگر یک X ی بود که با 1 بودن همه شرط‌ها را ارضا کند جواب 1 می‌شد اما وجود ندارد

* دوتا وجود دارد؟

$Z^* = 2 \quad X_2^* = X_4^* = 1 \qquad X_1^* = X_3^* = X_5^* = X_6^* = 0 \quad \Leftarrow \quad X_4 \text{ و } X_2$: بله

تمرین تشویقی: یک مقاله یا تحقیق کاربردی در زمینه این مسئله با ذکر مأخذ به خلاصه؟

مسئله هزینه ثابت: Fixed charge Problem

در یک کارگاه برای راه اندازی ماشین آلات نیاز به یک هزینه ثابت است که مستقل از تعداد محصولات تولیدی با ماشین آلات مورد نظر است و هزینه راه اندازی نامیده می‌شود. بنابراین تولید هر محصول از دو بخش هزینه‌یابی تشکیل می‌شود. هزینه ثابت (۱) و هزینه متغیر که بستگی به مقدار محصول تولیدی دارد.

در جدول، هزینه ثابت (k_j) و هزینه متغیر (c_j) وابسته به هر واحد از 3 نوع محصولی که در کارگاه ساخته می‌شود به همراه میزان ماده اولیه و ساعت کار مورد نیاز داده شده، کارخانه حداکثر 160 ماده اولیه و حداقل 150 ساعت کار دارد. حداقل سازی کل هزینه؟

PAPCO

Subject:
Year: Month: Date: ( )

	مواد اولیه	ساعت کار	k_j	c_j
محصول 1	4	3	200	6
2	3	2	150	4
3	4	6	100	8

در این مسئله برای یک محصول مورد نیاز مثلاً محصول j متغیر تصمیم گیری:

X_j = تعداد محصول نوع j

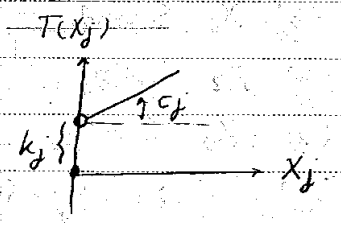
هزینه تولید X_j واحد $T(x_j) = \begin{cases} k_j + c_j x_j & x_j > 0 \\ 0 & x_j = 0 \end{cases}$

$$\min z = \sum_j T(x_j)$$

s.t

① $3X_1 + 2X_2 + 6X_3 \geq 150$

② $4X_1 + 3X_2 + 4X_3 \leq 160$



در این مسئله تولید یا عدم تولید - دلیل تابع هدف یک متغیر هم است = متغیر وابسته y_j

تعریف:

$y_j = \begin{cases} 1 & \text{از محصول j تولید داشته باشیم} \\ 0 & \text{— نداشته —} \end{cases}$

می خواهیم: $X_j > 0 \Rightarrow y_j = 1$ $\quad X_j = 0 \rightarrow y_j = 0$

جهت تبدیل روابط ۱ و ۲ محدودیت، داریم:

if: $X_j \leq y_j \rightarrow X \rightarrow$

P4PCO

21

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$X_j \leq M y_j$ $\qquad$ M = یک عدد بسیار بزرگ مثبت

$$\begin{cases} X_j > 0 \Rightarrow \text{عدد مثبت} \leq M y_j \xrightarrow{(0,1)} y_j = 1 \rightsquigarrow \text{هدف} : c_j X_j + k_j \\ X_j = 0 \Rightarrow 0 \leq M y_j \rightsquigarrow y_j = 1 \rightsquigarrow k_j \;\; y_j = 0 \rightsquigarrow 0 \end{cases}$$

با تابع هدف درست می‌شه

چون min است

$\Rightarrow$ تابع هدف : $\min Z = (6X_1 + 200y_1) + (4X_2 + 150y_2) + (8X_3 + 100y_3)$

s.t.

(3) $X_1 \leq M y_1$

(4) $X_2 \leq M y_2$ $\rightsquigarrow$ M ها را باید تعیین کنیم

(5) $X_3 \leq M y_3$ $\qquad$ مثلاً 60

(6) $X_i \geq 0 \,,\, y_j = (0,1)$

تمرین تشویقی : به ازای مقادیر مختلف M حل ؟ کمترین M ؟

$X_1 = Y_1 = X_2 = Y_2 = 0 \qquad Y_3 = 1 \qquad X_3 = 25 \qquad Z = 300$

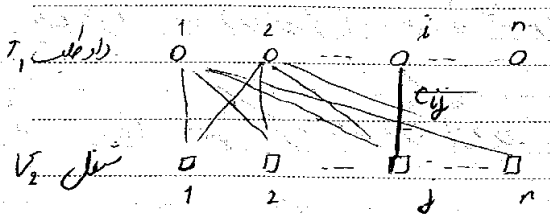
min برای M : 25

PAPCO

Subject:
Year Month Date ( )

مسئله تخصیص (کارگماری): Assignment Problem

در یک سازمان، n شغل موجود است جهت تصدی این n شغل، n داوطلب مراجعه می کنند که هریک توانایی انجام هریک از مشاغل مذکور را دارند. می خواهیم به هر داوطلب یک شغل و به هر شغل یک داوطلب به نحوی تخصیص یابد. اگر هزینه تخصیص شغل داوطلب i به شغل j را با c_{ij} نمایش دهیم، تخصیص داوطلبان به مشاغل چگونه باشد تا کل هزینه تخصیص حداقل شود؟



هر یال در گراف فوق بین یکی از اعضای V_1 و یکی از اعضای V_2 است و بین هیچ یک از اعضای V_1 (یا V_2) به تنهایی یال نداریم ⇐ گراف دوبخشی

+ اینجا عام یال ها ممکن یا این دو مجموعه V_1 و V_2 موجود است ⇐ گراف دوبخشی کامل

+ به هر یال هزینه (وزن) c_{ij} اختصاص می یابد ⇐ گراف دوبخشی کامل وزن دار

تعداد جواب ها موجه: $n!$

متغیر تصمیم گیری: $x_{ij} \begin{cases} 1 & \text{داوطلب } i \text{ به شغل } j \text{ اختصاص} \\ 0 & \end{cases}$

PAPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$\text{Min } Z = \sum_i \sum_j C_{ij} X_{ij}$$

s.t.

(1) $\sum_j X_{ij} = 1$, $i = 1, 2, \dots, n$ ، (2) $\sum_i X_{ij} = 1$, $j = 1, 2, \dots, n$ هرکدام n نامحدودیت

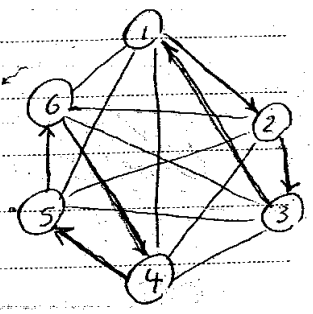
(3) $X_{ij} = (0, 1)$

مسئله فروشنده دوره گرد : Traveling Salesman Problem (TSP)

یک فروشنده دوره‌گردی خواهد از شهر خودش (شهر 1) شروع کرده و پس از بازدید از (n-1) شهر دیگر به شهر مبدأ بازگردد. او می‌خواهد در هریک از شهرها مذکور فقط یکبار وارد و خارج شود. اگر فاصله شهر i تا شهر j را d_{ij} فرض کنیم که جزء اطلاعات مسئله داده شده باشد، می‌خواهیم تور یا کمترین مسافت را که در آن فروشنده از شهر خودش شروع کرده و پس از بازدید از تمام (n-1) شهر دیگر به شهر مبدأ با توجه به شرایط گفته شده بازگردد را بیابیم.

d_{ij}	1	2	3	4	5	6
1	x	10	21			
2		x				
3			x			
4				x		
5					x	
6						x

یک تور



Subject:

Year. Month. Date. ( )

✓ جواب ها موجه زیادی وجود دارند. در یک مسئله با n شهر می توان $(n-1)!$

جواب جهت بازدید از تمام شهرها داشت ← مسئله از نوع COP است.

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{از شهر } i \text{ به شهر } j \text{ برود} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\min_{s.t} Z = \sum_i \sum_j d_{ij} X_{ij}$$

(I) $\sum_i X_{ij} = 1$ ($j = 1, 2, 3, \dots, n$) (به هر شهر یکبار وارد)

(II) $\sum_j X_{ij} = 1$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) (از هر شهر یکبار خارج)

؟ آیا با این محدودیت ها به جواب بهینه می رسد؟

با احتمال کم می توان رسید، اما آن وقتی است که محدودیت ها تعدی زاید باشند

می خواهیم جواب هایی مثل جواب زیر صدق نکند:

$X_{12} = X_{23} = X_{31} = 1$

$X_{44} = X_{45} = X_{56} = 1$

* اگر جوابی در مسئله TSP داشته باشیم که در دسته محدودیت های (I) و (II) صدق کند اما شکل یک تور کامل را ندهد (مثل آن بازدید از $(n-1)$ شهر به شهر اول بازگردد).

به آن زیر تور (Sub tour) گویند.

برای مدل سازی مسئله TSP نیاز مند محدودیت هایی هستیم که مانع ایجاد زیر تور شود که به آنها

P4PCO

Subject:
Year: Month: Date: ( )

محدودیت حذف زیرتور (Subtour Elimination Constraint) گویند

زیرتور شهرها را به حداقل 2 مجموعه تقسیم می‌کند. قسمتی که 1 را شامل می‌شود Q

و بقیه را $\bar{Q}$ می‌نامیم. اگر حداقل 1 یال بین Q و $\bar{Q}$ ها باشد مشکل حل می‌شود:

V کل شهرها : $Q+\bar{Q}=V$

③ $\sum_{i\in Q}\sum_{j\in\bar{Q}} X_{ij} \geq 1$ → تعداد : 2^n-2 ← ∅ و V نمی‌شود *

زیاد!

تمرین تشویقی : روش‌های نوشتن حذف زیرتور +

به کارگیری آن در یک مدل TSP با هفت شهر ← مرجع :

* با توجه به محدودیت‌های 1 و 2 می‌توان تعدادی را هم حذف کرد اما وقتی n بزرگ است

و 2^n نمایی است چندان تأثیری ندارد.

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

Either - Or Constraint : فعال / غیرفعال نمودن یک محدودیت از بین دو محدودیت

گاهی اوقات در مدل سازی می خواهیم محدودیت هایی داشته باشیم که در آن از بین دو محدودیت I و II در هر زمان یکی به صورت محدودیت فعال و دیگری به صورت محدودیت زاید در آید:

$$\begin{cases} f(x_1, \dots, x_n) \le b_1 & (I) \\ g(x_1, \dots, x_n) \le b_2 & (II) \end{cases}$$

برای این منظور از متغیر 0,1 y کمک می گیریم: $y = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} f(x_1, \dots, x_n) \le b_1 + My & (I) \\ g(x_1, \dots, x_n) \le b_2 + M(1-y) & (II) \end{cases}$$

$y=0 \Rightarrow$ I فعال، II زاید

$y=1 \Rightarrow$ II فعال، I زاید

$$f_1 \le b_1 + My_1$$
$$\vdots$$
$$P_t \le b_t + My_t \qquad y_1 + \dots + y_t = t - k$$

اگر بخواهیم k تا از t فعال شود

فرم های استاندارد و کانونی مسئله LP :

تعریف: در فرم کانونی (Canonical Form) مسئله برنامه ریزی خطی 3 شرط زیر باید برقرار باشد:

1. تمام متغیرها مسئله غیرمنفی هستند.

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date.

2. تمام محدودیت ها به صورت $\geq$ هستند

3. تابع هدف به صورت max است

* هر مسئله LP را می‌توان به صورت فرم کانونی نوشت.

به صورت کانونی؟

$$\min Z = 3X_1 + 4X_2 + 5X_3$$

s.t.

(1) $X_1 + 2X_2 + 3X_3 \leq 4$

(2) $2X_1 + 3X_2 - X_3 \geq 5$

(3) $X_2 - 5X_3 = 4$

(4) $|3X_1 + 5X_2 - 6X_3| \leq 6$

(5) $X_1, X_2 \geq 0$, X_3 urs ⟶ unrestricted In Sign

هر عدد را می‌توان به صورت تفاضل دو عدد مثبت نوشت:

$X_3 \rightarrow X_3^+ - X_3^-$

$X_3^+, X_3^- \geq 0$

⟹ (5) ⟶ $X_1, X_2, X_3^+, X_3^- \geq 0$ همه متغیرها $X_3^+ - X_3^-$ ، X_3 می‌گذاریم

تابع هدف $\xrightarrow{\times(-)}$ $\max Z = -3X_1 - 4X_2 - 5(X_3^+ - X_3^-)$

(1) ⟶ $X_1 + 2X_2 + 3(X_3^+ - X_3^-) \leq 4$

(2) ⟶ $\times(-)$ ⟶ $-2X_1 - 3X_2 + (X_3^+ - X_3^-) \leq -5$

(3) ⟶ $X_2 - 5(X_3^+ - X_3^-) \leq 4$

$-X_2 + 5(X_3^+ - X_3^-) \leq -4$

PAPCO

Subject:
Year: Month. Date. ( )

(4) $3X_1 + 5X_2 - 6(X_3^+ - X_3^-) \leq 6$

$-3X_1 - 5X_2 + 6(X_3^+ - X_3^-) \leq 6$

if $|\ldots| \geq 6 \Rightarrow \begin{matrix} \ldots \geq 6 \\ \text{یا} \\ \ldots \geq 6 \end{matrix} \longrightarrow y = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$

در فرم استاندارد برنامه ریزی خطی : باید 3 شرط زیر برقرار باشند :

1. تمام متغیرهای مسئله غیرمنفی هستند.

2. تمام محدودیت های مسئله (به جز محدودیت علامت) بصورت تساوی اند.

3. تمام مقادیر سمت راست محدودیت ها غیرمنفی اند ($\forall i : b_i \geq 0$)

* هر مسئله LP به فرم استاندارد قابل تبدیل است

اگر در یک مسئله محدودیتی به صورت $a_1X_1 + \cdots + a_nX_n \leq b$ وجود داشت شرط دوم

چگونه برقرار می شود ؟

برای تبدیل محدودیت فوق به صورت تساوی از متغیری به نام متغیر کمکی (Slack Variable)

استفاده می شود به این ترتیب که : $a_1X_1 + \cdots + a_nX_n + S = b$

S متغیر است چون معلوم نیست مقدارش چند است

$S = b - (a_1X_1 + \cdots + a_nX_n) \qquad S \geq 0$

PAPCO

25

Subject:

Year Month Date ( )

اگر محدودیتی به صورت $a_1X_1 + \cdots + a_nX_n \geq b$ وجود داشت شرط دوم چگونه برقرار؟

$\rightsquigarrow -a_1X_1 - \cdots - a_nX_n \leq -b \rightsquigarrow$

$-a_1X_1 - \cdots - a_nX_n + S = -b$ ✗

چون معمولاً مقادیر سمت راست b در مسئله اولیه غیرمنفی است با توجه به شرط دوم نمی‌توان از روش فوق استفاده کرد.

برای تبدیل نامساوی فوق به حالت تساوی از متغیری به نام متغیر مازاد (Surplus Variable) استفاده می‌شود، بدین ترتیب که:

$a_1X_1 + \cdots + a_nX_n - E = b$

$E = (a_1X_1 + \cdots + a_nX_n) - b \rightsquigarrow E \geq 0$

مثال: فرم استاندارد؟

$\max z = 10X_1 + 15X_2$

s.t.

① $X_1 \leq 100$ ② $X_2 \leq 100$

③ $50X_1 + 35X_2 \leq 4000$

④ $20X_1 + 15X_2 \geq 2000$

⑤ $X_1, X_2 \geq 0$

شرط 1 برقرار است.

① $\rightsquigarrow X_1 + S_1 = 100$

② $\rightsquigarrow X_2 + S_2 = 100$

PAPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

(3) → $50X_1 + 35X_2 + S_3 = 4000$

(4) → $20X_1 + 15X_2 - E_1 = 2000$

(5) $X_1, X_2 \geq 0$ ، $S_1, S_2, S_3, E_1 \geq 0$

1 و 2 و 3 و 4 تشکیل یک دستگاه معادلات می دهند:

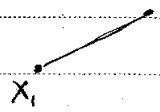
متغیرها: 6 تا تعداد معادلات: 4 ⇐ این دستگاه بی شمار جواب دارد.

⇐ جواب هایی که همه + نیستند حذف می کنیم. حل رسیدن به یک جواب؟

ترکیب محدب (Convex Cambinator) از دو نقطه X_1, X_2 عبارتست از:

یک نقطه نظیر X بحوریکه: $X = \lambda X_1 + (1-\lambda)X_2$

$0 \leq \lambda \leq 1$



⇐ از لحاظ هندسی: ترکیب محدب دو نقطه پاره خطی که این دو نقطه را بهم متصل می کند.

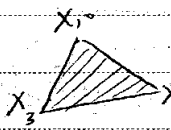
مجموعه تمام نقاط

⇐ ترکیب محدب 3 نقطه: $X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3$

$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$

$0 \leq \lambda_i \leq 1$

هندسی: تمام رو و توی مثلث:



Subject:

Year. Month. Date. ( )

* ترکیب محدب n نقطه :

$$X = \lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_n X_n$$

$$\sum \lambda_i = 1$$

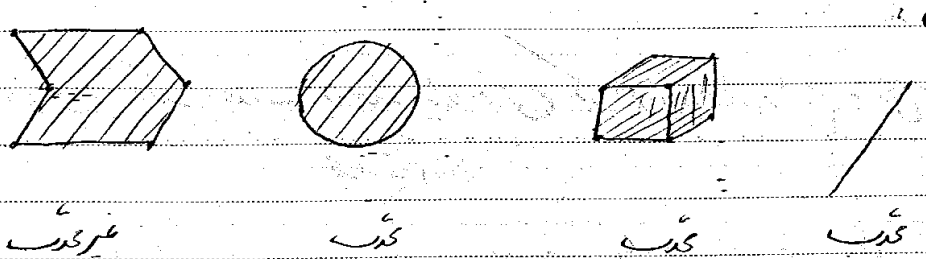
$$\lambda_i \geq 0$$

✓ مجموعه محدب : ← مجموعه که مجموعه محدب (Convex Set) نقطه ای شود اگر برای هر دو نقطه ی دلخواه $X_1, X_2 \in S$ داشته باشیم :

$$\forall\ X_1, X_2 \in S \quad : \begin{cases} \lambda X_1 + (1-\lambda) X_2 \\ 0 \leq \lambda \leq 1 \end{cases} \in S$$

هندسی : باره خطی که هر دو نقطه از مجموعه را به هم وصل می کند داخل مجموعه.

مثال :



غیرمحدب محدب محدب محدب

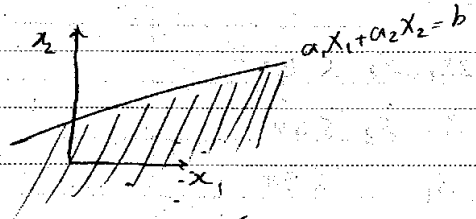
در یک مجموعه محدب نظیر که ← نقطه X نقطه گوشه (Extreme Point) گوییم اگر نتوان آن را به صورت ترکیب محدب دو نقطه متمایز دیگر نوشت.

* هر نقطه ی غیر گوشه در یک مجموعه محدب را می توان به صورت ترکیب محدب نقاط گوشه متمایز نوشت.

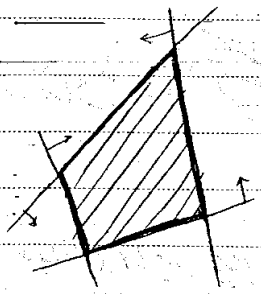
Subject:
Year. Month. Date. ( )

* به هر نامعادله به صورت $a_1X_1 + \cdots + a_nX_n \leq b$ یک نیم فضا (Half Space) گوییم. چون مجموعه تمام نقاط فضا را به دو زیرمجموعه تقسیم می کند.

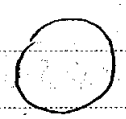
$a_1X_1 + a_2X_2 \leq b$:



در مسئله های LP ، ناحیه تشکیل از محدودیت ها در واقع ناحیه ای است که از اشتراک مابین تعدادی محدود نیم فضا تشکیل می شود.



اگر محل تقاطع تعداد محدودی نیم فضا تشکیل یک مجموعه محدب را دهد به آن چندوجهی محدب (Convex Polyhedron) گویند.

*  مجموعه محدب است اما چندوجهی محدب نیست.

* مکعب چندوجهی محدب است که از برخورد نیم فضاها (که شامل وجه های مکعب اند

*

PAPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

حل ترسیمی مسائل برنامه ریزی خطی با دو متغیر اصلی :

- $\min Z = 3X_1 + 2X_2$

s.t.

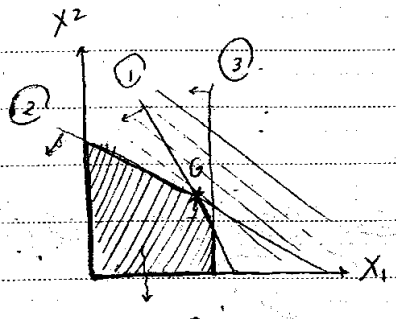
① $2X_1 + X_2 \leq 100$

② $X_1 + X_2 \leq 80$

③ $X_1 \leq 40$

④ $X_1, X_2 \geq 0$ ⟶ $G(20,60)$

- هنگامی که دو متغیر اصلی نظیر X_1 و X_2 در مسئله وجود داشته باشند می توان نیم فضاها مربوط به محدودیت ها را در فضای دو بعدی ترسیم کرد :



S : ناحیه موجه

طبق تعریف ، فضای ناحیه موجه (Feasible Space/ region) در یک مسئله LP عبارت از مجموعه تمام نقاطی که در همه محدودیت های مسئله (اصلی + علامت) صدق کند.

هر نقطه متعلق به فضای موجه در واقع یک نقطه جواب موجه است : Feasible Solution

* هر جواب موجه مسئله LP که بهترین مقدار تابع هدف را تولید کند جواب بهینه (Optimal Solution) نامیده می شود.

Subject:
Year: Month. Date. ( )

برای $Z=400$ خط $3X_1+2X_2$ را رسم و ...

* در یک مسئله LP با تابع هدف max (یا min) خطوط موازی هم که برای تخصیص مقادیر مختلف به تابع هدف به دست می‌آید خطوط هم سود (خطوط هم هزینه) گویند.

Iso-cost lines Iso-profit lines

برای یافتن جواب بهینه مسئله LP در حالت کلی، می‌توان خطوط هم سود را به جهتی رسم کرد که بیشترین مقدار Z را از بین نقاط موجه مسئله LP مشخص کند

قضیه: ناحیه موجه که به صورت $S=\{X \mid AX \le b, X \ge 0\}$ تشکیل یک مجموعه محدب (یا محدب) را می‌دهد

اثبات: فرض کنید دو نقطه X_1 و X_2 متعلق به مجموعه‌ای که خود دارند، در اینصورت:

$$X_1 \in S \Rightarrow \begin{cases} AX_1 \le b \\ X_1 \ge 0 \end{cases} \qquad X_2 \in S \Rightarrow \begin{cases} AX_2 \le b \\ X_2 \ge 0 \end{cases}$$

$\times\lambda$ ↓ $\qquad$ ($\times(1-\lambda)$)

$$\begin{cases} A\lambda X_1 \le \lambda b \\ \lambda X_1 \ge 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} A(1-\lambda)X_2 \le b(1-\lambda) \\ (1-\lambda)X_2 \ge 0 \end{cases}$$

$+$

$$\Rightarrow \begin{cases} A[\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2] \le \lambda b + (1-\lambda)b \\ \lambda X_1 + (1-\lambda)X_2 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2] \le b \\ \lambda X_1 + (1-\lambda)X_2 \ge 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow X \in S \Rightarrow \lambda X_1 + (1-\lambda)X_2 \in S \rightsquigarrow$ محدب

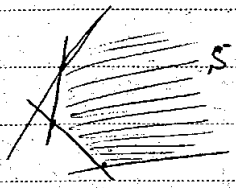
P4PCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

* به یک چندوجهی محدب محدود گویند اگر از یک نقطهٔ دلخواه موجه در درون فضای موجه مربوط به آن در هر سمتی حرکت کنیم یک نیم فضا وجود دارد که مانع پیشروی ما خواهد شد.

در واقع یک نیم فضای محدودکننده در هر سمتی از چندوجهی وجود دارد.

* چندوجهی محدب نامحدود:



اینجا نقاط گوشه می‌توانند قسمتی از S را بدهند.

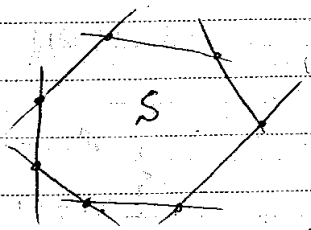
* در یک چندوجهی محدب محدود، هر نقطه غیرگوشه را می‌توان به صورت ترکیب محدب نقاط گوشهٔ چندوجهی محدب نوشت.

قضیه: در یک مسئله LP به صورت زیر اگر فضای S محدود باشد، در اینصورت جواب بهینه در صورت وجود در حداقل یکی از گوشه‌ها اتفاق می‌افتد.

$LP: \max Z = CX$

$AX \leq b$

$X \geq 0$



اثبات: از قضایای کلی قبلی می‌دانیم که فضای S یک چندوجهی محدب است و با توجه به شرایط مسئله، محدود است. فرض کنید که مجموعه نقاط گوشهٔ S به صورت زیر:

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

فرض کنید جواب بهینه $P=\{X_1^*, \dots, X_t^*\}$ ← {نیم فضاها محدودند}

مسئله LP Y^* باشد. اگر $Y^* \in P$، قضیه اثبات شده. پس فرض کنید $Y^* \notin P$

⇐ می‌توان به صورت ترکیب محدب نقاط گوشه عضو P نوشت:

$$Y^* = \sum \lambda_i X_i^*$$

$$\sum \lambda_i = 1 \qquad Z^* = CY^* \Rightarrow Z^* = C \sum \lambda_i X_i^*$$

$$\lambda_i \geq 0 \qquad \Rightarrow Z^* = \sum_i C\lambda_i X_i^* \quad (I)$$

حال از بین t نقطه گوشه فرض کنید که نقطه X_p^* بهترین تابع هدف را تولید می‌کند:

$$\max_{i \in P} [CX_i^*] = CX_p^* \Rightarrow CX_i^* < CX_p^* \quad i=1,\dots,t \quad i \neq p$$

(= هم می‌شود اما یکی کافی است) : $i=p \rightarrow CX_p^* = CX_p^*$

$$0 \leq \lambda_i \leq 1 \xrightarrow[\text{می‌شه}]{\text{جهت عمومی}} \sum C\lambda_i X_i^* < \sum C\lambda_i X_p^* \xrightarrow{(I)} Z_{Y^*}^* < \sum C\lambda_i X_p^*$$

$$\Rightarrow Z_{Y^*}^* < CX_p^* \underbrace{\sum \lambda_i}_{1} \Rightarrow Z_{Y^*}^* < CX_p^* \Rightarrow Z_{Y^*}^* < Z_{X_p^*}^*$$

← تناقض با اینکه Y^* بهینه است.

PAPCO

Subject:
Year: Month Date ( )

تعیین نقاط گوشه فضای موجه به صورت جبری:

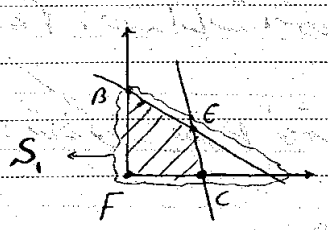
$\max z = 4X_1 + 3X_2$

s.t.

① $X_1 + X_2 \leq 40$

② $2X_1 + X_2 \leq 60$

③ $X_1, X_2 \geq 0$



↓ استاندارد

① $X_1 + X_2 + S_1 = 40$

② $2X_1 + X_2 + S_2 = 60$

③ $X_1, X_2, S_1, S_2 \geq 0$

* هر جواب که از طریق حل دستگاه معادلات مربوط به فرم استاندارد ما توجه به غیر منفی بودن متغیرها بدست می‌آید در حقیقت یک نقطه موجه از فضای S است. پس نقطه گوشه فضای S نیز که در واقع یک نقطه موجه است باید به طریق از روی جواب‌های مربوط به حل دستگاه معادلات یافتی شود.

تعریف: در سیستم معادلات $AX = b$ که فرض می‌شود دارای m معادله و n متغیر $(n \geq m)$ یک جواب پایه (Basic Solution) بدین صورت بدست می‌آید که تعداد $n-m$ متغیر را مساوی صفر فرض کرده و دستگاه m معادله و m متغیر حاصل را به شرط داشتن جواب حل می‌کنند.

در مثال ماتریس ضرایب $\neq 0$ ← ستون‌ها وابسته ← m متغیر مستقل حل باشند

P4PCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

حل مثال قبل :

$n = 4$

$m = 2$ ← 2 تا را ۰ قرار می دهیم

$S_1 = S_2 = 0 \Rightarrow$ $X_1 + X_2 = 40$ $\quad X_1 \quad X_2$

$2X_1 + X_2 = 60$ $\quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ← مستقل

$\Rightarrow X_1 = X_2 = 20$ ← $(20, 20, 0, 0)$: معادل نقطه E در فضای موجه

تعریف : به m متغیر موجود در یک جواب پایه‌ای که از حل دستگاه معادلات m متغیر و m معادله بدست می آید متغیرهای پایه‌ای (Basic Variables) و به (n-m) متغیری که صفر فرض شده‌اند متغیرهای غیر پایه‌ای (NonBasic Variables) گفته می شود. مجموعه متغیرهای پایه‌ای را با X_B و مجموعه متغیرهای غیر پایه‌ای را با X_N نشان می دهیم

$X_B = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \qquad X_N = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix}$

به ماتریس m×m که به وسیله ضرایب متغیرهای پایه‌ای بدست می آید ماتریس پایه‌ای (Basic Matrix) گویند : B - به ماتریسی که به وسیله متغیرهای غیر پایه‌ای بدست می آید ماتریس غیر پایه‌ای (Nonbasic Matrix) گویند : N ($m \times (n-m)$)

$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

PAPCO

30

Subject:

Year: Month: Date:

X_B	X_N	(X_1, X_2, S_1, S_2)	نقطه گوشه
X_1, X_2	S_1, S_2	$(20, 20, 0, 0)$	E ✓
S_1, S_2	X_1, X_2	$(0, 0, 40, 60)$	F ✓
X_2, S_1	X_1, S_2	$(0, 60, -20, 0)$	D ✗

تعریف: در یک جواب پایه‌ای حاصل از حل دستگاه معادلات هنگامی که کلیه مقادیر متغیرها غیرمنفی باشند آن جواب پایه‌ای موجه (Basic Feasible Solution) یا به اختصار BFS گویند. (محدودیت علامت صدق کند)

* هر BFS وابسته به یک نقطه گوشه فضای موجه است و بالعکس

X_2, S_2	X_1, S_1	$(0, 40, 0, 20)$	B ✓
X_1, S_1	X_2, S_2	$(30, 0, 10, 0)$	C ✓
X_1, S_2	X_2, S_1	$(40, 0, 0, -20)$	A ✗

P4PCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$LP \begin{cases} Max\ Z = CX \\ AX = b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

متغیرها به 2 بخش : $X = \begin{bmatrix} X_B \\ X_N \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow [B, N] \begin{bmatrix} X_B \\ X_N \end{bmatrix} = b \Rightarrow BX_B + NX_N = b$$

$$X_N = 0 \Rightarrow BX_B = b \Rightarrow X_B = B^{-1} b$$

$$X_B = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow X_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 40 \\ 60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \end{bmatrix}$$

الگوریتم حل مسئله LP :

1. از یک BFS اولیه شروع می کنیم (اگر که داشته باشیم ، بهتر است که ها را XB انتخاب)

← F بدست می آید ، می خواهیم از F به C, B برسیم.

تعریف : به دو BFS مجاور (همسایه) هم گفته می شود اگر در یک مسئله LP با m محدودیت و n متغیر دارای (m-1) متغیر پایه مشترک باشند. دو BFS مجاور هم وابسته به دو نقطه ی گوشه مجاور در فضای موجه می باشند. فقط یک متغیر پایه متفاوت دارند

2. به یکی از BFS های مجاور می رویم.

$B \leftarrow E \leftarrow C$ به F

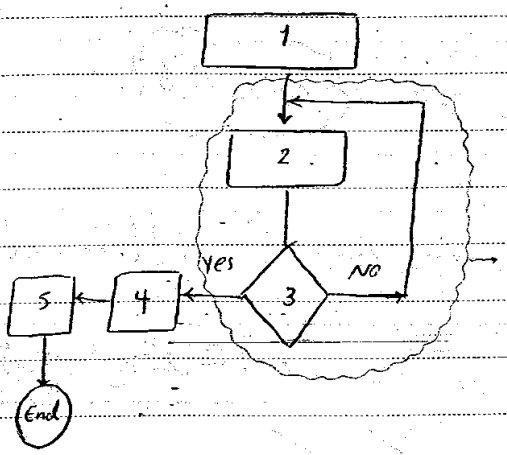
PAPCO

31

Subject:
Year: Month: Date: ( )

3. آیا همه BFS ها بررسی شده اند؟ Yes

4. مقادیر تابع هدف BFS را پیدا کن ← 5. جواب بهینه را مشخص کن



مزیت: حتماً جواب بهینه یک مسئله LP را

درصورت وجود تولید می کند.

معیار متوقف شدن الگوریتم

تعداد دفعات اجرای حلقه موجود در الگوریتم:

تعداد BFS های موجود در یک مسئله LP

بدترین حالت (تعداد): $\binom{n}{m}$ ← وقتی همه BFS در پیاید

تمرین تشویقی: یک مسئله LP طراحی کنید که در آن تمام جواب های پایه ای BFS

شوند با این شرط که 1) $m \geq 5$, $n \geq 7$ 2) $d_A \geq 40\%$

$d_A = \frac{\text{تعداد عناصر غیرصفر}}{\text{تعداد کل عناصر}}$ ← چگالی ماتریس ✓

P4PCO

ieun.ir

Subject:
Year Month Date ( )

Simplex Algorithm — الگوریتم سیمپلکس :

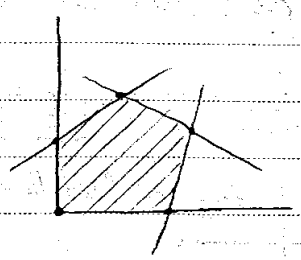
الگوریتم سیمپلکس توسط G. Dantzig برای حل مسائل LP طراحی شد.

در این الگوریتم سعی می‌شود هر BFS جدید که مجاور BFS قبلی است به نحوی تولید شود که همواره مقدار تابع هدف را بهبود بخشد. شرط موجه بودن

شرط بهینگی

* Simplex نوعی خاص از ترکیب محدب است.

بردارها



مثال :

$$\max z = 4X_1 + 3X_2$$

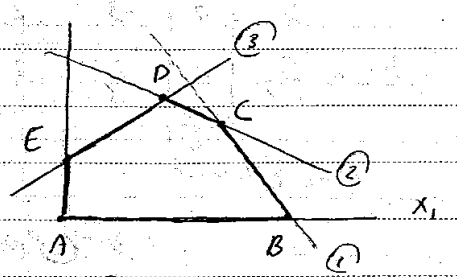
s.t.

$$(1)\quad 2X_1 - 3X_2 + S_1 = 6$$

$$(2)\quad -3X_1 + 2X_2 + S_2 = 3$$

$$(3)\quad 2X_1 + X_2 + S_3 = 4$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$



متغیرها : S_1 — S_2 S_3

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B^{-1} = B \qquad X_B = B^{-1}b$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$\Rightarrow \quad X_B = Ib = b$

* اگر در یک مسئله برنامه ریزی خطی همه ی محدودیت های اولیه به صورت $\leq$ باشند

که با اضافه کردن متغیرهای Slack در فرم استاندارد به صورت = درآیند، در اینصورت

برای یافتن BFS اولیه در الگوریتم سیمپلکس از متغیرهای پایه $X_B = \begin{pmatrix} S_1 \\ \vdots \\ S_m \end{pmatrix}$ استفاده می کنیم

* تمام محاسبات مربوط به الگوریتم S در جدولی به نام جدول Simplex انجام می شود.

جدول S:

نقطه گوشه A	Z	X_1	X_2	X_3 S_1	X_4 S_2	X_5 S_3	RHS
Z	1	-4	-3	0	0	0	0
S_1	0	2	3	1	0	0	6
S_2	0	-3	2	0	1	0	3
جدول بعدی S_3	0	2	1	0	0	1	4

همواره به این صورت

RHS ← Right Hand Side

سطر تابع هدف / سطر Z / سطر 0

* تابع هدف مسئله نیز به صورت یک معادله نشان داده می شود:

$$Z = C_1X_1 + \dots + C_nX_n \rightarrow Z - C_1X_1 - \dots - C_nX_n = 0$$

* اگر فرض کنیم متغیرهای مسئله (متغیرهای اصلی / اضافی / مازاد) به صورت $X_1, \dots, X_n$

نام گذاری شوند ستون ضرایب وابسته به هر متغیر X_j در محدودیت ها y_j نامگذاری می شود

PAPCO

Subject:

Year Month Date ( )

مثلا: $y_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $y_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

* عنصر موجود در i-امین ردیف ستون y_j را به صورت y_{ij} نمایش می‌دهیم

$y_{22} = 2$ $y_{13} = 1$ $y_{34} = 0$

* عناصر موجود در ستون RHS وابسته به هر متغیر پایه در واقع مقدار آن متغیر پایه در جدول مربوطه است.

$S_1 = 6$ $S_2 = 3$ $S_3 = 4$

✓ در جدول شروع این مقادیر در واقع مقادیر سمت راست محدودیت های ما هستند. $b = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

بردار ستونی وابسته به مقادیر متغیرهای پایه را به صورت $\bar{b}$ نمایش می‌دهیم $\begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \bar{b}_m \end{pmatrix} = \bar{b}$

در جدول شروع $X_B = b = \bar{b}_I$ $\bar{b}_1 = 6$ $\bar{b}_2 = 3$ $\bar{b}_3 = 4$

* برای هر ستون وابسته به متغیر X_j در سطر z (سطر تابع هدف) نماد $z_j - c_j$ استفاده می‌شود:

$z_2 - c_2 = -3$

$z_5 - c_5 = 0$

$z_1 - c_1 = -4$

✓ در جدول شروع: $z_j - c_j = -c_j$

Subject:
Year: Month: Date: ( )

متغیر وارد شونده به پایه (The Entering Variable) : یکی از متغیرهای غیر پایه تکرار فعلی است که قرار است در تکرار بعدی وارد پایه شود و به وسیله شرط بهینگی (Optimality Condition) تعیین می شود.

شرط بهینگی : متغیری نظیر X_k جهت ورود به پایه انتخاب می شود که در یک مسئله به فرم Max دارای $\min\{z_j - c_j \mid z_j - c_j < 0\} = z_k - c_k$ (اگر Min باشد مثبت ترین در بین مثبت ها)

منفی ترین در بین منفی ها

متغیر خارج شونده از پایه : یکی از متغیرهای پایه — از پایه خارج شود و به وسیله شرط موجه بودن (Feasibility Condition) تعیین ← The Leaving V

(Max و Min فرقی نمی کند)

شرط موجه بودن :

دستگاه فعلاً (با اطلاعات جدید) ←

① $2X_1 + S_1 = 6$ $\quad S_1 = 6 - 2X_1$

② $-3X_1 + S_2 = 3$ $\longmapsto$ $S_2 = 3 + 3X_1$

③ $2X_1 + S_3 = 4$ $\quad S_3 = 4 - 2X_1$

با ورود X_1 به داخل پایه و با توجه به تابع هدف (Max) می خواهیم حتی الامکان X_1 بزرگتر شود یعنی X_1 تا جایی بزرگتر شود که سایر متغیرها منفی نشوند.

حدود $\Rightarrow$ $X_1 \leq \frac{6}{2} = 3$ $\Rightarrow X_1 = 2 \longrightarrow S_3 = 0$ $\quad S_1, S_2 > 0$

$X_1 \leq 4/2 = 2$

جهت خروج از پایه انتخاب می شه

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

شرط موجه بودن: فرض کنید متغیر X_k به عنوان متغیر ورودی انتخاب شده باشد در این صورت

متغیر X_r به عنوان متغیر خروجی از پایه انتخاب می شود اگر:

$$\min\left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} \;\middle|\; y_{ik} > 0 \right\} = \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}}$$

* به محاسبه $\min\{\ \}$ تست نسبت (Ratio Test) گویند.

$$\min\left\{ \frac{6}{2}, \dots, \frac{4}{2} \right\} = 2 \Longrightarrow S_3 \text{ خروجی}$$

* اگر در تست نسبت، $\forall i: y_{ik} \leq 0$ شد یعنی مسئله دارای جواب ∞ است

جواب بی کران (Unbounded Solution)

قطر B	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	RHS
Z	1	0	-1	0	0	2	8
S_1	0	0	2	1	0	-1	2
S_2	0	0	$3\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{3}{2}$	9
X_1	0	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	2

$\times 3 + R_2$

دستگاه معادلات طوری بازنویسی می شود که به جای S_3، X_1 متغیر پایه باشد. (در معادله سوم

ضریبش ۱ و در بقیه ۰ شود)

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

(3) $X_1 + \frac{1}{2} X_2 + \frac{1}{2} S_3 = 2$

(2) $3\frac{1}{2} X_2 + S_2 + \frac{3}{2} S_3 = 9$

(1) $2X_2 + S_1 - S_3 = 2$

هدف: (0) $Z - X_2 + 2S_3 = 8$ می‌خواهیم X_1 ضریبش ۰ شود

پایه

$\Rightarrow$ $X_1 = 2$ $X_2 = 0$ $S_1 = 2$ $S_2 = 9$

$S_3 = 0$ $Z = 8$

محل تقاطع ورودی و خروجی = عنصر پاشنه = عنصر لولا

* وقتی متوقف می‌شویم که دیگر متغیری برای ورود به پایه نیابیم.

$$\begin{array}{cccc} & S_1 & S_2 & X_1 \\ I = & \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right. & \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} & \left.\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right] \end{array}$$

با توجه به شرط بهینگی (منفی‌ترین در منفی‌ها) ← ورودی: X_2

شرط موجه بودن: $\min\left\{ \frac{2}{2}, \frac{9}{3\frac{1}{2}}, \frac{2}{\frac{1}{2}} \right\} = 1 \Rightarrow S_1$ خروجی

PAPCO

Subject:

Year Month Date ( )

متغیر C	z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	RHS
z	1	0	0	1/2	0	3/2	9
X_2	0	0	1	1/2	0	-1/2	1
S_2	0	0	0	-1/4	1	13/4	11/2
X_1	0	1	0	-1/4	0	3/4	3/2

* چون تمام $z_j - c_j$ ها مثبت شدند، پس به جدول بهینه رسیده‌ایم.

* اگر روش معمولی را به کار می‌بردیم، باید همه BFS ها را بررسی می‌کردیم.

* ضرایب متغیرهای پایه در محدودیت‌ها ۱ است. ضریب متغیرهای پایه در سطر z صفر است.

خلاصه روش سیمپلکس برای یک مسئله استاندارد با تابع هدف max :

1. یک BFS اولیه را انتخاب می‌کنیم. برای این منظور:

الف) اگر مسئله اصلی به فرم کانونی بود در این صورت کلیه متغیرهای کمکی $S_1, \dots, S_m$ که هنوز تبدیل به فرم استاندارد استفاده نشده‌اند به عنوان BFS اولیه استفاده می‌شوند.

ب) اگر به دلیل وجود محدودیت‌های به شکل $\geq$ یا $=$ در مسئله اصلی امکان تشخیص BFS اولیه وجود نداشت در این صورت باید از روش‌هایی نظیر روش M بزرگ (Big M method) یا روش دو فاز (Two Phase method) استفاده می‌شود. (بعداً)

PqPCO

35

Subject:

Year Month Date ( )

2. انتخاب متغیر ورودی ← پایه ← از طریق شرط بهینگی : در این صورت متغیر X_k جهت ورود به پایه انتخاب می شود اگر $Z_k - C_k = \min\{Z_j - C_j \mid Z_j - C_j < 0\}$.

شرط توقف : اگر $Z_j - C_j \geq 0$ ، $\forall j$ ، حل بهینه است و متوقف می شویم.

3. انتخاب متغیر خروجی از پایه از طریق شرط موجه بودن (تست سمت) در اینصورت متغیر X_r برای خروج از پایه انتخاب می شود اگر : $\min\left\{\frac{b_i}{y_{ik}} \mid y_{ik} > 0\right\} = \frac{b_r}{y_{rk}}$

اگر $y_{ik} < 0$: $\forall i$ حل مسئله نامحدود است.

4. تکرار جدید الگوریتم با جایگزینی متغیر X_k در داخل پایه و خروج متغیر X_2 از داخل پایه قبلی ، انجام عملیات سطری - مقدماتی (روش گوس - جردن) جهت تعیین مقادیر جدید عناصر جدول جدید ، بازگشت به گام 2

مثال :

$$\max Z = 60X_1 + 30X_2 + 20X_3$$

s.t.

(1) $8X_1 + 6X_2 + X_3 \leq 48$

(2) $4X_1 + 2X_2 + \frac{3}{2}X_3 \leq 20$

(3) $2X_1 + \frac{3}{2}X_2 + \frac{1}{2}X_3 \leq 8$

(4) $X_2 \leq 5$ ← زائد $\qquad X_1, \ldots, X_4 \geq 0$

حل بهینه ← $Z^* = 280 \qquad X_1^* = 2 \qquad X_2^* = 0 \qquad X_3^* = 8$

P4PCO

Subject:

Year Month Date: ( )

$\text{Max } Z = 60X_1 + 30X_2 + 20X_3$

s.t

(1) $8X_1 + 6X_2 + X_3 + S_1 = 48$

(2) $4X_1 + 2X_2 + \frac{3}{2}X_3 + S_2 = 20$

(3) $2X_1 + \frac{3}{2}X_2 + \frac{1}{2}X_3 + S_3 = 8$

$X_1, X_2, X_3, S_1, S_2, S_3 \geq 0$

	Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	RHS
Z	1	-60	-30	-20	0	0	0	0
S_1	0	8	6	1	1	0	0	48
S_2	0	4	2	3/2	0	1	0	20
S_3	0	2	3/2	1/2	0	0	1	8

	Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	RHS
Z	1	0	15	-5	0	0	30	240
S_1	0	0	0	-1	1	0	-4	16
S_2	0	0	-1	1/2	0	1	-2	4
X_1	0	1	3/4	1/4	0	0	1/2	4

	Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	RHS
Z	1	0	5	0	0	10	10	280
S_1	0	0	-2	0	1	0	-8	24
X_3	0	0	-2	1	0	2	-4	8
X_1	0	1	5/4	0	0	-1/2	3/2	2

$X_1^* = 2$

$X_3^* = 8$

$X_2^* = 0$

$Z^* = 280$

P4PCO

5.5

Subject:
Year. Month. Date: ( )

شکل ماتریسی جدول Simplex :

$$* \quad \max z = CX \qquad \max z = [C_B \; C_N]\begin{bmatrix} X_B \\ X_N \end{bmatrix}$$

$$AX = b \quad \rightsquigarrow \quad [B, N]\begin{bmatrix} X_B \\ X_N \end{bmatrix} = b$$

$$X \geq 0 \qquad X_B, X_N \geq 0$$

$$\Downarrow$$

$$\rightsquigarrow \quad * \quad \max z = C_B X_B + C_N X_N \qquad X_N = 0 \Rightarrow BX_B = b$$

$$BX_B + N X_N = b \qquad \Rightarrow X_B = B^{-1} b$$

$$X_B, X_N \geq 0 \qquad (X_N = 0) \Rightarrow Z = C_B B^{-1} b$$

$$\checkmark \quad BX_B + NX_N = b \xrightarrow{B^{-1}} \underbrace{B^{-1}B}_{I} X_B + B^{-1}NX_N = \underbrace{B^{-1}b}_{\bar{b}}$$

$$\Rightarrow X_B = B^{-1}b - B^{-1}NX_N = B^{-1}b - B^{-1}\sum_{j \in NBU} a_j x_j$$

حد پایه

$$\Rightarrow X_B = B^{-1}b - \sum_{j \in NBU} B^{-1} a_j x_j \qquad \text{فرض}: \; y_j = B^{-1} a_j$$

$$\Rightarrow X_B = B^{-1}b - \sum_{j \in NBU} y_j x_j$$

$$\checkmark \quad \text{هدف}: \quad Z = C_B X_B + C_N X_N \rightarrow Z - C_B X_B - C_N X_N = 0 \Rightarrow$$

PAPCO

16

Subject:

Year Month Date ( )

$X_B = \bar{B}^{-1}b - \sum$ جایگزاری $\rightsquigarrow$ $Z - C_B(\bar{B}^{-1}b - \sum \bar{B}^{-1}a_j X_j) - C_N X_N = 0$

$\Rightarrow Z - C_B\bar{B}^{-1}b + \sum_{j\in NBV} C_B\bar{B}^{-1}a_j X_j - C_N X_N = 0 \Rightarrow Z - C_B\bar{B}^{-1}b + \sum_{j\in} C_B\bar{B}^{-1}a_j X_j - \sum_{j\in} C_j X_j =$

$Z = C_B\bar{B}^{-1}b - \sum_{j\in NBV} (C_B\bar{B}^{-1}a_j - C_j)X_j$ فرض: $Z_j = C_B\bar{B}^{-1}a_j$

$\Rightarrow Z = C_B\bar{B}^{-1}b - \sum_{j\in NBV} (Z_j - C_j)X_j$

		X_j
	Z	$Z_j - C_j$
$X_B =$	X_{B_1}	y_{1j}
	X_{B_2}	y_{2j}
	$\vdots$	$\vdots$
	X_{B_m}	y_{mj}
		y_j

* سمت تغیر در تابع هدف، از

یک واحد تغیر در متغیر غیرپایه X_j: $\frac{\partial Z}{\partial X_j}$

$\frac{\partial Z}{\partial X_j} = -(Z_j - C_j)$ $\Rightarrow$ هر عددی را متغیر در سطر Z نوشته می‌شود

قرینه‌ی سمت ... است. (شرط بهینگی ماکزیمال)

✓ ورود متغیرهای غیرپایه به پایه تأثیری روی متغیرهای پایه می‌گذارد؟؟ yes

PAPCO

Subject:

Year. Month. Date:

* $-y_{ij} = \frac{\partial x_B}{\partial x_j}$ = ضریب تغییر در متغیرهای پایه به ازای ۱ واحد تغییر در متغیر غیرپایه x_j

* $-y_{ij} = \frac{\partial x_{B_i}}{\partial x_j}$ = ضریب تغییر در i امین متغیر پایه به ازای یک واحد تغییر در متغیر غیرپایه x_j

* اگر بخواهیم مقادیر موجود در بردار سمت راست b را تغییر دهیم در این صورت:

$\partial z/\partial b = C_B B^{-1}$ ($1\times m$, $m\times m$) $\Rightarrow$ $\partial z/\partial b$ $1\times m$ why?

(بردار سطری)

چون باید به ازای همه محدودیت‌ها باشد.

مثال:

$$\max Z = -X_1 - X_2 + 4X_3$$

s.t.
$$X_1 + X_2 + 2X_3 + X_4 = 9$$
$$X_1 + X_2 - X_3 + X_5 = 2$$
$$-X_1 + X_2 + X_3 + X_6 = 4$$
$$X_1, \dots, X_6 \geq 0$$

$\partial z/\partial b$

	z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	RHS
z	1	0	4	0	1	0	2	17
X_1	0	1	$-1/3$	0	$1/3$	0	$-2/3$	$1/3$
X_5	0	0	2	0	0	1	1	6
X_3	0	0	$2/3$	1	$1/3$	0	$1/3$	$13/3$

B^{-1}

P4PCO

Subject:
Year. Month. Date. (-)

$$X_B = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_5 \\ X_3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$X_B = B^{-1} b = B^{-1} \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 6 \\ 13/3 \end{pmatrix} \qquad Z = C_B B^{-1} b = (-1, 0, 4) \begin{pmatrix} 1/3 \\ 6 \\ 13/3 \end{pmatrix} = 17$$

$$Y_2 = B^{-1} a_2 = B^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2 \\ 2/3 \end{pmatrix} \qquad Y_6 = B^{-1} a_6 = B^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

$$Z_2 - C_2 = C_B \underbrace{B^{-1} a_2}_{y_2} - C_2 = (-1, 0, 4) \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2 \\ 2/3 \end{pmatrix} - (-1) = 4$$

* جدول بهینه بوده است :)

* مثلاً می‌خواهیم به یک BFS دیگر برویم :

$$\frac{\partial Z}{\partial X_j} = -(Z_j - C_j)$$

$$\Rightarrow \quad \partial Z / \partial X_2 = -4 \qquad \partial Z / \partial X_4 = -1 \qquad \partial Z / \partial X_6 = -2$$

⇐ با ورود به پایه تابع هدف را بدتر می‌کند ⇐ جواب بهینه است و لازم نیست.

* مثلاً اگر X_2 وارد پایه شود :

$$\frac{\partial X_B}{\partial X_2} = -y_2 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2 \\ -2/3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightsquigarrow \frac{\partial X_1}{\partial X_2} \\ \rightsquigarrow \frac{\partial X_5}{\partial X_2} \\ \rightsquigarrow \frac{\partial X_3}{\partial X_2} \end{matrix}$$

* با ورود X_6 به پایه X_1 ↑

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

* به $C_B B^{-1}$ ضریب سیمپلکس می‌گوییم.

$$\partial z/\partial b = C_B B^{-1} = (-1, 0, 4)\, B^{-1} = (1, 0, 2)$$

$$\partial z/\partial b_1 \quad \partial z/\partial b_2 \quad \partial z/\partial b_3$$

نشان می‌دهد که محدودیت‌های 1 و 3 به حد خود رسیده‌اند اما هنوز در محدودیت 2 جا دارد که متغیرها اضافه شوند.

$$(Y_4, Y_5, Y_6) = B^{-1}(a_4, a_5, a_6) = B^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

* همواره ستون‌های زیر متغیرهای کمکی B^{-1} را مشخص می‌کنند.

* اگر محدودیت‌های اصلی مسئله به صورت $\leq$ باشند، در این صورت با اضافه شدن متغیرهای کمکی $(S_1, \dots, S_m)$ به فرم استاندارد تبدیل شده و ستون‌های وابسته به آنها در هر جدول سیمپلکس $(Y_{S_1}, Y_{S_2}, \dots, Y_{S_m})$ تشکیل B^{-1} می‌دهند.

$$(z_4 - c_4, z_5 - c_5, z_6 - c_6) = C_B B^{-1}(a_4, a_5, a_6) - (c_4, c_5, c_6) = C_B B^{-1}$$

* ضریب سیمپلکس در مسئله فوق در واقع $z_j - c_j$ متغیرهای کمکی است.

PAPCO

38

Subject:
Year. Month. Date. ( )
ieun.ir

*** شکل ماتریسی Simplex :

	$Z_j - C_j$ X_j	RHS
Z	$C_B B^{-1} a_j - C_j$	$C_B B^{-1} b$
X_B	$B^{-1} a_j$	$B^{-1} b$

* همه اطلاعات را داریم. با دانستن متغیرهای پایه B ، $\Leftarrow$ B^{-1} را محاسبه

شرط بهینگی روش Simplex :

می‌خواهیم از بین متغیرهای غیرپایه تکرار فعلی $Z = C_B B^{-1} b - \sum_{j \in NBV} (Z_j - C_j) X_j$ متغیری وارد پایه شود که در مسئله Max بیشترین تغییر در تابع هدف به وجود آورد ،

$$\max_{j \in NBV} \left[\partial Z / \partial X_j \right] = \max \left[-(Z_j - C_j) \right]$$

که معادل منفی‌ترین $Z_j - C_j$ است.

شرط موجه بودن (Feasiblity Condition) :

فرض کنید متغیر X_k در یک تکرار جهت ورود به پایه انتخاب شده است. حال می‌خواهیم متغیر خروجی از پایه را تعیین کنیم

		X_k	
	Z		
X_B	X_{B_1}		$B^{-1} b$
	$\vdots$		
	X_{B_m}		

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date: ( )

$$X_B = B^{-1}b - \sum_{j \in NBV} Y_j X_j \xrightarrow{X_k \text{ به پایه}} X_B = B^{-1}b - Y_k X_k$$

برای i-امین متغیر پایه فعلی یعنی X_{B_i} مقدار این تغییر عبارتست از:

$$X_{B_i} = (B^{-1}b)_i - Y_{ik} X_k$$

X_k قرار است پس از ورود به پایه غیرمنفی باشد و هم چنین سایر متغیرهای پایه فعلی را منفی نکند پس:

$$\begin{cases} \forall i: X_{B_i} \geq 0 \\ X_k \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (B^{-1}b)_i - Y_{ik} X_k \geq 0 \\ X_k \geq 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} X_k \leq \left.\dfrac{(B^{-1}b)_i}{Y_{ik}}\right|_{y_{ik}>0} \\ X_k \geq 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{از min هم کوچکتر}} \min \left\{ \frac{\overbrace{(B^{-1}b)_i}^{\bar{b}}}{y_{ik}} \,\middle|\, y_{ik} > 0 \right\}$$

«قسمت نسبت»

* در روش Simplex از BFS فعلی موجود سعی می شود به BFS همسایه حرکت کند به نحوی که مقدار تابع هدف بدتر نشود.

PAPCO

Subject:

Year Month Date ( )

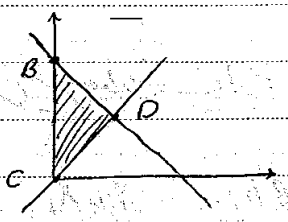
$\max Z = 5X_1 + 2X_2$

s.t.

(1) $X_1 + X_2 + S_1 = 6$

(2) $X_1 - X_2 + S_2 = 0$

$X_1, X_2, S_1, S_2 \geq 0$



X_B	X_N	X_1, X_2, S_1, S_2	نقطه گوشه
(S_1, S_2)	(X_1, X_2)	$0, 0, 6, 0$	C
(X_1, S_1)	(X_2, S_2)	$0, 0, 6, 0$	C
(X_2, S_1)	(X_1, S_2)	$0, 0, 6, 0$	C

* باید $n-m$ تا ۰ (اینجا ۲ تا) وجود داشته باشد اما اینجا زیاد است (۳ تا)،
من توان تشخیص داد کدام غیرپایه ای بوده!

* اگر در یک BFS مسئله LP مقدار حداقل یکی از متغیرهای پایه ای ۰ شود به آن BFS
تباهیده می‌نامند (Degenerate BFS)

* در یک BFS تباهیده تعداد ۰ها موجود $> n-m$.

در D: S_1, S_2 پایه، X_1, X_2 غیرپایه اما در C چطور؟

Subject:

Year Month Date: ( )

$C(0,0,6,0)$ پایه S_1 $\longrightarrow$ X_1, X_2, S_2 کدام 2 تا ؟

این BFS محل برخورد 3 نیم‌فضاست

(بنابراین هنوز برقرار است)

* در BFS ها ناهیده ، یک BFS ناهیده ، یک نقطه گوشه فضای موجه و است.

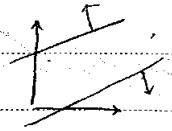
اما در یک BFS ناهیده ترکیب های متفاوتی از متغیرها در مجموعه متغیرهای پایه وجود دارد

به عبارت دیگر در یک BFS غیرناهیده مجموعه متغیرهای پایه منحصر به فرد است.

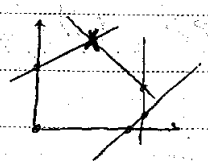
** هنگامی که برای حل یک مسئله LP از روش Simplex استفاده می‌کنیم ؛ حالات زیر

ممکن است اتفاق بیفتد :

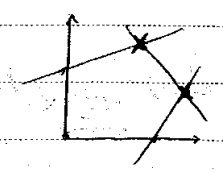
I) مسئله LP دارای جواب بهینه (فضای موجه هم باشد)



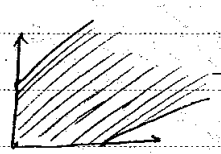
II) دارای جواب بهینه منحصر به فرد است :



III) دارای جواب های بهینه چندگانه است.



IV) دارای جواب نکران است.



P4PCO

40

Subject:

Year: Month Date ( )

؟ این حالت‌ها در روش Simplex چگونه قابل تشخیص اند ؟

I) هنگام حل مسئله به روش S ، BFS اولیه تشکیل می‌شود (با استفاده از روش‌های 2 فاز و M-بزرگ)

II) هنگام حل مسئله با روش S در بررسی شرط توقف برای BFS مثلی (در Max)

$\forall j \in NBV : Z_j - C_j \geq 0$ مثلی $Z = C_B B^{-1} b - \sum_{j \in NBV} (Z_j - C_j) X_j$ ≥ 0

III) Alternative Optimal Solution : در این حالت حداقل دو BFS متفاوت وجود دارد که مقدار بهینه تابع هدف را تولید می‌کند. (دو BFS متفاوت از نظر ترکیب و مقادیر متغیرها متفاوت اند) . از جمله مواردی که این حالت اتفاق می‌افتد هنگامی است که

اگر در جدول بهینه (مسئله Max) یک مسئله به ازای حداقل یک متغیر غیرپایه مثل X_k داشته باشیم : $Z_k - C_k = 0$ و این متغیر بتواند در تکرار بعد وارد پایه شود و حالت تا هیدگی وجود نداشته باشد در این صورت جواب بهینه چندگانه خواهیم داشت .

حالت تا هیدگی وقتی وجود دارد که حداقل یکی از b_iها = 0 باشد .

PaPCO

ieun.ir

Subject:
Year. Month. Date: ( )

Opt. Solution

	X_k	
	0	$\square$
X_{B_1}		>0
$\vdots$		>0
X_{B_m}		>0

$\Rightarrow$

Z		$\square$
X_{B_1}		
$\vdots$		
X_k		
X_{B_m}		

$Z_{new} = Z_{old} - (Z_k - C_k)\, X_k$ ⇝ تغییر نمی‌کند

چگونه می‌فهمیم BFS جدید تولید شده؟ مقدار مثبت سمت راست بر یک + تقسیم شده

$\max\ Z = 4X_1 + 14X_2$

s.t.

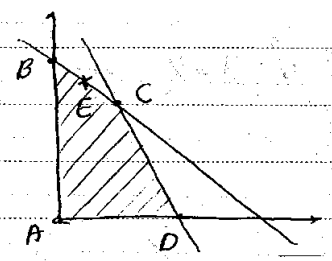
(1) $2X_1 + 7X_2 + S_1 = 21$

(2) $7X_1 + 2X_2 + S_2 = 21$

$X_1, X_2, S_1, S_2 \geq 0$

C	X_1	X_2	S_1	S_2	RHS
Z	0	0	2	0	42
X_2	0	1	$7/45$	$-2/45$	$7/3$
X_1	1	0	$-2/45$	$7/45$	$7/3$

B	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	RHS
Z	1	0	0	2	0	42
X_2	0	$2/7$	1	$1/7$	0	3
S_2	0	$45/7$	0	$-2/7$	1	15



BFS ها متفاوت است اما Z^* یکی است.

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

محدودیتی که به صورت $a_1X_1+\dots+a_nX_n \le b$ در مسئله اصلی بوده و با جایگذاری مقادیر بهینه به صورت $a_1X_1^*+a_2X_2^*+\dots+a_nX_n^*=b$ ارضا شود را محدودیت مقید (Binding constant) گویند. ($S^*=0$ وابسته)

* در حالت جواب بهینه چندگانه در مسئله Max محدودیت مقیدی وجود دارد که منطبق بر یکی از خطوط هم سود شود. (به ازای همه BFS های بهینه مقید است)

* در مثال بالا دو BFS بهینه داریم:

$$B\begin{cases}X_1^*=0\\X_2^*=3\end{cases}\qquad C\begin{cases}X_1^*=7/3\\X_2^*=7/3\end{cases}$$

(ولی بیشمار جواب غیرپایه‌ای موجه بهینه)

ترکیب محدب آنها: $X=\lambda\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}+(1-\lambda)\begin{pmatrix}7/3\\7/3\end{pmatrix}$

$0\le\lambda\le1$

این ترکیب محدب در واقع پاره خط واصل مابین نقاط گوشه B و C است.

if: $\lambda=1/2 \Rightarrow X=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}7/3\\7/3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7/6\\8/3\end{pmatrix}$: E $\quad Z_E=42$

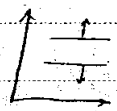
$\Leftarrow$ E نقطه بهینه است.

در نقطه E مقادیر متغیرها به صورت $(7/6, 8/3, 0, 15/2)$ است. نقطه E در واقع یک جواب غیرپایه‌ای موجه ولی بهینه است.

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

* در حالت جواب هسته چندگانه، تعداد BFS ها متعادت هسته محدود است اما دارای بیشمار جواب های غیر پایه ای موجه هسته هستیم.



* در جواب چندگانه همواره یکی از متغیرها 0 است اما برعکس درست نیست.

مثال:

(Max)

	X_1	X_2	S_1	S_2	RHS
Z	0	0	0	2	10
X_1	1	0	2	1	2
X_2	0	1	3	2	0

جواب را چه صورت؟ (2,0,0,0) تباهیده!

	X_1	X_2	S_1	S_2	RHS
Z	0	0	0	2	10
X_1	1	$-2/3$	0	$-1/3$	2
S_1	0	$1/3$	1	$2/3$	0

(2,0,0,0)

* در سمت راست همواره متغیری که تباهیده می کند (سمت راست 0) برنده می شود (اگر وارد شود)

* مقدار سمت راست در عین حال که متغیر خروجی از پایه را مشخص می کند "یا مقدار متغیر ورودی به پایه در تکرار بعدی است".

PAPCO

t2

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$\boxed{3} \longrightarrow \boxed{-3}$:

نمی تواند وارد تست نسبت شود و متغیر دیگری وارد پایه می شود. در این حالت BFS جدید تولید می شود ⇐ جواب چندگانه داریم.

mid

IV) جواب بیکران :

مسئله LP به فرم $\begin{cases} \max z = CX \\ AX = b \\ X \geq 0 \end{cases}$ را در نظر بگیرید. فرض کنید در یکی از تکرارهای روش S یک متغیر غیر پایه نظیر X_k با $Z_k - C_k < 0$ و $Y_k \leq 0$ وجود داشته باشد :

	X_k
	$Z_k - C_k < 0$
X_B	$\begin{pmatrix} y_{1k} \\ \vdots \\ y_{mk} \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} \leq 0 \\ \leq 0 \\ \vdots \end{matrix}$

ورود X_k به داخل پایه در تکرار بعد موجب می شود که :

$$X_B = B^{-1}b - \sum_{j \in NBV} Y_j X_j$$

$$X_B = B^{-1}b - \underbrace{Y_k X_k}_{>0}$$

$Y_k \leq 0$ و می خواهد با مقدار مثبت X_k وارد شود

$$\Longrightarrow X_k \longrightarrow +\infty$$

(هیچ محدودیتی ندارد)

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date: ( )

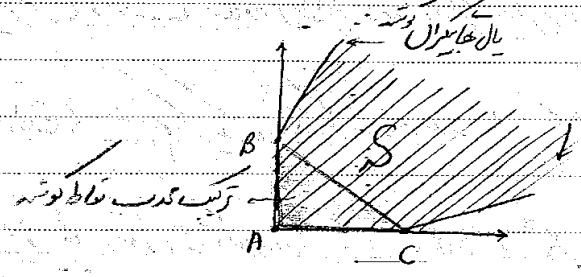
$$Z = C_B B^{-1} b - (Z_k - C_k) X_k \qquad Z_k - C_k < 0 \quad X_k \geq 0 \implies Z \to +\infty$$

* شرط بی‌کران بودن مسئله LP فوق وجود یک متغیر غیرپایه نظیر X_k است به نحوی که $Z_k - C_k < 0$ و $Y_k \leq 0$. (تست نسبت برای متغیر ورودی قابل اجرا نباشد)

$$\text{Max } Z = X_1 + 3X_2$$

$$\text{s.t.} \quad (1) \quad X_1 - 2X_2 \leq 4$$

$$(2) \quad -X_1 + X_2 \leq 3$$



نقطه B	X_1	X_2	S_1	S_2	RHS
Z	-4	0	0	3	9
S_1	-1	0	1	2	10
X_2	-1	1	0	1	3

معادلات $\mapsto$ وابسته

$$-X_1 + S_1 + 2\cancel{S_2} = 10$$

$$-X_1 + X_2 + \cancel{S_2} = 3$$

$$Z - 4X_1 + 3\cancel{S_2} = 9$$

* S_2 مطمئناً غیرپایه می‌ماند

$$S_1 = 10 + X_1$$

$$X_2 = 3 + X_1 \implies X_1 \to \infty$$

$$Z = 9 + 4X_1 \qquad Z \to \infty$$

? آیا به دلیل بیکران بودن فضا جواب بیکران شد ؟؟ No

* در صورتی که به ازای یک متغیر نظیر X_k داشته باشیم : $Y_k \leq 0$ اما $Z_k - C_k \geq 0$

PAPCO

43

Subject:
Year Month Date ( )

در این صورت فضای جواب بیکران اما جواب مسئله می تواند بیکران باشد.

* در دنیای واقعی مسئله ای وجود ندارد که جواب بیکران داشته باشد و همواره محدودیت سرمایه، نیروی انسانی، ... وجود دارد.

* در حالتی که فضای موجه مسئله بیکران است علاوه بر نقاط گوشه دارای یال ها بیکران هستیم که یک نقطه گوشه موجود را به گوشه ای در ∞ در راستای جهت حدی نظیر d وصل می کند.

گوشه (Extreme Unbounded Edge)

$X = X^* + \lambda d$

$\lambda \geq 0$

(کاربرد)

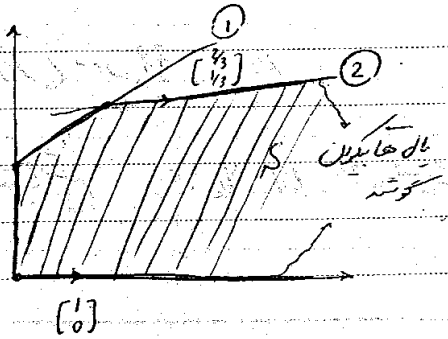
* در یک مجموعه محدب غیرتهی نظیر $S = \{X \mid AX \leq b, X \geq 0\}$ ، بردار غیرصفر d جهت (Direction) مجموعه S است، اگر و فقط اگر متعلق به مجموعه $D = \{d \mid d \geq 0, d \neq 0, Ad \leq 0\}$ باشد.

مثال: جهت ها؟

① $-X_1 + X_2 \leq 2$

② $-X_1 + 2X_2 \leq 6$

③ $X_1, X_2 \geq 0$



Subject:
Year Month Date ( )

$$D \begin{cases} -d_1 + d_2 \leq 0 \\ -d_1 + 2d_2 \leq 0 \\ d_1, d_2 \geq 0, \quad \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$ (معادلات خطی)

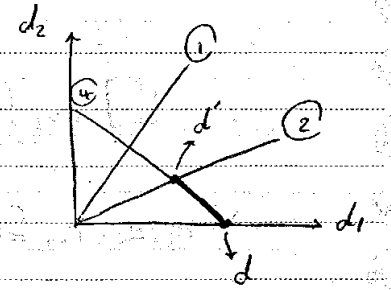
* برای نرمال کردن جهت‌ها d می‌توان محدودیت $1d = 1$ را اضافه کرد:

$$1d = 1 \Rightarrow (1 \; 1) \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow d_1 + d_2 = 1$$

* چرا نرمال می‌کنیم؟ برای اینکه وقتی جمع ۱ است، سمت دوبردار، سازگی قابل مشاهده است.

* منظور از جهت‌های حدی (Extreme Directions) عبارتند از نقاط گوشه مجموعه D.

$$\text{نرمال } D \begin{cases} ① -d_1 + d_2 \leq 0 \\ ② -d_1 + 2d_2 \leq 0 \\ ③ d_1, d_2 \geq 0, \quad \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ ④ d_1 + d_2 = 1 \end{cases}$$



$$\Rightarrow \quad d = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad d' = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \lambda \geq 0$$

$$X = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} \qquad \lambda \geq 0$$

PAPCO

۴۴

Subject:
Year. Month. Date. ( )

** قضیه اساسی مربوط به فضای بیکران در یک مسئله LP :

هنگامی که در یک مسئله LP فضای مسئله بیکران باشد در اینصورت هر نقطه متعلق به این فضای بیکران را می‌توان به صورت ترکیب محدب نقاط گوشه S و ترکیب خطی غیرمنفی جهت‌های حدی S نوشت.

X_j^* : نقاط گوشه d_k^* : جهت حدی k

$$\underset{\sim}{X} \in S \Longrightarrow \begin{cases} X = \sum_j \alpha_j X_j^* + \sum_k \beta_k d_k^* \\ \sum_j \alpha_j = 1 \qquad \alpha_j, \beta_k \geq 0 \end{cases}$$

$$X = \alpha_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} + \beta_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_2 \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \qquad \alpha_j \geq 0 , \quad \beta_1, \beta_2 \geq 0$$

تمرین تشویقی : تولید 50 نقطه تصادفی موجه در فضای S و تعیین ضرایب α و β

آیا α و β منحصر به فردند؟ برهان خلف

PAPCO

Subject:
Year Month Date: ( )

** شرط لازم و کافی جهت یکران بودن جواب مسئله LP :

جواب مسئله LP به صورت $\begin{cases} \max Z = CX \\ AX = b \\ X \geq 0 \end{cases}$ یکران است اگر به ازای حداقل

یک جهت حدی نظیر d داشته باشیم : $cd > 0$ $\{cd < 0 : \min$ در$\}$

تابع هدف : $\max Z = -X_1 + 3X_2$ جواب ?

$cd = (-1, 3)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = -1$ $cd' = (-1, 3)\begin{pmatrix}2/3\\1/3\end{pmatrix} = 1/3 > 0 \Rightarrow$ یکران

Degeneracy : تباهیدگی

در یک جواب تباهیده مسئله LP حداقل یکی از متغیرهای پایه صفر است.

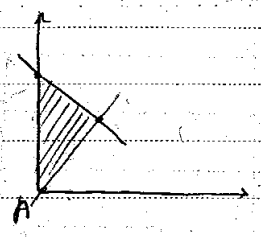
** یکی از دلایل بروز تباهیدگی محدودیت های زاید است.

- $\max Z = 5X_1 + 2X_2$

① $X_1 + X_2 \leq 6$

② $X_1 - X_2 \leq 0$

$X_1, X_2 \geq 0$



در A تباهیدگی وجود دارد.

زاید است : $X_2 \geq 0$

$X_1 \leq X_2 \ , \ X_1 \geq 0 \Rightarrow X_2 \geq 0$

	X_1	X_2	RHS
Z	-5	-2	0
S_1	1	1	6
S_2	1	-1	0

PAPCO

15

ieun.ir

Subject:

Year. Month. Date. ( )

	X_2	S_2	RHS
Z	-7	5	0
S_1	2	-1	6
X_1	-1	0	0

$(0,0,6,0) \rightarrow A$

تباهیدگی یک جور در جا زدن است، نه تابع هدف را بهینه می کند و نه به نقطه جدید می رود

	S_1	S_2	RHS
Z			
X_2			
X_1			

$\rightarrow B$

** یکی دیگر از حالات بروز تباهیدگی هنگامی است که بیش از یک متغیر کاندید خروج از پایه باشد

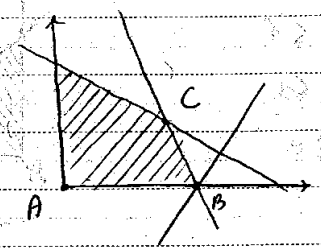
= در تست نسبت گره وجود دارد

$Max\ Z = 2X_1 + X_2$

① $4X_1 + 3X_2 \leq 12$

② $4X_1 + X_2 \leq 8$

③ $4X_1 - X_2 \leq 8$



	X_1	X_2	RHS
Z	-2	-1	0
S_1	4	3	12
S_2	4	1	8
S_3	4	-1	8

$Min\ \{12/4, 8/4, 8/4\} = 2 \xRightarrow{S_2, S_3}$ دلخواه $\downarrow S_2$

PAPCO

Subject:
Year Month Date: ( )

	X_2	S_2	RHS
z			
S_1			4
X_1			2
S_3			0

متغیری که کنار گذاشته شد (S_3)

مقدار ۰ می گیرد. ضریب × ۰

قضیه (Dantzig): در یک مسئله Lp درصورتی که تباهیدگی (به دور افتادن) وجود نداشته باشد و فضای موجه تهی نباشد به کارگیری روش Simplex پس از تعداد محدودی تکرار یا منجر به جواب بهینه مسئله خواهد شد و یا منجر به این نتیجه که جواب مسئله بیکران است

«قضیه، بیانگر درستی روش Simplex است»

* در یکی از حالات خاص و نادر تباهیدگی که براثر وجود گره در تست نسبت اتفاق می افتد در یک دور از پایه هایی که همگی متعلق به یک نقطه گوشه هستند گیر خواهیم افتاد:

$B_1 \longrightarrow B_2 \longrightarrow B_3 \longrightarrow \cdots \longrightarrow B_k = B_1$

تباهیده تباهیده تباهیده

حالت به دور افتادن (Cycling) اتفاق افتاده است.

* روش سیمپلکس در حالتی که به دور افتادن وجود دارد با تغییرات کوچکی قابل اجراست

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

تغییرات کوچک : 1. روش العطار 2. روش Bland

(مطالعه کلاسی)

روش M بزرگ (Big M Method)

این روش هنگامی به کار می رود که تشخیص BFS اولیه امکان پذیر نباشد.

$$\min Z = 4X_1 + X_2 + R_1$$

s.t. ① $3X_1 + X_2 = 3 \quad + R_2$

② $4X_1 + 3X_2 \leq 6 \rightarrow 4X_1 + 3X_2 - S_1 = 6$

③ $X_1 + 2X_2 \geq 3 \quad X_1 + 2X_2 + S_2 = 3$

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

	X_1	X_2	S_1	R_1	R_2	S_2	RHS
Z	-4	-1	0	-M	-M	0	
R_1	3	1	0	1	0	0	3
R_2	4	3	-1	0	1	0	6
S_2	1	2	0	0	0	1	3

S_1 چون شرط موجه بودن را تأمین نمی کند نمی شود پایه شود.

✓ S_2 طوری بود که ضریبش در یک عدد مثبت 1+ و در بقیه 0 بود.

خودمان R_1 و R_2 را به معادلات ① و ② اضافه می کنیم. این همین را داریم در آخر مقدارشان 0 می شود! ← درست است.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

* به متغیرهایی مثل R_1 و R_2 که به سمت چپ معادلات مسئله LP در فرم استاندارد اضافه می‌شوند تا تشکیل BFS اولیه میسر شود. متغیرهای مصنوعی (Artificial Variables) گویند و متغیرهای مصنوعی باعث نقض معادلات مربوط می‌شود اگر مقدار بهینه آنها صفر شود.

* جهت تضمین 0 شدن R_1 و R_2 : ضرایب آنها در تابع هدف را ضرایب بسیار بدی در نظر می‌گیریم :

تابع هدف : Min ⇐ یک ضریب بسیار بزرگ $+M$

Max ⇐ $-M$

تابع هدف : $Min\ Z = 4X_1 + X_2 + MR_1 + MR_2$

* در جدول شروع M بزرگ (و همین طور در فاز اول و دوم روش دو فاز) باید مقادیر $Z_j - C_j$ متغیرهای مصنوعی موجود در پایه 0 شود. برای این منظور از عملیات سطری استفاده می‌کنیم :

سطر Z جدید = سطر Z قدیم + M × (سطر R_1) + M × (سطر R_2)

⇒ Z (جدید) | $7M-4$ ✓ $4M-1$ $-M$ 0 0 0 $9M$

⇐ متغیر ورودی : X_1 خروجی : R_1

PAPCO

47

ieun.ir

Subject:
Year: Month: Date: ( )

	X_1	X_2	S_1	R_1	R_2	S_2	
Z	0	$\frac{5}{3}\mu+\frac{1}{3}$	$-\mu$	$-\frac{7}{3}\mu+\frac{4}{3}$	0	0	$2\mu+4$
X_1	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	0	1
R_2	0	$\frac{5}{3}$	-1	$-\frac{4}{3}$	1	0	2
S_2	0	$\frac{5}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	1	2

✓ هرچه زودتر خارج شوند بهترند

$$\min\left\{\frac{1}{1/3},\ \frac{2}{5/3},\ \frac{2}{5/3}\right\} = 6/5 \Longrightarrow R_2 \text{ یا } S_2 \Longrightarrow R_2$$

⋮

	X_1	X_2	S_1	R_1	R_2	S_2	
Z	0	0	0	$-\mu+7/5$	$-\mu$	$-1/5$	$18/5$
X_1							$3/5$
X_2		Optimal Solution					$6/5$
S_1							0

$X_1^* = 3/5$

$X_2^* = 6/5$

$R_1^* = R_2^* = S_1^* = S_2^* = 0$

خلاصه روش μ بزرگ:

① اضافه کردن متغیرهای مصنوعی به محدودیت‌های $\geq$ یا $=$ درصورت نیاز.

② تخصیص ضرایب لازم به متغیرهای مصنوعی در تابع هدف

③ تشکیل جدول Simplex با استفاده از متغیرهای مصنوعی در تابع هدف

④ انجام عملیات سطری برای صفر کردن ضرایب متغیرهای مصنوعی در تابع هدف

⑤ ادامه حل مسئله با روش S معمولی تا حصول جواب نهایی

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

* معمولاً به دلیل خطای گرد کردن ناشی از ضریب μ امکان بروز خطا در جواب بهینه حاصل از μ بزرگ وجود دارد.

تمرین تشویقی: ذکر یک مثال + حل آن با LINGO در مورد خطای روش μ بزرگ.

$$LP\begin{cases} \max\ z = CX \\ AX = b \\ X \geq 0 \end{cases} \rightarrow S \quad \Rightarrow \quad LP(\mu)\begin{cases} \max\ z = CX - \mu X_a^* \\ AX + X_a = b \\ X_1, X_a \geq 0 \end{cases} \rightarrow S(\mu)$$

متغیرهای مصنوعی : X_a

متغیری که ضریبش ۱ باشد وجود ندارد

* فضای موجه $S(\mu)$ در مسئله $LP(\mu)$ تهی نیست زیرا یک جواب به صورت $X=0$ و $X_a = b \geq 0$ دارد. طبق قضیه گفته شده حل این مسئله با روش Simplex یا مجبر به جواب بهینه می‌شود یا مجبر به جواب بی‌کران.

Dantzig

اثبات در کتاب!

حل مسئله $LP(\mu)$

- جواب بهینه (X^*, X_a^*)
  - $X_a^* \neq 0$: مسئله LP جواب موجه ندارد
  - $X_a^* = 0$: جواب بهینه به دست می‌آید X^* را LP
- جواب بی‌کران
  - $X_a^* \neq 0$: مسئله اصلی $LP(\mu)$ دارای جواب موجه نیست
  - $X_a^* = 0$: جواب مسئله اصلی LP بی‌کران

PAPCO

48

Subject:

Year Month Date ( )

مثال:

$$\max Z = X_1 + X_2 - \mu R_1 - \mu R_2$$

s.t. (1) $X_1 - X_2 - X_3 + R_1 = 1 \Rightarrow R_1 = 1 - X_1 + X_2 + X_3$

(2) $-X_1 + X_2 + 2X_3 - X_4 + R_2 = 1 \Rightarrow R_2 = 1 + X_1 - X_2 - 2X_3 + X_4$

$X_1, X_2, \ldots, 0$

	X_1	X_2	X_3	X_4	R_1	R_2	RHS
Z	0	-2	0	-1	μ (+2)	μ (-1)	3
X_1	1	-1	0	-1	2	1	3
X_3	0	0	1	-1	1	1	2

جواب $LP(M)$ همگرا است $\Leftarrow$ LP اصلی هم همگرا.

$X_a = 0$ +

Subject:
Year: Month. Date. ( )

روش دوفازی (Two-Phase Method)

$$\min z = 4X_1 + X_2$$

s.t

(1) $3X_1 + X_2 + R_1 = 3$

(2) $4X_1 + 3X_2 - S_1 + R_2 = 6$

(3) $X_1 + 2X_2 + S_2 = 3$

$S_1, S_2, R_1, R_2, X_1, X_2 \geq 0$

* در روش دوفازی پس از اضافه کردن متغیرهای مصنوعی به مسئله اصلی، ابتدا در فاز I

هدف آن است که با تعریف تابع هدف جدیدی به صورت «حداقل سازی مصنوعی ها»

متغیرهای مصنوعی از پایه خارج شوند و در انتهای فاز I یک BFS اولیه مسئله اصلی بدست آید.

سپس در فاز II BFS اولیه بدست آمده در انتهای فاز I و تابع هدف اصلی

فاز I: $\min r = R_1 + R_2$ مسئله را حل می کنیم.

	X_1	X_2	S_1	R_1	R_2	S_2	RHS
r جدید	7	4	-1	0	0	0	9
R_1	3	1	0	1	0	0	3
R_2	4	3	-1	0	1	0	6
S_2	1	2	0	0	0	1	3

r جدید = r قدیم + (-7) × سطر R_1 + (-4) × سطر R_2

PqPCO

49

Subject:
Year Month Date ( )

	X_1	X_2	S_1	R_1	R_2	S_2	
r	0	0	0	-1	-1	0	0
X_1							$3/5$
X_2							$6/5$
S_2							0

جدول نهایی فاز I

* در انتهای فاز I ، 3 حالت زیر ممکن است اتفاق بیفتد :

① $r^*=0$ ، هیچ متغیر مصنوعی در پایه نهایی فاز I وجود نداشته باشد

$\mathcal{B}$	X_1	X_2	S_1	R_1	R_2	S_2	RHS
r	0	0	0	-1	-1	0	0
X_1	1	0	$1/5$	$3/5$	$-1/5$	0	$3/5$
X_2	0	1	$-3/5$	$-4/5$	$3/5$	0	$6/5$
S_2	0	0	1	1	-1	1	0
					X		

در این حالت BFS اولیه برای مسئله اصلی به دست آمده است و می‌توان فاز II را با جایگزینی تابع هدف مسئله اصلی و حذف متغیرهای مصنوعی شروع می‌کنیم و با روش معمولی Simplex ادامه می‌دهیم.

	X_1	X_2	S_1	S_2
Z	-4	-1	0	0
X_1	1	0	$1/5$	
X_2	0	1	$-3/5$	
S_2	0	0	1	

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date: ( )

سطر جدید Z = سطر قدیم Z + $4(X_1 + X_2)$

	X_1	X_2	S_1	S_2	RHS
Z	0	0	$1/5$	0	$16/5$
X_1	1	0	$1/5$	0	$3/5$
X_2	0	1	$-3/5$	0	$6/5$
S_2	0	0	1	1	0

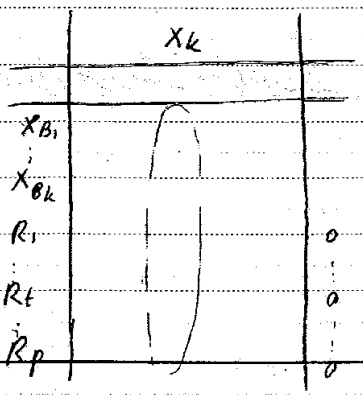
جدول بعد همینه خواهد شد ←

(2) $r^* > 0$: در این حالت مسئله اصلی دارای جواب موجه نیست

(چون R_1 یا R_2 یکی مثبت شده)

(3) $r^* = 0$ ، حداقل یک متغیر مصنوعی در پایه همینه فاز I به صورت بیا هیده وجود دارد

در این صورت نیز ابتدا متغیرهای مصنوعی غیرپایه را از جدول حذف کرده و تابع هدف مسئله اصلی را جایگزین کرده، عملیات سطری در مورد سطر Z انجام داده و به روش معمول Simplex مسئله را حل می‌کنیم تا به یکی از 3 حالت زیر برسیم :



P4PCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

الف) به ازای حداقل یکی از متغیرهای مصنوعی موجود در پایه داریم: $y_{tk}>0$

نظیر R_t

در اینصورت در جدول بعدی X_k جایگزین R_t شده و مشکلی برایمان پیش نمی‌آید

z		
X_{B_1}		
$\vdots$		✓
X_{B_k}		
R_1		0
$\vdots$		$\vdots$
X_k		0
$\vdots$		$\vdots$
R_p		0

ب) اگر به ازای تمام متغیرهای مصنوعی نظیر R_i در پایه داشته باشیم $y_{ik}=0$ $i=1,\dots,p$

در این حالت X_k به ازای یک متغیر اصلی وارد پایه شده و

مقادیر R_i ، $\forall i$ همان صفر می‌مانند.

ج) اگر الف و ب اتفاق نیفتد یعنی حداقل یک متغیر مصنوعی نظیر R_t وجود دارد که در آن $y_{tk}<0$: در این حالت اگر X_k به جای یک متغیر اصلی وارد پایه می‌شود،

غیر تباهیده

مقدار R_t در جدول جدید مثبت خواهد شد

X_B'		
R_1		
$\vdots$		
R_t		$\to 0$
$\vdots$		
R_p		

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date: ( )

برای جلوگیری از این کار تغییر زیر را در الگوریتم S در هنگام بروز حالت ج-3 ، ایجاد می‌کنیم:

بدین ترتیب که متغیر X_k را در هنگام بروز این حالت ، مستقیماً به جای R_t وارد پایه نموده و

R_t را کلاً از جدول حذف می‌کنیم (به جای انجام تست سنت)

z		
X_B		مقادیر قبلی
R_1		0
$\vdots$		$\vdots$
X_k		0
$\vdots$		$\vdots$
R_p		0

با این کار هیچ گونه تغییری در مقادیر سایر متغیرهای پایه اتفاق نمی‌افتد.

مثال:

$$\min\ Z = -X_1 + 2X_2 - 3X_3$$

① $X_1 + X_2 + X_3 + R_1 = 6$

② $-X_1 + X_2 + 2X_3 + R_2 = 4$

③ $2X_2 + 3X_3 + R_3 = 10$ ④ $X_2 + S_1 = 2$

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

$\min\ r = R_1 + R_2 + R_3$ «فاز I»

	X_1	X_2	X_3	S_1	R_1	R_2	R_3	RHS
r	0	0	0	0	-2	-2	0	0
X_1	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	2
X_2	0	1	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	2
R_3	0	0	0	0	-1	-1	1	0
X_3	0	0	1	1	0	0	0	2

$r^* = 0$

اما R_3 در پایه

ieun.ir

Subject:
Year. Month. Date. ( )

	X_1	X_2	X_3	S_1	R_3	RHS
Z	1	-2	3	0	0	0
X_1	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	2
X_2	0	1	0	$-\frac{3}{2}$	0	2
R_3	0	0	0	0	1	0
X_3	0	0	1	1	0	2

$\leftarrow$ R_1 و R_2 حذف و تابع هدف جدید

$\longmapsto *$

* همه ضرایب 0 اند و یکی 1 $\Leftarrow$ محدودیت زاید

مثال:

$$\max Z = X_1 + 2X_2 + 3X_3 + 2X_4$$

$$\cancel{(1)\quad X_1 + 2X_2 + X_3 + X_4 + R_1 = 5}$$

$$(2)\quad X_1 + X_2 + X_3 + 3X_4 + R_2 = 7$$

$$(3)\quad -X_2 + X_3 + 2X_4 + R_3 = 2$$

جدول نهایی فاز I :

	X_1	X_2	X_3	X_4	R_1	R_2	R_3	RHS
r	0	0	-1	0	-2	0	-2	0
X_2	$\frac{2}{5}$	1	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{2}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{8}{5}$
R_2	0	0	-1	0	-1	1	1	0
X_4	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	1	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{9}{5}$

$r^* = 0$

$\underline{3} \leftarrow$ R_2 در پایه

حذف X X

ج-3

به جای استفاده از مشتق نسبت، مستقیماً X_3 به جای R_2 وارد پایه می‌شود.

+ R_2 از جدول حذف می‌شد (سمت راست تغییر نمی‌کند)

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

اگر R_2 باشد:

	X_1	X_2	X_3	X_4	R_2	
					$-7/3$	
X_2						$8/5$
X_3	0	0	1	0	-1	0
X_4					—	$9/5$

$\rightarrow$ دوباره می خواهد وارد پایه شود

روش تک متغیر مصنوعی

$$Max\ Z = C_1X_1 + \dots + C_nX_n$$

استاندارد

(1) $a_{11}X_1 + \dots + a_{1n}X_n \geq b_1 \longrightarrow \dots - S_1 + R_1 = b_1$

(2) $a_{21}X_1 + \dots + a_{2n}X_n \geq b_2 \qquad - S_2 + R_2 = b_2$

$\vdots$

(m) $a_{m1}X_1 + \dots + a_{mn}X_n \geq b_m \qquad - S_m + R_m = b_m$

* به دلیل آنکه اضافه شدن متغیرهای مصنوعی باعث ازدیاد زمان حل مسئله می شود، روش تک متغیر مصنوعی تلاش دارد که با تنها یک متغیر مصنوعی پایه اولیه شروع را تولید کند.

* این روش در کنار روش M-بزرگ یا دوفاز این پایه را ایجاد خواهد کرد:

استاندارد

(1) $-a_{11}X_1 - a_{12}X_2 - \dots - a_{1n}X_n \leq -b_1 \longrightarrow \dots + S_1 = -b_1$

(2) $-a_{21}X_1 - a_{22}X_2 - \dots - a_{2n}X_n \leq -b_2 \qquad \hat{-R}$

$\vdots$

(m) $-a_{m1}X_1 - a_{m2}X_2 - \dots - a_{mn}X_n \leq -b_m \qquad + S_m = -b_m$

$\hat{-R}$

* اگر محدودیتی به صورت = باشد، $\leq$ و $\geq$ نوشته و ...

PAPCO

Subject:

Year Month Date ( )

	S_1	S_2	...	S_m	R	
S_1	1	0		0	-1	$-b_1$
S_2	0	1			-1	$-b_2$
S_t	1	0			-1	$-b_t$
⋮				0	⋮	⋮
S_m	0	0		1	-1	$-b_m$

→ پایه ای

× BFS

وارد پایه

$R \rightarrow S_t$

S_1	$b_t - b_1 \geq 0$
⋮	
R	
S_m	$b_t - b_m$

* در سطر فوق $S_1, \ldots, S_m$ تشکیل یک پایه غیر موجه را خواهند داد. حال با وارد کردن R - که متغیر نظیر S_t که دارای منفی ترین سمت راست است یک BFS اولیه تشکیل خواهد شد که شامل R است. جهت حذف آن می توان از روش های M بزرگ و یا دو فاز استفاده کرد.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال :

$$\text{Min} \quad 2X_1 + 3X_2$$

s.t. ① $X_1 + X_2 \geq 3 \rightarrow -X_1 - X_2 \leq -3 \rightarrow -X_1 - X_2 + S_1 - R = -3$

② $-2X_1 + X_2 \geq 2 \rightarrow 2X_1 - X_2 \leq -2 \rightarrow 2X_1 - X_2 + S_2 - R = -2$

$X_1, X_2 \geq 0$

	X_1	X_2	S_1	S_2	R	RHS
S_1	-1	-1	1	0	-1	-3
S_2	2	-1	0	1	-1	-2
	μ	$\mu-3$	$-\mu$		0	
Z	-2	-3	0	0	$-\mu$	
R	1	1	-1	0	1	3
S_2	3	0	-1	1	0	1

هدف ما فعلاً پیدا کردن BFS اولیه است

μ - بزرگ یا

II فاز استفاده :

* در جدول S داریم :

	X_k	
Z	$C_B B^{-1} a_j - C_j$	$C_B B^{-1} b$
X_B	$B^{-1} a_j$	$B^{-1} b$

⇐ در هر مرحله اگر B^{-1} را داشته باشیم مسئله حل شده (؟) ↓

✓ تعیین وارون ماتریس پایه از طریق حاصلضرب ماتریس های مقدماتی :

(Product Form of Inverse)

فرض کنید در تکرار فعلی با توجه به متغیرهای پایه X_B ، ماتریس پایه B_{old} بوده و داریم :

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$B_{old} = (a_{B_1}, \dots, a_{B_r}, \dots, a_{B_m})$$

x_{B_1}

فرض کنید در تکرار بعد متغیر X_k ورودی و متغیر X_{B_r} خروجی باشد. در این صورت

$$B_{New} = (a_{B_1}, \dots, a_k, \dots, a_{B_m}) \quad \text{I}$$

پایه جدید تکرار بعدی: B_{New} ←

از طرف دیگر می‌دانیم که: $y_j = B^{-1} a_j$ (II) (که برای هر ستون جدول که دانسته به متغیرهای نظیر X_j داریم)

$$\overline{y_{B_i}} = B^{-1} a_{B_i}$$

در مورد متغیرهای پایه: $y_{B_i} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{i\text{ام}} \equiv e_i$

$$\Longrightarrow e_i = B^{-1} a_{B_i} \Rightarrow a_{B_i} = B e_i \quad \text{III}$$

$$\xrightarrow{\text{III}, \text{II}, \text{I}} B_{New} = (B_{old} e_1, B_{old} e_2, \dots, B_{old} y_k, \dots, B_{old} e_m)$$

* در مورد متغیر غیر پایه فعلی X_k داریم: $y_k = B^{-1} a_k \Rightarrow a_k = B y_k$

$$\Longrightarrow B_{New} = B_{old} \underbrace{(e_1, e_2, \dots, y_k, \dots, e_m)}_{T}$$

PAPCO

ieun.ir

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & y_{1k} & 0 \\ 0 & 1 & y_{2k} & \vdots \\ \vdots & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & y_{mk} & 0 \\ & & & 1 \end{pmatrix} \qquad * \; B_{New} = B_{old} \cdot T \; *$$

$$\Rightarrow \quad B_{New}^{-1} = T^{-1} B_{old}^{-1}$$

می دانیم که:

$$E = T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -y_{1k}/y_{rk} & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & 1/y_{rk} & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & \vdots \\ & & -y_{mk}/y_{rk} & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_{New}^{-1} = E \cdot B_{old}^{-1}$$

پس:

* ماتریس هایی مانند E که فقط در یک ستون با ماتریس I فرق می کند ماتریس مقدماتی هستند.

* تک ستون ماتریس E که با ماتریس I متفاوت است، عبارتست از ستون λ:

$$\lambda = \begin{pmatrix} -y_{1k}/y_{rk} \\ \vdots \\ 1/y_{rk} \\ \vdots \\ -y_{mk}/y_{rk} \end{pmatrix}$$

* فرض کنید قسمت اصلی فرم کانونی استاندارد با افزودن متغیرهای کمکی (Slack) به فرم

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$B_0^{-1} = I$ راستا ندارد در آمده باشد.

$B_1^{-1} = E_1 \cdot B_0^{-1} = E_1 \cdot I$

$B_2^{-1} = E_2 \cdot B_1^{-1} = E_2 \cdot E_1 I$

$B_t^{-1} = E_t \cdot B_{t-1}^{-1} = E_t \cdot E_{t-1} \cdots E_2 E_1 \cdot I$

مثال: یک مسئله اصلی به فرم کانونی داده شده است که دارای 3 محدودیت ≤ است. ستون متغیر ورودی $Y_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ، متغیر خروجی، متغیر دوم پایه فعلی

λ = جای ستون 2

است. $B_1^{-1} = ?$

$B_1^{-1} = E_1 B_0^{-1}$

$\lambda = ?$ $\qquad \lambda = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

	X_3
S_1	
S_2	
S_3	

$B_1^{-1} = E_1 I = E_1 = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & & 0 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

فرض کنید X_2 می خواهد جایگزین S_1 شود، $Y_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\lambda = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B_2^{-1} = E_2 \cdot E_1 \cdot I = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

PAPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

Revised Simplex Method — روش سیمپلکس تجدید نظر شده

در این روش نیازمند جدول S نیستیم و تمام محاسبات به فرم ماتریسی انجام می‌شود

گام 1: فرض کنید یک BFS اولیه داریم، $B_0^{-1} = I$ ، $X_B = B_0^{-1} b = b$

گام 2: متغیر ورودی به پایه ← محاسبه $\forall j \in NBV \; , \; Z_j - C_j = C_B B^{-1} a_j - C_j$

و تعیین متغیر ورودی بر اساس ضابطه روش S ، بررسی شرط توقف.

گام 3: متغیر خروجی از پایه ← محاسبه $Y_k = B^{-1} a_k$ و انجام تست نسبت و تعیین متغیر خروجی

گام 4: محاسبه $B^{-1}_{New} = E B^{-1}_{old}$ و سایر محاسبات مربوط به $X_{B_{New}}$ ، Z_{New} و جایگزینی B^{-1}_{New} جای B^{-1}_{Old} و بازگشت به گام 2

تمرین تشویقی: جزئیات صورت حدی در محاسبات روش S نسبت به تجدید نظر شده ← جدول موجود در کتاب را توضیح

ieun.ir

Subject:
Year Month Date ( )

مثال:

$$\max Z = 12X_1 + 8X_2$$

$$\text{s.t} \quad (1)\ 5X_1 + 2X_2 \le 150 \quad \Rightarrow + X_3 = 150$$
$$(2)\ 2X_1 + 3X_2 \le 100 \quad \Rightarrow + X_4 = 100$$
$$(3)\ 4X_1 + 2X_2 \le 80 \quad \Rightarrow + X_5 = 80$$
$$X_j \ge 0 \qquad X_3, X_4, X_5 \ge 0$$

$$B_0 = \begin{pmatrix} X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{pmatrix} \qquad B_0^{-1} = I$$

$$j \in NBV: \quad Z_j - C_j \text{ و } = C_B B^{-1} a_j - C_j = -C_j$$

$$Z_1 - C_1 = -12 \qquad Z_2 - C_2 = -8 \quad \Longrightarrow \quad X_1 : \text{ورودی}$$

$$Y_1 = B_0^{-1} a_1 = a_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ (4) \end{pmatrix} \qquad \min\left\{\frac{150}{5}, \frac{100}{2}, \frac{80}{4}\right\} = 20 \xrightarrow{\text{خروجی}} X_5$$

$$\lambda = \begin{pmatrix} -5/4 \\ -1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix} \Longrightarrow E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5/4 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$B_{New}^{-1} = E_1 \cdot B_0^{-1} = E_1 I = E_1$$

$$X_{B_{New}} = B_1^{-1} b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5/4 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 150 \\ 100 \\ 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 60 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$Z_{New} = C_{B_{New}} X_{B_{New}} = (0,0,12) \begin{pmatrix} 50 \\ 60 \\ 20 \end{pmatrix} = 240$$

P4PCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$Z_j - C_j = C_B B^{-1} a_j - C_j$: $Z_2 - C_2 = -2$ ← ورود : X_2

$Z_5 - C_5 = 3$

$$Y_2 = B_1^{-1} a_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5/4 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \qquad \min\left\{-, \frac{60}{2}, \frac{20}{1/2}\right\} = 30$$

↓ خروج X_4

$$Y_2 \longrightarrow \lambda = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ -1/4 \end{pmatrix} \rightarrow E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow B_2^{-1} = E_2 B_1^{-1}$$

$$\Rightarrow B_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & -11/8 \\ 0 & 1/2 & -1/4 \\ 0 & -1/4 & 3/8 \end{pmatrix} \qquad X_{B_{new}} = \begin{pmatrix} X_3 \\ X_2 \\ X_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 65 \\ 30 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$Z_j - C_j$: $Z_4 - C_4 = (0 \;\; 1 \;\; 9/2) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$

$Z_5 - C_5 = \;\; " \;\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{9}{2}$ ← همه

$Z^* = 12 \times 5 + 8 \times 30 = 300$

PqPCO

Subject:
Year Month Date

Duality Theory — تئوری دوگانگی

به هر مسئله LP می‌توان مسئله LP دیگری را وابسته نمود که اگر مسئله اول را مسئله اولیه (Primal) بنامیم مسئله دوم را دوگان یا دوئیه (Duel) می‌نامیم. مسئله اولیه و دوگان هم از لحاظ شکل ظاهری و هم از لحاظ مقادیر حواب هائی متغیرها باهم در ارتباط هستند.

++ تولید مسئله دوگان در صورتی که مسئله اولیه به فرم کانونی باشد:

(P)

$$\max Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \dots + C_nX_n$$

s.t.

$$y_1 \leftarrow (1)\ a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1n}X_n \leq b_1$$
$$y_2 \leftarrow (2)\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2n}X_n \leq b_2$$
$$\vdots$$
$$y_n \leftarrow (n)\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \dots + a_{mn}X_n \leq b_m$$
$$X_j \geq 0 \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, n$$

(D)

$$\min w = b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m$$

s.t.

$$(1)\ a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m \geq c_1$$
$$(2)\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{m2}y_m \geq c_2$$
$$(n)\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{mn}y_m \geq c_n$$
$$y_i \geq 0 \qquad i = 1, \dots, m$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

+ در مسئله اولیه: تعداد متغیرها n و تعداد محدودیت ها m است ولی در مسئله دوگان

دوگان m متغیر و n محدودیت داریم.

مثال:

(P)

$\max z = 5X_1 + 6X_2$

s.t. ① $1X_1 + 9X_2 \leq 60$

② $2X_1 + 3X_2 \leq 45$

③ $5X_1 - 2X_2 \leq 20$

④ $1X_2 \leq 30$

$X_1, X_2 \geq 0$

+ اول: بررسی کانونی بودن

(D)

$\min w = 60y_1 + 45y_2 + 20y_3 + 30y_4$

① $y_1 + 2y_2 + 5y_3 \geq 5$

② $9y_1 + 3y_2 - 2y_3 + y_4 \geq 6$

$y_i \geq 0$

مثال:

$\min z = 6X_1 + 8X_2$

s.t. ① $3X_1 + X_2 \geq 4$

② $5X_1 + 2X_2 \geq 7$

$X_1, X_2 \geq 0$

$\max 4y_1 + 7y_2$

① $3y_1 + 5y_2 \leq 6$

② $y_1 + 2y_2 \leq 8$

$y_1, y_2 \geq 0$

+ برعکس مثال بالایی است.

Subject:
Year Month Date ( )

** تولید مسئله دوگان در صورتی که مسئله اولیه به صورت فرم استاندارد باشد:

* خصوصیات ظاهری ماتریس مسئله اولیه و دوگان:

- تعداد متغیرهای یک مسئله برابر تعداد محدودیت های مسئله دیگر است و بالعکس.

- تابع هدف یک مسئله به فرم Max (فرم کانونی) و تابع هدف مسئله دیگر Min (دوگان کانونی)

- علامت محدودیت ها در یک مسئله به صورت ≤ (فرم کانونی) و در مسئله دیگر به صورت ≥ (دوگان کانونی)

- ضرایب تابع هدف یک مسئله بردار مقادیر سمت راست مسئله دیگر است و بالعکس

- بردار ستونی ضرایب یک متغیر، تشکیل دهنده ضرایب سمت چپ تابع محدودیت نظیرش در مسئله دیگر است.

(P)

$$\max \quad z = C_1X_1 + C_2X_2$$

s.t.

① $a_{11}X_1 + a_{12}X_2 = b_1 \Longrightarrow \begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 \le b_1 \\ a_{11}X_1 + a_{12}X_2 \ge b_1 \end{cases} \xrightarrow{*}$

② $a_{21}X_1 + a_{22}X_2 = b_2 \Longrightarrow \begin{cases} a_{21}X_1 + a_{22}X_2 \le b_2 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 \ge b_2 \end{cases} \xrightarrow{**}$

$X_1, X_2 \ge 0$

$\xrightarrow{*} \quad -a_{11}X_1 - a_{12}X_2 \le -b_1$

$\xrightarrow{**} \quad -a_{21}X_1 - a_{22}X_2 \le -b_2$

PAPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

(D)

$$\min w = b_1 y_1 - b_1 y_2 + b_2 y_3 - b_2 y_4$$

s.t.

① $a_{11} y_1 - a_{11} y_2 + a_{21} y_3 - a_{21} y_4 \geq c_1$

② $a_{12} y_1 - a_{12} y_2 + a_{22} y_3 - a_{22} y_4 \geq c_2$

$y_i \geq 0$

تابع هدف $\min w = b_1(y_1 - y_2) + b_2(y_3 - y_4)$

محدودیت ها $a_{11}(y_1 - y_2) + a_{21}(y_3 - y_4) \geq c_1$

$a_{12}(y_1 - y_2) + a_{22}(y_3 - y_4) \geq c_2$

$y_1 - y_2 \rightarrow t_1 \qquad y_3 - y_4 \rightarrow t_2$

$\Rightarrow$ (D) $\min w = b_1 t_1 + b_2 t_2$

s.t ① $a_{11} t_1 + a_{21} t_2 \geq c_1$

② $a_{12} t_1 + a_{22} t_2 \geq c_2$

t_1, t_2 urs

* متغیر دوگانی که به یک محدودیت = در مسئله اولیه وابسته می شود در مسئله دوگان

از لحاظ علامت به صورت urs تعریف می شود.

Subject:
Year Month Date ( )

« جدول خصوصیات ظاهری ماتریس مسئله اولیه و دوگان »

(P)	(D)
تابع هدف max	تابع هدف min
بردار ضرایب متغیر x_j در محدودیت‌ها	ضرایب تابع محدودیت ز-ام
ضریب متغیر x_j در تابع هدف	مقادیر سمت راست محدودیت ز ام
محدودیت ز ام به صورت $\leq$	$y_i \geq 0$
$=$	y_i urs
$\geq$	$y_i \leq 0$
$x_j \geq 0$	محدودیت ز ام به صورت $\geq$
x_j urs	$=$
$x_j \leq 0$	$\leq$

PAPCO

ieun.ir

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال :

(P)

$$\max z = 5X_1 + 12X_2 + 4X_3$$

s.t. (1) $X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 5$

(2) $2X_1 - X_2 + 3X_3 = 2$

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

(D)

$$\min 5y_1 + 2y_2$$

(1) $y_1 + 2y_2 \geq 5$

(2) $2y_1 - y_2 \geq 12$

(3) $y_1 + 3y_2 \geq 4$

$y_1 \geq 0$

y_2 urs

✓ دو نکته : علامت محدودیت ها + علامت متغیرها

✓ با فرم کانونی که در ذهن داریم : علامت متغیرها = علامت در کانونی ⇐ علامت محدودیت ها

D مثل دوگان کانونی :

✓ علامت متغیرهای D متناسب با علامت محدودیت های P.

مثال :

(P)

$$\max z = 4X_1 + 5X_2$$

(1) $X_1 + 3X_2 \leq 4$

(2) $X_1 - X_2 \leq 2$

$X_1 \geq 0 \ , \ X_2 \leq 0$

$$\min w = 4y_1 + 2y_2$$

s.t (1) $y_1 + y_2 \geq 4$

(2) $3y_1 - y_2 \leq 5$

$y_1, y_2 \geq 0$

Subject:

Year Month Date ( )

مثال :

$$\max Z = 8X_1 + 3X_2 - 2X_3$$

s.t ① $X_1 - 6X_2 + X_3 \geq 2$

② $5X_1 + 7X_2 - 2X_3 = -4$

$X_1 \leq 0 \; , \; X_2 \geq 0 \; , \; X_3$ urs

(D) $\min w = 2y_1 - 4y_2$

s.t ① $y_1 + 5y_2 \leq 8$

② $-6y_1 + 7y_2 \geq 3$

③ $y_1 - 2y_2 = -2$

$y_1 \leq 0 \quad y_2$ urs

** ارتباط بین جواب های مسائل اولیه و دوگان :

قضیه خاصیت ضعیف دوگانی :

Weak Duality Properly

اگر مسئله اولیه برم کانوس باشد و X_0 جواب موجه آن بوده و Y_0 نیز یک جواب موجه برای مسئله دوگان آن باشد در این صورت همواره : $(CX_0) \; Z_0 \leq w_0 \; (=yb)$

که در آن Z_0 و w_0 ترتیب مقادیر تابع هدف اولیه و دوگان به ازای X_0 و Y_0 است

اثبات : تمرین تشویقی

winston p:290

Subject:

Year. Month. Date. ( )

(P) $\max Z = 4X_1 + 7X_2$

s.t. ① $3X_1 + 5X_2 \leq 6$

② $X_1 + 2X_2 \leq 8$

$X_1, X_2 \geq 0$

(D) $\min W = 6y_1 + 8y_2$

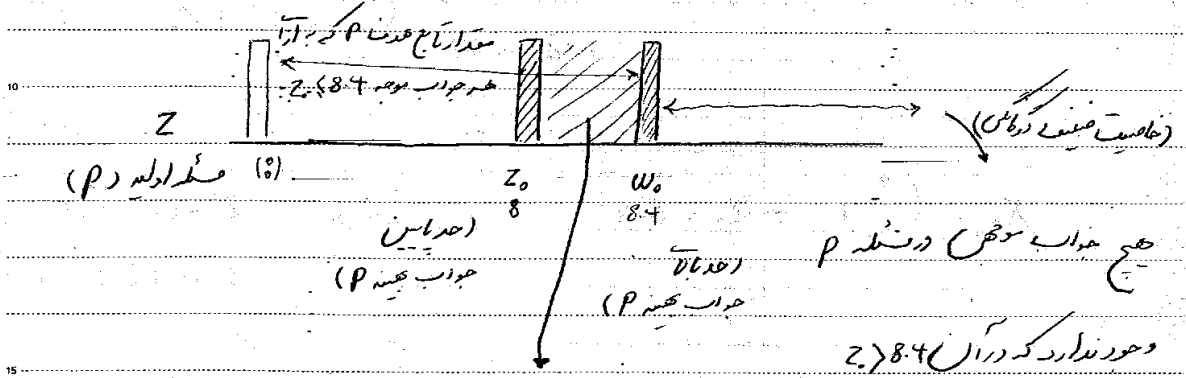
s.t. ① $3y_1 + y_2 \geq 4$

② $5y_1 + 2y_2 \geq 7$

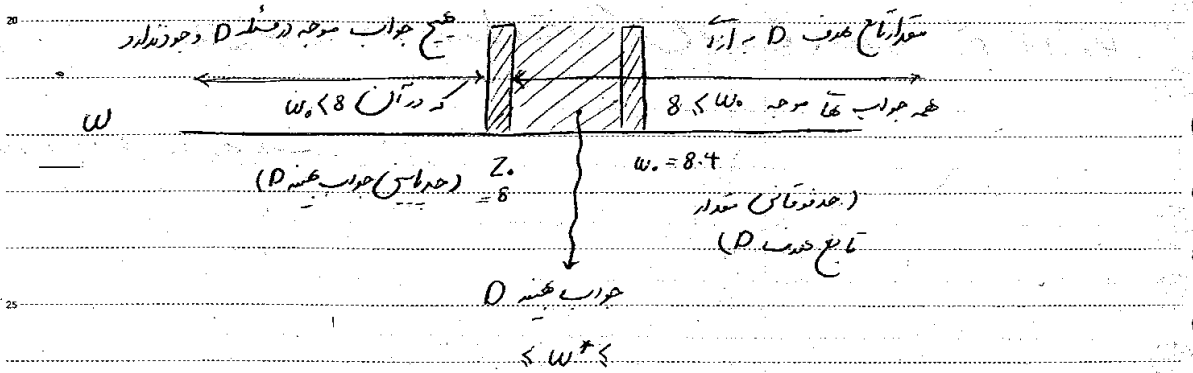
$y_1, y_2 \geq 0$

جواب موجه P : $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $Z_0 = 8$ D آن : $\begin{pmatrix} 7/5 \\ 0 \end{pmatrix}$ $W_0 = 8.4$

آیا می‌توان جواب موجه در P گفت که $Z_0 = 9$ ؟ نه، چون باید از 8.4 کوچکتر.



جواب موجه جواب بهینه P در این ناحیه قرار دارد



PAPCO

50

Subject:
Year: Month: Date: ( )

* اگر X_0 و Y_0 جواب های موجه مسائل P و D باشند بحوریکه $Z_0 = w_0$ در اینصورت

$X^* = X_0$ و $Y^* = Y_0$

خاصیت ضعیف دوگانگی

جواب موجه P : $X_0 \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} Z_0 \leq w^* \\ , Z_0 = w_0 \end{array}\right\} \Rightarrow w_0 \leq w^* \Rightarrow w_0 = w^*$

جواب موجه D $Y_0 \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} Z^* \leq w_0 \\ , Z_0 = w_0 \end{array}\right\} \Rightarrow Z^* \leq Z_0 \Rightarrow Z^* = Z_0$

$X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 6/5 \end{pmatrix} \rightarrow Z_0 = 8.4 \Longrightarrow Z^* = w^* = 8.4$

$X^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 6/5 \end{pmatrix} \quad Y^* = \begin{pmatrix} 7/5 \\ 0 \end{pmatrix}$

* اگر مسئله P بیکران باشد آنگاه D دارای جواب موجه نیست!

* اگر مسئله D بیکران باشد " P " . . .

* مسئله P دارای جواب بهینه محدود است (بیکران نیست) $\Longleftrightarrow$ هم P و هم D دارای جواب موجه باشند. [?]

PAPCO

ieun.ir

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال:

(P) $\max\ Z = 2X_1 + X_2$

s.t. $\begin{cases} X_1 - X_2 \leq 10 \\ 2X_1 - X_2 \leq 40 \end{cases}$

$X_1, X_2 \geq 0$

(D) $\min\ w = 10y_1 + 40y_2$

$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \geq 2 \\ -y_1 - y_2 \geq 1 \quad * \rightarrow \end{cases}$

$y_1, y_2 \geq 0$

$\Leftarrow$ D دارای جواب موجه نیست ← بیکران یا موجه ندارد

$\Leftarrow$ بیکران $\Leftarrow$ $(0,0)$ دارد

* D جواب موجه ندارد ← P جواب موجه ندارد

P جواب بیکران دارد

قضیه اساسی دوگانگی: Faundamental Theorem of Duality

ارتباط مابین جواب های مسائل P و D به صورت زیر است:

P \ D	جواب موجه دارد	جواب موجه ندارد
جواب موجه دارد	هم D و هم P دارای جواب بهینه هستند $Z^* = w^*$	مسئله P بیکران
جواب موجه ندارد	مسئله D بیکران	هم P و هم D دارای ناحیه موجه تهی هستند

مثال:

$\max\ Z = 5X_1 + 3X_2$

s.t. (1) $X_1 - X_2 \leq -4$

(2) $-X_1 + X_2 \leq -2$

$X_1, X_2 \geq 0$

(1) + (2) $\rightarrow 0 \leq -6$

$\Leftarrow$ P جواب موجه ندارد

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$\Leftarrow$ D یا بیکران است یا جواب موجه ندارد:

ضرایب همان می‌شوند و سمت راست 3 و 5 $\Leftarrow$ $X \geq 0$ $\Leftarrow$ جواب موجه ندارد

قضیه: در یک مسئله به فرم کانونی:

$$(P)\begin{cases} \max z = CX \\ AX \leq b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

فرض کنید X^* و Z^*

مقادیر بهینه به ازای پایه بهینه B^* باشد. در اینصورت:

$$\boxed{Y^* = C_{B^*} B^{*-1}}$$

ضریب simple

اثبات:

$$(P)\begin{cases} \max z = CX \\ AX \leq b \\ X \geq 0 \end{cases} \quad \text{—} \quad (D)\begin{cases} \min w = Yb \\ YA \geq C \\ Y \geq 0 \end{cases}$$

اولاً می‌دانیم $Z^* = C_{B^*} B^{*-1} b$ و از طرف دیگر تابع هدف مسئله D به ازای Y^*

برابر است با:

$$w = Y^* b = C_{B^*} B^{*-1} b \Longrightarrow$$

$$w = Z^* \xrightarrow{\text{خاصیت ضعیف دوگانگی}} w = w^*$$

ثانیاً باید ثابت کنیم که Y^* جواب موجه در فضای D است یعنی:

$$\begin{cases} Y^* A \geq C \\ Y^* \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} C_{B^*} B^{*-1} A \geq C \\ C_B B^{*-1} \geq 0 \end{cases}$$

$$C_B B^{*-1} A = C_B B^{*-1} (a_1, a_2, \dots, a_n) \geq (c_1, \dots, c_n)$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

یا $\forall j : C_B B^{*-1} a_j \geq C_j$

اما می دانیم که در پایه بهینه P $\forall j : Z_j - C_j \geq 0$ و یا به عبارتی $\forall j : C_B B^{*-1} a_j \geq C_j$

یعنی رابطه برقرار است.

از طرف دیگر می دانیم که $C_B B^{*-1}$ (ضریب Sim) در واقع ($Z_j - C_j$) متغیرهای کمکی در جدول بهینه P

است } ** تعیین مقادیر بهینه متغیرهای دوگان از روی جدول بهینه مسئله P **

* اگر مسئله P به فرم کانونی باشد مقادیر بهینه متغیرهای دوگان به صورت $Y^* = C_B B^{-1}$

به دست می آید که در آن B ماتریس پایه بهینه در مسئله P است.

* در واقع مقادیر بهینه متغیرهای دوگان مسئله P (که به فرم کانونی است) از روی ضرایب

Simplex جدول بهینه مسئله P تعیین می شود

* ضرایب Sim- در جدول بهینه یک مسئله P به فرم کانونی در واقع $Z_j - C_j$ متغیرهای

کمکی مسئله P در جدول بهینه هستند.

Subject:
Year Month Date ( )

مثال:

(P) $\max Z = 3X_1 + 2X_2 + 5X_3$

s.t. (1) $X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 500$

(2) $3X_1 + 2X_3 \leq 460$

(3) $X_1 + 4X_2 \leq 420$

$X_i \geq 0$

می دانیم که در جدول جهینه P متغیرهای پایه هستند عبارتند از:

$X_B^* = \begin{pmatrix} X_2 \\ X_3 \\ S_3 \end{pmatrix}$ ، مطلوب است تعیین Y^* ؟

$Y^* = C_B B^{-1}$ $\quad B^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$Y^* = (2,5,0) \cdot B^{-1} = (1,2,0)$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$y_1^* \quad y_2^* \quad y_3^*$

* در صورتی که P به فرم کانونی باشد، در اینصورت Y^* از ردیف مقادیر $Z_j - C_j$ متغیر کمکی وابسته به آن به دست می آید.

* اگر مسئله P به فرم max باشد در اینصورت با توجه به نوع محدودیتی که متغیرهای آن وابسته است:

اگر محدودیت به صورت "$\leq$" باشد $\Rightarrow y_i^*$ برابر $Z_j - C_j$ متغیر کمکی S_i که وابسته به آن است

ieun.ir

Subject:
Year. Month. Date. ( )

اگر محدودیت به صورت $\geq$ یا $=$ باشد $\Leftarrow$

y_i^* برابر است با مقدار $Z_j - C_j$ متغیر مصنوعی R_i وابسته به آن بدون در نظر گرفتن عبارت M

R_i

جدول بهینه

$$(Z_j - C_j)_{R_i} = \underbrace{C_B B^{-1} a_j}_{\text{فاقد ضریب } M} - \underbrace{C_j}_{+M}$$

مثال:

(P) $\text{Max } Z = 3X_1 + 2X_2 + 5X_3$

s.t. (1) $X_1 + 3X_2 + 2X_3 \leq 15$

(2) $2X_2 - X_3 \geq 5$

(3) $2X_1 + X_2 - 5X_3 = 10$

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

هدف آن است که با داشتن جدول بهینه P

مقادیر بهینه D را تعیین؟

$\boxed{y_1}$ (1) $X_1 + 3X_2 + 2X_3 + \boxed{S_1} = 15$ $\quad y_1^* = \frac{51}{23}$ $\quad S_1^* = 0$

y_2 (2) $2X_2 - X_3 - e_1 + R_1 = 5$ $\quad y_2^* = \frac{-58}{23}$ $\quad R_1^* = 0$

y_3 (3) $2X_1 + X_2 - 5X_3 + R_2 = 10$ $\quad y_3^* = \frac{9}{23}$ $\quad R_2^* = 0$

همیشه؟ ← قضیه بعد

	X_1	X_2	X_3	S_1	e_1	R_1	R_2	RHS
Z	0	0	0	$51/23$	$58/23$	$M - \frac{58}{23}$	$M + \frac{9}{23}$	$565/23$ $= W^* = Z^*$
X_3					$5/23$	$-5/23$		$15/23$
X_2					$-9/23$	$9/23$		$65/23$
X_1					$17/23$	$-17/23$		$120/23$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$e_1 \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad R_1 \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

* اگر محدودیتی به صورت $\geq$ باشد به جای R می‌توانیم از e استفاده کنیم ←

مقدار بهینه = قرینه $Z_j - C_j$ مربوط به e

Complementary Slackness Theorem — قضیه کمک مکمل

اگر X_0 یک جواب موجه برای مسئله P که به فرم کانونی است باشد و Y_0 جواب موجه مسئله D وابسته به آن باشد در اینصورت: $X^* = X_0$ و $Y^* = Y_0$ است $\Leftrightarrow$

$\Leftarrow$ داریم

$$\forall i: S_i \times y_i = 0 \qquad \forall j: e_j \times X_j = 0$$

که در آن S_i متغیر کمکی محدودیت i مسئله P و e_j متغیر مازاد محدودیت j مسئله D است.

($\geq \Leftarrow e$ حتماً داریم)

X_j و Y_i مقادیر متغیرهای P و D در جواب‌های موجه X_0 و Y_0 هستند.

مثال:

$$\text{Max } Z = 60X_1 + 30X_2 + 20X_3$$

$$\text{s.t.} \quad (1) \quad 8X_1 + 6X_2 + X_3 + S_1 \leq 48$$

$$(2) \quad 4X_1 + 2X_2 + \tfrac{3}{2}X_3 + S_2 \leq 20$$

$$(3) \quad 2X_1 + \tfrac{3}{2}X_2 + \tfrac{1}{2}X_3 + S_3 \leq 8$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

فرض: $X_1^* = 2 \quad X_2^* = 0 \quad X_3^* = 8$

مقادیر بهینه متغیرهای دوگان؟

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

(D) $\min \ w = 48y_1 + 20y_2 + 8y_3$

s.t. (1) $8y_1 + 4y_2 + 2y_3 - e_1 = 60$

(2) $6y_1 + 2y_2 + \frac{3}{2}y_3 - e_2 = 30$

(3) $y_1 + \frac{3}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3 - e_3 = 20$

$y_i \geq 0$

$X_1^*, X_2^*, X_3^* \xrightarrow[\text{معادلات مسئله P}]{\text{قرار دادن در دستگاه}} S_1^* = 24 \quad S_2^* = 0 \quad S_3^* = 0$

قضیه: $e_1 X_1 = 0 \Rightarrow e_1^* = 0 \qquad e_3 X_3 = 0 \Rightarrow e_3^* = 0$

$S_1 y_1 = 0 \Rightarrow y_1^* = 0 \xrightarrow[\text{معادلات}]{\text{دستگاه}} \begin{cases} 4y_2 + 2y_3 = 60 \\ \frac{3}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3 = 20 \end{cases}$

معادله P 2

$\Rightarrow y_2^* = y_3^* = 10 \Rightarrow e_2^* = 5$

مثال: تعیین جواب های بهینه مسئله زیر؟

$\min \ Z = 2X_1 + 3X_2 + 5X_3 + 2X_4 + 3X_5$

s.t. (1) $X_1 + X_2 + 2X_3 + X_4 + 3X_5 \geq 4$

(2) $2X_1 - 2X_2 + 3X_3 + X_4 + X_5 \geq 3$

$X_j \geq 0$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

(D) : $\text{Max } Z = 4y_1 + 3y_2$

s.t. ① $y_1 + 2y_2 \leq 2$

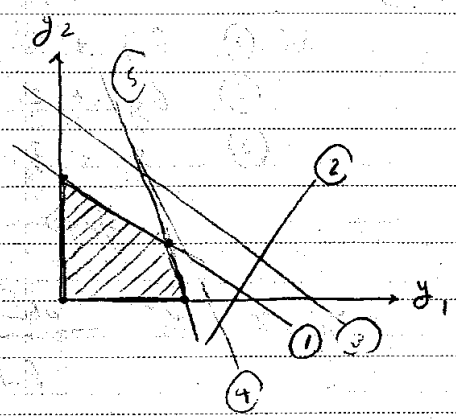
② $y_1 - 2y_2 \leq 3$

③ $2y_1 + 3y_2 \leq 5$

④ $y_1 + y_2 \leq 2$

⑤ $3y_1 + y_2 \leq 3$

$y_i \geq 0$



$\left\{ \begin{matrix} ① \\ ⑤ \end{matrix} \right. \Longrightarrow y_1^* = 4/5 \quad y_2^* = 3/5$

5 تا Slack که داریم : $S_1, \dots, S_5$

* نقطه بهینه D از برخورد محدودیت های 1 و 5 به دست می آید:

$S_1^* = 0, S_5^* = 0 - S_2^*, S_3^*, S_4^* > 0 \xrightarrow{\text{قضیه کمک مکمل}} S_i^* X_i^* = 0$

$\Longrightarrow X_2^* = X_3^* = X_4^* = 0$ (I)

$y_1^* = 4/5 \quad y_2^* = 3/5 \Longrightarrow e_i^* y_i^* = 0 \Longrightarrow e_1^* = e_2^* = 0$ (II)

$I, II \Longrightarrow \begin{cases} X_1 + 3X_5 = 4 \\ 2X_1 + X_5 = 3 \end{cases} \Longrightarrow X_1^* = X_5^* = 1$

PAPCO

Subject :

Year . Month . Date . ( )

تفسیر اقتصادی دوگان

(مدل برنامه ریزی تولید)

(P)

$$\max Z = \sum_j c_j x_j$$

$$\sum a_{ij} x_j \leq b_i$$

$$x_j \geq 0$$

(D)

$$\min W = \sum b_i y_i$$

$$\sum a_{ij} y_i \geq c_j$$

$$y_i \geq 0$$

(x_j : میزان تولید محصول j ام ... a_{ij} : میزان استفاده از منبع i توسط یک واحد محصول j

b_i : حداکثر میزان دسترسی به منبع i)

* اگر فرض کنیم که یک مسئله کاوش از روی یک مدل برنامه ریزی تولید جهت حداکثر سازی سود ناشی از تولید محصولات مختلف به دست می آید :

در مسئله دوگان نظر ما خواهیم کل ارزش منابع مورد استفاده حداقل شود "

$\Rightarrow$ y_i : ارزش منبع i ام

* ارزش بهینه منابع مسئله P در واقع نقاط بهینه مسئله D است :

$$y^* = C_B B^{-1}$$

ارزش بهینه منبع i ام : $y_i^* = \partial z / \partial b_i$

$$\partial z / \partial b = C_B B^{-1}$$

شرط اینکه " پایه قبلی ناهبیده باشد و همچنان بهینه باقی بماند "

P4PCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

← = نسبت تغییر در تابع هدف به ازای یک واحد تغییر در منبع مورد نظر.

قیمت سایه‌ای (Shadow Price) محدودیت iام = نسبت تغییر در مقدار تابع هدف به ازای یک واحد تغییر در مقدار سمت راست.

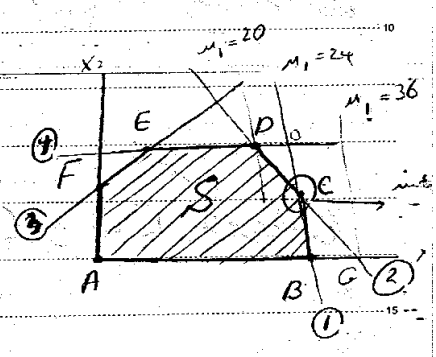
⇐ ↑ = قیمت سایه‌ای محدودیت iام

مثال:

$$\max\ Z = 5X_1 + 4X_2$$

s.t.
① $6X_1 + 4X_2 \le 24$ ماده اولیه μ_1
② $X_1 + 2X_2 \le 6$ μ_2
③ $-X_1 + X_2 \le 1$ μ_3
④ $X_2 \le 2$ μ_4

$X_1, X_2 \ge 0$



$C \to (3, \frac{3}{2}) \Rightarrow X_1^* = 3 \quad X_2^* = \frac{3}{2} \quad Z^* = 21$

μ_1 و μ_2 تمام می‌شوند - μ_3 و μ_4 باقی می‌مانند

$$\frac{\text{مقدار تغییر در تابع هدف } Z \text{ از } D \text{ به } G}{\text{مقدار تغییر در ماده اولیه } \mu_1 \text{ هنگامی که از } D \text{ به } G} = \frac{30-18}{36-20} = \frac{3}{4} = \frac{\partial Z}{\partial b_1}$$

(D) $\min\ w = 24y_1 + 6y_2 + y_3 + 2y_4$

(جبری): s.t.
① $6y_1 + y_2 - y_3 \ge 5$
② $4y_1 + 2y_2 + y_3 + y_4 \ge 4$
$y_i \ge 0$

$\Longrightarrow$ $y_1^* = \frac{3}{4}$, $y_2^* = \frac{1}{2}$, $y_3^* = y_4^* = 0$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$B(4,0)$ $m_1=4$ $z_1^*=20$

$O(\frac{8}{3},2)$ $m_2=\frac{20}{3}$ $z_2^*=\frac{64}{3}$

تمرین تشویقی : تغییرات m_2 به صورت هندسی

← ارزش کل منابع مورد استفاده توسط هر واحد محصول j : $\sum a_{ij} y_i \geq c_j$

$= z_j$ = قیمت تمام شده هر واحد محصول

<= محدودیت های D : $z_j \geq c_j$

* P فرم کانونی :

	x_j
	$z_j - c_j < 0$
x_B	

↓

	x_j
	$\forall j : z_j - c_j \geq 0$
x_B^*	Opt

→ $z_j \geq c_j$ → محصول از لحاظ اقتصادی به صرفه است

$\boxed{\text{Simplex}}$

$$\max \; z = cx$$
$$Ax \leq b$$
$$x \geq 0$$

(سمت راست +)

همواره شرط موجه بودن برقرار است ← تمام x_B ها BFS هستند : $\forall i : b_i \geq 0$

← برقراری شرط بهینگی : $\forall j : z_j - c_j \geq 0$ (در D موجه باشد)

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

Duel Simplex

سیمپلکس دوگان

همواره شرط بهینگی برقرار باشد: $\forall j : z_j - c_j \geq 0$ (در D موجه)

$\Downarrow$

برقراری شرط موجه بودن $\forall i : b_i \geq 0$ (در P موجه)

✓ روش سیمپلکس دوگان برای حل مسئله

$$\max z = cx$$
$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$

گام شروع: در یک مسئله LP با مشخصات فوق از جوابی شروع می‌کنیم که برای آن داریم:

$\forall j : z_j - c_j \geq 0$ اما به ازای بعضی iها داریم: $\exists i : b_i < 0$

گام انتخاب متغیر خروجی از پایه: متغیر x_{B_r} جهت خروج از پایه انتخاب می‌شود اگر

$x_{B_r} = \min\{x_{B_i} \mid x_{B_i} < 0\}$ شرط توقف: $\forall i : x_{B_i} \geq 0$

گام انتخاب متغیر ورودی پایه: متغیر x_k جهت ~~خروج~~ ورود به پایه انتخاب می‌شود اگر

تست نسبت روش Simplex دوگان $\rightarrow$ $\min\left\{\frac{z_j - c_j}{|y_{rj}|} \mid y_{rj} < 0\right\}$

$\rightarrow$ اگر در اجرای تست نسبت $\forall j : y_{rj} > 0$ شد، در اینصورت مسئله D بیکران است.

PAPCO

ieun.ir

Subject:
Year. Month. Date. ( )

گام انجام عملیات سطری: جهت خروج X_{Br} و ورود X_k و انجام عملیات سطری

و بازگشت به گام انتخاب متغیر ورودی به پایه

* هر مسئله LP که به وسیله Simplex قابل حل باشد با D-Simplex هم قابل حل و بالعکس

مثال:

$$\text{Max } Z = -2X_1 - X_2$$

$$\text{s.t.} \quad (1)\ 3X_1 + X_2 \geq 3$$

$$(2)\ 4X_1 + 3X_2 \geq 6$$

$$(3)\ X_1 + 2X_2 \leq 3$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

تمرین تشویقی: حل با Simplex

$$\Rightarrow \quad (1)\ -3X_1 - X_2 \leq -3 \rightarrow -3X_1 - X_2 + S_1 = -3$$

$$(2)\ -4X_1 - 3X_2 \leq -6 \qquad -4X_1 - 3X_2 + S_2 = -6$$

$$(3)\ X_1 + 2X_2 \leq 3 \qquad X_1 + 2X_2 + S_3 = 3$$

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	RHS
Z	2	1	0	0	0	0
S_1	-3	-1	1	0	0	-3
S_2	-4	-3	0	1	0	-6
S_3	1	2	0	0	1	3
Z	2/3	0	0	1/3	0	-2
S_1	-5/3	0	1	-1/3	0	-1
X_2	4/3	1	0	-1/3	0	2
S_3	-5/3	0	0	2/3	1	-1

خروجی

سمت نسبت:

$$\min\left\{\frac{2}{|-4|}, \frac{1}{|-3|}\right\} = \frac{1}{3}$$

$$\min\left\{\frac{2/3}{|-5/3|}, \frac{1/3}{|-1/3|}\right\} = 2/5 \longrightarrow \text{ورودی } X_1$$

PAPCO

67

Subject:
Year. Month. Date. ( )

* برای شروع این روش حتماً باید یک جواب اولیه شروع داشته باشیم به نحوی که در مسئلهٔ Max ، $\forall j : z_j - c_j \geq 0$ اما اگر بعضی / تمام متغیرها مقادیر سمت راست منفی بودند مشکلی نیست.

* اگر چنین جوابی وجود نداشته باشد باید از روش‌های تولید جواب اولیه سیمپلکس دوگان استفاده کرد.

مطالعه! :)

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	RHS
Z	0	0	$2/5$	$1/5$	0	$-2\cdot 2/5$
X_1	1	0	$-3/5$	$1/5$	0	$3/5$
X_2	0	1	$-4/5$	$-3/5$	0	$6/5$
S_3	0	0	-1	1	1	0

شرط توقف : $\forall i : b_i \geq 0 \rightarrow X_1^* = 3/5 \quad X_2^* = 6/5 \quad Z^* = -2\,2/5$

PAPCO ieun.ir

Subject:
Year. Month. Date ( )

Sensitivity Analysis

تجزیه و تحلیل حساسیت

در تجزیه و تحلیل حساسیت بعد از آنکه جواب بهینه مسئله LP بدست آمد، بررسی اینکه در اثر تغییر در داده های مسئله در جواب بهینه چه تغییری رخ می دهد می پردازیم

$$\max Z = CX$$

(LP) $AX = b$

$X \geq 0$

	X_j	
Z	$C_B B^{-1} a_j - c_j$	$C_B B^{-1} b$
X_B	$B^{-1} a_j$	$B^{-1} b$

Opt.

مثال:

$$\max Z = 3X_1 + 2X_2 + 5X_3$$

s.t.
① $X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 450 \rightsquigarrow 602$
② $3X_1 + 2X_3 \leq 400 \rightsquigarrow 644$
③ $X_1 + 4X_2 \leq 420 \rightsquigarrow 588$

$X_i \geq 0$

	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	RHS
Z	4	0	0	1	2	0	1350
X_2	$-1/4$	1	0	$1/2$	$-1/4$	0	100
X_3	$3/2$	0	1	0	$1/2$	0	230
S_3	2	0	0	-2	1	1	20

PAPCO

ieun.ir

Subject:
Year. Month. Date. ( )

① $b_{Current} \longrightarrow b_{New}$; ✓ $(X_B)_{Current} \longrightarrow (X_B)_{New} = B^{-1} b_{New}$

✓ $Z_{Current} \rightarrow Z_{New} = C_B B^{-1} b_{New}$

$(X_B)_{New} \geq 0 \Rightarrow$ پایه فعلی بهینه است (سمت راست مثبت و $Z_j - C_j$ ها تغییر نکرده)

$(X_B)_{New}$: (حداقل یکی از عناصرش منفی شود) $\Rightarrow$ با D-Simplex ادامه می دهیم

$$(X_B)_{New} = B^{-1} b_{New} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 602 \\ 644 \\ 588 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 140 \\ 322 \\ 28 \end{pmatrix}$$

$Z_{New} = (2, 5, 0)(X_B)_{New} = 1890$ → هیچکی مسئله تغییر نکرده

② تغییر در ضرایب تابع هدف (C_j ها)

2-1 . تغییر در C_j یک متغیر غیر پایه نظیر X_j : (Max)

$(Z_j - C_j)_{Cu} \longrightarrow (Z_j - C_j)_{New}$

✓ $(Z_j - C_j)_{New} = C_B B^{-1} a_j - (C_j)_{New}$

$\geq 0 \Rightarrow$ جواب بهینه فعلی تغییر نمی کند

$< 0 \Rightarrow$ ادامه با روش Simplex

PAPCO

ieun.ir

Subject:
Year. Month. Date. ( )

* در تابع هدف : $3 \to 5$: ضریب X_1

$(Z_1 - C_1)_{New} = \underbrace{C_B B^{-1}}_{(1,2,0)} a_j - (C_j)_{New} = 2 > 0 \Rightarrow$ جواب فعلی هم چنان بهینه است.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

راه ساده‌تر : فقط در C_j تغییر $\Leftarrow$

2-2 : تغییر در C_j یک متغیر پایه (C_B تغییر می‌کند) : $\{$ پایه‌ها $\underset{\downarrow}{0}$ می‌مانند $\}$ $\Downarrow$ $Z_j - C_j$

$\forall j \in NBV : (Z_j - C_j)_C \to (Z_j - C_j)_{New}$

$(Z_j - C_j)_{New} = (C_B)_{New} B^{-1} a_j - (C_j)_{New} \to \forall j \in NBV : \geq 0 \Rightarrow$ ✓

$\searrow \exists j : < 0 \Rightarrow$ ✓

* در تابع هدف : $3 \to 5$: $2 \to 3$ $5 \to 4$

$(C_B)_{Cur} = (2, 5, 0) \longrightarrow (C_B)_{New} = (3, 4, 0)$

$(Z_1 - C_1)_{New} = (C_B)_N B^{-1} b - (C_1)_{New} = 1/4$

$*(C_B)_N B^{-1} = (3/2, 5/4, 0)$

$(Z_2 - C_2)_{New} = (3/2, 5/4, 0) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - (C_2)_{New} = 3 - 3 = 0$

همیشه اینطوری $B^{-1} a_j = y_i$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

PAPCO

69

ieun.ir

Subject:
Year. Month. Date. ( )

③ اضافه کردن متغیر جدید X_j :

اضافه شدن متغیر جدید X_{n+1} به مسئله LP به منزلهٔ تغییر در ضرایب آنهاست :

$$C_{n+1} = 0 \longrightarrow (C_{n+1})_{New}$$

$$a_{n+1} = 0 \longrightarrow (a_{n+1})_{New}$$

در این هنگام ستون X_{n+1} را به جدول جدید اضافه می‌کنیم ، به نحوی که :

$$B^{-1}(a_{n+1})_{New} \quad , \quad Z_{n+1} - C_{n+1} = C_B B^{-1} a_{n+1} - C_{n+1}$$

* X_7 وارد می‌کنیم و $C_7 = 4$ ، $a_7 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$:

$$Z_7 - C_7 = C_B B^{-1} a_7 - C_7 = (2,5,0)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 4 = -1$$

$$B^{-1} a_7 = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

④ حذف کردن متغیر X_j :

* اگر متغیری که می‌خواهیم حذف کنیم در جدول بهینه غیرپایه ای باشد که جواب بهینه فعلی تغییر نمی‌کند (مقدارش ۰ است)

* برای حذف کردن یک متغیر پایه فعلی کافی است ضریب آن را در تابع هدف به

Subject:

Year. Month. Date. ( )

ضریب نامناسبی تبدیل کنیم :

$(C_j)_{New} \xrightarrow{Max} -M$

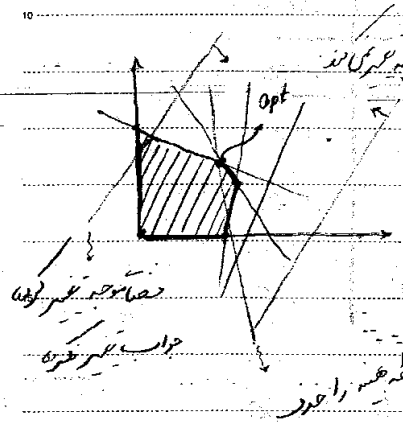
$(C_j)_{New} \xrightarrow{Min} +M$

* حذف : X_2 $\quad C_2 = 2 \longrightarrow -M$

سطر Z : $\quad \frac{9}{2} + \frac{1}{4}M \quad 0 \quad 0 \quad -\frac{1}{2}M \quad \frac{1}{4}M + \frac{5}{2} \quad 0$

$\{ C_B = (-M, 5, 0) \quad C_B B^{-1} = (-\frac{1}{2}M, \frac{1}{4}M + \frac{5}{2}, 0) \}$

(5) اضافه کردن محدودیت جدید :



در این حالت ، ابتدا جواب هسته فعلی

در محدودیت جدید بررسی می شود که اگر

در آن صدق کند یعنی آن است که

محدودیت جدید تأثیری در جواب هسته فعلی ندارد اما اگر در آن صدق نکند یعنی محدودیت

جدید باعث حذف نقطه هسته فعلی شده است . در اینصورت محدودیت جدید به انتهای جدول

هسته اضافه شده (از این منظور متغیری وابسته به محدودیت به عنوان متغیر پایه اضافه می شود)

و مسئله با روش D-Simplex ادامه می یابد ← "بعد از انجام عملیات سطری"

Subject:
Year. Month. Date. ( )

1. $X^* = (0, 100, 230)$ اضافه : $3X_1 + X_2 + X_3 \leq 500$

جواب بهینه فعلی در آن صدق نمی کند → جواب بهینه تغییر نمی کند

2. اضافه : $3X_1 + 3X_2 + X_3 \leq 500$ صدق نمی کند! $530 \nleq 500$

$$3X_1 + 3X_2 + X_3 + S_4 = 500$$

	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	RHS
Z	0	0	0	1	2	0	0	1350
X_2	$-1/4$	1	0	$1/2$	$-1/4$	0	0	100
X_3	$3/2$	0	1	0	$1/2$	0	0	230
S_3	2	0	0	-2	1	1	0	20
S_4	3	3	1	0	0	0	1	500

Simplex غیست

S_4 | $9/4$ 0 0 $-3/2$ $1/4$ 0 1 | -30

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

⑥ تغییر در ضرایب ستون‌های تشکیل دهنده A : $A=(a_1, a_2, \dots, a_n)$

	x_j	
	$C_B B^{-1} a_j - C_j$	$C_B B^{-1} b$
	$B^{-1} a_j$	$B^{-1} b$

6-1) تغییر در a_j وابسته به یک متغیر غیرپایه : در این حالت $Z_j - C_j$ و بردار y_j وابسته به متغیر تغییر می‌کند :

$$(Z_j - C_j)_{New} = C_B B^{-1} (a_j)_{New} - C_j$$

(max) $\rightarrow \geq 0 \Rightarrow$ جواب بهینه فعلی تغییر نمی‌کند

$\rightarrow < 0 \Rightarrow$ ادامه با روش S

$$* \quad a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow a_{New} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad (Z_1 - C_1)_{New} = (1, 2, 0) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = 3$$

$$= -3$$

$$(y_1)_{New} = B^{-1} (a_1)_{New} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ -1/2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow X_2 \text{ خروجی} \qquad X_1 : \text{ورودی}$$

6-2) اگر a_j وابسته به متغیر پایه‌ای تغییر کند در این حالت در حقیقت ماتریس B و در نتیجه B^{-1} تغییر می‌کند.

x_j از مسئله حذف می‌شود

$C_j \rightarrow -M$:

$$\begin{tikzcd} & a_j \arrow[r, dash] & a'_j \arrow[dr, dash] & \\ x_j \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & & x'_j \\ & c_j \arrow[r, dash] & c_j \arrow[ur, dash] & \end{tikzcd}$$

در این حالت ابتدا فرض می‌کنیم متغیر جدیدی نظیر x'_j با بردار ستونی a'_j و ضرایب

PAPCO

71

ieun.ir

Subject:
Year: Month Date ( )

C_j ← متغیر اضافه شده و هم‌چنین سعی می‌کنیم که در صورت هم‌زمان X_j با تغییر در ضریب C_j از متغیر حذف شود. در صورتی که در نهایت در جواب نهایی متغیر X_j در پایه قرار گرفت جواب بهینه جدید به دست می‌آید و در غیر این صورت اگر $X_j^* > 0$ متغیر دارای جواب موجه نمی‌باشد.

مثال:

$$\text{Max } Z = 2X_1 + 3X_2 + X_3 + 2X_4$$

Optimal Solution — Slacks

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	RHS	X_1'
Z	0	$1 \overset{-3/4\mu}{-1/2}$	$3 \overset{-1/4\mu}{+5/2}$	0	$2 \overset{-1/4\mu}{+3/2}$	$0 \overset{-1/4\mu}{-1/2}$	12	$-\frac{1}{2}\mu - 4$
X_4	0	5/4	7/4	1	3/4	-1/4	4	
X_1	1	3/4	1/4	0	1/4	1/4	2	

$a_1 = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \longrightarrow a' = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ ⟶ اضافه شدن متغیر X_1' جدید

$C_1 = 2 \longrightarrow C_1' = 5$

$-\mu$ ← حذف X_1

$$(Z_j - C_j)_{new} = (2, -\mu)\, B^{-1} a_j - C_j$$

X_1' ← مربوط $(Z_j - C_j) = (2, -\mu) \begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 \\ 1/4 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - 5 = -\frac{1}{2}\mu - 4$

X_2: وارد X_1: خارج ...

Subject:
Year: Month: Date: ( )

اثر تغییرات همزمان در پارامترها ← Winston (قوانین 100%)

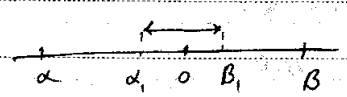
Parametric Linear Programming (برنامه ریزی پارامتری (خطی))

$$\max \; z = (c + td)X$$
$$AX = b$$
$$X \geq 0$$
$$\alpha \leq t \leq \beta$$

ضرایب بردارهای c و d داده شده است

* مسئله LP در واقع حالت خاصی از این مسئله است وقتی $t=0$.

و اگر $\alpha \leq t = 0 \leq \beta$ باشد در این حالت ابتدا مسئله را حل می‌کنیم و سپس با تحلیل حساسیت دامنه‌ای نظیر (α_1, β_1) که جواب فعلی هم چنان بهینه است به دست آورده و سپس با گسترش دامنه به نواحی دیگر سعی در حل مسئله در تمام بازه (α, β) می‌نماییم.



مثال:

$$\max \; z = (1-2t)X_1 + (3-t)X_2$$

① $X_1 + X_2 + S_1 = 6$

② $-X_1 + 2X_2 + S_2 = 6$

$t \geq 0$

$X_1, X_2, S_1, S_2 \geq 0$

PAPCO

72

Subject:

Year: Month Date ( )

		X_1	X_2	S_1	S_2	RHS
	Z	$-1+2t$	$-3+t$	0	0	0
0	S_1	1	1	1	0	6
$t=0$	S_2	-1	2	0	1	6
	Z	0	0	$5/3 - 5/3\,t$	$2/3 - 1/3\,t$	$14-8t$
0	X_1	1	0	$2/3$	$-1/3$	2
$t=0$	X_2	0	1	$1/3$	$1/3$	4

↓ min

$C=(1,3) \longrightarrow (1-2t, 3-t)$ $\quad (Z_j - C_j)_{new} = (1-2t, 3-t)\, B a_j^{-1} - C_j$

$(Z_j - C_j)_{S_1} = 5/3 - 5/3\,t$

$(Z_j - C_j)_{S_2} = 2/3 - 1/3\,t$

$$\begin{cases} 5/3 - 5/3\,t \geq 0 \\ 2/3 - 1/3\,t \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow 0 \leq t \leq 1$$

opt.

if $t > 1 \longrightarrow$ S_1 out X_1 in

					RHS
Z	$-5/2 + 5/2\,t$	0	0	$3/2 - 1/2\,t$	$9-3t$
S_1	$3/2$	0	1	$-1/2$	3
X_2	$-1/2$	1	0	$1/2$	3

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

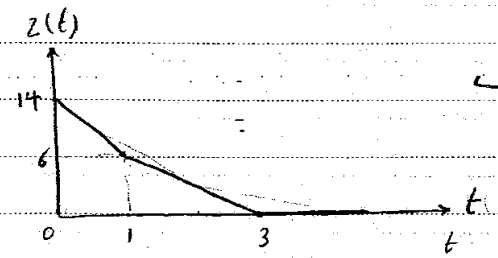
$$\begin{cases} -\frac{5}{2} + \frac{5}{2}t \geq 0 \\ \frac{3}{2} - \frac{1}{2}t \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow 1 \leq t \leq 3$$

if: $t > 3 \longrightarrow$ S_2: وارد X_2: خارج $\Longrightarrow$ $\underbrace{S_1, S_2}_{\text{پایه}}$

← به جدول اولیه رسیدیم : برای $t \geq 3$ بهینه است

* خلاصه نتایج برنامه ریزی پارامتری مسئله *** در امتحان حتماً نوشته شود

$t \backslash x^*$	X_1^*	X_2^*	Z^*
$0 \leq t \leq 1$	2	4	$14-8t$
$1 \leq t \leq 3$	0	3	$9-3t$
$t \geq 3$	0	0	0



تابع قطعه قطعه خطی محدب

↑

برنامه ریزی پارامتری روی تابع هدف max

✓ برای $t=1$ و $t=3$ ← ترکیب متغیرهای پایه عوض می شود اما Z^* ثابت ⇐

جواب چندگانه.

اثبات ریاضی ← $\lambda X_1 + (1-\lambda) X_2$ بالای تابع بیفتد.

PAPCO

73

Subject:
Year. Month. Date. ( )

برنامه ریزی پارامتری در حالتی که مقادیر سمت راست پارامتری است ← کتاب /

ieun.ir

برنامه ریزی پارامتری درحالتی که مقادیر سمت راست پارامتری است ⇐ کتاب (مطالعه ی کلاسی)

مسأله ی حمل و نقل : Transportation problem

در مدل حمل و نقل فرض می شود m مبدأ جهت ارسال یک نوع کالا و n مقصد جهت فروش این کالا موجود است. در هر مبدأ i ($i=1,2,\dots,m$) تعداد a_i واحد قابل عرضه و در هر مقصد j ($j=1,2,\dots,n$) مقدار b_j واحد کالا تقاضا وجود دارد. هزینه ی حمل هر واحد کالا از مبدأ i به مقصد j برابر c_{ij} است. می خواهیم مقدار واحد کالاهایی را تعیین کنیم که از مبدأ i به مقصد j ارسال می شوند. کل هزینه ی حمل و نقل حداقل شود.

متغیر تصمیم گیری: x_{ij} : تعداد واحد کالایی که از مبدأ i به مقصد j ارسال می شود.

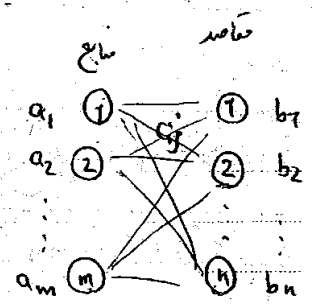
$$Min\ Z = \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

① $\sum_j x_{ij} = a_i$

② $\sum_i x_{ij} = b_j$

③ $x_{ij} \geq 0$

حمل و نقل



Subject : Date :

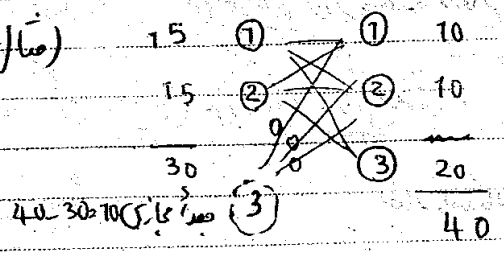
✓ در این مدل مجموع کل عرضه‌ی منابع با مجموع کل تقاضاها برابر است:

$$\sum_j b_j = \sum_j \left(\sum_i x_{ij}\right) = \sum_i \left(\sum_j x_{ij}\right) = \sum_i a_i$$

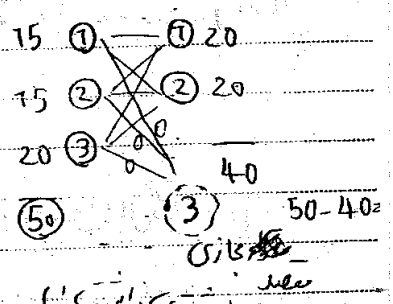
به این مدل که در آن $\sum b_j = \sum a_i$ است مدل حمل و نقل متوازن گویند.

✓ مدل حمل و نقل غیرمتوازن را که در آن $\sum b_j > \sum a_i$ است می‌توان با تعریف یک مبدأ مجازی با توانایی عرضه ($\sum_j b_j - \sum_i a_i$) واحد و هزینه ارسال صفر و یا اگر $\sum_j b_j < \sum_i a_i$ با تعریف یک مقصد مجازی با توانایی تقاضای ($\sum a_i - \sum b_j$) و هزینه‌ی ارسال صفر متوازن کرد.

مثال)



(پرفروش)



(مشتری نداشت!)

✓ تمام محاسبات مربوط به مدل حمل و نقل در جدولی به نام جدول حمل و نقل انجام می‌شود:

که دارای m ردیف (تعداد مبدأ) و n ستون (تعداد مقصدها) و کلاً mn خانه است.

در هر خانه پنجره‌ای وجود دارد که در آن هزینه‌ی مربوط به آن نوشته می‌شود:

MICRO®

	۱	۲			
۱	C_{11}	C_{12}	- - -	C_{1n}	a_1
۲	C_{21}	C_{22}		C_{2n}	a_2
⋮				⋮	⋮
m	C_{m1}	C_{m2}		C_{mn}	a_m
	b_1	b_2	- - -	b_n	

هر ۴ متغیری که در محدودیت ها صدق کنند ← BFS

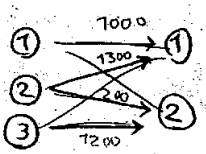
⇑

همه صفر شدند ← جواب موجه است.

نحوه ی قرار گرفتن یک ها منحصر به فرد ← جواب پایه ای

مثال

0			1000
1000			1500
1500			1200
1200			3700



1300	0	
2300		
1200		
1400		
3700		

80	215		0
1000			1000
100	108		1500 1200 0
1300	1200		
102	68		1200 0
	1200		
2300	1400		3700
1300	0		3700

$$\text{Min. } Z = 80x_{11} + 215x_{12} + 100x_{21} + 108x_{22} + 102x_{31} + 168x_{32}$$

s.t.

(محدودیت های عرضه) (m=3)

① $x_{11} + x_{12} = 1000$

② $x_{21} + x_{22} = 1500$

③ $x_{31} + x_{32} = 1200$

محدودیت های مربوط به (محدودیت های تقاضا) (n=2)

④ $x_{11} + x_{21} + x_{31} = 2300$

⑤ $x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1400$

⑥ $x_{ij} \geq 0$

✓ بردار ستونی ضرایب موجود در مدل حمل و نقل برای هر متغیر نظیر x_{ij} به صورت

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

i-امین محدودیت عرضه ←

j-امین محدودیت تقاضا ←

است.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & & 1 \\ \hline 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & 1 \end{bmatrix}$$

ieun.ir

ieun.ir

(تعداد محدودیت ها) ≤ (تعداد متغیرها)

Subject : Date

Rank یعنی: {ستون ها + سطرها} اینجا ← تعداد سطرها

✓ رتبه ماتریس A (Rank A) بیانگر تعداد متغیر پایه است که در مدل حمل و نقل

تعداد متغیرهای پایه ای = rankA = m+n-1

- در صورتی که متغیر وابسته به هر خانه متغیر پایه ای باشد، مقدار آن در خانه ی مربوط نوشته می شود

** روش های یافتن BFS اولیه در مدل حمل و نقل

روش اول: روش گوشه ی شمال غربی (Northwest_corner Method)

در این روش ابتدا از خانه موجود در شمال غربی جدول شروع کرده و بیشترین مقدار مجاز را با توجه به عرضه و تقاضا به آن نسبت می دهیم و پس از تعدیل عرضه و تقاضا، سطر (یا ستون) صفر شده را حذف می کنیم. اگر هم عرضه و هم تقاضا صفر شد فقط یکی از آنها حذف می شود.

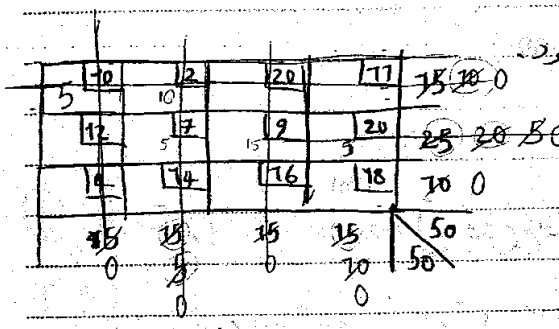
سپس روش برای جدول باقیمانده قرار می شود.

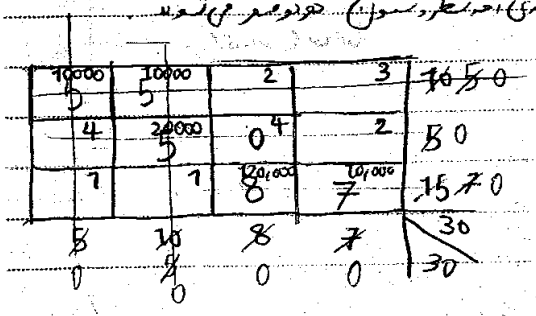
10 (5)	2 (10)	20	11	~~15~~ ~~10~~ 0
12	7 (5)	9 (15)	20 (5)	~~25~~ ~~20~~ ~~5~~ 0
4	14	16	18	~~10~~ 0
~~15~~ 0	~~15~~ ~~5~~ 0	~~15~~ 0	~~15~~ ~~10~~ 0	50 / 50

✓ مدل متوازن است.

$m+n-1 = 3+4-1 = 6$ ← متغیر داریم پایه

با هر تخصیص یا سطر حذف می شود یا ستون در مرحله ی آخر سطر و ستون هر دو صفر می شوند





10000 (5)	10000 (5)	2	3	~~10~~ ~~5~~ 0
4	20000 (5)	0 (4)	2	~~5~~ 0
1	1	120,000 (8)	10,000 (7)	~~15~~ ~~7~~ 0
~~5~~ 0	~~10~~ ~~5~~ 0	~~8~~ 0	~~7~~ 0	30 / 30

* وقتی هم سطر صفر می شود و هم ستون ← متغیر بعدی تباهیده می شود.

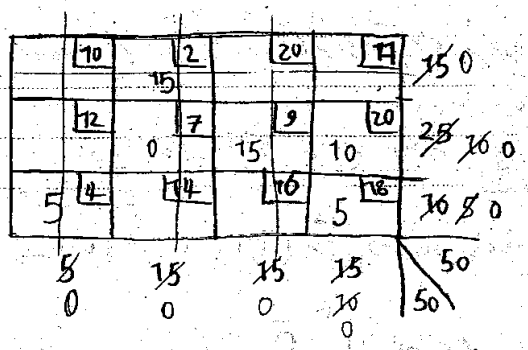
← چون مستقل از پنجره هاست، ممکن است روش خوبی نباشد.

MICRO®

Subject: ۵۹

روش دوم: روش کمترین هزینه Least Cost Corner Method

در این روش ابتدا از خانه با کمترین هزینه در جدول شروع می‌کنیم ← بقیه شبیه روش قبل

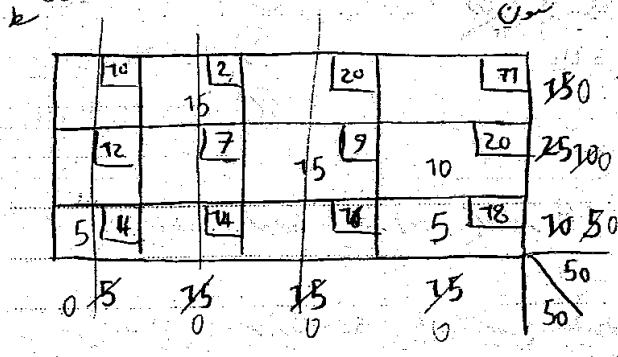


ضرورتی ندارد که حتماً این جواب،
جواب بهینه باشد.

روش سوم: روش فوگل (Vogel Approximation Method) (VAM)

در این روش ابتدا به هر سطر یا ستون جریمه‌ای به صورت زیر تخصیص می‌یابد. بین دو سطر (یا ستون) با بیشترین جریمه خانه با کمترین هزینه را یافته، بیشترین مقدار ممکن را با توجه به عرضه و تقاضا به آن تخصیص می‌دهیم و ...

Δ = کمترین هزینه سطر یا ستون − دومین کوچکترین هزینه سطر یا ستون



Δ: 10−2=8 | 11−2=9 | 20−11=9
9−7=2 | 9−7=2 | 20−9=11
14−4=10 | 16−14=2 | 18−16=2

Subject : Date :

** تعیین متغیر وارد شونده به پایه در جدول حمل و نقل [روش ضرایب Method of Multipliers]

فرض کنید BFS اولیه برای مدل حمل و نقل باشد. حال به هر سطر از جدول

حمل و نقل ضریب u_i و به هر ستون ضریب v_j نسبت می دهیم. برای هر متغیر

پایه x_{ij} در BFS یعنی معادله $u_i + v_j = c_{ij}$ (هزینه (پیشرو)) را می نویسیم. (تعداد معادلات

$(m+n-1)$ است.) برای حل دستگاه حاصل فرض کنید $u_1 = 0$ حال برای هر متغیر

غیرپایه x_{pq} مقدار $\bar{c}_{pq}$ را از رابطه ی زیر محاسبه کنید: $\bar{c}_{pq} = u_p + v_q - c_{pq}$ متغیر

دارای مثبت ترین $\bar{c}_{pq}$ متغیر ورودی به پایه است. ← [$\bar{c}_{pq}$ همان $z_j - c_j$ مربوط به متغیر x_{ij} است]

جواب اولیه از طریق گوشه شمال غربی

5 [10]	10	2 [16]	[20]	[11]	15
[12]	5	[7]	15 [9]	5 [20]	25
3 [4]	[14]	[11]	[16]	10 [18]	10
2	[7]	[9]			50
5	15	15	15	50	

$v_1 = 10$ $v_2 = 2$ $v_3 = 4$ $v_4 = 15$

$u_1 = 0$, $u_2 = 5$, $u_3 = 3$

① $u_1 + v_1 = 10$
② $u_1 + v_2 = 2$
③ $u_2 + v_2 = 7$
④ $u_2 + v_3 = 9$
⑤ $u_2 + v_4 = 20$
⑥ $u_3 + v_4 = 18$

$\bar{c}_{31} = 9$ چون متغیر ورودی به پایه x_{31}

** تعیین متغیر خارج شونده از پایه (روش حلقه θ):

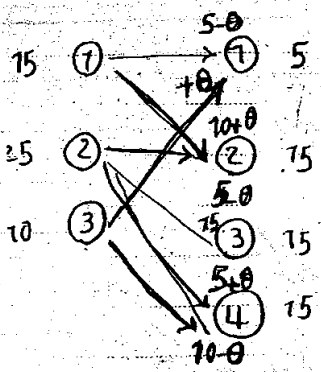
✓ پس از تعیین متغیر وارد شونده به پایه باید متغیر خروجی از پایه تعیین شود.

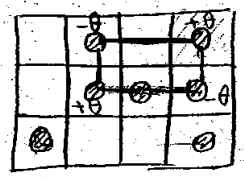
حلقه θ: حلقه θ عبارت است از حلقه ای بسته از خانه متغیر ورودی به پایه شروع و به آن

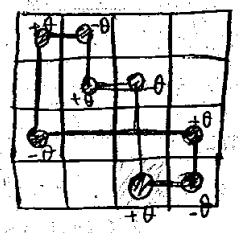
ختم می شود و بال های آن خطوط عمودی / افقی هستند که هر گوشه ی آن باید در خانه

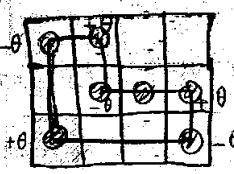
متغیرهای پایه ای باشد.

✓ حلقه θ منحصر به فرد است.









مقدار در هر سطر ستون یکسان است.

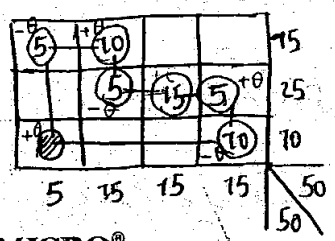
- خانه‌های متغیرهای پایه‌ای
- خانه متغیر وارد شونده

① در حلقه‌ی θ از هر سطر یا ستون جعول جل و نقل یا هیچ خانه‌ای موجود نیست و یا دو خانه موجود است.

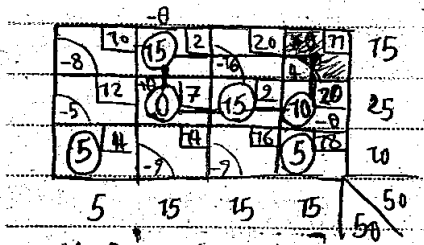
(تعیین تکلیف)

② اگر مقدار θ واحد به خانه متغیر ورودی تخصیص یابد با یک حلقه‌ی θ در خانه‌های موجود در آن به ترتیب می‌توان مقادیر θ- و θ+ را به صورت یک در میان اعمال کرد.

و با توجه به خانه‌هایی که در آن مقدار θ اعمال می‌شود، متغیر خروجی از پایه را بدست آورد.



$\theta = 5 \longrightarrow$ متغیر X_{11} یا X_{22} خروجی (صفر می‌شوند)



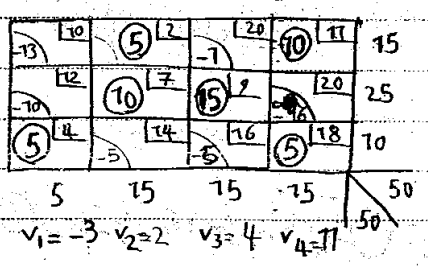
10 / -8	15 / 2	20 / -16	11 / 4	15	$u_1 = 0$
12 / -5	0 / 7	15 / 9	10 / 20	25	$u_2 = 5$
5 / 4	14 / -9	16 / -9	5 / 18	10	$u_3 = 3$
5	15	15	15	50 / 50	
$v_1 = 2$	$v_2 = 2$	$v_3 = 4$	$v_4 = 15$		

تکرار جدید

نقطه توقف الگوریتم جایی است که تمام $\bar{C}_{pq}$ ها منفی شود.

چون $\bar{C}_{14} > 0$ بنابراین جدول بهینه نیست. $\leftarrow$ X_{14} متغیر ورودی به پایه

$\theta = 10 \longrightarrow X_{24}$ خروجی $\{(10-\theta) \geq 0 \,,\, (15-\theta) \geq 0\} \longrightarrow \theta = 10$



10 / -13	5 / 2	20 / -7	10 / 11	15	$u_1 = 0$
12 / -10	10 / 7	15 / 9	20 / -16	25	$u_2 = 5$
5 / 4	14 / -5	16 / -5	5 / 18	10	$u_3 = 7$
5	15	15	15	50 / 50	
$v_1 = -3$	$v_2 = 2$	$v_3 = 4$	$v_4 = 11$		

u و v متغیرهای دوگان هستند.

و چون محدودیت های مدل حمل و نقل به شکل تساوی اند،

u و v می‌توانند منفی باشند. (تمرین)

روش سیمپلکس حمل و نقل:

گام ۱) مدل حمل و نقل متوازن نیست آن را تبدیل به مدل حمل و نقل متوازن می‌کنیم.

گام ۲) با استفاده از یکی از روش های گفته شده BFS اولیه تعیین می‌کنیم.

تمرین تشویقی) حداقل دو روش دیگر جهت تعیین BFS اولیه بدست آورید.

گام ۳) تعیین متغیر ورودی به پایه از طریق روش ضرایب. اگر $\forall \bar{C}_{pq} \leq 0$ در اینصورت جواب فعلی بهینه است.

ieun.ir

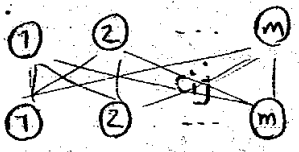
گام ۴) تعیین متغیر خروجی از پایه از طریق روش حلقه θ

گام ۵) تشکیل جدول جدید با جایگزینی متغیر ورودی به جای خروجی و بازگشت به گام ۳.

* تحلیل حساسیت در مدل حمل و نقل (winston)

مدل تخصیص (Assignment Model)

در مدل تخصیص فرض می‌شود m داوطلب و m شغل موجود است. با توجه به اینکه هزینه تخصیص داوطلب i به شغل j برابر c_{ij} است می‌خواهیم به هر داوطلب یک شغل و به هر شغل یک داوطلب به نحوی تخصیص یابد که کل هزینه حداقل شود.



اگر داوطلب i به شغل j اختصاص یابد، $x_{ij}=1$

در غیر اینصورت $x_{ij}=0$

خود به خود x_{ij} ها نمی‌توانند بزرگتر از ۱ باشند.

$$\text{Min} \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} \quad \text{①} \sum x_{ij}=1 \quad \text{②} \sum_j x_{ij}=1 \quad \text{③} \; x_{ij}=(0,1)$$

~~روش مجارستانی برای حل مسأله تخصیص:~~

✓ اطلاعات ورودی مسأله تخصیص تنها ماتریس هزینه است.

✓ مسأله تخصیص قابل تبدیل به یک مدل حمل و نقل است اما حل آن به صورت مدل حمل و نقل باعث طولانی شدن زمان حل می‌گردد.

✓ در مسأله تخصیص اگر مقادیر ثابتی از تابع هدف کم و یا به آن اضافه شود باعث تغییر در جواب بهینه متغیرها نمی‌شود.

$$c_{ij} \to c_{ij} \pm p_i \pm q_j$$

MICRO®

Subject :

* روش مجارستانی برای حل مسأله تخصیص m داوطلب به m شغل

گام ۱) با توجه به ماتریس هزینه مسأله اصلی، از تمامی عناصر هر سطر کوچکترین عنصر آن سطر کم می‌شود.

گام ۲) در ماتریس حاصل از گام ۱، از تمامی عناصر هر ستون کوچکترین عنصر آن ستون کم شود.

گام ۳) سعی می‌شود با رسم حداقل خطوط افقی و عمودی، کلیه عناصر صفر در ماتریس حاصل از گام ۲ (یا گام ۴) پوشش داده شود. اگر تعداد این خطوط m بود تخصیص امکان‌پذیر است.

در غیر اینصورت به گام ۴ برویم.

گام ۴) کوچکترین عنصر صفر پوشش داده نشده را بیابید. این عنصر را از کلیه‌ی عناصر پوشش داده نشده کم و به عناصر محل تقاطع خطوط اضافه کرده به گام ۳ برگردید.

مثال

	شغل I	II	III
داوطلب ۱	5	7	9
۲	14	10	12
۳	15	13	16

→ هر ستون تغییر نمی‌کند

0	2	4
4	0	2
2	0	3

→ کمترین تعداد خطوط m

0	2	2
4	0	0
2	0	1

شغل I → داوطلب ۱
شغل III → 2
شغل II → 3

مثال

	شغل I	II	III	IV
داوطلب ۱	1	4	6	3
۲	9	7	10	9
۳	4	5	11	7
۴	8	7	8	5

→

0	3	5	2
2	0	3	2
0	1	7	3
3	2	3	0

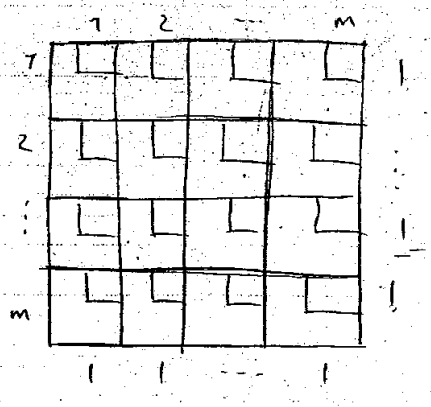
→

0	3	2	2
2	0	0	2
0	1	4	3
3	2	0	0

→

0	2	1	1	1→I
3	0	0	2	2→III
0	0	3	2	3→II
4	2	0	0	4→IV

از خطی که صفر کمتر دارد شروع می‌کنیم



$x_{ij} \geq 0$

✓ مدل حمل و نقل

پایه‌ای $m+m-1=2m-1$

امّا تنها m متغیر غیرصفر در مدل تخصیص داریم!

$(m-1)$ صفرند (پایه‌ای)

$(2m-1)$ متغیر پایه‌ای

$\frac{m-1}{2m-1} \approx 50\%$

← تقریباً ۵۰٪ از متغیرها تباهیده‌اند ← راه حل طولانی می‌شود با روش حمل و نقل.

Finish