**۱- گزینه «۱» صحیح است.**

مدل مسئله به صورت زیر خواهد بود :

$$\underset{s.t}{Min}\ Z = 40x_1 + 30x_2 + 27x_3 + 22x_4$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \geq 9$$

$$3x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \geq 19$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

اگر $x_3, x_4$ در پایه باشند داریم :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$x_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

و همچنین جواب‌های مزدوج به صورت زیر است :

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} = C_B B^{-1} = \begin{pmatrix} 27 & 22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \end{pmatrix}$$

**۲- گزینه «۲» صحیح است.**

$$z_j - c_j = C_B B^{-1} N - C_N = 0$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_1 = 30, c_2 = 14$$

**۳- گزینه «۲» صحیح است.**

با توجه به سوال قبلی مشخص است که با هزینه۲۵ واحد ، متغیر $x_1$ وارد پایه خواهد شد، برای تعیین متغیر خروجی از تست مینیمم نسبت استفاده می‌شود.

$$\bar{a}_1 = B^{-1}a_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad Min\left\{\frac{b_i}{a_{ij}}\right\} = \left\{\frac{5}{\frac{1}{2}}, \frac{2}{\frac{3}{4}}\right\} = \frac{8}{3}$$

پس $x_4$ از پایه خارج می‌گردد.

**۴- گزینه «۴» صحیح است.**

اگر $c_2 = 14$ شود ، $z_2 - c_2 = 0$ خواهد شد بنابراین جواب بهینه چندگانه خواهیم داشت.

$$\bar{a}_2 = B^{-1}a_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

بنابراین متغیر $x_2$ می‌تواند وارد پایه شود و $x_4$ از پایه خارج گردد بدون اینکه بهینگی برهم بخورد. ضمن این که در جواب‌های بهینه چندگانه، جواب بهینه مسئله مزدوج تغییری نخواهد کرد.

$$B_{\text{جدید}} = \begin{pmatrix} x_3 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} = C_B B^{-1} = \begin{pmatrix} 27 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} = (3,8)$$

**۵- گزینه «۱» صحیح است.**

$$B = \begin{pmatrix} x_2 & x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$z_j - c_j = C_B B^{-1} N - C_N \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 12 & 27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 30 & 22 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1/2 & -1/6 \end{pmatrix}$$

با توجه به $Min$ بودن تابع هدف، این جواب بهینه است.

**۶- گزینه «۲» صحیح است.**

شرط کافی برای داشتن جواب بهینه منحصر به فرد آن است که تمام $z_j - c_j$ های متغیرهای پایه‌ای مثبت اکید باشد. این شرط لازم نیست زیرا حالت استثنایی زیر وجود دارد که علیرغم صفر بودن $z_j - c_j$ متغیر غیر پایه‌ای جواب یگانه وجود خواهد داشت.

| | $x_j$ (غیر پایه) | |
|---|---|---|
| $x_B$ | عدد مثبت | ۰ |
| $z$ | | ۰ |

**۷- گزینه «۳» صحیح است.**

تعداد جواب‌های پایه در مسئله اولیه و ثانویه با هم برابر است.

**۸- گزینه «۴» صحیح است.**

فرض کنید :

$$y = Min(۲۰, |۳x_۱ - ۲x_۲ + ۴x_۳|, |x_۱ + x_۲ - ۲x_۳|)$$

در نتیجه مسئله به صورت زیر تبدیل می‌شود :

$$\begin{aligned} &Max\ y \\ &y \le ۲۰ \\ &y \le |۳x_۱ - ۲x_۲ + ۴x_۳| \\ &y \le |x_۱ + x_۲ - ۲x_۳| \\ &Ax \le ۰ \\ &x \ge ۰ \end{aligned}$$

محدودیت دوم دارای قدر مطلق است پس به صورت زیر بازنویسی می‌شود :

$$\begin{cases} ۳x_۱ - ۲x_۲ + ۴x_۳ \ge y \\ \qquad \text{یا} \\ ۳x_۱ - ۲x_۲ + ۴x_۳ \le -y \end{cases}$$

از آنجا که فقط باید یکی از دو حالت فوق برقرار باشد پس مسئله فقط قابل تبدیل به یک مسئله برنامه ریزی خطی با متغیرهای صحیح است.

**۹- گزینه «۴» صحیح است.**

مسئله داده شده صورت تغییر یافته‌ای از لم فارکاس است. لم فارکاس می‌گوید یکی و تنها یکی از دو سیستم زیر جواب دارد:

سیستم ۱: $Ay \le ۰\ ,\ y \ge ۰\ ,\ cy > ۰$

سیستم ۲: $WA \le C\ ,W \ge ۰$

**۱۰- گزینه «۲» صحیح است.**

چون متغیر $x_۲$ یک متغیر غیر پایه‌ای می‌باشد تغییر انجام شده فقط روی $z_j - c_j$ خودش تأثیر گذار است.

$$z_۲ - c_۲ = C_B B^{-1} a_۲ - c_۲ =$$

$$= \begin{pmatrix} ۲ & ۰ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{۱}{۴} \\ ۱ \end{pmatrix} - ۱ = -\frac{۱}{۲}$$

پس $x_۲$ باید وارد پایه شود.

$$z_{\text{جدید}} = z_{\text{قبلی}} - \begin{pmatrix} \text{متغیر ورودی} \\ (zj-cj)z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \text{مینیمم} \\ \text{نسبتها} \end{pmatrix}$$

$$\overline{a_۲} = B^{-1} a_۲ = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{۱}{۴} \\ ۱ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{۱}{۴} \\ \frac{۵}{۴} \end{pmatrix}$$

$$Min\left\{\frac{۸}{\frac{۱}{۴}}, \frac{۱۲}{\frac{۵}{۴}}\right\} = \frac{۴۸}{۵}$$

$$z_{\text{جدید}} = ۱۶ - (-\frac{۱}{۲})(\frac{۴۸}{۵}) = \frac{۱۰۴}{۵}$$

**۱۱- گزینه «۱» صحیح است.**

$$z_۶ - c_۶ = C_B B^{-1} a_۶ - c_۶$$

$$= \begin{pmatrix} ۲ & ۰ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۱ \\ ۲ \end{pmatrix} - ۴ = -۲$$

**۱۲- گزینه «۳» صحیح است.**

ابتدا باید مقدار $u_۲$ را مشخص کنیم. از آنجا که $x_{۲۲}$ یک متغیر پایه‌ای است داریم :

$$۱۴ = ۹ + u_۲ \quad \Rightarrow \quad u_۲ = ۵$$

$x_{۲۳}$ نیز یک متغیر پایه‌ای است در نتیجه:

$$c_{۲۳} = ۵ + ۴ = ۹$$

**۱۳- گزینه «۲» صحیح است.**

دوال مسئله به صورت زیر است :

$$\begin{aligned} &Max\ z = ax_۱ + bx_۲ + cx_۳ \\ &x_۲ + dx_۳ \le ۱ \\ &-x_۱ + x_۳ \le ۱ \\ &x_۱ - x_۲ \le ۱ \\ &x_۱, x_۲, x_۳ \ge ۰ \end{aligned}$$

با تبدیل تابع هدف به $Min$ و تغییر جهت دادن محدودیت‌ها مدل به صورت زیر بازنویسی می‌شود.

$$\begin{aligned} &Min\ (-z) = -ax_۱ - bx_۲ - cx_۳ \\ &-x_۲ - dx_۳ \ge -۱ \quad , \quad x_۱ - x_۲ \ge -۱ \\ &-x_۱ + x_۳ \ge -۱ \quad , \quad x_۱, x_۲, x_۳ \ge ۰ \end{aligned}$$

در صورتی که $a = b = c = d = -۱$ باشد مسئله اولیه و ثانویه یکی خواهند شد.

**۱۴- گزینه «۳» صحیح است.**

$$\begin{array}{llcl} & Min\ x_۰ & & Max\ -x_۰ \\ \text{اولیه} \rightarrow & Ax - x_۰ e \le b & \Rightarrow & Ax - x_۰ e \le b \\ & x, x_۰ \ge ۰ & & x, x_۰ \ge ۰ \\ & Min\ b^T y & & Min\ b^T y \\ \text{دوگان} \rightarrow & A^T y \ge ۰ & \Rightarrow & A^T y \ge ۰ \\ & -e^T y \ge -۱ & & e^T y \le ۱ \\ & y \ge ۰ & & y \ge ۰ \end{array}$$

**۱۵- گزینه «۱» صحیح است.**

اگر مسئله ثانویه $Z^۱, Z^۲$ را $y^۱, y^۲$ بنامیم داریم:

$$y^1 = \left\{ Min \sum_i b_i y_i \;\middle|\; \sum_i a_{ij} y_i \ge c_j ,\ y_i \ge 0 \right\}$$

$$y^2 = \left\{ Min \sum_i (b_i + k_i) \;\middle|\; \sum_i a_{ij} y_i \ge c_j ,\ y_i \ge 0 \right\}$$

فرض کنید $y^*$ جواب بهینه $y^1$، $y^{**}$ جواب بهینه $y^2$ باشد. با توجه به یکسان بودن محدودیت‌های $y^1, y^2, y^*$ یک جواب شدنی برای $y^2$ خواهد بود اما ممکن است بهینه نباشد. پس با توجه به $Min$ بودن تابع هدف، جواب حاصل از $y^*$ در مدل $y^2$ ممکن است بزرگتر از جواب حاصل $y^{**}$ باشد. یعنی:

$$\sum_i (b_i + k_i) y_i^{**} \le \sum_i (b_i + k_i) y_i^{*} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_i (b_i + k_i) y_i^{**} \le \sum_i b_i y_i^{*} + \sum_i k_i y_i^{*}$$

$$\Rightarrow y^2 \le y^1 + \sum_i k_i y_i^{*}$$

بنابراین با توجه به اینکه در حالت بهینه، مقدار تابع هدفهای مسائل اولیه و ثانویه با هم برابر است خواهیم داشت:

$$z^2 \le z^1 + \sum_i k_i y_i^{*}$$

**۱۶- گزینه «۴» صحیح است.**

$h(x)$ دارای هر دو محدودیت‌های $f(x), g(x)$ خواهد بود پس بیشترین مقدار آن کوچکتر یا مساوی بیشترین مقادیر $f(x), g(x)$ است.

**۱۷- گزینه «۲» صحیح است.**

چون مدل مسئله به صورت کانونی می‌باشد و $\sum_{j=1}^{n} x_j \le \alpha$ است پس تابع هدف باید از نوع $Max$ باشد و $Min(c_j - z_j)$ عدد منفی خواهد شد. با توجه به مثبت بودن $\alpha$ و ضریب $x_j$ در محدودیت $\sum_{j=1}^{n} x_j \le \alpha$، $\bar{z} + \alpha(c_k - z_k)$ از $\bar{z}$

**کوچکتر بوده و در نتیجه از $z^*$ نیز کوچکتر خواهد بود.**

**۱۸- گزینه «۲» صحیح است.**

$$\frac{2}{3} + 3 \times \frac{3}{2} = \frac{31}{6} < 8 \quad \Rightarrow \quad s_1 > 0$$

$$5 \times \frac{2}{3} + 2 \times \frac{3}{2} = \frac{38}{6} < 14 \quad \Rightarrow \quad s_2 > 0$$

تعداد متغیرهای مثبت بیش تر از تعداد محدودیت‌ها است پس جواب موجود جواب پایه‌ای نیست، یک نقطه داخلی است و نمی‌تواند بهینه باشد.

**۱۹- گزینه «۱» صحیح است.**

نقطه داده شده محدودیت را به حالت تساوی در می‌آورد، پس روی محدودیت است و مرزی است. مقدار تابع هدف آن برابر ۱۸ است، در صورتیکه مقدار تابع هدف نقطه $(x_1 = 3, x_2 = 3)$ برابر ۱۹ می‌شود پس جواب داده شده بهینه نیست.

**۲۰- گزینه «۳» صحیح است.**

شدنی بودن دوگان برابر بهینگی اولیه است.

## تحقیق در عملیات (صنایع) ۸۹

**۱- گزینه «۱» صحیح است.**

زوج‌های $(x_1, x_3), (x_2, x_4)$ نمی‌توانند در پایه باشند چون بردار ضرایب آنها وابسته خطی است.

اگر $x_1, x_5$ در پایه باشند داریم:

$$\begin{cases} x_1 + x_5 = 10 \\ x_1 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 5 \\ x_5 = 5 \end{matrix} \Rightarrow z = 25$$

اگر $x_2, x_5$ در پایه باشند داریم:

$$\begin{cases} x_2 + x_5 = 10 \\ x_2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_5 = 5 \\ x_2 = 5 \end{matrix} \Rightarrow z = 20$$

بنابراین پایه $(x_1, x_5)$ مقدار تابع هدف بیشتری می‌دهد.

**۲- گزینه «۱» صحیح است.**

با توجه به ضرایب $c_j$ و $a_{ij}$ مدل می‌تواند دارای حل بهینه $x_j = 0$، یک محل بهینه محدود و یا جواب بهینه نامحدود می باشد.

**۳- گزینه «۳» صحیح است.**

اگر بردارهای $a_1, a_2, \cdots, a_n$ یک پایه در $E^n$ تشکیل دسند و بردار $y$ ترکیب خطی از این بردارها باشد یعنی $y = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k a_k$

با فرض $\alpha_j \ne 0$، بردارهای $a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}, y, a_{j+1}, a_n$ به طور خطی مستقل هستند و تشکیل پایه می‌دهند. شرط $\alpha_j \ne 0$ شرط لازم و کافی است زیرا اگر $\alpha_j = 0$ شود $y, a_i\ (i \ne j)$ وابسته خطی می‌شوند و مجموعه مذکور تشکیل پایه نمی‌دهد.

**۴- گزینه «۴» صحیح است.**

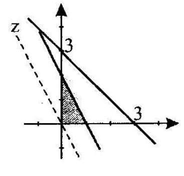
با امتحان کردن گزینه‌ها در محدودیت‌ها و تابع هدف می‌بینیم که جواب داده شده در گزینه ۴ در محدودیت‌ها صدق می‌کند و بیشترین مقدار تابع هدف را ایجاد می‌کند.

**۵- گزینه «۱» صحیح است.**

مدل اولیه به صورت زیر است:

$$Max\ z = 8x_1 + 4x_2$$
$$x_1 + x_2 \le 3$$
$$4x_1 + 2x_2 \le 4$$
$$x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0$$

با حل ترسیمی داریم:



مسئله دارای حل بهینه چندگانه است. نقاط $(1,0),(0,2)$ و تمام نقاط بین آن دو جواب بهینه مسئله است.

راه حل دیگر حل ترسیمی مدل ثانویه است، ثانویه جواب بهینه تبهگن دارد پس اولیه باید جواب بهینه چندگانه داشته باشد.

**۶- گزینه «۱» صحیح است.**

$$\frac{\partial x_2}{\partial x_4} = -y_{24}$$

$$x_B = (x_2, x_3) \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\bar{a}_4 = B^{-1}a_4 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$y_{24} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial x_2}{\partial x_4} = -\frac{1}{2}$$

**۷- گزینه «۱» صحیح است.**

از آنجا که تابع هدف از نوع $Max$ است، برای اینکه جدول بهینه باقی بماند باید $z_2 - c_2 \geq 0$ باشد.

$$z_2 - c_2 = C_B B^{-1} a_2 - c_2 \geq 0 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 20 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{7}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} - c_2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 15 \geq c_2$$

**۸- گزینه «۲» صحیح است.**

از آنجایی که نقاط داده شده در محدودیت‌ها صدق می‌کند هرکدام که تابع هدف کمتری داشته باشد جواب بهینه است.

$$(x_1 = 0, x_2 = 0) \Rightarrow \quad f(x) = -45$$

$$(x_1 = 4, x_2 = 0) \Rightarrow \quad f(x) = -45$$

$$(x_1 = 0, x_2 = 4) \Rightarrow \quad f(x) = -9$$

بنابراین $(0,0),(4,0)$ هر دو بهینه اند.

**۹- گزینه «۴» صحیح است.**

اگر مسئله $LP$ می‌بود، جواب بهینه نامحدود می‌داشت زیرا متغیر $x_2$ در تابع هدف $Max$ دارای ضریب مثبت است و هرچه قدر افزایش یابد ناقض محدودیت‌ها نمی‌شود. بنابراین در مسئله صفر و یک داده شده نیز با توجه به ضرایب متغیرها در تابع هدف و محدودیت‌ها مقدار $x_2$ برابر یک و بقیه متغیرها صفر خواهند بود.

**۱۰- گزینه «۱» صحیح است.**

$x_4$ بیشترین ضریب تابع هدف را دارد پس وارد پایه می‌شود. برای تعیین متغیر خروجی از تست مینیمم نسبت استفاده می‌کنیم.

$$\bar{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \bar{b} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{7}{4} \end{pmatrix}$$

از آنجا که $y_{24} = -\frac{1}{2}$ منفی است پس $x_1$ از پایه خارج می‌گردد.

**۱۱- گزینه «۱» صحیح است.**

هدف ماکزیمم کردن تعداد محصول با مینیمم قطعات است.

**۱۲- گزینه «۲» صحیح است.**

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det B = 6$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{6} & -\frac{1}{6} & 0 \\ \frac{2}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{8}{6} & \frac{5}{6} & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad a_1 = -\frac{8}{6}$$

**۱۳- گزینه «۳» صحیح است.**

$$\bar{a}_1 = B^{-1}a_1 = \begin{pmatrix} \frac{4}{6} & -\frac{1}{6} & 0 \\ \frac{2}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{8}{6} & \frac{5}{6} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{4}{6} \\ \frac{8}{6} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad a_2 = \frac{8}{6}$$

**۱۴- گزینه «۴» صحیح است.**

$$z_1 - c_1 = C_B B^{-1} a_1 - c_1 = \frac{4}{3} + 6\left(\frac{4}{6}\right) - 3 = \frac{7}{3}$$

**۱۵- گزینه «۲» صحیح است.**

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{4}{6} & -\frac{1}{6} & 0 \\ \frac{2}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{8}{6} & \frac{5}{6} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 50 \\ 80 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 60 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad a_4 = 30$$

$$z = C_B B^{-1} b = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 60 \end{pmatrix} = 260 = a_5$$