۱- **گزینه «۲» صحیح است.**

$$3\times 3\times 3\times 2\times 1=54$$

۲- **گزینه «۱» صحیح است.**

$$\sum_{i=k}^{n}\binom{i-1}{k-1}$$

همان‌طور که می‌دانیم $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$ پس:

$$\binom{i-1}{k-1}=\binom{i-1}{i-k}\Rightarrow\sum_{i=k}^{n}\binom{i-1}{k-1}=\sum_{i=k}^{n}\binom{i-1}{i-k}$$

سپس تغییر متغیر می‌دهیم که سری از صفر شروع شود پس $i-k=j$ در نظر می‌گیریم در این صورت

$$\sum_{i=k}^{n}\binom{i-1}{j-k}=\sum_{i=0}^{n-k}\binom{j+k-1}{j}=\binom{n}{n-k}=\binom{n}{k}$$

۳- **گزینه «۴» صحیح است.**

این سوال همان سری قسمت قبل می‌باشد

$$\binom{n+r}{n}=\sum_{j=0}^{n}\binom{j+r-1}{j}$$

۴- **گزینه «۴» صحیح است.**

$$\frac{\binom{3}{1}\times 1\times\binom{2}{1}\times\binom{1}{1}\times 1}{\binom{3}{1}\binom{5}{1}\times\binom{2}{1}\binom{4}{1}\times\binom{1}{1}\times\binom{3}{1}}=\frac{1}{60}$$

۵- **گزینه «۴» صحیح است.**

$$\frac{\binom{4}{2}\times\binom{5}{2}}{\binom{9}{4}}=\frac{10}{21}$$

۶- **گزینه «۲» صحیح است.**

E : پیشامد زنده ماندن بچه

A : پیشامد اینکه عمل سزارین انجام شده باشد

$$P(E)=P(E\mid A)P(A)+P(E\mid A')p(A')\;\Rightarrow\;0/98=0/96\times 0/15+P(E\mid A')\times 0/85\Rightarrow P(E\mid A')=0/9835$$

۷- **گزینه «۱» صحیح است.**

این سوال قبلاً حل شده است برای حل تشریحی آن به سوال ۴ سال ۱۳۸۶ مراجعه فرمایید.

۸- **گزینه «۳» صحیح است.**

مقادیر مختلف X_1 و مجموعه‌ای که x_2 از آن انتخاب می‌شود به صورت زیر است.

$$x_1=1\longrightarrow\{1\}\quad,\quad x_1=2\longrightarrow\{1,2\}\quad,\quad x_1=3\longrightarrow\{1,2,3\}\quad,\quad x_1=4\longrightarrow\{1,2,3,4\}$$

$$p(x_1=2\mid x_2=1)=\frac{p(x_1=2)\times p(x_2=1\mid x_1=2)}{p(x_2=1)}$$

$$p(x_2=1)=p(x_2=1\mid x_1=1)\times p(x_1=1)+\ldots\ldots+p(x_2=1\mid x_1=4)\times p(x_1=4)\Rightarrow p(x_2=1)=1\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow p(x_2=1)=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{16}\Rightarrow p(x_1=2\mid x_2=1)=\frac{\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{16}}=\frac{6}{25}$$

۹- **گزینه «۳» صحیح است.**

$$E(y)=\sum_{y=0}^{k}y\times p(y)=\sum_{y=0}^{k}y\times\frac{1}{k+1}=\frac{k}{2}$$

www.ieun.ir

$$E(y^2) = \sum y^2 \times p(y) = \sum_{y=0}^{k} y^2 \times \frac{1}{k+1} = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \times \frac{1}{k+1} = \frac{k(2k+1)}{6}$$

$$var(y) = E(y^2) - (E(y))^2 \Rightarrow var(y) = \frac{k(2k+1)}{6} - (\frac{k}{2})^2 = \frac{2k^2+k}{6} - \frac{k^2}{4} = \frac{4k^2+2k-3k^2}{12} \Rightarrow var(y) = \frac{k^2+2k}{12}$$

۱۰- گزینه «۱» صحیح است.

در این سوال ۱۰ آزمایش صورت می‌گیرد تا دو موفقیت رخ دهد، اولین موفقیت باید در سومین آزمایش رخ دهد و آخرین موفقیت (دومین موفقیت) در آزمایش دهم، پس در این صورت داریم:

$$\frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times (\frac{1}{3})^6 \times \frac{2}{3}}{\binom{9}{1}(\frac{2}{3})^2 \times (\frac{1}{3})^8} = \frac{1}{9}$$

۱۱- گزینه «۴» صحیح است.

A : پیشامد اینکه فرد قانون را رعایت کرده باشد

$$P(A \mid x=2)\frac{P(A)P(x=2 \mid A)}{P(x=2)}$$

$$p(x=2) = p(x=2 \mid A)p(A) + p(x=2 \mid A')p(A') \Rightarrow p(x=2) = \frac{e^{-3} \times 3^2}{2!} \times 0/75 + \frac{e^{-5} \times 5^2}{2!} \times 0/25$$

$$p(A \mid x=2) = \frac{\frac{0/75 \times e^{-3} \times 3^2}{2!}}{\frac{0/75 \times e^{-3} \times 3^2}{2!} + \frac{e^{-5} \times 5^2}{2!} \times 0/25} \Rightarrow p(A \mid x=2) = \frac{0/168}{0/168 + 0/0211} = 0/888$$

۱۲- گزینه «۲» صحیح است.

ابتدا توجه می‌کنیم ۲۰ نفر می‌توانند به تعداد !۱۹ طریق مختلف دور یک میز گرد بنشینند. در این صورت احتمال اینکه یکی از زوجها کنار هم بنشینند برابر است با

$$p(E_i) = \frac{18!}{19!} \times 2 \Rightarrow \quad \lambda = np(Ei) = \binom{10}{1} \times \frac{18!}{19!} \times 2 = \frac{20}{19} \quad \Rightarrow \quad p(x_i = 0) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!} = e^{-\lambda} = e^{-(\frac{20}{19})} = 0/35$$

۱۳- گزینه «۲» صحیح است.

$$var(x) = E(x^2) - (E(x))^2 \Rightarrow E(x^2) = var(x) + (E(x))^2 = 3 + 4 = 7 \Rightarrow a = 7 \;, \quad b = E(x-2)^2 = var(x) = 3$$

$$c = E(x-3)^2 = E(x^2 - 6x + 9) \Rightarrow c = E(x^2) - 6E(x) + 9 = 7 - 6 \times 2 + 9 = 4$$

$$d = E(x(x-2) = E(x^2 - 2x) \Rightarrow d = E(x^2) - 2E(x) = 7 - 2 \times 2 = 3 \Rightarrow a > c > b = d$$

۱۴- گزینه «۱» صحیح است.

$$P(N=2 \mid s=3) = \frac{P(N=2)P(S=3 \mid N=2)}{P(S=3)} \quad , \quad P(S=3) = \sum_{i=1}^{\infty} p(s=3 \mid N=i)p(N=i)$$

باید دقت کرد اگر تعداد پرتاب‌ها بیشتر از ۳ باشد احتمال اینکه مجموع اعداد تاس‌ها برابر ۳ باشد مساوی صفر می‌باشد پس در این صورت داریم

$$P(S=3) = P(S=3 \mid N=1)p(N=1) + P(S=3 \mid N=2)p(N=2) + P(s=3 \mid N=3)P(N=3)$$

$$P(S=3) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{36} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{6 \times 6 \times 6} \times \frac{1}{8} \Rightarrow P(N=2 \mid S=3) = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{2}{36}}{\frac{1}{12} + \frac{1}{72} + \frac{1}{216} \times \frac{1}{8}} \Rightarrow p(N=2 \mid S=3) = \frac{24}{169}$$

۱۵- گزینه «۳» صحیح است.

$$\frac{x_1 + x_2}{\sqrt{(x_1 + x_2)^2}} = \frac{(\frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}}) \times \sqrt{2}}{\sqrt{(\frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}})^2} \times \sqrt{2}} = \frac{Z}{\sqrt{\chi_1^2}} = t_1$$

۱۶- گزینه «۲» صحیح است.

www.ieun.ir

$$y=\frac{۱}{n}\sum x_i^۲$$

روش حل: y به یک توزیع $\chi^۲$

$$y=\frac{۱}{n}\sum(\frac{x_i-۰}{\sigma})^۲\times\sigma^۲\Rightarrow y=\frac{\sigma^۲}{n}\sum_{i=۱}^{n}z_i^۲=\frac{\sigma^۲}{n}\chi_n^۲$$

$$E(y)=\frac{\sigma^۲}{n}E(\chi_n^۲)=\frac{\sigma^۲}{n}\times n=\sigma^۲ \quad\Rightarrow\quad var(y)=\frac{\sigma^۴}{n^۲}\times var(\chi_n^۲)=\frac{\sigma^۴}{n^۲}\times ۲n=\frac{۲\sigma^۴}{n}$$

۱۷- گزینه «۳» صحیح است.

$$SSE=S_{yy}-BS_{xy} \quad , \quad S_{yy}=\sum(y_i-\bar{y})^۲=۲۵$$

$$\beta=r\times\sqrt{\frac{S_{yy}}{S_{xx}}}=۰/۴\times\sqrt{\frac{۲۵}{۲۵}}=۰/۴ \quad\Rightarrow\quad S_{xy}=\beta\times S_{xx}=۰/۴\times ۲۵=۱۰\Rightarrow SSE=۲۵-۰/۴\times ۱۰=۲۱$$

۱۸- گزینه «۴» صحیح است.

$$\bar{x}_{..}=\frac{\sum\bar{x}_{i.}\times n_i}{\sum n_i}\Rightarrow\bar{x}_{..}=\frac{۳\times ۶+۴\times ۸+۵\times ۷}{۳+۴+۵}=\frac{۸۵}{۱۲} \quad , \quad S_p^۲=\frac{\sum(n_i-۱)S_i^۲}{N-a}=\frac{۲\times ۴+۳\times ۹+۴\times ۴}{۱۲-۳}\Rightarrow S_p^۲=\frac{۵۱}{۹}$$

۱۹- گزینه «۱» صحیح است.

این سوال قبلاً حل شده است

برای حل تشریحی آن به سوال ۱۱، سال ۱۳۸۷ مراجعه فرمائید.

۲۰- گزینه «۲» صحیح است

$$\hat{p}_۱=\frac{x_۱}{n_۱}=\frac{۳۴}{۵۰}=۰/۶۸ \quad , \quad \hat{p}_۲=\frac{x_۲}{n_۲}=\frac{۸۶}{۱۰۰}=۰/۸۶$$

$$Z=\frac{\hat{P}_۱-\hat{P}_۲}{\sqrt{\frac{\hat{P}_۱(۱-\hat{P}_۱)}{n_۱}+\frac{\hat{P}_۲(۱-\hat{P}_۲)}{n_۲}}}=\frac{۰/۸۶-۰/۶۸}{۰/۰۷۴}\Rightarrow Z=۲/۵۹۸$$

آمار و احتمالات مهندسی ۸۹

۱- گزینه «» صحیح است.

۲- گزینه «۲» صحیح است.

$$b=\frac{S_{xy}}{S_{xx}}$$

$$\hat{\sigma}_b=\frac{S}{\sqrt{S_{xx}}}=\frac{۱}{\sqrt{S_{xx}}}\times\sqrt{\frac{S_{yy}-bS_{xy}}{n-۲}}\Rightarrow\frac{b}{\hat{\sigma}_b}=\frac{\frac{S_{xy}}{S_{xx}}}{\frac{۱}{\sqrt{S_{xx}}}\times\sqrt{\frac{S_{yy}-bS_{xy}}{n-۲}}}\Rightarrow\frac{b}{\hat{\sigma}_b}=(\frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}}}\times\frac{\sqrt{S_{yy}}}{\sqrt{S_{yy}}})\div\sqrt{\frac{S_{yy}-bS_{xy}}{n-۲}}$$

$$=\frac{r\times\sqrt{S_{yy}}\times\sqrt{n-۲}}{\sqrt{S_{yy}}\times\sqrt{۱-\frac{bS_{xy}}{S_{yy}}}}=\frac{r\times\sqrt{n-۲}}{\sqrt{۱-\frac{S_{xy}}{S_{xx}}\times\frac{S_{xy}}{S_{yy}}}}\Rightarrow\frac{b}{\hat{\sigma}_b}=\frac{r\times\sqrt{n-۲}}{\sqrt{۱-r^۲}}$$

۳- گزینه «۳» صحیح است.

$$H_۰:\beta=۰ \quad , \quad H_۱:\beta\neq۰$$

ناحیه بحرانی $t>t_{\frac{\alpha}{۲},n-۲}$

در این حالت چون تعداد نمونه‌ها زیاد می‌باشد از توزیع نرمال استفاده می‌کنیم

www.ieun.ir

$$z=\frac{r\times\sqrt{n-۲}}{۱-r^{۲}} \quad \Rightarrow \quad P(|Z|>Z_{\frac{\alpha}{۲}})=\alpha \Rightarrow |\frac{r\times\sqrt{n-۲}}{\sqrt{۱-r^{۲}}}|>۱/۹۶ \Rightarrow |\frac{r\times\sqrt{۶۰}}{\sqrt{۱-r^{۲}}}|>۱/۹۶ \Rightarrow |r|>۰/۲۵$$

۴- گزینه «۳» صحیح است.

$$\operatorname{var}(\hat{\beta}_۱)=\frac{\hat{\sigma}^{۲}}{S_{xx}}=\frac{۱}{Sxx} \Rightarrow \operatorname{var}(\hat{\beta}_۱)=\frac{۱}{\sum x_i^{۲}-\frac{۱}{n}(\sum x_i)^{۲}}=\frac{۱}{\sum x_i^{۲}-n\bar{x}^{۲}}$$

۵- گزینه «۴» صحیح است.

در این مسئله واریانس دو جامعه نامعلوم هستند ولی برابرند پس از توزیع t با آماره آزمون زیر استفاده می‌کنیم

$$t=\frac{\bar{x}_۱-\bar{x}_۲}{S_p\times\sqrt{\frac{۱}{n_۱}+\frac{۱}{n_۲}}} \quad = \quad t=\frac{۴۵/۱۵-۴۲/۲۵}{S_p\times\sqrt{\frac{۱}{۱۳}+\frac{۱}{۱۲}}}$$

$$Sp^{۲}=\frac{(۱۳-۱)\times۶۴+(۱۲-۱)\times۷۶/۴}{۱۳+۱۲-۲}=۶۹/۹۳ \Rightarrow Sp=۸/۳۶ \Rightarrow t=۰/۸۴$$

۶- گزینه «۱» صحیح است.

$$P\left(\frac{\bar{x}-۳}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}>Z_\alpha\right)=۰/۰۵ \Rightarrow (\bar{x}-۳)\times۲=۱/۶۴۵ \Rightarrow \bar{x}=۳/۸۲۲۵$$

۷- گزینه «۲» صحیح است

$$p(x_۱^{۲}+x_۲^{۲}\geq c\,|\,\theta_۱=\theta_۲=۰)=\alpha$$

$$p\left(\frac{x_۱^{۲}}{\sigma^{۲}}+\frac{x_۲^{۲}}{\sigma^{۲}}\geq\frac{c}{\sigma^{۲}}\right)=\sigma \Rightarrow p\left(\chi_۲^{۲}\geq\frac{c}{\sigma^{۲}}\right)=\alpha \Rightarrow \frac{c}{\sigma^{۲}}=\chi^{۲}_{\alpha,۲} \Rightarrow c=\sigma^{۲}\chi^{۲}_{\alpha,۲}$$

۸- گزینه «۳» صحیح است.

تابع چگالی توزیع گاما به صورت زیر می‌باشد

$$f(x)=\beta e^{-\beta x}\times\frac{(\beta x)^{\theta-۱}}{\Gamma(\theta)} \quad x\geq۰ \quad \Rightarrow \quad f(x)=\frac{۱}{۳}e^{-\frac{۱}{۳}x}\times\frac{۱}{۳}x \qquad x\geq۰$$

$$p(x>۹)=\int\frac{۱}{۹}xe^{-\frac{۱}{۳}x}dx$$

u		v
$\frac{۱}{۹}x$		$e^{-\frac{۱}{۳}x}$
	+	
$\frac{۱}{۹}$		$-۳e^{-\frac{۱}{۳}x}$
	−	
۰		$+۹e^{-\frac{۱}{۳}x}$

$$\Rightarrow p(x>q)=\frac{۱}{۹}x\times(-۳\times e^{-\frac{۱}{۳}x})-\frac{۱}{۹}\times۹e^{-\frac{۱}{۳}x}]_۹^{\infty}=۴e^{-۳}$$

۹- گزینه «۳» صحیح است.

نکته: می‌توان ثابت کرد که در یک فرآیند پواسون با پارامتر λ، زمان انتظار تا وقوع kامین تغییر دارای توزیع گاما با پارامترهای $\beta=\frac{۱}{\lambda},\alpha=k$ می‌باشند. در مثال بالا در قیقه $\lambda=\frac{۱}{۲}$

پس $\beta=۲,\alpha=۲$

$$p(x>۵)=\int_۵^{\infty}\frac{۱}{\gamma(۲)۲^{۲}}\times x^{۲-۱}e^{-\frac{x}{۲}}dx$$

$$p(x>۵)=\int_۵^{\infty}\frac{۱}{۴}xe^{-\frac{x}{۲}}dx=-\frac{۱x}{۲}xe^{-\frac{x}{۲}}-e^{-\frac{x}{۲}}]_۵^{\infty}=\frac{۷}{۲}e^{-\frac{۵}{۲}}$$

www.ieun.ir

۱۰- گزینه «۱» صحیح است.

$$p(x<100)=\int^{100}\lambda e^{-dx}dx \Rightarrow p(x<100)=1-e^{-100\lambda}$$

$$E(x)=\sum_{i=1}^{100}x\times p(x_i)=500\times\sum_{i=1}^{100}(1-e^{-100\lambda}) \Rightarrow E(x)=500\times100\times(1-e^{-\lambda\times100})$$

۱۱- گزینه «۱» صحیح است.

۱۲- گزینه «۴» صحیح است.

$$L(x)=\lambda^n e^{-\lambda\sum(xi-\mu)} \quad\Rightarrow\quad Ln(L(x))=nLn\lambda-\lambda\sum(xi-\mu)$$

$$\frac{\partial Ln(L(x)}{\partial\lambda}=0\Rightarrow\frac{n}{\lambda}-\sum(x_i-\mu)=0\Rightarrow\lambda=\frac{n}{\sum x_i-n\hat{\mu}}=\frac{1}{\bar{x}-\hat{\mu}}$$

چون هدف ما حداکثر نمودن مقدار $L(x)$ می‌باشد پس برای حداکثر نمودن $L(x)$ باید مقدرا $\sum(x_i-\mu)$ حداقل شود پس باید μ بیشترین مقدرا خود را اخذ نماید پس با توجه به اینکه μاز تمام x_iها کوچکتر است $(x\geq\mu)$ پس μحداکثر برابر است با $\mu=\min(x_1,....x_n)$

۱۳- گزینه «۴» صحیح است.

تعداد جامعه برابر ۳

تعداد نمونه هر جامعه ۴

پس درجه آزادی SS_{Tr}، $k-1$ که برابر ۲ می‌باشد و درجه آزادی SSE برابر $k(n-1)$ برابر ۹ می‌باشد

$$F=\frac{MST_r}{MSE}$$

$$SS_{Tr}=4\sum_{i=1}^{3}(\bar{x}_{i.}-\bar{x}_{..})^2=4\times(110-110)^2+4(100-110)^2+4\times(120-110)^2=4\times100+4\times100=800$$

$$SSE=\sum(n-1)\sigma^2=3\times(180+220+200)\Rightarrow SSE=1800\Rightarrow F=\frac{\frac{800}{2}}{\frac{1800}{9}}=2$$

۱۴- گزینه «۱» صحیح است

$$SSE=\sum(n_i-1)s^2=4\times(2/5)\times4=40$$

$$\bar{y}_{..}=\frac{\bar{y}_{1.}+\bar{y}_{2.}+\bar{y}_{3.}+\bar{y}_{4.}}{4}\Rightarrow\bar{y}_{..}=\bar{y}_{1.}+\frac{3}{2}$$

$$SS_{Tr}=\sum n_i(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..})^2=5\times[(\frac{3}{2})^2+(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^2+(\frac{3}{2})^2]\Rightarrow SS_{Tr}=25 \Rightarrow \quad F=\frac{\frac{25}{3}}{\frac{40}{16}}=3/33$$

۱۵- گزینه «۲» صحیح است.

درجه آزادی برابر $k-1$ می‌باشد که k تعداد جامعه می‌باشد پس $4-1=3$ درجه آزادی دارد.

www.ieun.ir