بسمه تعالی

کتاب تجزیه و تحلیل سیستم

مجموعه کتب آمادگی کارشناسی ارشد

انتشارات علوی

الکترونیک باز

تهیه کننده : صادق حیدری فراهانی

کارشناسی ارشد

فهرست مطالب

فصل چهارم: تبدیل لاپلاس

فصل پنجم: تبدیل Z

فصل ۱

مبانی سیگنال‌ها و سیستم‌ها

۱-۱ تعاریف اولیه

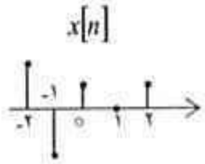
سیگنال، تابعی از یک یا چند متغیر مستقل است که اطلاعاتی را در مورد یک پدیده در بر دارد. اغلب، یکی از متغیرهای مستقل، زمان است.

سیستم، یک یا چند سیگنال ورودی را به یک یا چند سیگنال خروجی تبدیل می‌کند.

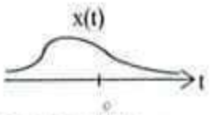
بر حسب ماهیت متغیر مستقل زمان، سیگنال ها به دو دسته تفکیک می‌شوند:

۱- سیگنال پیوسته در زمان: که در آن متغیر مستقل به صورت پیوسته تغییر می‌کند.

۲- سیگنال گسسته در زمان: که در آن متغیر مستقل مقادیر گسسته ای را می‌گیرد.



سیگنال گسسته در زمان



سیگنال پیوسته در زمان

۱-۲ انرژی و توان سیگنال

انرژی سیگنال پیوستهٔ $x(t)$ در بازهٔ زمانی $[t_1,t_2]$ چنین است:

$$E_c=\int_{t_1}^{t_2}|x(t)|^2\,dt \tag{1-1}$$

و توان متوسط آن در این بازه برابر است با:

$$P_c=\frac{E_c}{t_2-t_1} \tag{2-1}$$

اگر هدف محاسبهٔ انرژی کل سیگنال پیوسته $x(t)$ در $(-\infty,+\infty)$ باشد، رابطهٔ (۱-۱) به صورت زیر اصلاح می‌شود.

$$E_{\infty_c}=\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}|x(t)|^2\,dt \tag{3-1}$$

به طور مشابه انرژی سیگنال گسسته $x[n]$ در بازه $N_1\le n\le N_2$ چنین است:

$$E_d=\sum_{n=N_1}^{N_2}|x[n]|^2 \tag{4-1}$$

و توان متوسط آن در این بازه برابر است با:

$$P_d=\frac{E_d}{N_2-N_1+1} \tag{5-1}$$

اگر هدف محاسبهٔ انرژی کل سیگنال گسسته $x[n]$ در $-\infty<n<+\infty$ باشد رابطهٔ (۱-۴) به صورت زیر اصلاح می‌شود:

$$E_{\infty_d}=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}|x[n]|^2 \tag{6-1}$$

توان متوسط در فاصله زمانی نا محدود به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$P_{\infty c}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|x(t)|^2\,dt \tag{7-1}$$

$$P_{\infty_d}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{+N}|x[n]|^2 \tag{8-1}$$

از دیدگاه توان و انرژی می‌توان سیگنال‌ها را به سه دسته تقسیم کرد:

- سیگنال‌های دارای انرژی کل محدود
- سیگنال‌های دارای توان متوسط محدود
- سیگنال‌های دارای انرژی و توان نامحدود

توجه داشته باشید که:

۱- توان متوسط (P_∞) سیگنالی که E_∞ محدود دارد، صفر است.

۲- اگر برای یک سیگنال $P_\infty>0$ باشد حتماً E_∞ آن نامحدود است.

۳- انرژی سیگنال (پیوسته یا گسسته) با مجموع انرژی‌های بخش‌های فرد و زوج آن برابر است.

مثال ۱-۱: انرژی کل سیگنال پیوسته $x(t)=2e^{-4t}u(t)$ را محاسبه کنید؟ توان متوسط سیگنال چقدر است؟

$$E_{\infty_c}=\lim_{T\to+\infty}\int_{-T}^{T}|x(t)|^2dt=\lim\int_0^T(2e^{-4t})^2dt=\lim\int_0^T 4e^{-8t}dt$$

$$=4\lim_{T\to\infty}\left(\frac{-1}{8}e^{-8T}+\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{2}$$

چون انرژی کل آن محدود می‌باشد، بنابراین توان متوسط آن صفر است.

مثال ۱-۲: توان متوسط سیگنال سینوسی $x(t)=3\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$ را محاسبه کنید؟

$$P_{\infty_c}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left[3\cos(t+\frac{\pi}{4})\right]^2dt=$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{9}{2T}\int_{-T}^{T}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos2(t+\frac{\pi}{4})\right]dt=\frac{9}{2}$$

مثال ۱-۳: بخش زوج سیگنال گسستهٔ $x[n]$ عبارت از $x_e[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$ می‌باشد اگر انرژی کل بخش فرد آن برابر $\frac{4}{3}$ باشد، انرژی کل سیگنال چقدر است؟

$$\text{انرژی بخش زوج}=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{+N}|x_e[n]|^2=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(\frac{1}{2})^{2|n|}=-1+2\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{4})^n=\frac{5}{3}$$

$$\text{انرژی کل}=\text{انرژی بخش فرد}+\text{انرژی بخش زوج}=\frac{5}{3}+\frac{4}{3}=3$$

۱-۳ تبدیل های خطی متغیر مستقل

در این بخش، تبدیل های مقدماتی متغیر مستقل سیگنال (محور زمان) با مثال ارائه می‌شود. فرم کلی تبدیل خطی برای یک سیگنال پیوسته مانند $x(t)$ به صورت زیر است:

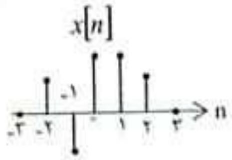
$$z(t)=ax(bt+c)+d$$
$$=ax\left(\frac{t+e}{f}\right)+d$$

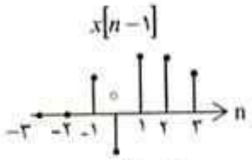
a،b،c،d،e و f مقادیر ثابت هستند.

الف – شیفت زمانی

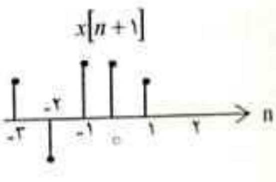
$x[n-n_0]$ برای $n_0>0$ یعنی انتقال سیگنال $x[n]$ به اندازه n_0 نمونه به سمت راست و برای $n_0<0$ یعنی انتقال سیگنال $x[n]$ به اندازه n_0 نمونه به سمت چپ.

$x(t-t_0)$ برای $t_0>0$ یعنی انتقال سیگنال $x(t)$ به اندازه t_0 به سمت راست و برای $t_0<0$ یعنی انتقال سیگنال $x(t)$ به اندازه t_0 به سمت چپ.

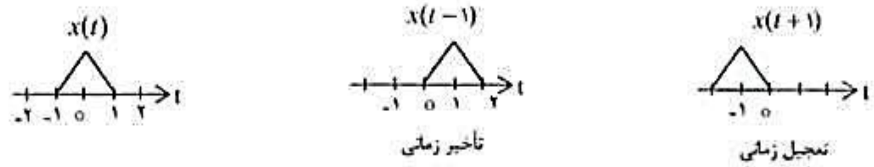




تاخیر زمانی

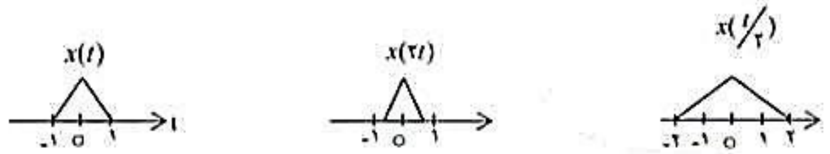


تعجیل زمانی



ب- تغییر مقیاس زمانی

$x(at)$ شکل سیگنال $x(t)$ را حفظ می‌کند اما برای $|a|>1$ سیگنال به طور خطی فشرده می‌شود و برای $|a|<1$ سیگنال به طور خطی گسترده می‌شود (کش می‌آید). توجه داشته باشید که برای $a<0$ سیگنال نسبت به محور قائم قرینه هم می‌شود.

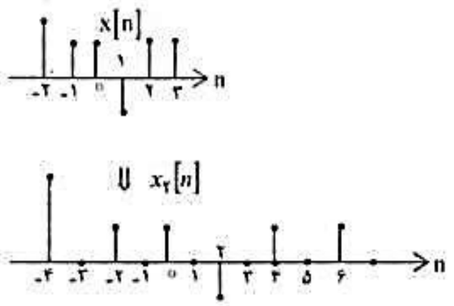


برای سیگنال گسسته در زمان تغییر مقیاس تنها با ضریب گویا امکان پذیر است.

- L برابر کردن فاصله بین نمونه ها (L عدد صحیح است)

$$z[n]=\begin{cases} x\left[\dfrac{n}{L}\right] & \dfrac{n}{L}\in Z \\ 0 & \dfrac{n}{L}\notin Z \end{cases} \qquad (۹-۱)$$

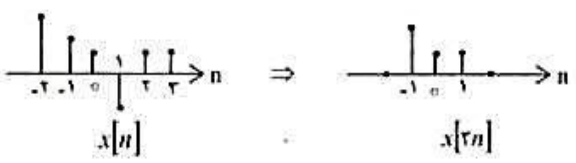
برای L برابر کردن فاصله بین نمونه ها، بین هر دو نمونه متوالی سیگنال $x[n]$، به تعداد $L-1$ تا صفر قرار داده می‌شود و سیگنال حاصل معمولا" با نماد $x_{(L)}[n]$ نشان داده می‌شود. مجدداً تاکید می‌شود که L عدد صحیح است و $z[0]=x[0]$



- $\frac{1}{M}$ برابر کردن فاصله نمونه ها (M عدد صحیح است)

$$z[n]=x[Mn] \qquad (۱۰-۱)$$

برای $\frac{1}{M}$ برابرکردن فاصله بین نمونه ها، نمونه هایی که مضرب صحیح M نیستند حذف می‌شوند.



- $\frac{L}{M}$ برابر کردن فاصله بین نمونه ها (M,L هر دو عدد صحیح هستند)

$$z[n]=\begin{cases} x\left[\frac{nM}{L}\right] & \frac{nM}{L}\in Z \\ 0 & \frac{nM}{L}\notin Z \end{cases} \qquad (۱۱-۱)$$

این تبدیل مقیاس را می‌توان ترکیبی از L برابر کردن و سپس $\frac{1}{M}$ برابر کردن فاصله نمونه ها دانست. پس برای این تغییر مقیاس ابتدا بین نمونه‌های $x[n]$ تعداد $L-1$ صفر قرار داده و سپس نمونه هایی که مضرب صحیح M نیستند حذف می‌شود.

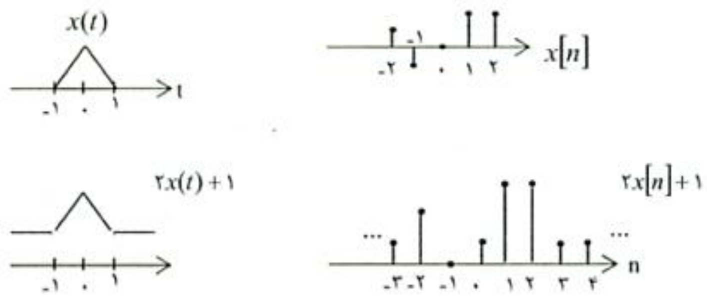
❋ **نکته:** *در صورتی که L و M نسبت به هم اول باشند می‌توان ترتیب دو عمل L برابر کردن و $\frac{1}{M}$ برابر کردن را عوض کرد. در غیر اینصورت جابه جا کردن ترتیب این دو عمل منجر به جواب صحیح نمی شود.*

ج- تغییر مقیاس دامنه

$z[n]=\pm Kx[n]$ یا $z(t)=\pm Kx(t)$ یعنی $\pm K$ برابر شدن دامنه سیگنال

د- شیفت دامنه

$z[n]=x[n]\pm K$ یا $z(t)=x(t)\pm K$ یعنی جمع کردن یا تفریق کردن دامنه سیگنال با مقدار ثابت K



هـ- حالت کلی تبدیل خطی سیگنال

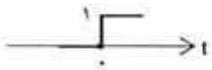
نکته مهم این است که شیفت زمانی باید پس از تغییر مقیاس زمانی انجام شود.

$x(t)=\left(-\frac{1}{2}t+1\right)+1$ باید به صورت $x(t)=\left(\frac{t-2}{-2}\right)+1$ در نظر گرفته شود یعنی اول تغییر مقیاس زمانی با ضریب $\frac{-1}{2}$ و سپس ۲ واحد شیفت به راست و ۱ واحد شیفت دامنه به بالا می‌باشد. توجه دارید که در تغییر مقیاس زمانی با ضریب $\frac{-1}{2}$ انعکاس نسبت به محور قائم هم باید انجام شود.

۱-٤ معرفی چند تابع پایه مهم و خواص آن‌ها

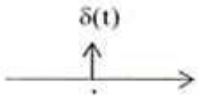
الف- پله واحد پیوسته در زمان

$$u(t)=\begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & t>0 \end{cases} \tag{۱-۱۲}$$



ب- ضربه واحد پیوسته در زمان

$$\delta(t)=\frac{du}{dt} \tag{۱-۱۳}$$



دامنه ضربه در $t=0$ برابر بی نهایت است اما

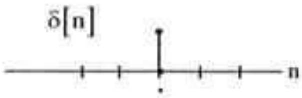
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=1 \tag{۱-۱۴}$$

ج- دنباله پله واحد گسسته در زمان

$$u[n]=\begin{cases} 1 & n\geq 0 \\ 0 & n<0 \end{cases} \tag{۱-۱۵}$$

د- ضربه واحد گسسته در زمان

$$\delta[n]=\begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & n\neq 0 \end{cases} \tag{۱-۱۶}$$



❋ **نکته ۱:** *خواص ضربه گسسته در زمان*

$$1)\ x[n]\delta[n-n_0]=x[n_0]\delta[n-n_0]$$
$$2)\ \delta[kn]=\delta[n]$$

هـ- نمایی مختلط پیوسته در زمان

$$x(t)=e^{j\omega_0 t} \tag{۱-۱۷}$$

خاصیت مهم این سیگنال متناوب بودن آن با دوره تناوب $\frac{2\pi}{|\omega_0|}$ است.

و- نمایی مختلط گسسته در زمان

$$x[n]=e^{j\omega_0 n} \tag{۱-۱۸}$$

تابع نمایی مختلط گسسته، با فرکانس زاویه ای $(\omega_0+2k\pi)$ (k عدد صحیح) همان تابع نمایی مختلط گسسته با فرکانس زاویه‌ای ω_0 است. یعنی نمایی‌های مختلط گسسته با فرکانس‌های طبیعی $\omega_0+2k\pi$ (k عدد صحیح) متمایز نیستند.

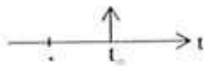
در سیگنال $e^{j\omega_0 n}$ با افزایش ω_0 در فاصله ۰ تا π میزان نوسان زیاد می‌شود ولی بعد از آن در فاصله π تا 2π با افزایش ω_0، نوسان کاهش می‌یابد. پس حداکثر فرکانس طبیعی نمایی مختلط گسسته در زمان، برابر π است.

سیگنال $e^{j\omega_0 n}$ به شرطی متناوب است که $\frac{\omega_0}{2\pi}$ عدد گویا باشد در غیر اینصورت نا متناوب است

❋ **نکته ۲**: *تفاوت سیگنال های نمایی مختلط پیوسته و گسسته: در $e^{j\omega_0 t}$ هر چه ω_0 بزرگتر باشد، سیگنال نوسان‌های سریعتری دارد و به ازا هر مقدار ω_0، سیگنال $e^{j\omega_0 t}$ متناوب است.*

❋ **نکته ۳**: *خواص تابع ضربه پیوسته در زمان*

۱) $\delta(t-t_0)=0 \quad \forall t \neq t_0$



۲) $\int_{t_0^-}^{t_0^+} \delta(t-t_0)\,dt = 1$

۳) $\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\delta(t-t_0)\,dt = h(t_0)$

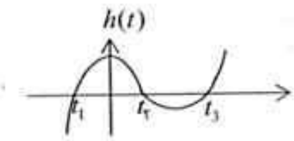
۴) $\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)$

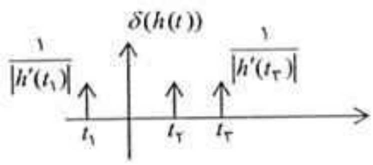
۵) $\delta(a(t-t_0))=\frac{1}{|a|}\delta(t-t_0)$

۶) $\delta(-t)=\delta(t)$

۷) $\delta(h(t))=\frac{1}{|h'(t_1)|}\delta(t-t_1)+\frac{1}{|h'(t_2)|}\delta(t-t_2)+\dots$

که در آن $t_1, t_2, \dots$ ریشه های حقیقی ساده $h(t)$ هستند و $h'(th)$ مقدار تابع $\frac{h(t)}{t-tn}$ در نقطه $t=tn$ می باشد. به شکل زیر توجه کنید.





۸) $\frac{d^n}{dt^n}\delta(t)=\delta^{(n)}(t)$

۹) $\delta^{(n)}(-t)=\begin{cases}\delta^{(n)}(t): & n \text{ زوج} \\ -\delta^{(n)}(t): & n \text{ فرد}\end{cases}$

۱۰) $\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\delta^{(n)}(t-t_0)\,dt=(-1)^n h^{(n)}(t_0)$

$$۱۱)\ h(t).\delta'(t-t_0)=h(t_0)\ \delta'(t-t_0)-h'(t_0)\ \delta(t-t_0)$$
$$۱۲)\ h(t).\delta''(t-t_0)=h(t_0)\ \delta''(t-t_0)-۲h'(t_0)\ \delta'(t-t_0)+h''(t_0)\ \delta(t-t_0)$$

❋ **نکته ۴:** *برای درک عمیق خواص تابع ضربه، روابط ۱ تا ۱۲ را برای خودتان اثبات کنید. اغلب این خواص از تعریف تابع ضربه نتیجه می‌شوند.*

❋ **نکته ۵:** *خواص تابع پله پیوسته و گسسته*

$$۱)\ u[n]=\sum_{k=0}^{+\infty}\delta[n-k]$$
$$۲)\ u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(t)dt$$
$$۳)\ \delta[n]=u[n]-u[n-۱]$$

مثال ۱-۴: مقدار عددی $\int_{-۲}^{+۵}e^{-\frac{t}{۲}}\delta(۱-۲t)dt$ را محاسبه کنید.

با توجه به نکته ۵:

$$\delta(-۲(t-\frac{۱}{۲}))=\frac{۱}{۲}\delta(t-\frac{۱}{۲})$$

با توجه به نکته ۱:

$$\int_{-۲}^{+۵}e^{-\frac{t}{۲}}\delta(۱-۲t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{۱}{۲}e^{-\frac{t}{۲}}\delta(t-\frac{۱}{۲})dt$$

با توجه به نکته ۳ جواب برابر $\frac{۱}{۲}e^{-\frac{۱}{۴}}$ می‌شود.

۱-۵ خواص سیستم ها

الف- پایداری

سیستمی پایدار است که پاسخ آن به هر ورودی کراندار، کراندار باشد (واگرا نشود).

$$|x(t)|<x_{\max}\Rightarrow|y(t)|<y_{\max}$$

که $x_{\max}, y_{\max}<\infty$، $x(t)$ ورودی سیستم و $y(t)$ خروجی آن است.

برای مثال سیستم مشتق‌گیر $y(t)=\frac{d}{dt}x(t)$ ناپایدار است چون به ازاء ورودی پله که کراندار می‌باشد، خروجی ضربه را که کراندار نیست، تولید می‌کند. سیستم تاخیر $y(t)=x(t-\tau)$ پایدار است چون برای هر ورودی دلخواه کراندار، پاسخ کراندار تولید می‌کند.

ب- علیت

در سیستم علی، خروجی سیستم در هر لحظه از زمان، به ورودی همان لحظه و لحظات قبل وابسته است یعنی خروجی فعلی به ورودی های آینده بستگی ندارد.

برای مثال سیستم انتگرال‌گیر $y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(t)dt$ علی می‌باشد چون خروجی لحظه فعلی برابر با سطح خالص زیر سیگنال ورودی تا همین لحظه فعلی است. سیستم تعجیل $y(t)=x(t+\tau)$ غیر علّی است زیرا خروجی لحظه t ام، به ورودی لحظه $t+\tau$ ام وابسته می‌باشد. $(\tau>0)$

توجه کنید که در حالت کلی اگر ورودی های یک سیستم علی تا زمان $t_\circ$ ($n_\circ$) برابر باشند، خروجی های متناظر آنها نیز تا آن زمان باید برابر باشند. (شرط لازم و کافی علیت)

ج- حافظه

در سیستم بدون حافظه، خروجی در هر لحظه از زمان فقط به ورودی همان لحظه وابسته است. در سیستم با حافظه خروجی در هر لحظه از زمان علاوه بر ورودی فعلی به ورودیهای لحظات دیگر هم وابسته می‌باشد. (می‌تواند به لحظات قبل یا بعد هم وابسته باشد)

برای مثال سیستم انتگرال گیر $y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(t)dt$ با حافظه است اما سیستم تقویت کننده $y(t)=kx(t)$ بدون حافظه است.

همچنین سیستم تعجیل $y(t)=x(t+\tau)$ هم با حافظه است. $(\tau>0)$

د- تغییرپذیری و تغییرناپذیری با زمان

در سیستم تغییر ناپذیر با زمان انتقال زمانی سیگنال ورودی منجر به انتقال زمانی سیگنال خروجی سیستم می شود. یعنی اگر پاسخ سیستم به $x[n]$ عبارت از $y[n]$ باشد، در سیستم تغییر ناپذیر با زمان پاسخ سیستم به ورودی $x[n-n_\circ]$ عبارت از $y[n-n_\circ]$ است.

برای مثال سیستم مشتق گیر $y(t)=\dfrac{dx(t)}{dt}$ تغییر ناپذیر با زمان است چون $y(t-t_\circ)=y(t)$

هـ- خطی بودن

سیستمی خطی است که جمع آثار *(super position)* در مورد آن برقرار باشد به این معنی که اگر پاسخ سیستم به ورودی $x_1(t)$ برابر $y_1(t)$ باشد و پاسخ سیستم به ورودی $x_2(t)$ برابر $y_2(t)$ باشد.

- پاسخ سیستم به ورودی $x_1(t)+x_2(t)$ برابر $y_1(t)+y_2(t)$ باشد (خاصیت جمع پذیری)
- پاسخ سیستم به ورودی $kx_1(t)$ برابر $ky_1(t)$ باشد (k مقدار ثابت است) (خاصیت همگنی)

یا بطور خلاصه پاسخ سیستم به ورودی $a_1x_1(t)+a_2x_2(t)$ برابر با $a_1y_1(t)+a_2y_2(t)$ باشد.

برای مثال سیستم های مشتق گیر و انتگرال گیر خطی هستند. اما سیستم $y(t)=e^{x(t)}$ خطی نیست (برقرار نبودن خاصیت جمع آثار را برای این سیستم تحقیق کنید).

❁ **نکته ۱:** *شرط لازم برای خطی بودن سیستم آن است که پاسخ ورودی صفر، صفر باشد.*

و- معکوس‌پذیری

سیستمی را معکوس پذیر گویند هرگاه بتوان از روی خروجی، ورودی را به طور یکتا به دست آورد. برای معکوس پذیری لازم و کافی است که پاسخ سیستم به ورودی های مختلف، متفاوت باشد برای مثال سیستم انتگرال گیر معکوس پذیر است و معکوس آن، سیستم مشتق گیر می‌باشد.

یا به عبارتی:

$$y_1(t)=y_2(t)\Rightarrow x_1(t)=x_2(t)$$
$$x_1(t)\neq x_2(t)\Rightarrow y_1(t)\neq y_2(t)$$

❁ **نکته ۲:** *شرط معکوس پذیری یک سیستم خطی این است که فقط، ورودی صفر منجر به خروجی صفر شود و برعکس.*

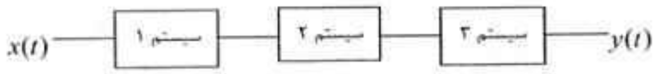
❁ **نکته ۳:** *هر سیستمی که اطلاعاتی از ورودی خود را حذف نکند معکوس پذیر است. یعنی از روی خروجی، ورودی به طور یکتا قابل شناسایی باشد.*

۱-۶ اتصال سیستم ها

الف- اتصال سری (متوالی)

در این نوع اتصال، ورودی سیستم بعدی خروجی سیستم قبلی است. همچنین فرض می‌شود که با اتصال سیستم‌ها به هم، مشخصات هیچ یک از سیستم‌ها عوض نمی‌شود.

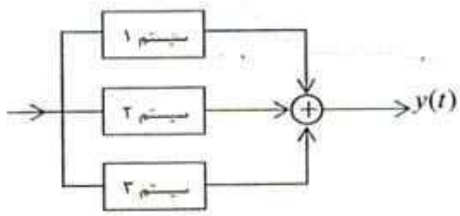
برای مثال



ب- اتصال موازی

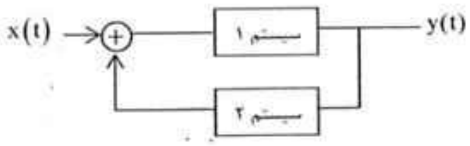
یک ورودی به همهٔ سیستم ها اعمال شده و خروجی کل برابر مجموع خروجی تک تک سیستم ها است.

برای مثال



* **نکته ۱:** *در این ساختارها (سری یا موازی) اگر تک تک سیستم ها پایدار، علی، بدون حافظه، تغییر ناپذیر با زمان و خطی باشند، کل سیستم همان ویژگی را خواهد داشت. اما عکس موضوع صادق نیست.*
* **نکته ۲:** *در ساختار موازی از معکوس پذیری تک به تک سیستم ها نمی توان معکوس پذیری کل سیستم را نتیجه گرفت ولی در ساختار سری اگر تک تک سیستم ها معکوس پذیر باشند کل سیستم معکوس پذیر است.*

ج- اتصال فیدبک



۱-۷ سیستم های خطی تغییر ناپذیر با زمان

در سیستم خطی تغییر ناپذیر با زمان *(LTI)* اولا" شیفت زمانی سیگنال ورودی تنها باعث شیفت زمانی سیگنال خروجی می‌شود. ثانیا" خاصیت جمع آثار (خاصیت جمع پذیری و همگنی) در مورد آن صادق است. نکته مهم در مورد سیستم های LTI این است که پاسخ ضربه سیستم (خروجی سیستم در اثر اعمال تابع ضربه به عنوان ورودی) به طور کامل سیستم را توصیف می‌کند.

۱-۷-۱ سیستم های LTI گسسته در زمان

هر سیگنال گسسته در زمان مانند $x[n]$ را می‌توان به صورت ترکیب خطی ضربه های واحد انتقال یافته در زمان نمایش داد. این ویژگی را خاصیت غربالی ضربه واحد گسسته در زمان می‌گویند :

$$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k] \qquad (۱-۱۹)$$

اهمیت خاصیت غربالی در ارائه رابطه مهم جمع کانولوشن است.

جمع کانولوشن: اگر $h[n]$ پاسخ یک سیستم LTI گسسته در زمان به ورودی $\delta[n]$ باشد، پاسخ این سیستم به ورودی دلخواه $x[n]$ به صورت زیر خواهد بود:

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] \qquad (۲۰-۱)$$

این رابطه را جمع کانولوشن گویند (با توجه به LTI بودن سیستم و خاصیت غربالی این رابطه را برای خود توجیه کنید) و با نماد $y[n]=x[n]*h[n]$ نشان می‌دهند.

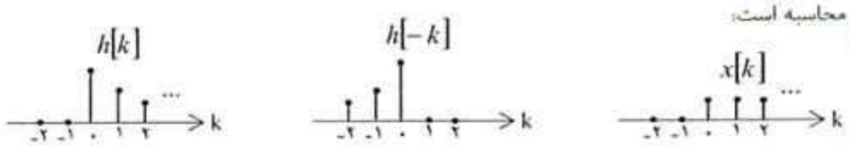
جمع کانولوشن (رابطه (۱-۲۰)) را به این صورت می‌توان توضیح داد: $h[k]$ را نسبت به محور قائم معکوس کرده و برای $n>0$ سیگنال $h[-k]$ به اندازه n به سمت راست و برای $n<0$ سیگنال $h[-k]$ به اندازه $|n|$ به سمت چپ شیفت دهید. $h[n-k]$ (به صورت تابعی از k و برای n مشخص) حاصل می‌شود. در لحظه n ام، $y[n]$ با ضرب کردن نظیر به نظیر $x[k]$ها در $h[n-k]$ ها و محاسبه مجموع این حاصلضرب ها به دست می‌آید.

در اغلب مسائل مربوط به کانولوشن گسسته به دو رابطه زیر نیاز داریم:

$$\sum_{m=0}^{n}\alpha^m=\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} \qquad (۲۱-۱)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\alpha^m=\frac{1}{1-\alpha} \quad \text{اگر } |\alpha|<1 \qquad (۲۲-۱)$$

مثال ۱-۵: اگر پاسخ ضربه سیستم LTI گسسته $h[n]=(\frac{1}{2})^n u[n]$ باشد پاسخ آن به ورودی پله $x[n]=u[n]$ از رابطه جمع کانولوشن قابل محاسبه است:



الف) برای $n<0$ مقادیر غیر صفر $h[n-k]$ و $x[k]$ با هم همپوشانی ندارند و در نتیجه

$$y[n]=0 \quad : \quad n<0 \qquad (۲۳-۱)$$

ب) برای $n\geq 0$

$$\begin{aligned} y[n]&=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] \\ &=\sum_{k=0}^{n}1\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}=\left(\frac{1}{2}\right)^n\sum_{k=0}^{n}(2)^k \\ &=\left(\frac{1}{2}\right)^n\frac{1-2^{n+1}}{1-2}=2-2^{-n} \end{aligned} \qquad (۲۴-۱)$$

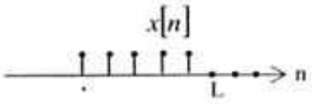
پس در کل داریم:

$$y[n]=\begin{cases}0 & n<0\\ 2-2^{-n} & n\geq 0\end{cases}=\left(2-2^{-n}\right)u[n] \qquad (۲۵-۱)$$

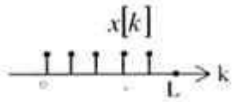
❋ **نکته:** *اگر $x[n]$ سیگنالی با طول L نمونه و $h[n]$ سیگنالی با طول P نمونه باشد و هدف به دست آوردن خروجی $y[n]$ به صورت*

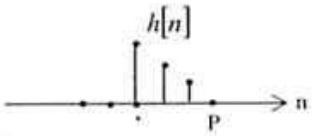
$$y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[n-k]$$

باشد. برای $n<0$ و $n>L+P-2$ حاصلضرب $x[k]h[n-k]$ به ازاء همه k ها صفر خواهد بود و محاسبه $y[n]$ فقط برای $0\le n\le L+P-2$ ضروری است یعنی حداکثر طول غیر صفر سیگنال $y[n]$ برابر $L+P-1$ می‌باشد.

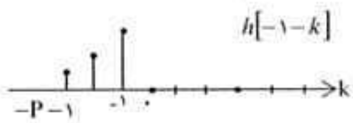


سیگنال گسسته با طول L

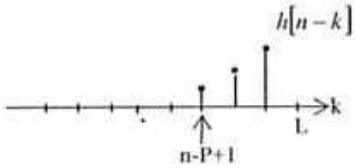




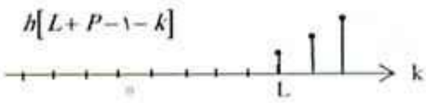
سیگنال گسسته با طول P



برای $n<0$ همپوشانی وجود ندارد



همپوشانی به ازاء $0\le n\le L+P-2$



برای $n>L+P-2$ همپوشانی وجود ندارد

۱-۷-۲ سیستم های LTI پیوسته در زمان

هر سیگنال پیوسته در زمان مانند $x(t)$ را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \qquad (۱-۲۶)$$

این ویژگی را خاصیت غربالی ضربه واحد پیوسته در زمان می‌گویند که با نسخهٔ گسسته در زمان خاصیت غربالی مشابهت مفهومی دارد. اهمیت خاصیت غربالی در به دست آوردن رابطه مهم انتگرال کانولوشن است.

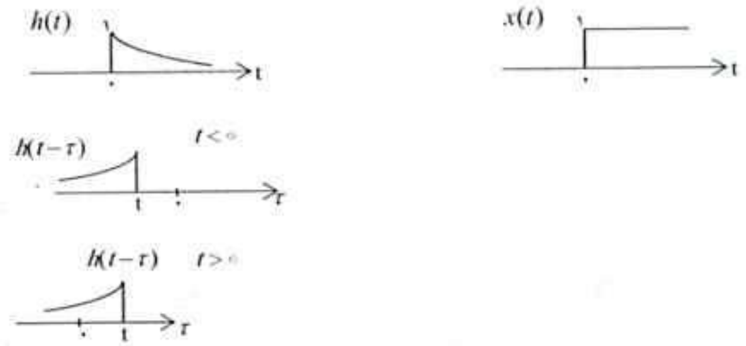
انتگرال کانولوشن : اگر $h(t)$ پاسخ یک سیستم LTI پیوسته در زمان به ورودی $\delta(t)$ باشد پاسخ این سیستم به ورودی دلخواه $x(t)$ به صورت زیر خواهد بود :

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau \qquad (۱-۲۷)$$

این رابطه را انتگرال کانولوشن گویند و با نماد $y(t)=x(t)*h(t)$ نشان می‌دهند.

انتگرال کانولوشن (رابطه (۲۷-۱)) را به این صورت می‌توان توضیح داد : $h(\tau)$ را نسبت به محور قائم معکوس کرده و برای $t>0$ سیگنال $h(-\tau)$ را به اندازه t به سمت راست و برای $t<0$ سیگنال $h(-\tau)$ را به اندازه $|t|$ به سمت چپ شیفت دهید. $h(t-\tau)$ (به صورت تابعی از τ و برای t مشخص) حاصل می‌شود. در لحظه t ام، $y(t)$ انتگرال حاصلضرب $x(\tau)$ و $h(t-\tau)$ است که در بازه $-\infty$ تا $+\infty$ محاسبه می‌شود.

مثال ۱-۶: فرض کنید پاسخ ضربه سیستم LTI پیوسته $h(t)=e^{-t}u(t)$ باشد. پاسخ آن به ورودی پله $x(t)=u(t)$ از انتگرال کانولوشن قابل محاسبه است.



الف) برای $t<0$ همپوشانی بین مقادیر غیر صفر $h(t-\tau),x(\tau)$ وجود ندارد بنابراین

$$y(t)=0 \quad : \quad t<0$$

ب) برای $t>0$

$$y(t)=\int_{0}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)=$$

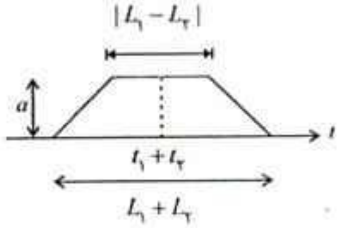
$$=\int_{0}^{t}1\times e^{-(t-\tau)}d\tau= e^{-t}\int_{0}^{t}e^{\tau}d\tau =1-e^{-t}$$

پس داریم

$$y(t)=\left(1-e^{-t}\right)u(t)$$

❋ **نکته:** اگر $x(t)$ و $h(t)$ دارای فرم زیر باشند.

حاصل $y(t)=x(t)*h(t)$ همواره به فرم زیر خواهد بود.



$$a=a_1\times a_2\times\left[\min(L_1,L_2)\right]$$

۱-۷-۳ خواص کانولوشن

۱- خاصیت جا به جایی

$$x(t)*h(t)=h(t)*x(t) \tag{۲۸-۱}$$

با توجه به تعریف داریم

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)x(t-\tau)d\tau \tag{۲۹-۱}$$

۲ـ خاصیت شرکت پذیری

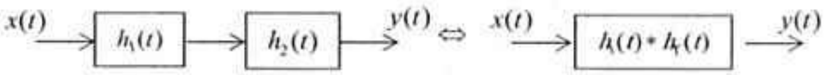
$$x(t)*[h_1(t)*h_2(t)]=[x(t)*h_1(t)]*h_2(t) \qquad (۳۰-۱)$$

۳ـ خاصیت توزیع پذیری

$$x(t)*[h_1(t)+h_2(t)]=[x(t)*h_1(t)]+[x(t)*h_2(t)] \qquad (۳۱-۱)$$

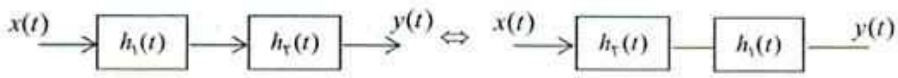
با توجه به ۳ خاصیت فوق و تعریف اتصال سیستم ها داریم:

الف)



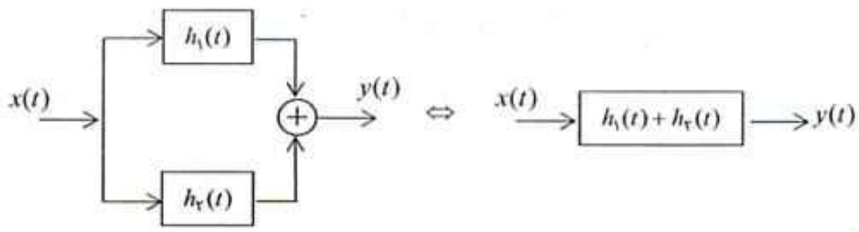
به این معنی که اگر دو سیستم LTI با پاسخ ضربه‌های $h_1(t)$ و $h_2(t)$ سری شوند عملکرد آنها معادل است با سیستم LTI ای که پاسخ ضربهٔ آن برابر $h(t)=h_1(t)*h_2(t)$ می‌باشد.

ب)



به این معنی که ترتیب سیستم LTI در اتصال سری قابل تعویض است.

ج)



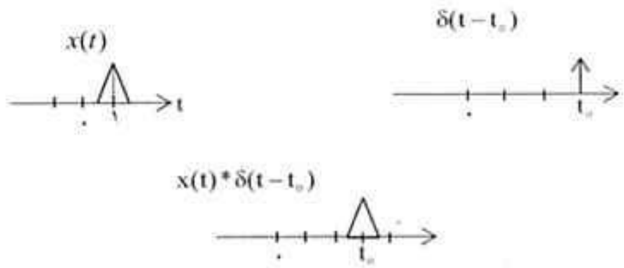
به این معنی که اگر دو سیستم LTI با پاسخ ضربه های $h_1(t), h_2(t)$ موازی شوند، عملکرد آنها معادل است با سیستم LTI ای که پاسخ ضربه آن برابر $h(t)=h_1(t)+h_2(t)$ می‌باشد.

❄ **نکته:** *موارد الف تا ج را می‌توان به اتصال چندین سیستم LTI (یعنی بیشتر از دو تا) هم تعمیم داد.*

۴- کانولوشن با تابع ضربه

$$x(t)*\delta(t-t_0)=x(t-t_0) \qquad (۳۲-۱)$$

به این معنی که کانولوشن سیگنال با تابع ضربه، سیگنال را به محل ضربه می‌برد.



۵ـ کانولوشن با مشتق n ام ضربه

$$x(t) * \delta^{(n)}(t-t_\circ) = x^{(n)}(t-t_\circ) \qquad (۱-۳۳)$$

به این معنی که کانولوشن سیگنال با مشتق n ام تابع ضربه، مشتق n ام سیگنال را به محل ضربه می‌برد.

❋ **نکته:** *خواص ۱ تا ٤ که برای کانولوشن پیوسته بیان شد برای کانولوشن گسسته هم صادق می‌باشد.*

۱-۷-٤ خواص سیستم‌های LTI

الف) پایداری

سیستم پایدار برای هر ورودی کراندار، خروجی کراندار تولید می‌کند. در مورد سیستم های LTI شرط لازم و کافی برای پایداری از روی پاسخ ضربه سیستم ارائه می‌شود.

سیستم LTI گسسته در زمان پایدار است اگر و تنها اگر پاسخ ضربهٔ واحد آن مطلقاً جمع پذیر باشد یعنی

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| < \infty \qquad (۱-۳٤)$$

سیستم LTI پیوسته در زمان پایدار است اگر پاسخ ضربه واحد آن مطلقاً انتگرال پذیر باشد یعنی

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|dt < \infty \qquad (۱-۳۵)$$

مثال ۱-۷: سیستم پیوسته‌ای که پاسخ ضربهٔ آن $h(t) = (\sin t)u(t)$ می‌باشد ناپایدار است. چون $h(t)$ مطلقاً انتگرال‌پذیر نیست. سیستم گسسته‌ای که پاسخ ضربه آن $h[n] = u[n+1]$ است، ناپایدار می‌باشد چون $h[n]$ مطلقاً جمع‌پذیر نیست. سیستم پیوسته با پاسخ ضربهٔ $h(t) = e^{-t}u(t-2)$ پایدار است. سیستم گسسته با پاسخ ضربه $h[n] = 3u[n] - 3u[n-7]$ پایدار است.

ب) علیت

در سیستم علی خروجی فعلی به ورودی های فعلی و گذشته وابسته است. در مورد سیستم های LTI شرط لازم و کافی برای علیت از روی پاسخ ضربه سیستم ارائه می‌شود.

سیستم LTI گسسته در زمان علی است اگر و تنها اگر $h[n]$ (پاسخ ضربه واحد) برای $n < 0$ متحد با صفر باشد.

سیستم LTI پیوسته در زمان علی است اگر و تنها اگر $h(t)$ (پاسخ ضربه واحد) برای $t < 0$ متحد با صفر باشد.

مثال ۱-۸: سیستم پیوسته با پاسخ ضربه $h(t) = u(t+1)$ غیر علی است چون $h(t)$ در $t < 0$ مقدار غیر صفر دارد. اما سیستم پیوسته‌ای که پاسخ ضربه آن $h(t) = 2\delta(t)$ است علی می‌باشد، چون $h(t)$ در $t < 0$ متحد با صفر است.

سیستم گسسته‌ای که دارای پنج ضربهٔ $h[n]=\cos(\frac{\pi}{3}n)$ است غیر علی است چون $h[n]$ در $n<0$ متحد با صفر نیست. اما سیستم گسسته با پاسخ ضربهٔ $h[n]=(-1)^n u[n]$ علی است چون $h[n]$ در $n<0$ متحد با صفر است.

ج) حافظه

خروجی سیستم بدون حافظه در هر لحظه فقط وابسته به ورودی همان لحظه است. در مورد سیستم های LTI شرط لازم و کافی برای بدون حافظه بودن سیستم از روی پاسخ ضربه ارائه می‌شود.

سیستم LTI گسسته در زمان بدون حافظه است اگر و تنها اگر

$$h[n]=k\delta[n] \qquad (1-36)$$

که در آن $h[n]$ پاسخ ضربه واحد و k مقدار ثابت است رابطه $(1-36)$ به این معنی است که در سیستم بدون حافظه گسسته در زمان به ازاء $n\neq 0$ داریم $h[n]=0$ در غیر اینصورت سیستم حافظه دار است.

سیستم LTI پیوسته در زمان بدون حافظه است اگر و تنها اگر

$$h(t)=k\delta(t) \qquad (1-37)$$

که در آن $h(t)$ پاسخ ضربه واحد و k مقدار ثابت است.

رابطه $(1-37)$ به این معنی است که در سیستم بدون حافظه پیوسته در زمان به ازاء $t\neq 0$ داریم $h(t)=0$ در غیر اینصورت سیستم حافظه دار است.

د) معکوس پذیری

شرط لازم و کافی برای معکوس پذیری سیستم LTI آن است که پاسخ سیستم به ورودی غیر صفر، متحد با صفر نباشد.

در سیستم LTI زمان گسسته اگر $h[n]$ پاسخ ضربه واحد باشد و $h_I[n]$ پاسخ ضربه سیستم معکوس آن باشد داریم:

$$h[n]*h_I[n]=\delta[n] \qquad (1-38)$$

در سیستم LTI زمان پیوسته اگر $h(t)$ پاسخ ضربه واحد باشد و $h_I(t)$ پاسخ ضربه سیستم معکوس آن باشد داریم:

$$h(t)*h_I(t)=\delta(t) \qquad (1-39)$$

❋ **نکته:** *اگر یک سیستم LTI معکوس پذیر باشد، سیستم معکوس هم LTI است.*

۱-۷-۵ توصیف سیستم با معادلات دیفرانسیل و دیفرنس

معادلات دیفرانسیل، سیستم پیوسته در زمان را به طور ضمنی توصیف می‌کنند در این نوع توصیف خروجی سیستم به طور صریح به صورت تابعی از ورودی نیست. فرم کلی یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه N با ضرایب ثابت به صورت زیر است:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k}=\sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \qquad (1-40)$$

حل کلی معادله دیفرانسیل $(1-40)$ شامل مجموع یک پاسخ خصوصی $y_p(t)$ و یک پاسخ همگن $y_h(t)$ است و برای اینکه ورودی به طور کامل خروجی را تعیین کند به شرایط کمکی احتیاج است. به شرط سکون اولیه، سیستم توصیف شده با معادله $(1-40)$، LTI و علی است. سکون اولیه به این معنی است که خروجی تا زمان اعمال ورودی، صفر بماند. اگر t_0 زمان اعمال ورودی $x(t)$ به سیستم باشد، سکون اولیه ایجاب می‌کند که شرایط کمکی معادله دیفرانسیل $(1-40)$ به صورت زیر باشند:

$$y(t_0)=\frac{dy(t_0)}{dt}=\ldots=\frac{d^{N-1}y(t_0)}{dt^{N-1}}=0 \qquad (1-41)$$

معادلات دیفرنس، سیستم گسسته در زمان را به طور ضمنی توصیف می‌کنند. فرم کلی یک معادله دیفرنس خطی مرتبه N با ضرایب ثابت به صورت زیر است:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k\, x[n-k] \qquad (۴۲-۱)$$

این نوع معادلات را می‌توان مشابه با روش به کار رفته برای معادلات دیفرانسیل حل کرد. برای اینکه ورودی به طور کامل خروجی را تعیین کند به شرایط کمکی احتیاج است. به شرط سکون اولیه، سیستم توصیف شده با معادله (۱-۴۲) LTI و علی است. سکون اولیه یعنی اینکه اگر در $n<n_0$: $x[n]=0$ آنگاه در $n<n_0$: $y[n]=0$. یعنی خروجی تا زمان اعمال ورودی صفر بماند. (n_0 لحظه‌ی اعمال ورودی به سیستم گسسته‌ی معادله (۱-۴۲) است.)

سکون اولیه ایجاب می‌کند که شرایط کمکی معادله دیفرنس (۱-۴۲) به صورت زیر باشد.

$$y[n]=0 \quad : \quad \forall n<n_0 \qquad (۴۳-۱)$$

از دیدگاه طول پاسخ ضربه می‌توان سیستم ها را به دو دسته تقسیم بندی کرد:

۱- سیستم FIR (سیستم با پاسخ ضربه محدود): سیستمی است که پاسخ ضربه آن دارای استمرار محدود باشد (در یک فاصله زمانی مشخص مخالف صفر باشد). در این نوع سیستم برای محاسبه خروجی از مقادیر گذشته خروجی (در معادله دیفرنس) یا مشتقات خروجی (در معادله دیفرانسیل) استفاده نمی شود:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \qquad (۴۴-۱)$$

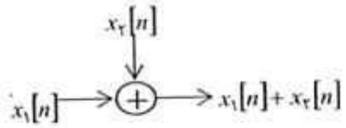
$$y(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x}{dt^k} \qquad (۴۵-۱)$$

۲- سیستم IIR (سیستم با پاسخ ضربه نامحدود) : سیستمی است که پاسخ ضربه آن دارای استمرار نامحدود باشد. در این سیستم برای محاسبه خروجی از مقادیر گذشته خروجی (در معادله دیفرنس) یا مشتقات خروجی (در معادله دیفرانسیل) استفاده می‌شود.

۱-۷-۶ نمایش سیستم های LTI توصیف شده با معادلات دیفرانسیل و دیفرنس

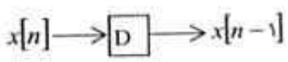
عناصر اساسی نمایش سیستم علی زمان گسسته به صورت زیرند:

جمع کننده:

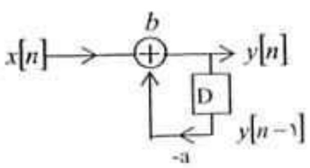


ضرب کننده در عدد:

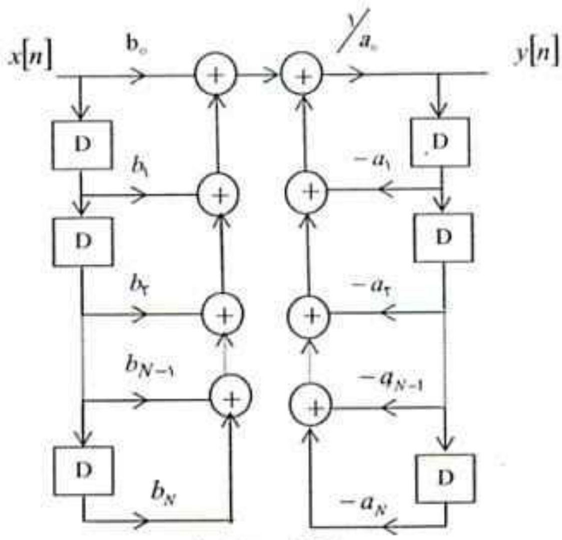
تأخیر دهنده:



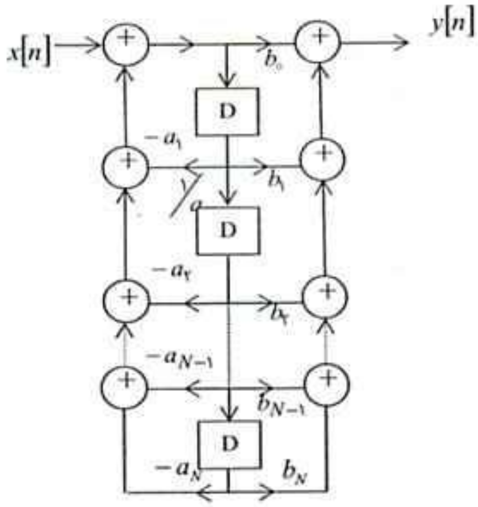
برای مثال نمایش سیستم علی زمان گسسته $y[n]+a\,y[n-1]=b\,x[n]$ به صورت زیر است :



در کل برای تحقق معادله دیفرنس به فرم کلی $\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$ دو ساختار استاندارد به صورت زیر به کار می‌رود : (فرض شده که $N=M$ است.)



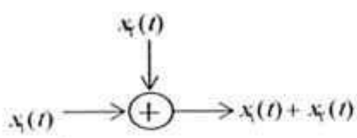
تحقق فرم مستقیم ۱



تحقق فرم مستقیم ۲

عناصر اساسی سیستم علی زمان پیوسته به صورت زیرند :

جمع کننده :



ضرب در عدد ثابت:

$$x(t) \xrightarrow{a} ax(t)$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\int} \longrightarrow \int_{-\infty}^{t} x(t)dt$$ انتگرال گیر

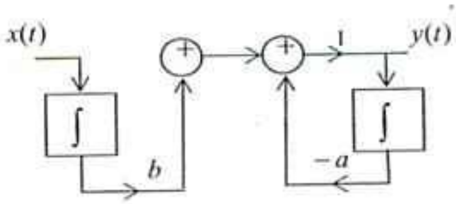
برای مثال سیستم علی LTI زمان پیوسته

$$\frac{dy(t)}{dt}+ay(t)=bx(t)$$

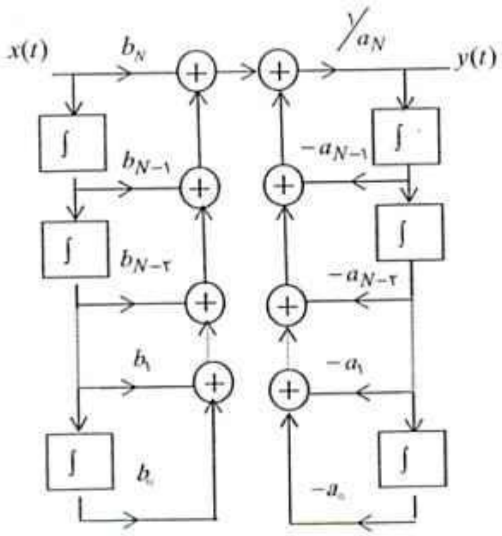
را می‌توان به فرم زیر تبدیل کرد:

$$y(t)=-a\int y(\tau)d\tau+b\int x(\tau)d\tau$$

و نمایش آن به صورت زیر است:



در کل برای تحقق معادله دیفرانسیل به فرم کلی $\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$ از دو ساختار زیر می‌توان استفاده کرد:



تحقق فرم مستقیم ۱

$$x_1(t) \to y_1(t) = x_1(t+2)\sin(\omega t + 2)$$
$$x_2(t) \to y_2(t) = x_2(t+2)\sin(\omega t + 2)$$
$$ax_1(t) + bx_2(t) \to y(t) = ax_1(t+2)\sin(\omega t + 2) +$$
$$bx_2(t+2)\sin(\omega t + 2) = ay_1(t) + by_2(t)$$

سیستم ۲ غیر خطی است چون اگر $x[n] = 0$ باشد آنگاه $y[n] \neq 0$ است.

سیستم ۳ غیر خطی است و دلیل آن وجود عبارت غیر خطی $x^2[k+1]$ در ضابطه سیستم است.

ب- تغییرپذیری یا تغییر ناپذیری با زمان

سیستم ۱ دارای بهره تغییرپذیر با زمان است $(\sin(\omega t + 2))$ پس تغییر پذیر با زمان می‌باشد.

سیستم ۲ هم بهره تغییرپذیر با زمان دارد $\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$ آن هم تغییر پذیر با زمان است.

در سیستم ۳ تعداد عباراتی که با هم جمع می‌شوند تا خروجی لحظه n ام را تولید کنند به خود n وابسته است پس تغییر پذیر با زمان است.

ج- علی یا غیرعلی بودن

سیستم ۱ غیر علی است چون $y(t)$ به $x(t+2)$ مرتبط است.

سیستم ۲ علی است چون $y[n]$ فقط به $x[n]$ ربط دارد توجه کنید که در این سیستم اگر ورودی صفر باشد، باز خروجی وجود خواهد داشت، اما این منافاتی با علی بودن سیستم ندارد سیستم ۳ غیر علی است چون $y[n]$ به مقدار آینده $x[n]$ $(x[n+1])$ وابسته است.

د- پایداری

سیستم ۱ پایدار است چون $x(t)$ کراندار باشد، $y(t)$ هم کراندار می‌ماند.

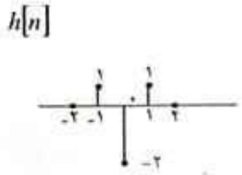
سیستم ۲ ناپایدار است چون با $n \to -\infty$ مقدار بهره $\left(-\frac{1}{2}\right)^n \to \infty$ می‌رسد مستقل از اینکه $x[n]$ کراندار باشد.

سیستم ۳ ناپایدار است. چون اگر مثلاً" ورودی کرانداری مثل $x[n] = -1$ را به آن بدهید :

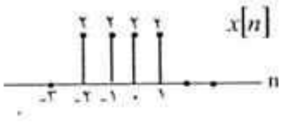
$$y[n] = \sum_{k=1}^{n} 2$$

و اگر $n \to \infty$ آنگاه $y \to \infty$ و در نتیجه سیستم ناپایدار است.

مثال ۱-۱۰: سیستم زمان گسسته با پاسخ ضربه $h[n]$ که در شکل نشان داده شده، مفروض است :



پاسخ سیستم به ورودی $x[n]$ نشان داده در شکل زیر را پیدا می‌کنیم.



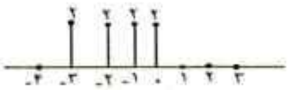
توجه کنید که می‌توانید $h[n]$ را بر حسب ضربه واحد گسسته به صورت زیر نوشت:

$$h[n]=\delta[n+1]-2\delta[n]+\delta[n-1]$$

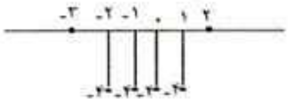
از این خاصیت استفاده می‌کنیم که: کانولوشن سیگنال با تابع ضربه سیگنال را به محل ضربه می‌برد:

$$y[n]=x[n]*h[n]=x[n]*\delta[n+1]-2x[n]*\delta[n]$$
$$+x[n]*\delta[n-1]$$
$$=x[n+1]-2x[n]+x[n-1]$$

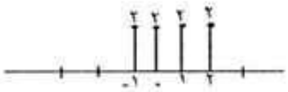
$x[n+1]$



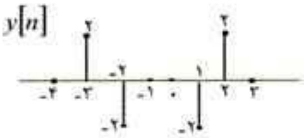
$-2x[n]$



$x[n-1]$



$y[n]$



توجه کنید که می‌توان از تعریف کانولوشن هم به طور مستقیم استفاده کرد.

تست‌های طبقه بندی شده فصل اول

۱- در یک سیستم LTI ورودی x(t) و خروجی y(t) به صورت زیر می‌باشد. **(مهندسی برق ـ سراسری ۸۶)**

$$x(t)=\begin{cases} ۰ & -\infty<t\le ۰ \\ ۱ & ۰<t\le ۱ \\ ۰ & ۰<t<\infty \end{cases} \quad , \quad y(t)=\begin{cases} ۰ & -\infty<t\le ۰/۵ \\ ۲(t-۰/۵) & ۰/۵<t\le ۱/۵ \\ ۲ & ۱/۵<t<\infty \end{cases}$$

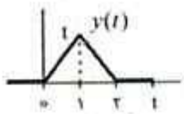
پاسخ ضربهٔ این سیستم عبارتست از:

۱) $h(t)=u(t-۱/۵)$ ۲) $h(t)=۲u(t-۱/۵)$

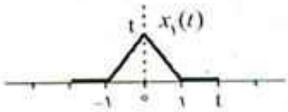
۳) $h(t)=u(t)-u(t-۰/۵)$ ۴) $h(t)=۲u(t-۰/۵)$

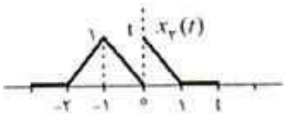
۲- ضابطه ورودی x(t) و خروجی y(t) یک سیستم به صورت زیر است. **(مهندسی برق ـ سراسری ۸۶)**

$$y(t)=\begin{cases} x(t-۱) & , \quad t\ge ۱ \\ x(-t+۱) & , \quad t\le ۱ \end{cases}$$

اگر خروجی سیستم به صورت  باشد ورودی سیستم به کدام یک از دو شکل زیر می تواند باشد؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۸۶)





۱) فقط $x_1(t)$ ۲) فقط $x_2(t)$ ۳) هر دو ۴) هیچ‌کدام

۳- پاسخ یک سیستم گسسته زمان گسسته خطی بدون حافظه به ورودی $x_1[n]=\delta[n]-۲\delta[n-۱]$ برابر است با $y_1[n]=۲\delta[n-۱]$، پاسخ این سیستم به ورودی $x_2[n]=\delta[n-۱]-۲\delta[n-۲]$ کدام یک از جواب‌های زیر می‌تواند باشد؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۸۶)

۱) $y_2[n]=-\delta[n-۱]$ ۲) $y_2[n]=\delta[n-۱]$

۳) $y_2[n]=۲\delta[n-۲]$ ۴) $y_2[n]=-۲\delta[n-۲]$

۴- ضابطه بین ورودی x[n] وخروجی y[n] در دو سیستم زمان گسسته به صورت زیر است.

سیستم ۱: $y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]$ و سیستم ۲: $y[n]\cos(\frac{\pi}{۳}n)x[n]$ کدام یک از این دو سیستم وارون‌پذیر هستند؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۸۶)

۱) فقط سیستم ۱ ۲) فقط سیستم ۲ ۳) هر دو سیستم ۴) هیچ‌کدام از دو سیستم

۵- سیستم $y(t)=\begin{cases} x(t) & , \quad x(t)<۰ \\ x(t-۲) & , \quad x(t)\ge ۰ \end{cases}$ دارای کدام خواص زیر است؟ **(مهندسی برق ـ سراسری ۸۵)**

۱) تغییرپذیر با زمان – وارون پذیر ۲) تغییرناپذیر با زمان – وارون ناپذیر

۳) تغییرناپذیر با زمان – وارون پذیر ۴) تغییرپذیر با زمان – وارون ناپذیر

۶- با در نظر گرفتن سیستم‌های داده شده زیر: (مهندسی برق ـ سراسری ۸۵ و سراسری ۸۶)

سیستم ۱: $y[n]=\begin{cases} x\left[\dfrac{n}{۲}\right] & ; \quad n \text{ زوج} \\ ۰ & ; \quad n \text{ فرد} \end{cases}$ ، سیستم ۲: $y[n]=\sum\limits_{k=n}^{n+۶} x[k]$

۱) سیستم ۱ عکس پذیر و سیستم ۲ تغییر پذیر با زمان است.

۲) سیستم ۱ عکس ناپذیر و سیستم ۲ تغییر ناپذیر با زمان است.

۳) سیستم ۱ عکس پذیر و سیستم ۲ تغییر ناپذیر با زمان است.

۴) سیستم ۱ عکس ناپذیر و سیستم ۲ تغییر پذیر با زمان است.

۷- اگر به یک سیستم LTI زمان ـ گسسته با پاسخ ضربهٔ $h[n]$، ورودی $x[n]=(\frac{۱}{۲})^n u[-۲n+۱]-(\frac{۱}{۲})^n u[-n-۲]$ اعمال شود، پاسخ این سیستم، $y[n]$ ، عبارت خواهد بود از: (مهندسی برق ـ سراسری ۸۵)

۱) $y[n]=h[n]+\frac{۱}{۲}h[n+۱]+\frac{۱}{۴}h[n+۲]$

۲) $y[n]=h[n]+۲h[n+۱]+۴h[n+۲]$

۳) $y[n]=h[n]+\frac{۱}{۲}h[n-۱]+\frac{۱}{۴}h[n-۲]$

۴) $y[n]=h[n]+۲h[n-۱]+۴h[n-۲]$

۸- پاسخ یک سیستم زمان گسسته خطی (که لزوماً LTI نیست) به ورودی $x_۱[n]=u[n-m]$ برابر با $y_۱[n]=(-۱)^{nm}$ می‌باشد و این خاصیت به ازای جمیع مقادیر صحیح $m \in Z$ وجود دارد. پاسخ این سیستم به ورودی $x_۲[n]=\delta[n+۱]+۲\delta[n]+\delta[n-۱]$ چه خواهد بود؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۵)

۱) $y_۲[n]=۰$

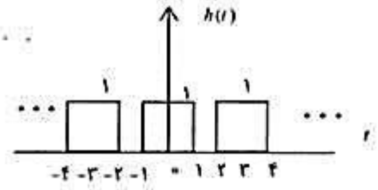
۲) $y_۲[n]=۴$

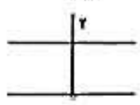
۳) $y_۲[n]=(-۱)^n-۱$

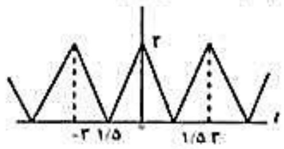
۴) $y_۲[n]=(-۱)^n+۱$

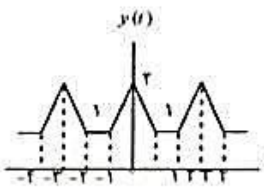
۹- فرض کنید پاسخ ضربه یک سیستم LTI یک سیگنال پریویک با پریود $T_۰=۳$ به صورت زیر باشد. اگر سیگنال ورودی به سیستم برابر $x(t)=u(t+۱)-u(t-۱)$ باشد، خروجی سیستم کدام یک از موارد زیر است؟

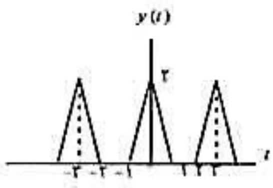
(مهندسی برق ـ سراسری ۸۵)



۱)


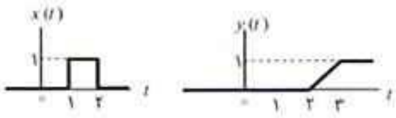
۲)


۳)


۴)


۱۰- ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ یک سیستم LTI مطابق شکل‌های زیر است؟ پاسخ ضربه سیستم چیست؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۸۵)



۱) $u(t-1)$
۲) $u(t-2)$
۳) $u(t-1)-u(t-2)$
۴) $\delta(t-1)-\delta(t-2)$

۱۱- اگر $f(t)$ سیگنالی به عرض T دارای ماکزیممی واقع بر $t=2$ باشد، در آن صورت عرض و محل ماکزیمم $f(rt-n)$ ، $r>0$ عبارتند از:

(مهندسی برق ـ سراسری ۸۵)

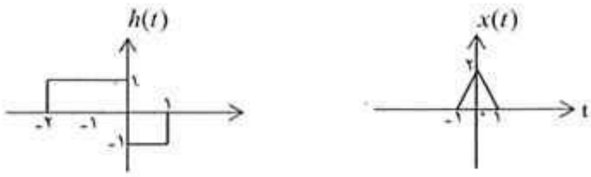
۱) $f(t)\frac{n}{r},\frac{T}{r}-n$
۲) $\frac{2}{r},\frac{T}{r}$
۳) $\frac{n-2}{r},\frac{T}{r}+n$
۴) $\frac{n+2}{r},\frac{T}{r}$

۱۲- یک سیستم زمان گسسته LTI با ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ در نظر بگیرید. می‌دانیم پاسخ ضربه سیستم $h[n]$ به ازای $n\geq N$ و یا $n\leq -1$ صفر است. برای تعیین $h[n]$ دانستن کدام دسته زوج ورودی – خروجی، هم لازم و هم کافی است؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۸۵)

۱) $x[k],y[k]$ برای N مقدار متوالی k
۲) $x[k],y[k]$ برای $2N$ مقدار متوالی k
۳) $x[k],y[k]$ برای $-\infty<k<\infty$
۴) هیچ کدام

۱۳- ورودی $x(t)$ و پاسخ ضربه $h(t)$ یک سیستم LTI به شکل زیر است.



به ازاء چه مقداری از t خروجی سیستم مقدار ماکسیمم را دارا است و مقدار خروجی در $t=1$ چیست؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۸۴)

۱) به ازاء $t=1$ خروجی مقدار ماکزیمم را دارد و به ازاء $t=1$ خروجی برابر است با ۲
۲) به ازاء $t=-1$ خروجی مقدار ماکزیمم را دارد و به ازاء $t=1$ خروجی برابر است با ۱-
۳) به ازاء $t=1$ خروجی مقدار ماکزیمم را دارد و به ازاء $t=1$ خروجی برابر است با ۱
۴) به ازاء $t=-1$ خروجی مقدار ماکزیمم را دارد و به ازاء $t=1$ خروجی برابر است با $\frac{-1}{2}$

۱۴- اگر $y(t)=x(t)*h(t)$ باشد که در آن $h(t)=s(T-t)$ است در آن صورت مقدار،

$$y(nT)=x(t)*h(t)\Big|_{t=nT}$$

برابر است با (مهندسی برق ـ سراسری ۸۴)

۱) $x(t)*s(t)\Big|_{t=nT}$ ۲) $x(t)*s(t)\Big|_{t=(n-1)T}$

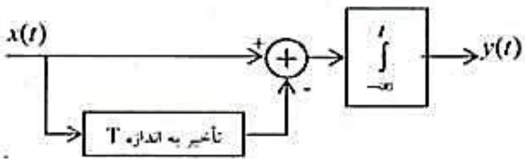
۳) $x(t)*s(-t)\Big|_{t=(n-1)T}$ ۴) $x(t)*s(-t)\Big|_{t=nT}$

۱۵- یک سیستم LTI دارای پاسخ ضربه $h(t)=e^{iat}u(2t+1)$ ، $a>0$ می‌باشد $u(0)$ معرف تابع پله واحد است) این سیستم: (مهندسی برق ـ سراسری ۸۴)

۱) علی و پایدار است. ۲) علی و ناپایدار است.

۳) غیر علی و پایدار است. ۴) غیر علی و ناپایدار است.

۱۶- سیستم داده شده در شکل: (مهندسی برق ـ سراسری ۸۴)



۱) تغییر پذیر با زمان و پایدار است. ۲) تغییر پذیر با زمان و ناپایدار است.

۳) تغییر ناپذیر با زمان و پایدار است. ۴) تغییر ناپذیر با زمان و ناپایدار است.

۱۷- ضابطه ورودی – خروجی سیستمی به صورت زیر است:

$$y(t)=\begin{cases} x(t-2) & t\geq 2 \\ x(t^2) & -2\leq t<2 \\ x(t+2) & t<-2 \end{cases}$$

این سیستم: (مهندسی برق ـ سراسری ۸۴)

۱) خطی و معکوس پذیر ۲) غیر خطی و معکوس پذیر

۳) خطی و معکوس ناپذیر ۴) غیر خطی و معکوس ناپذیر است.

۱۸- رابطه ورودی – خروجی یک سیستم گسسته به صورت زیر می‌باشد کدام گزینه در مورد سیستم غلط می‌باشد. (مهندسی برق ـ سراسری ۸۴)

$$y[n]=x[n \bmod 27]$$

(منظور از n mod ۲۷ باقیمانده مثبت تقسیم عدد n بر عدد صحیح ۲۷ می‌باشد)

۱) سیستم علی است. ۲) سیستم خطی است.

۳) سیستم معکوس ناپذیر است. ۴) سیستم تغییر پذیر با زمان

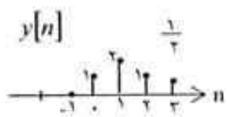
۱۹- سیستم پیوسته در زمان با توصیف ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ را در نظر بگیرید. این سیستم:

(مهندسی برق ـ سراسری ۸۴)

$$y(t)=\int_{-۵}^{t}x(\tau)d\tau$$

۱) تغییر ناپذیر با زمان و معکوس پذیر است.
۲) تغییر پذیر با زمان و معکوس ناپذیر است.
۳) تغییر پذیر با زمان و معکوس پذیر است.
۴) تغییر ناپذیر با زمان و معکوس ناپذیر است.

۲۰- پاسخ یک سیستم LTI گسسته به ضربه شیفت یافته $x[n]=\delta[n-۱]$ به صورت زیر است.



در مورد این سیستم کدام گزینه صحیح است؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۸۳)

۱) علی، حافظه دار و ناپایدار
۲) علی، بدون حافظه و پایدار
۳) غیر علی، حافظه دار و پایدار
۴) غیر علی، بدون حافظه و ناپایدار

۲۱- سیستم گسسته توصیف شده با معادله $a>۱, y[n]=a^{x[n]}$ را داریم. در مورد این سیستم کدام یک از عبارات زیر صحیح است؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۸۳)

۱) این سیستم غیر خطی، غیر علی و پایدار است.
۲) این سیستم خطی، با حافظه و ناپایدار است.
۳) این سیستم تغییر پذیر با زمان، علی و ناپایدار است.
۴) این سیستم تغییر ناپذیر با زمان، بی حافظه و پایدار است.

۲۲- اگر پاسخ یک سیستم خطی (که می‌تواند تغییر پذیر با زمان هم باشد) به تابع پله $u(t-\alpha)$ را با $g(t,\alpha)$ نشان دهیم پاسخ آن سیستم به تابع ضربه $\delta(t-\alpha)$ چه خواهد بود؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{-\partial}{\partial\alpha}g(t,\alpha)$
۲) $\frac{\partial}{\partial t}g(t,\alpha)$
۳) $\frac{\partial}{\partial\alpha}g(t,\alpha)$
۴) $\frac{-\partial}{\partial t}g(t,\alpha)$

۲۳- رابطه ورودی و خروجی یک سیستم پیوسته به صورت $y(t)=\begin{cases}\frac{x(t)}{|x(t)|} & x(t)\neq ۰\\ ۰ & x(t)=۰\end{cases}$ می‌باشد این سیستم،

(مهندسی برق ـ سراسری ۸۳)

۱)خطی و تغییر پذیر با زمان است.
۲) خطی و تغییر ناپذیر با زمان است.
۲) غیر خطی و تغییرپذیر با زمان است.
۴) غیر خطی و تغییر ناپذیر با زمان است.

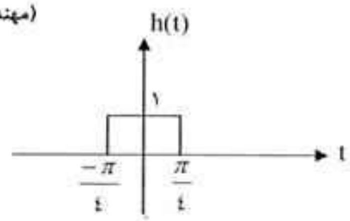
۲۴- پاسخ ضربهٔ یک سیستم LTI به صورت $h[n]=(\frac{۳}{۲})^{-n+۱}u[n-۱]$ است. در صورتی که پاسخ پله سیستم s[n]باشد. مقدار $s[۳]$ کدام است؟

(مهندسی برق ـ آزاد ۸۳)

۱) $\frac{۵}{۳}$
۲) $(\frac{۲}{۳})^{۲}$
۳) $\frac{۱۹}{۹}$
۴) $(\frac{۲}{۳})^{۳}$

۲۵- پاسخ ضربهٔ یک سیستم LTI به صورت شکل است، در صورتی که ورودی سیستم $x(t)=[u(t)-u(t-\pi)]\sin t$ باشد، خروجی آن در لحظهٔ $t=\frac{\pi}{۲}$ کدام مقدار خواهد بود؟

(مهندسی برق ـ آزاد ۸۳)



۱) $\sqrt{۲}$

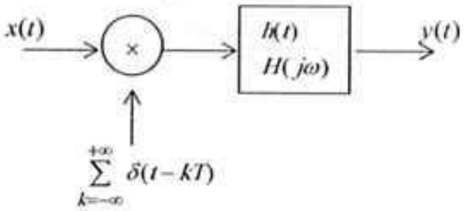
۲) $\pi\sqrt{۲}$

۳) π

۴) صفر

۲۶- اگر در شکل زیر $x(nT)=\begin{cases}۱ & n=۰\\ ۰ & n=\pm۱,\pm۲,\ldots\end{cases}$ باشد در آن صورت $y(t)$ برابر است با:

(مهندسی برق ـ سراسری ۸۲)



۱) $h(t)$

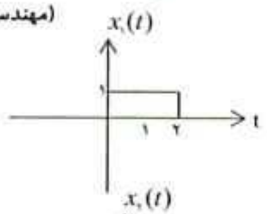
۲) $x(t)$

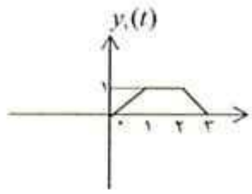
۳) $\delta(t)$

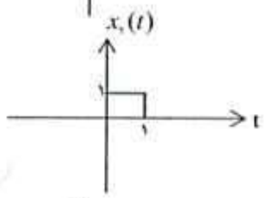
۴) $x(t)*h(t)$

۲۷- یک سیستم خطی مستقل از زمان (LTI) مفروض است اگر به این سیستم سیگنال $x_۱(t)$ اعمال شود. در این صورت $y_۱(t)$ را در خروجی دریافت می‌کنیم. اگر $x_۲(t)$ اعمال شود، خروجی سیستم چه خواهد بود؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۸۲)

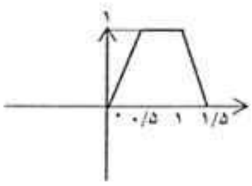




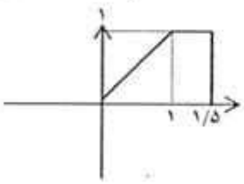


$\Rightarrow \quad y_۲(t)=?$

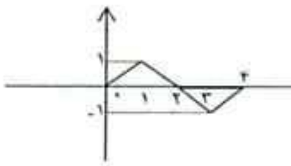
۱)



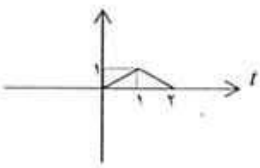
۲)



۳)



۴)

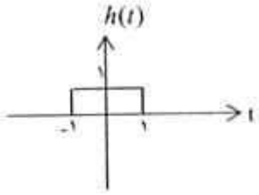


۲۸- **پاسخ ضربه یک سیستم خطی و تغییر ناپذیر با زمان در شکل زیر نمایش داده شده. اگر ورودی برابر با**

$$x(t)=u_{-2}(t+1)-u_{-2}(t)-u_{-1}(t-3)$$

باشد، در این صورت مقدار خروجی سیستم در لحظه $t=2$ کدام است؟ **(مهندسی برق ـ سراسری ۸۲)**

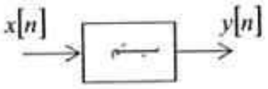
($u_{-1}(t)$ معرف تابع پله واحد و u_{-2} معرف شیب واحد است)



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۱/۵

۲۹- **رابطه ورودی ـ خروجی یک سیستم گسسته به صورت زیر است.**

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[kN]\delta[n-kN]$$
$$N\in Z , N\geq 2$$



کدام گزینه در مورد این سیستم نادرست است؟ **(مهندسی برق ـ سراسری ۸۲)**

۱) سیستم خطی است.
۲) سیستم با حافظه است.
۳) سیستم معکوس ناپذیر است.
۴) سیستم پایدار $BIBO$ است.

۳۰- **سیستم زمان پیوسته تعریف شده با رابطه $y(t)=x\left(\frac{t}{2}\right)+x(t-1)$ برای همه t دارای کدام خواص است؟** **(مهندسی برق ـ سراسری ۸۲)**

۱) خطی، متغیر با زمان، غیر علی
۲) غیر خطی، متغیر با زمان، غیر علی
۳) خطی، نامتغیر با زمان، غیر علی
۴) غیر خطی، نامتغیر با زمان، علی

۳۱- **سیستم زمان گسسته ای با رابطه $y[n]=\begin{cases} x[n]+c & n\geq n_0 \\ 0 & n<n_0 \end{cases}$ تعریف می‌شود که در آن $c=\sum_{k=-\infty}^{n_0} x[k]$ می‌باشد.**

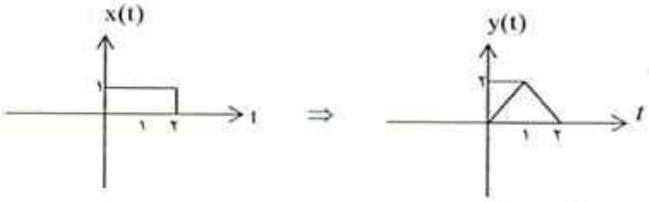
در مورد این سیستم کدام گزینه صحیح است؟ **(مهندسی برق ـ سراسری ۸۲)**

۱)خطی، بدون حافظه، علی و متغیر با زمان
۲) خطی، دارای حافظه، علی و متغیر با زمان
۳) غیر خطی، دارای حافظه، علی و نامتغیر با زمان
۴) غیر خطی، بدون حافظه، علی و متغیر با زمان

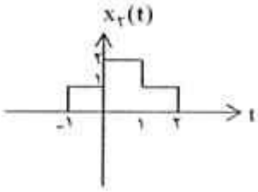
۳۲- **کدام یک از گزاره های زیر ناصحیح است؟** **(مهندسی برق ـ آزاد ۸۲)**

۱) سیستم $y(t)=\int_{-\infty}^{2t} e^{(t-\tau)}x(\tau)d\tau$ تغییر پذیر با زمان و پایدار است.
۲) سیستم $y(t)=e^{jx(t)}$ علی و پایدار است.
۳) سیستم $y[n]=nx[n]$ تغییر پذیر با زمان و ناپایدار است.
۴) سیستم $y[n]=\frac{1}{2}y[n-1]+x[n]$ وارون پذیر است.

۳۳- فرض کنید ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ یک سیستم LTI به صورت زیر باشند،

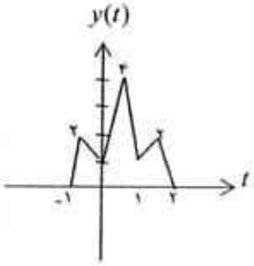


در صورتی که ورودی سیستم به شکل زیر باشد.

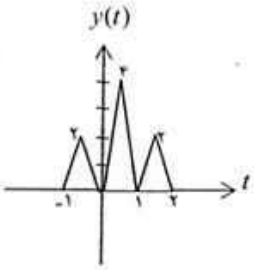


کدام یک از گزینه های زیر در مورد این سیستم درست است؟ (مهندسی برق ـ آزاد ۸۲)

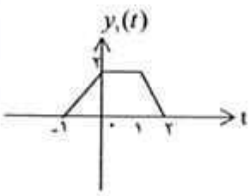
۱) خروجی به صورت زیر خواهد بود:



۲) خروجی به صورت زیر خواهد بود:

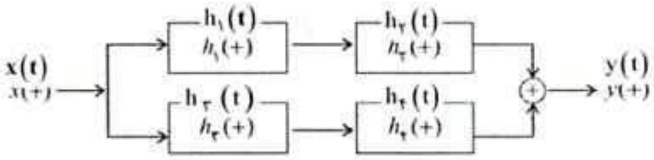


۳) خروجی به صورت زیر خواهد بود:

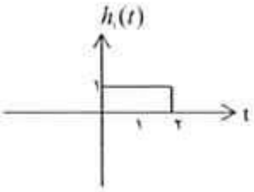


۴) خروجی این سیستم را نمی توان بدون محاسبه پاسخ ضربه آن به دست آورد

۳۴- سیستم LTI زیر را در نظر بگیرید:



در صورتی که $h_1(t)$ به صورت نشان داده شده در شکل زیر باشد:



و نیز $h_2(t)=h_1(t), h_3(t)=\delta(t+2), h_4(t)=h_1(t-1)$ باشد، خروجی سیستم در لحظه $t=0$ به ورودی $x(t)=\delta(t+2)+\delta(t)$ برابر است با: (مهندسی برق ـ آزاد ۸۲)

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۲/۵ ۴) ۳

۳۵- پاسخ ضربه یک سیستم LTI به صورت $h(t)=e^t u(-1-t)$ داده شده است که در آن $u(t)$ تابع پله واحد می‌باشد. در این صورت سیستم چگونه است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۱)

۱) پایدار و علی ۲) ناپایدار و علی

۳) ناپایدار و غیر علی ۴) پایدار و غیر علی

۳۶- سیستمی را در نظر می‌گیریم که برای ورودی $\delta(t-\tau)$ دارای خروجی $y(t)=u(t-\tau)-u(t-2\tau)$ می‌باشد. خصوصیات این سیستم کدام است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۱)

۱) با حافظه ـ علی ـ تغییر ناپذیر با زمان ـ خطی ـ ناپایدار

۲) بدون حافظه ـ غیر علی ـ تغییر ناپذیر با زمان ـ خطی ـ پایدار

۳) با حافظه ـ غیر علی ـ تغییر پذیر با زمان ـ خطی ـ پایدار

۴) بدون حافظه ـ غیر علی ـ تغییر پذیر با زمان ـ خطی ـ ناپایدار

۳۷- معکوس سیستم $y(t)=\frac{1}{2}x(4-2t)$ در صورتی که معکوس پذیر باشد، کدام است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۱)

۱) $y(t)=x(2-t)$ ۲) $y(t)=x(t-2)$

۳) $y(t)=2x\left(2-\frac{t}{2}\right)$ ۴) $y(t)=2x\left(-2-\frac{t}{2}\right)$

۳۸- سطح زیر منحنی سیگنال $v(t)$ به صورت $A_v=\int_{-\infty}^{+\infty} v(t)dt$ تعریف می‌شود. اگر رابطه ورودی خروجی یک سیستم خطی و تغییر ناپذیر با زمان $y(t)=x(t)*h(t)$ باشد که $x(t)$ خروجی و $h(t)$ پاسخ ضربهٔ آن است، سطح زیر منحنی سیگنال خروجی یعنی A_y کدام است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۱)

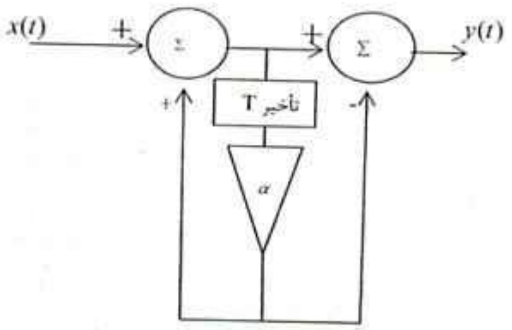
۱) $A_y=A_x+A_h$ ۲) $A_y=A_x A_h$

۳) $A_y=A_x * A_h$ ۴) رابطه مشخص بین A_x، A_h، A_y وجود ندارد.

۳۹- با تعاریف $a[n]=x[n]*\delta[2n]$ ، $b(t)=x(t)*\delta(2t)$ کدام گزینه صحیح است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۰)

۱) $a[n]=x[2n]$ ، $b(t)=x(2t)$
۲) $a[n]=x[n]$ ، $b(t)=\frac{1}{2}x(t)$
۳) $a[n]=x[n]$ ، $b(t)=x(2t)$
۴) $a[n]=\frac{1}{2}x[2n]$ ، $b(t)=\frac{1}{2}x(2t)$

۴۰- در سیستم نشان داده شده اگر $x(t)=2e^{-2t}u(t)$ باشد در آن صورت $y(t)$ با کدام گزینه برابر است؟
(مهندسی برق ـ سراسری ۸۰)



۱) ۰
۲) $2e^{-2t}u(t)$
۳) $2e^{-2(t-T)}u(t)$
۴) $e^{-2t}u(t)+2\alpha e^{-2(t-T)}u(t-T)$

۴۱- در یک سیستم زمان گسسته، خروجی سیستم $y[n]$ بر حسب ورودی $x[n]$ با رابطهٔ زیر تعیین می‌شود.

$$y[n]=\begin{cases} n & n\le x[-n] \\ x[n] & n>x[-n] \end{cases}$$

پس در این صورت سیستم .... است. (مهندسی برق ـ سراسری ۸۰)

۱) علی و پایدار
۲) غیر علی و پایدار
۳) علی و ناپایدار
۴) غیر علی و ناپایدار

۴۲- مقدار $y(t)$ به ازاء $t=1$ در رابطه $y(t)=\left[e^{-t}u(t)\right]*\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-3k)$ تقریباً چقدر است؟
(مهندسی برق ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{1}{e}$
۲) $\frac{-1}{e}$
۳) $\frac{2}{e}$
۴) $\frac{-2}{e}$

۴۳- سیستم S با توصیف ورودی – خروجی $y(t)=\frac{\sin(x(t)+2t)}{x(t-1)}$ کدام دسته از خواص زیر را داراست؟
(مهندسی برق ـ سراسری ۸۰)

۱) غیر علی، تغییر پذیر با زمان، ناپایدار
۲) علی، تغییر پذیر با زمان، پایدار
۳) علی، تغییر پذیر با زمان، ناپایدار
۴) علی، تغییر ناپذیر با زمان، پایدار

۴۴- در مورد سیستم کدام یک از گزینه های زیر صحیح است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۴ و ۸۰)

$$y(t)=\begin{cases} x(t)+y(t-1) & y(t-1)\le 0 \\ x(t)-y(t-1) & y(t-1)>0 \end{cases}$$

۱) سیستم خطی و معکوس پذیر می‌باشد.
۲) سیستم خطی و معکوس ناپذیر می‌باشد.
۳) سیستم غیر خطی و معکوس ناپذیر می‌باشد.
۴) سیستم غیر خطی و معکوس پذیر می‌باشد.

۴۵- دو سیستم پیوسته داریم. کدام یک از گزاره های زیر نادرست است؟ (مهندسی برق ـ آزاد ۸۰)

سیستم ۱: $y(t)=\begin{cases} x(t)+x(t-2) & t\geq 0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$

سیستم ۲: $y(t)=\begin{cases} x(t)+x(t-2) & x(t)\geq 0 \\ 0 & x(t)<0 \end{cases}$

۱) هر دو سیستم خطی هستند.

۲) هر دو سیستم پایدار هستند.

۳) هر دو سیستم سببی هستند.

۴) سیستم ۱ تغییر پذیر با زمان و سیستم ۲ تغییر ناپذیر با زمان است.

۴۶- کدامیک از جملات زیر درست است؟ (مهندسی برق ـ آزاد ۸۰)

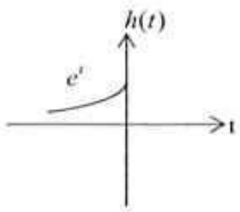
۱) سیستم $y[n]=\begin{cases} x\left[\frac{n}{2}\right] & n=2k \\ 0 & n\neq 2k \end{cases}$ یک سیستم سببی است.

۲) سیستم $y[n]=2x[n]+x[2n-3]$ یک سیستم خطی است.

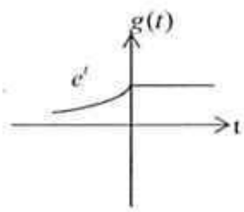
۳) سیستم $y[n]=(n+1)x[n]$ یک سیستم حافظه دار است.

۴) سیستم $y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$ یک سیستم پایدار است.

۴۷- پاسخ یک سیستم غیر خطی به ورودی $\delta(t)$ (ضربه واحد) به صورت $h(t)$ و پاسخ آن سیستم به ورودی $u(t)$ (پله واحد) به صورت $g(t)$ در شکل زیر نشان داده شده است با توجه به این مفروضات کدام یک از نتیجه گیرهای زیر در حالت کلی صحیح است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۷۹)



پاسخ ضربه



پاسخ پله

۱) این سیستم غیر علی و با حافظه است.

۲) این سیستم می‌تواند علی و بدون حافظه باشد.

۳) این سیستم با حافظه است ولی می‌تواند علی باشد.

۴) این سیستم غیرعلی است ولی می‌تواند بدون حافظه باشد.

۴۸- اگر $r(t)$ پاسخ پله یک سیستم LTI باشد، در این صورت پاسخ کلی سیستم $y(t)$ به ورودی دلخواه $x(t)$ و برای $t<0$ ، $x(t)=0$ کدام است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۷۹)

۱) $y(t)=\int_{0^+}^{\infty}\frac{d^2x(t-\tau)}{d\tau^2}r(\tau)d\tau$

۲) $y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}r(\tau)x(t-\tau)d\tau$

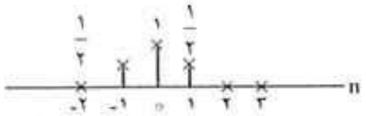
۳) $y(t)=\int_{0^+}^{\infty}\frac{dx(\tau)}{d\tau}r(t-\tau)d\tau+x(0^+)r(t)$

۴) $y(t)=\int_{0^+}^{\infty}x(\tau)r(t-\tau)d\tau+x(0^+)r(t)$

۴۹- پاسخ یک سیستم خطی به ورودی $x(t)=\delta(t-\tau)$ (ضربهٔ اعمال شده در لحظه $\tau \in R$) به صورت $y(t)=\delta(t-2\tau)$ می‌باشد. ضابطه کلی سیستم بین ورودی و خروجی به کدام صورت زیر می‌باشد؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۷۹)

۱) $y(t)=x(2t)$
۲) $y(t)=x\left(\frac{t}{2}\right)$
۳) $y(t)=2x(2t)$
۴) $y(t)=\frac{1}{2}x\left(\frac{t}{2}\right)$

۵۰- برای رشته گسسته $x[n]$ مطابق شکل، مقدار $z[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[2-2k]u[k]x[n-k]$ در $n=0$ برابر چه مقدار است؟



۱) $\frac{3}{2}$
۲) $\frac{1}{2}$
۳) $\frac{1}{4}$
۴) صفر

۵۱- ضابطهٔ ورودی ـ خروجی سیستمی به صورت $y(t)=\begin{cases} t & , \ t \le x(t) \\ x(t) & , \ t \ge x(t) \end{cases}$ است. کدام گزینه صحیح است؟

(مهندسی برق ـ آزاد ۷۹)

۱) این سیستم با حافظه و ناپایدار است.
۲) این سیستم بدون حافظه و ناپایدار است.
۳) این سیستم باحافظه و پایدار است.
۴) این سیستم بدون حافظه و پایدار است.

۵۲- اگر $\delta(x)$ تابع ضربهٔ واحد باشد و $x=4t-t^3$ فرض شود، حاصل انتگرال زیر برابر است با: $A=\int_{-1}^{\infty}\delta(x)\,dt$

(مهندسی برق ـ آزاد ۷۹)

۱) $\frac{3}{16}$
۲) $\frac{1}{4}$
۳) $\frac{-3}{16}$
۴) $\frac{-1}{4}$

۵۳- قدرت سیگنال زیر چقدر است؟ (مهندسی برق ـ آزاد ۷۹)

$$x(t)=\begin{cases} 2 & t<-10 \\ 4 & -10 \le t < 10 \\ 6 & t \ge 10 \end{cases}$$

۱) ۲۰
۲) ۴
۳) ۳
۴) ۱۸٫۶۶

۵۴- ضابطهٔ ورودی- خروجی سیستمی به صورت زیر است. گزینه صحیح کدام است؟ (مهندسی برق ـ آزاد ۷۹)

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t} x(\sqrt[3]{\alpha})\,d\alpha$$

۱)این سیستم علی و خطی است.
۲) این سیستم علی و غیر خطی است.
۳) این سیستم غیرعلی و خطی است.
۴) این سیستم غیرعلی و غیرخطی است.

۵۵- رابطه ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ در یک سیستم زمان پیوسته به صورت زیر است:

$$y(t)=\begin{cases} x(t)+x(t-1) & , \quad x(-t)\le 0 \\ x(t)-x(t-1) & , \quad x(-t)>0 \end{cases}$$

کدام یک از گزینه های زیر صحیح است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۷۸)

۱) سیستم غیرعلی و خطی است.
۲) سیستم غیرعلی و غیر خطی است.
۳) سیستم علی و غیر خطی است.
۴) سیستم علی و خطی است.

۵۶- رابطه ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ در سیستم زمان پیوسته A به صورت زیر است :

$$\text{سیستم}A : y(t)=\begin{cases} x(t-1) & , \quad t\ge 1 \\ tx(t) & , \quad 0\le t<1 \\ x(t+1) & , \quad t<0 \end{cases}$$

و رابطه ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ در سیستم زمان پیوسته B به صورت زیر است

$$\text{سیستم}B : y(t)=x(2)+x(t-6)$$

کدام یک از گزینه های زیر صحیح است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۷۸)

۱) سیستم A و سیستم B هر دو معکوس پذیر هستند

۲) سیستم A معکوس پذیر است ولی سیستم B معکوس پذیر نیست

۳) سیستم B معکوس پذیر است ولی سیستم A معکوس پذیر نمی باشد

۴) هیچ یک از دو سیستم معکوس پذیر نیستند

۵۷- رابطه ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ در یک سیستم زمان پیوسته به صورت زیر است

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t} e^{-\alpha^2}x(\alpha-t)\,d\alpha$$

کدام یک از گزینه های زیر صحیح است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۷۸)

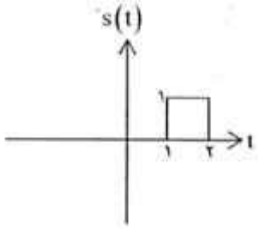
۱) این سیستم یک سیستم ناپایدار و تغییر ناپذیر با زمان می‌باشد.

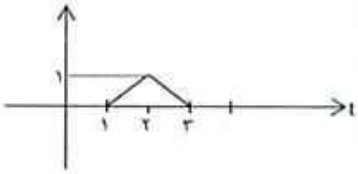
۲) این سیستم یک سیستم ناپایدار و تغییر پذیر با زمان هست.

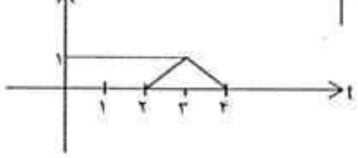
۳) این سیستم یک سیستم پایدار و تغییر ناپذیر با زمان هست.

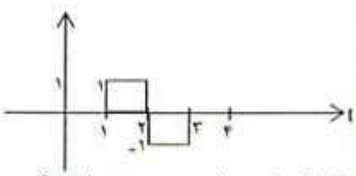
۴) این سیستم یک سیستم پایدار و تغییر پذیر با زمان هست.

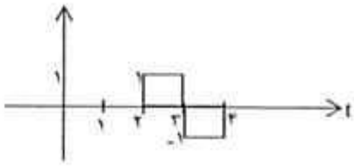
۵۸- یک سیستم LTI با پاسخ پله $s(t)$ مطابق شکل روبرو را در نظر بگیرید. اگر دو سیستم از این نوع را با هم متوالی کنیم، پاسخ پله سیستم حاصل کدام است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۷۸)



۱)


۲)


۳)


۴)


۵۹- کدام یک از عبارت های زیر درست است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۷۸)

۱) اگر $y(t)=h(t)*x(t)$ آنگاه $y(3t)=h(3t)*x(3t)$

۲) اگر $y(t)=h(t)*x(t)$ باشد آنگاه $y(t-۳)=h(t-۳)*x(t-۳)$

۳) هر سیستم LTI که فقط به ازاء ورودی صفر، خروجی صفر بدهد حتماً معکوس پذیر است.

۴) معکوس هر سیستم LTI علی و پایدار، همیشه علی و پایدار است.

۶۰- یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t)=e^{-t}u(t)$ را در نظر بگیرید. اگر ورودی سیستم سیگنال متناوب $\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-k)$ باشد، یک دوره تناوب از خروجی $y(t)$ با کدام رابطه قابل بیان است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۷۸)

۱) $y(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}e^{-(t-k)} \quad ۰<t<۱$

۲) $y(t)=\sum_{k=۰}^{+\infty}e^{-(t-k)} \quad ۰<t<۱$

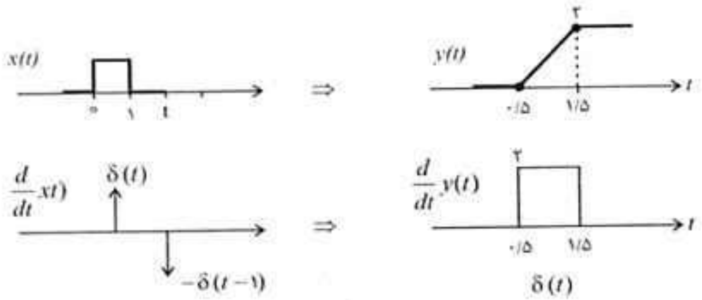
۳) $y(t)=\dfrac{e^{۱-t}}{e-۱} \quad ۰<t<۱$

۴) خروجی نامحدود می‌شود.

پاسخ تشریحی تست‌های طبقه‌بندی شده فصل اول

۱- گزینه «۴»ـ(متوسط)

چون سیستم LTI است اگر پاسخ به $x(t)$ برابر $y(t)$ باشد، آنگاه پاسخ به $\frac{d}{dt}x(t)$ برابر $\frac{d}{dt}y(t)$ خواهد بود:



روشن است که اعمال ضربه باعث ایجاد خروجی $2u(t-0/5)$ می‌شود و با اعمال $-\delta(t-1)$ یعنی منفی ضربه در لحظه ۱، خروجی $-2u(t-1/5)$ به وجود آمده و منجر به شکل موج دیده شده در $\frac{d}{dt}y(t)$ می‌شود.

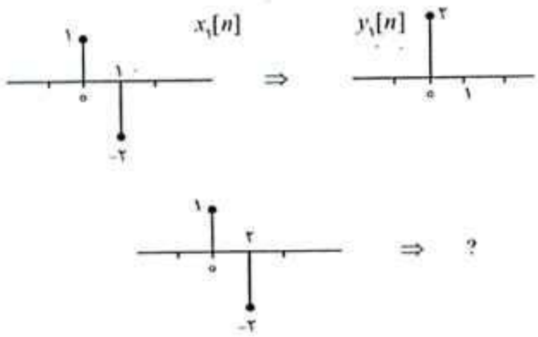
۲- گزینه «۳»ـ(ساده)

با توجه به آنچه که در مورد، تبدیل خطی متغیر مستقل آموختیم، کافی است خروجی سیستم به هر دو ورودی $x_1(t)$ و $x_2(t)$ را رسم کنیم که دقیقاً به صورت خروجی مشخص شده با عنوان $y(t)$ خواهد شد.

$x(t-1)$ یعنی x را به اندازه واحد به راست شیفت داده و بخش $t \geq 1$ آن را انتخاب کنید. $x(-t+1)$ یعنی x را ابتدا نسبت به محور قائم، قرینه کرده و سپس نتیجه حاصل را به اندازه واحد به راست شیفت داده و بخش $t \leq 1$ آن را انتخاب کنید.

۳- گزینه «۱»ـ(متوسط)

پاسخ ضربهٔ سیستم زمان گسسته بدون حافظه همواره به صورت $k\delta[n]$ است که در آن k یک مقدار ثابت است، چون خروجی این سیستم در هر لحظه فقط به ورودی همان لحظه وابسته است.



از شکل دیده می‌شود که وقتی در لحظه ۱ مقدار ۲- به عنوان ورودی اعمال می‌شود، خروجی سیستم مقدار ۲ را دارد. توجه کنید که این خروجی فقط به ورودی ۲- مربوط می شود. به طور مشابه وقتی که در ورودی $x_2[n]$ در لحظه ۱ ورودی برابر ۱ است خروجی در لحظهٔ ۱ برابر ۱- باشد، بنابراین قسمتی از خروجی $y_2[n]$ باید به صورت $-\delta[n-1]$ است. با توجه به گزینه ها جواب ۱ صحیح است.

۴- **گزینه «۳»ـ(ساده)**

سیستم ۱، یک انباره ساده است و وارون آن سیستم دیفرنس است که ورودی را از روی خروجی قابل حصول می‌سازد. توجه کنید که در سیستم ۲، ضریب $\cos\frac{\pi}{3}n$ به ازاء هیچ n صحیحی برابر صفر نمی شود در نتیجه هیچ عبارتی از ورودی حذف نمی‌شود. پس در اینجا هم ورودی از روی خروجی به سهولت قابل تعیین است.

۵- **گزینهٔ «۲»ـ (ساده)**

چون ضابطهٔ خروجی بر حسب ورودی به ازاء همهٔ زمانها یکسان است، اگر ورودی معینی در هر زمان دلخواهی به سیستم اعمال شود، شکل خروجی تغییر نمی کند، پس سیستم تغییر ناپذیر با زمان است.

وارون سیستم وجود ندارد، چون ورودی از روی خروجی با توجه به ضابطه سیستم به طور یکتا قابل حصول نیست. بنابراین تغییر ناپذیر با زمان است.

۶- **گزینهٔ «۳»ـ (ساده)**

سیستم ۱ در واقع فاصلهٔ بین نمونه‌های ورودی را دو برابر می‌کند بنابراین معکوس پذیر است.

سیستم ۲ در هر لحظه، مجموع ۷ نمونه شامل نمونه‌های فعلی و آتی را حساب می کند بنابراین اگر یک ورودی در لحظه‌های مختلف به سیستم اعمال شود، شکل خروجی یکسان خواهد بود چون ضابطه خروجی – ورودی به زمان وابسته نیست. بنابراین تغییر ناپذیر با زمان است.

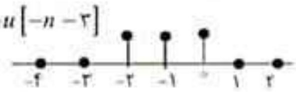
۷- **گزینهٔ «۲»ـ (متوسط)**

داریم:

$$x[n]=(\tfrac{1}{2})^n u[-2n+1]-(\tfrac{1}{2})^n u[-n-3]$$
$$=(\tfrac{1}{2})^n \{u[-2n+1]-u[-n-3]\}$$

با توجه به شکل $u[-2n+1]$ ، $-u[-n-3]$ داریم:

$u[-2n+1]-u[-n-3]$



پس $x[n]$ به صورت زیر ساده می‌شود:

$$x[n]=(\tfrac{1}{2})^n \{\delta[n]+\delta[n+1]+\delta[n+2]\}$$
$$=\delta[n]+2\delta[n+1]+4\delta[n+2]$$

بنابراین خروجی به سادگی به صورت زیر نشان داده می‌شود.

$$y[n]=h[n]+2h[h+1]+4h[h+2]$$

۸- **گزینهٔ «۱»ـ (متوسط)**

$x_2[n]$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$x_2[n]=\{u[n+1]-u[n]\}+2\{u[n]-u[n-1]\}+\{u[n-1]-u[n-2]\}=$$
$$=u[n+1]+u[n]-u[n-1]-u[n-2]$$

با توجه به خطی بودن سیستم و اینکه پاسخ سیستم به $u[n-m]$ برابر $(-1)^{nm}$ است داریم:

$$y_2[n]=(-1)^{-n}+(-1)^{0n}-(-1)^n-(-1)^{2n}=1-1=0$$

۹- گزینهٔ «۳»- (متوسط)

اگر $x(t)=u(t+1)-u(t-1)$ باشد و پاسخ به $x(t)$ را با $y(t)$ نشان دهیم آنگاه $\frac{dx(t)}{dt}=\delta(t+1)-\delta(t-1)$ و در نتیجه $\frac{dy(t)}{dt}=h(t+1)-h(t-1)$ (با توجه به LTI بودن سیستم)

حال کافی است $\frac{dy(t)}{dt}$ را رسم کرده و از آن انتگرال بگیریم تا به $y(t)$ برسیم.

۱۰- گزینهٔ «۱»- (متوسط)

پاسخ به $x(t)=u(t-1)-u(t-2)$ برابر $y(t)$ است y با توجه به LTI بودن و شکل $y(t)$، پاسخ سیستم به $\frac{dx(t)}{dt}=\delta(t-1)-\delta(t-2)$ برابر $\frac{dy(t)}{dt}=u(t-2)-u(t-3)$ می‌باشد در نتیجه با قیاس این دو رابطه نتیجه می شود که $h(t)=u(t-1)$ است.

۱۱- گزینهٔ «۴»- (ساده)

با توجه به آنچه از تبدیل خطی متغیر مستقل می‌دانیم، ابتدا محور زمان برای $f(t)$ با ضریب $\frac{1}{r}$ مقیاس می‌شود و سپس نتیجهٔ آن به اندازهٔ n شیفت می‌یابد.

بنابراین عرض T تبدیل به $\frac{T}{r}$ می‌شود و نقطهٔ $t=2$ به $\frac{n+2}{r}$ انتقال می‌یابد.

۱۲- گزینهٔ «۴»- (متوسط)

داشتن $x[k]$ و $y[k]$ها برای $-\infty<k<\infty$ کافی است اما چون $h[n]$ فقط N مقدار غیر صفر دارد، داشتن این همه مقدار $y[k]$ لازم نیست.

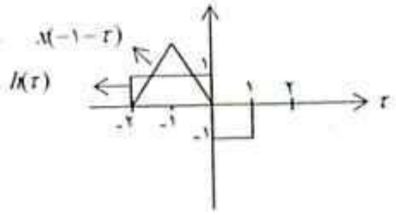
با توجه به رابطهٔ کانولوشن گسسته می‌توان تحت شرایط خاصی، با داشتن حداقل N تا $y[k]$ و $2N-1$ تا $x[k]$ متوالی تعداد N تا مقدار مجهول $h[n]$ را تعیین نمود منظور از شرایط خاص، زمانی است که مقادیر متوالی ورودی ها چنان باشند که N تا معادلهٔ به دست آمده مستقل از هم در بیایند.

۱۳- گزینهٔ «۲»- (ساده)

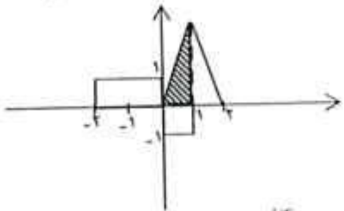
تعریف کانولوشن پیوسته به این صورت است:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

حداکثر مقدار انتگرال فوق زمانی است که $h(\tau)$، $x(t-\tau)$ بیشترین مقدار همپوشانی هم علامت را داشته باشند. روشن است که این اتفاق به ازاء $t=-1$ رخ می‌دهد.



برای محاسبه مقدار خروجی در $t=1$ کافی است منفی مساحت قسمت هاشور خورده در شکل زیر را حساب کنیم.



$$-\frac{\frac{2\times 2}{2}}{2}=-1$$

۱۴- **گزینه «۳»ـ (متوسط)**

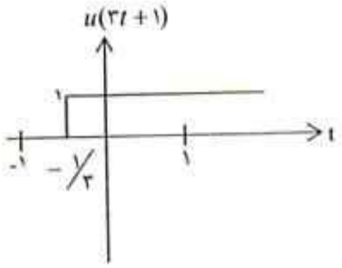
$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)s\big(T-(t-\tau)\big)d\tau$$

$$y(nT)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)s(T-nT+\tau)d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)s\big(-(n-1)T-(-\tau)\big)d\tau=x(t)*s(-t)\Big|_{t=(n-1)T}$$

۱۵- **گزینه «۴»ـ (متوسط)**

با توجه به اینکه شکل $u(3t+1)$ به صورت مقابل است :



قبل از اعمال ضربه، سیستم به آن پاسخ داده و در نتیجه غیرعلی است.

برای پایداری باید پاسخ ضربه سیستم مطلقاً انتگرال پذیر باشد. حال این شرط را بررسی می‌کنیم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|e^{iat}u(3t+1)\right|dt=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|e^{iat}\right|\left|u(3t+1)\right|dt=\int_{-\frac{1}{3}}^{\infty}1dt=\infty$$

که در نتیجه سیستم ناپایدار است.

۱۶- **گزینه «۳»ـ (ساده)**

رابطه ورودی – خروجی سیستم از روی شکل به دست می‌آید:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}\left[x(t')-x(t'-T)\right]dt'$$

از رابطه فوق روشن است که شیفت زمانی سیگنال ورودی به هر میزان باعث شیفت زمانی خروجی به آن میزان می‌شود، در نتیجه تغییر ناپذیر با زمان است.

مثلا" اگر ورودی به اندازه a شیفت راست پیدا کند، خروجی در لحظه t برابر خواهد بود با:

$$y_a(t)=\int_{-\infty}^{t}\left[x(t'-a)-x(t'-a-T)\right]dt'$$

$$=\int_{-\infty}^{t-a}[x(t'')-x(t''-T)]dt''=y(t-a)$$

که شیفت یافته $y(t)$ به اندازه a به سمت راست است. (از تغییر متغیر $t'-a=t''$ استفاده شده است)

چون حد بالای انتگرال در عبارت $y(t)$ به t محدود است اگر عبارت زیر انتگرال کراندار باشد، $y(t)$ هم کراندار می‌ماند پس به ازاء هر ورودی کراندار، خروجی سیستم کراندار می‌ماند و در نتیجه سیستم پایدار است.

۱۷- **گزینه «۱»- (ساده)**

برای خطی بودن سیستم باید جمع آثار در مورد آن برقرار باشد خروجی سیستم به ازاء ورودی $ax_1(t)+bx_2(t)$ برابر است با:

$$y'(t)=\begin{cases}ax_1(t-2)+bx_2(t-2) & t\ge 2\\ ax_1(t^2)+bx_2(t^2) & -2\le t<2\\ ax_1(t+2)+bx_2(t+2) & t<-2\end{cases}$$

$$=a\begin{cases}x_1(t-2) & t\ge 2\\ x_1(t^2) & -2\le t<2\\ x_1(t+2) & t<-2\end{cases}+b\begin{cases}x_2(t-2) & t\ge 2\\ x_2(t^2) & -2\le t<2\\ x_2(t+2) & t<-2\end{cases}$$

پس سیستم خطی است.

روشن است که در هر فاصله زمانی مشخص شده در ضابطه $y(t)$، x بر حسب y بطور یکتا قابل حل است. بنابراین سیستم معکوس پذیر می‌باشد.

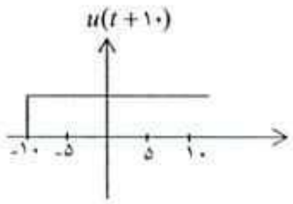
$$x(t)=\begin{cases}y_1(t-2) & t\ge 2\\ y(t^2) & -2\le t<2\\ y(t+2) & t<-2\end{cases}$$

۱۸- **گزینه «۱»- (متوسط)**

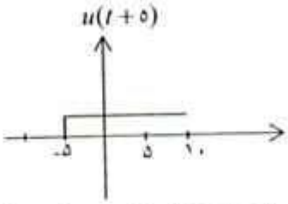
سیستم غیر علی است. مثلاً داریم $y[1]=x[27]$ یعنی خروجی فعلی به ورودی آینده وابسته است.

۱۹- **گزینه «۳»- (متوسط)**

مثال زیر نشان می‌دهد که سیستم تغییرپذیر با زمان است.



$\Rightarrow \quad y_1(t)=t+5$



$$\Rightarrow \quad y_2(t)=t+5$$

با این توضیح که وقتی ورودی به اندازه ۵ شیفت به راست کرده خروجی به همان مقدار شیفت به راست نداشته است.

برای معکوس پذیری باید x بر حسب y به طور یکتا قابل حل باشد.

$$\frac{dy(t)}{dt}=x(t)-x(-5)\Rightarrow x(t)=a+\frac{dy(t)}{dt}$$

در نتیجه سیستم معکوس پذیر است.

۲۰- **گزینه «۳»- (ساده)**

غیر علی است :

چون قبل از اعمال ورودی در $n=1$، سیستم دارای خروجی است.

حافظه دار است چون در لحظات غیر از $n=1$ (که ورودی فقط در آن غیر صفر است) خروجی وجود دارد.

چون پاسخ ضربهٔ شیفت یافته مطلقاً" جمع پذیر است سیستم پایدار است (این قضیه از LTI بودن سیستم نتیجه می‌شود چون مقادیر پاسخ ضربهٔ شیفت یافته و خود پاسخ ضربه یکسان هستند و فقط در زمان شیفت پیدا می‌کنند).

۲۱- **گزینه «۴»_ (ساده)**

شیفت زمانی ورودی به هر میزان باعث شیفت زمانی خروجی به همان مقدار می‌شود درنتیجه سیستم تغییرناپذیر با زمان است:

$$x[n]\rightarrow y_1[n]=a^{x[n]}$$

$$x[n-n_0]\rightarrow y_2[n]=a^{x[n-n_0]}=y_1[n-n_0]$$

پس سیستم تغییر ناپذیر با زمان است.

بدون حافظه است چون خروجی فعلی فقط به ورودی فعلی بستگی دارد.

پایدار است، چون اگر $x[n]$ کراندار باشد، $y[n]$ بی‌کران نمی‌شود.

۲۲- **گزینه «۱»- (متوسط)**

$$\delta(t-\alpha)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{u(t-\alpha)-u(t-\alpha-\Delta t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\left\{\frac{1}{\Delta t}u(t-\alpha)-\frac{1}{\Delta t}u(t-\alpha+\Delta t)\right\}$$

چون سیستم خطی است، از خاصیت جمع آثار می‌توان استفاده کرد :

$$\text{پاسخ به } \delta(t-\alpha)=\lim_{\Delta t\to 0}\left\{\frac{1}{\Delta t}g(t,\alpha)-\frac{1}{\Delta t}g(t,\alpha+\Delta t)\right\}$$

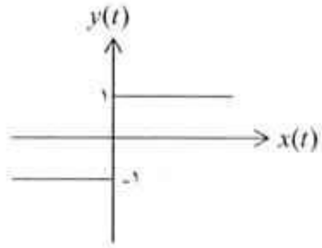
$$=\lim_{\Delta t\to 0}\left\{\frac{g(t,\alpha)-g(t,\alpha+\Delta t)}{\Delta t}\right\}$$

$$=-\lim_{\Delta t\to 0}\left\{\frac{g(t,\alpha+\Delta t)-g(t,\alpha)}{\Delta t}\right\}=\frac{-\partial}{\partial\alpha}g(t,\alpha)$$

۲۳- گزینه «۴»- (ساده)

رابطه ورودی – خروجی سیستم به صورت زیر است:

$$y(t)=\begin{cases}1 & x(t)>0\\ -1 & x(t)<0\\ 0 & x(t)=0\end{cases}$$



غیر خطی بودن و تغییر ناپذیری با زمان از روی مشخصه سیستم (منحنی خروجی بر حسب ورودی) روشن است. غیر خطی است چون مشخصه، خط راست گذرنده از مبدأ نیست. تغییر ناپذیر با زمان است چون یک مشخصه برای همه t ها وجود دارد.

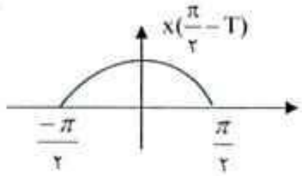
۲۴- گزینهٔ «۳»- (ساده)

$$s[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}h[k]\ \Rightarrow\ s[3]=\sum_{k=-\infty}^{3}h[k]=h[1]+h[2]+h[3]=\left(\frac{3}{2}\right)^{0}+\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}+\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}=\frac{19}{9}$$

۲۵- گزینهٔ «۱»- (ساده)

با توجه به تعریف کانولوشن پیوسته:

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1\ \cos T\ dT=\sqrt{2}$$



۲۶- گزینهٔ «۱»- (متوسط)

ورودی سیستم که دارای پاسخ ضربه $h(t)$ است به صورت زیر می‌باشد:

$$x_s(t)=x(t)\times\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(kT)\delta(t-kT)$$

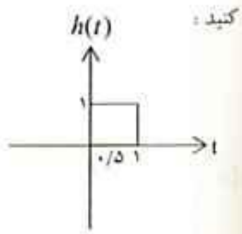
چون $x(kT)$ فقط در $k=0$، غیر صفر می‌باشد و مقدار آن در $k=0$ برابر یک است:

$$x_s(t)=\delta(t)$$

در نتیجه، ضربه $\delta(t)$ به سیستم اعمال شده و پاسخ ضربه $h(t)$ در خروجی آن ظاهر می‌شود.

۲۷- گزینه «۴»- (ساده)

روش اول: اگر نکته مطرح شده در بخش ۱-۷-۲ را به خاطر سپرده اید، می‌توانید به سادگی پاسخ ضربه سیستم مفروض را حساب کنید:

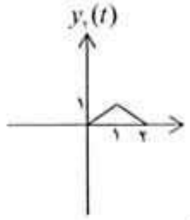


$$x_1(t)\ \text{از نمودار}\ \begin{cases}t_1=1\\ L_1=2\\ a_1=1\end{cases}\qquad y_1(t)\ \text{از نمودار}\ \begin{cases}t_1+t_2=1/5\\ L_1+L_2=3\\ |L_1-L_2|=1\\ a_1\times a_2\times\min(L1,L2)=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_2 = 0/5 \\ L_2 = 1 \\ a_2 = 1 \end{cases}$$

با استفاده مجدد از همان قاعده، $y_2(t) = h(t) * x_2(t)$ به صورت زیر خواهد بود:

$$\Rightarrow \begin{array}{l} t_1 + t_2 = 0/5 + 0/5 = 1 \\ |L_1 - L_2| = 0 \\ L_1 + L_2 = 1 + 1 = 2 \\ a_1 \times a_2 \times \min(L_1, L_2) = 1 \end{array}$$



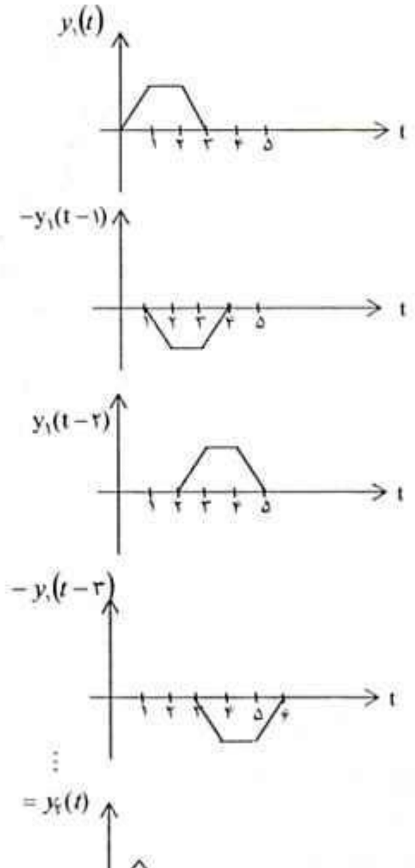
توجه کنید که در بار دوم، a_1, L_1, t_1 را از $h(t)$ استخراج کرده و a_2, L_2, t_2 را از $x_2(t)$ استخراج نمودیم.

روش دوم: می‌توان به طور تشریحی هم به جواب مسأله رسید:

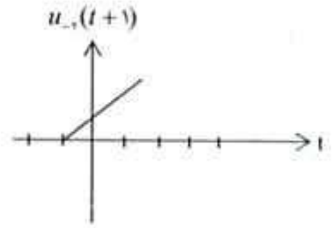
$$x_2(t) = x_1(t) - x_1(t-1) + x_1(t-2) - x_1(t-3) + \ldots$$

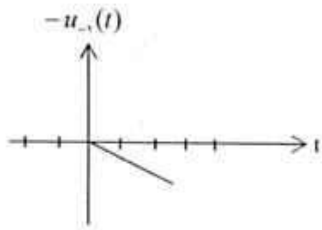
با توجه به LTI بودن:

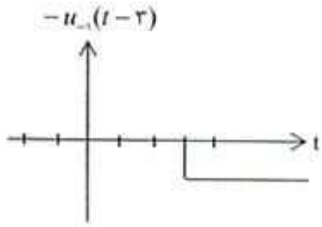
$$y_2(t) = y_1(t) - y_1(t-1) + y_1(t-2) - y_1(t-3) + \ldots$$

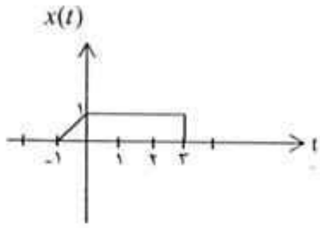


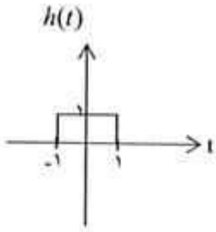
۲۸- گزینه «۲»- (ساده)



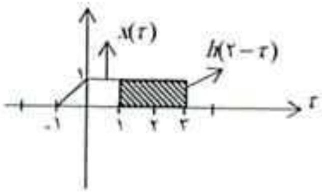








$y(۲)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(۲-\tau)d\tau =$ مساحت ناحیه هاشور خورده $= ۲$



۲۹- **گزینه «۲»- (متوسط)**

رابطه ورودی – خروجی در واقع به صورت زیر می‌باشد.

$$y[n]=x[n]\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta[n-kN]$$

یعنی ورودی $x[n]$ را در یک قطار ضربه گسسته با پریود N ضرب می‌کند. خطی بودن و پایدار بودن سیستم روشن است. به ازاء هر N دلخواه نمی توان ورودی را از روی خروجی بطور یکتا به دست آورد.پس سیستم معکوس پذیر نیست.

چون خروجی در لحظه به ورودی همان لحظه وابسته است سیستم بدون حافظه است.

۳۰- **گزینه «۱»- (ساده)**

برای بررسی خطی بودن، قضیه جمع آثار را چک می کنیم

$$x_1(t)\to y_1(t)=x_1\left(\frac{t}{2}\right)+x_1(t-1)$$

$$x_2(t)\to y_2(t)=x_2\left(\frac{t}{2}\right)+x_2(t-1)$$

$$ax_1(t)+bx_2(t)\to$$

$$ax_1\left(\frac{t}{2}\right)+bx_2\left(\frac{t}{2}\right)+ax_1(t-1)+bx_2(t-1)=ay_1(t)+by_2(t)$$

پس خطی است.

برای بررسی متغیر با زمان بودن

$$x(t)\to y(t)=x\left(\frac{t}{2}\right)+x(t-1)$$

$$x(t-t_0)\to y_{t_0}(t)=x\left(\frac{t-t_0}{2}\right)+x(t-t_0-1)\neq y(t-t_0)$$

پس متغیر با زمان است. غیر علی است چون مثلاً $y(-2)$ به $x(-1)$ وابسته است.

۳۱- **گزینه «۲»- (متوسط)**

قضیه جمع آثار در مورد سیستم صادق است. پس خطی است.

مقدار خروجی در هر لحظه به مقادیر گذشته ورودی مربوط است (به واسطه c) پس حافظه دار است.

مقدار خروجی در هر لحظه به مقادیر آینده ورودی مربوط نیست پس علی است.

چون ضابطه بین ورودی – خروجی وابسته به زمان است سیستم متغیر با زمان هست.

۳۲- **گزینه «۱»- (متوسط)**

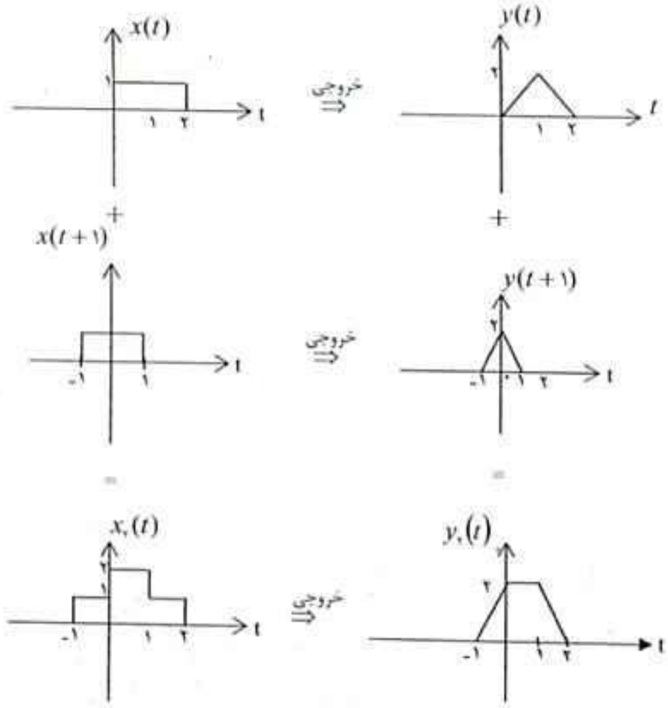
$x(t)=e^{t}u(-t)$ یک سیگنال کران دار است که اگر به سیستم اعمال شود خروجی آن به صورت زیر خواهد بود.

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}e^{(t-\tau)}e^{\tau}u(-\tau)d\tau=\begin{cases}e^{t}\int_{-\infty}^{t}d\tau=\infty & t<0\\ e^{t}\int_{-\infty}^{0}d\tau=\infty & t>0\end{cases}$$

پس سیستم پایدار نیست.

۳۳- **گزینه «۳»- (متوسط)**

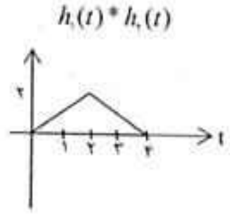
از LTI بودن سیستم کمک می‌گیریم : $x_2(t)=x(t+1)+x(t)$



۲۴- گزینه «۴»- (متوسط)

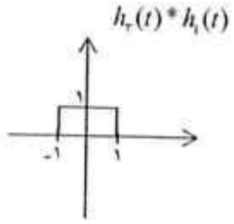
پاسخ ضربه : $h(t)=\left(h_1(t)*h_2(t)\right)+\left(h_3(t)*h_4(t)\right)$

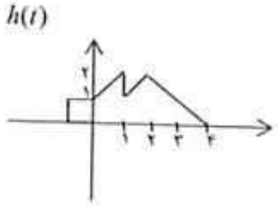
از نکته مطرح شده در بخش ۱-۷-۲ داریم



از خاصیت ۴ کانولوشن :

$$h_3*h_4=h_1(t-1)*\delta(t+2)=h_1(t+1)$$



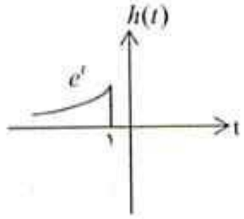


اگر پاسخ به ورودی $x(t)$ را با $y(t)$ نشان دهیم:

$$y(t)=h(t)+h(t+2)$$
$$y(0)=h(0)+h(2)=1+2=3$$

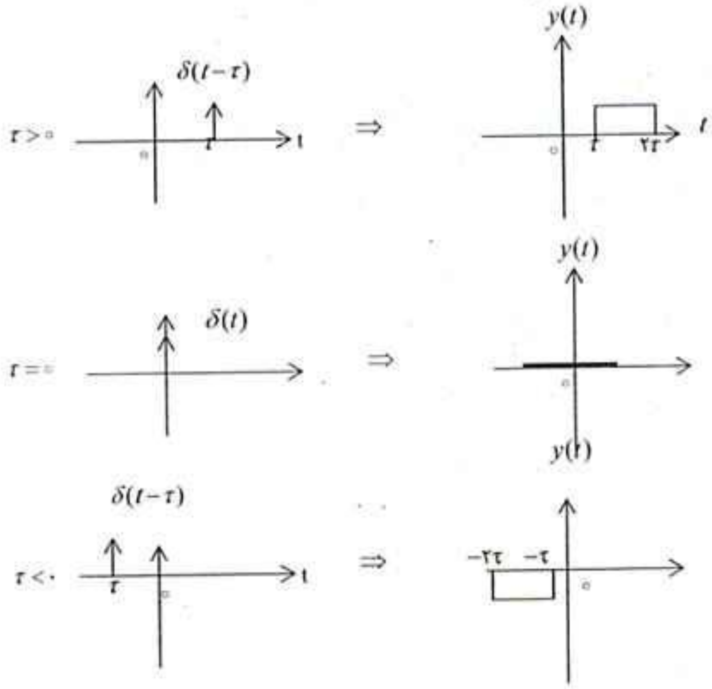
۳۵- گزینه «۴»- (ساده)

نمودار پاسخ ضربهٔ سیستم به این شکل است



جون $h(t)$ برای $t<0$ صفر نیست، سیستم غیر علی است اما چون $h(t)$ مطلقاً انتگرال پذیر است. سیستم پایدار است.

۳۶- گزینه «۳»- (متوسط)



جون خروجی در هر لحظه به مقدار ورودی در آن لحظه وابسته نیست سیستم دارای حافظه است.

در حالت $\tau<0$ سیستم قبل از اعمال ورودی دارای خروجی است پس غیرعلی است.

بسته به زمان اعمال ورودی، خروجی های مختلف تولید می‌شود پس تغییر پذیر با زمان است.

پاسخ ضربه در هر حالت مطلقا" انتگرال پذیر است، بنابراین سیستم پایدار است.

۳۷- گزینه «۳»ـ (ساده)

برای یافتن معکوس سیستم، x را بر حسب y به طور صریح حل می‌کنیم:

$$y(t)=\frac{1}{2}x(4-2t)$$
$$x(4-2t)=2y(t)$$
$$4-2t=\tau \Rightarrow x(\tau)=2y\left(2-\frac{\tau}{2}\right)$$
$$t=\frac{4-\tau}{2}$$

پس ضابطه سیستم معکوس برابر خواهد بود با :

$$y(t)=2x\left(2-\frac{t}{2}\right)$$

۳۸- گزینه «۲»- (متوسط)

$$Ay=\int_{-\infty}^{+\infty}y(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau\, dt$$

با تعویض ترتیب انتگرال گیری

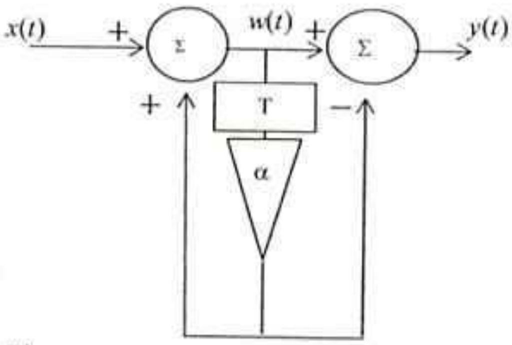
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\int_{-\infty}^{+\infty}h(t-\tau)dt\, d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)A_h\, d\tau$$
$$=A_h\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\, d\tau=A_h.A_x$$

۳۹- گزینه «۲»- (ساده)

خاصیت ۴ تابع ضربهٔ پیوسته در بخش ۱-۴ و خاصیت ۲ تابع ضربه گسسته در همان بخش و خاصیت ۴ کانولوشن را به خاطر آورید داریم :

$$a[n]=x[n]$$
$$b(t)=\frac{1}{2}x(t)$$

۴۰- گزینه «۲»ـ (ساده)



$$\left.\begin{aligned}y(t)&=w(t)-\alpha w(t-T)\\ w(t)&=x(t)+\alpha w(t-T)\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$
$$y(t)=x(t)+\alpha w(t-T)-\alpha w(t-T)=x(t)$$
$$y(t)=2e^{-2t}u(t)$$

۴۱- گزینه «۴»- (متوسط)

ناپایدار است چون به ازاء n های بسیار بزرگ، در صورت اعمال ورودی کراندار، خروجی می‌تواند بیکران شود. غیرعلی است چون خروجی در لحظه n ام به ورودی در لحظه n- ام وابسته است پس به ازاء $n<0$ است، خروجی فعلی به ورودی آینده مرتبط می‌باشد.

۴۲- گزینه «۱»ـ (متوسط)

$$y(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-(t-2k)}u(t-2k)$$

$$\Rightarrow y(t)=\sum_{k=-\infty}^{0} e^{-(1-2k)}$$

$$=\frac{1}{e}\sum_{k=-\infty}^{0} e^{2k}=\frac{-1}{e}\frac{e^{2}}{1-e^{2}}\cong\frac{1}{e}$$

۴۳- گزینه «۳»ـ (متوسط)

چون خروجی در هر لحظه به ورودی همان لحظه و لحظات قبل مرتبط است، سیستم علی است. چون ضابطه ورودی – خروجی به زمان وابسته است، سیستم تغییر پذیر با زمان است. به ازاء ورودی صفر و نزدیک به صفر، خروجی بیکران می‌شود. پس سیستم ناپایدار است.

۴۴- گزینه «۴»- (ساده)

شرط جمع آثار را برای اثبات غیر خطی بودن بررسی می‌کنیم.

برای ورودی $ax_1(t)+bx_2(t)$ داریم

$$y(t)=\begin{cases} ax_1(t)+bx_2(t)+y(t-1) & \text{if} \quad y(t-1)\le 0 \\ ax_1(t)+bx_2(t)-y(t-1) & \text{if} \quad y(t-1)>0 \end{cases}$$

$$y(t)\ne ay_1(t)+by_2(t)$$

منظور از $y_1(t)$ پاسخ سیستم بر ورودی فقط $x_1(t)$ است :

$$y_1(t)=\begin{cases} x_1(t)+y_1(t-1) & \text{if} \quad y_1(t-1)\le 0 \\ x_1(t)-y_1(t-1) & \text{if} \quad y_1(t-1)>0 \end{cases}$$

منظور از $y_2(t)$ پاسخ سیستم بر ورودی فقط $x_2(t)$ می‌باشد :

$$y_2(t)=\begin{cases} x_2(t)+y_2(t-1) & \text{if} \quad y_2(t-1)\le 0 \\ x_2(t)-y_2(t-1) & \text{if} \quad y_2(t-1)>0 \end{cases}$$

اگر x بر حسب y بطور یکتا حل شود، سیستم معکوس پذیر است :

$$x(t)=\begin{cases} y(t)+y(t-1) & \text{if} \quad y(t-1)\le 0 \\ y(t)-y(t-1) & \text{if} \quad y(t-1)>0 \end{cases}$$

پس معکوس پذیر می‌باشد.

۴۵- گزینه «۱»- (متوسط)

ورودی های کراندار به هر دو سیستم، خروجی های کراندار تولید می‌کند پس هر دو پایدارند.

در هر دو سیستم، خروجی فعلی به ورودی های آینده وابسته نیست پس هر دو سببی هستند.

ضابطه ورودی ـ خروجی سیستم ۱ وابسته به زمان بوده، در نتیجه سیستم ۱ تغیر پذیر با زمان می‌باشد. در حالی که سیستم ۲ تغییرناپذیر با زمان است.

برای بررسی خطی بودن، جمع آثار را چک می‌کنیم

سیستم ۱:

$$x_1(t)\to y_1(t)=\begin{cases}x_1(t)+x_1(t-2) & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

$$x_2(t)\to y_2(t)=\begin{cases}x_2(t)+x_2(t-2) & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

$$ax_1(t)+bx_2(t)\to y(t)=\begin{cases}ax_1(t)+bx_2(t)+ax_1(t-2)+bx_2(t-2) & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

$=ay_1(t)+by_2(t)$ خطی است

اما برای سیستم ۲، جمع آثار برقرار نیست (به وابستگی شرط های موجود در ضابطه خروجی سیستم ۲ به $x(t)$ توجه کنید).

۴۶- **گزینهٔ «۲»- (متوسط)**

سیستم گزینه «۱» سببی نیست چون مثلاً $y[-4]$ به $x[-2]$ وابسته است. (خروجی فعلی به ورودی آینده مرتبط است).

سیستم گزینه «۳» بدون حافظه است چون ورودی های گذشته تأثیری در خروجی فعلی ندارند.

سیستم گزینه «۴» ناپایدار است چون مثلاً به ازاء ورودی کراندار $x[n]=u[-n]$ خروجی بی کران تولید می‌کند.

برای سیستم گزینه «۲»: جمع آثار صادق بوده و در نتیجه سیستم خطی است (چک کنید)

۴۷- **گزینهٔ «۲»- (متوسط)**

نکته مهم در این سوال، غیر خطی بودن سیستم است در نتیجه با توجه به $g(t)$ (پاسخ پله) می‌توان گفت سیستم بدون حافظه هم می‌باشد چون با توجه به شکل $g(t)$ می‌توان چنین در نظر گرفت که برای $t>0$ خروجی ارتباطی به گذشته های ورودی ندارد.

چون دو ورودی سیستم در $t<0$ هر دو یکسان و مساوی صفرند و خروجی های متناظر هر یک از آنها نیز در $t<0$ برابرند، سیستم می‌تواند علی باشد.

۴۸- **گزینهٔ «۳»- (متوسط)**

داریم:

$$x(t)*\frac{dr(t)}{dt}=\frac{dx(t)}{dt}*r(t)$$

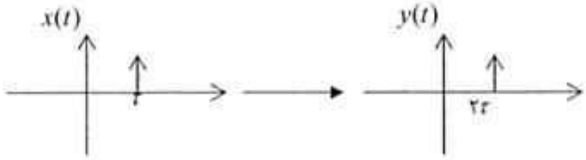
در نتیجه،

$$y(t)=\int_{0^-}^{+\infty}\frac{dx(\tau)}{d\tau}r(t-\tau)d\tau=$$

$$\int_{0^-}^{0^+}\frac{dx(\tau)}{d\tau}r(t-0)d\tau+\int_{0^+}^{+\infty}\frac{dx(\tau)}{d\tau}r(t-\tau)d\tau=r(t)\left\{x(0^+)-x(0)\right\}+\int_{0^+}^{+\infty}\frac{dx(\tau)}{d\tau}r(t-\tau)d\tau$$

$$=r(t)x(0^+)+\int_{0^+}^{+\infty}\frac{dx(\tau)}{d\tau}r(t-\tau)d\tau$$

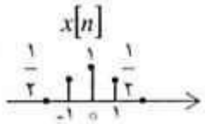
۴۹- گزینه «۴»- (متوسط)



در واقع سیستم محور زمان را با ضریب $\frac{1}{2}$ تغییر مقیاس داده است. از طرفی با توجه به اینکه ارتباط $x(t)$، $y(t)$ می‌تواند به صورت زیر باشد

$$y(t)=\frac{1}{2}x\left(\frac{t}{2}\right)$$

۵۰- گزینه «۳»- (متوسط)



$$z[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[2-3k]u[k]x[n-k]$$

$$z[0]=\sum_{k=0}^{\infty} x[2-3k]x[-k]$$
$$=x[2]\times x[0]+x[-1]\times x[-1]+x[-4]\times x[-2]+\dots$$
$$=0\times 1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+0\times 0+0\times 0+\dots=\frac{1}{4}$$

۵۱- گزینهٔ «۴»- (ساده)

بدون حافظه است چون خروجی در هر لحظه به ورودی همان لحظه وابسته است به ازاء ورودی کراندار، خروجی کراندار می‌ماند پس پایدار است.

$$\delta(8t-t^3)=\frac{\delta(t)}{8}+\frac{\delta(t-\sqrt{8})}{16}+\frac{\delta(t+\sqrt{8})}{16}$$

۵۲- گزینهٔ «۱»- (متوسط)

با توجه به خاصیت شماره ۷ تابع ضربهٔ پیوسته در زمان که در بخش ۱-۴ مطرح شده داریم:

بنابراین:

$$A=\int_{-1}^{\infty}\frac{\delta(t)}{8}+\frac{\delta(t-\sqrt{8})}{16}+\frac{\delta(t+\sqrt{8})}{16}dt=\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+0=\frac{3}{16}$$

۵۳- گزینهٔ «۱»- (ساده)

$$P_{\infty}=\lim_{T\longrightarrow\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|x(t)|^2dt=\lim\frac{1}{2T}\left(\int_{-T}^{-10}4dt+\int_{-10}^{10}16dt+\int_{10}^{T}36dt\right)$$
$$=\lim_{T\longrightarrow\infty}\frac{1}{2T}(40T-80)=20$$

۵۴- گزینهٔ «۳»- (متوسط)

با اعمال تغییر متغیر $\tau=\sqrt[3]{\alpha}$ داریم:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\sqrt[3]{t}} x(\tau).3\tau^{2}d\tau$$

با توجه به خطی بودن انتگرال روشن است که سیستم خطی است (جمع آثار را چک کنید).

برای محاسبهٔ خروجی مثلاً در $t=-8$ کران بالای انتگرال برابر ۲- می‌شود و این یعنی وابستگی خروجی فعلی به ورودی آینده.

پس سیستم غیرعلی است.

۵۵- گزینه «۲»- (ساده)

$$x_1(t)\to y_1(t)=\begin{cases}x_1(t)+x_1(t-1) & x_1(-t)\le 0\\ x_1(t)-x_1(t-1) & x_1(-t)>0\end{cases}$$

برای نشان دادن غیر خطی بودن سیستم، شرط جمع آثار باید بررسی شود:

$$x_2(t)\to y_2(t)=\begin{cases}x_2(t)+x_2(t-1) & x_2(-t)\le 0\\ x_2(t)-x_2(t-1) & x_2(-t)>0\end{cases}$$

$$ax_1(t)+bx_2(t)\to y(t)=\begin{cases}ax_1(t)+bx_2(t)+ax_1(t-1)+bx_2(t-1) & : \ ax_1(-t)+bx_2(-t)\le 0\\ ax_1(t)+bx_2(t)-ax_1(t-1)-bx_2(t-1) & : \ ax_1(-t)+bx_2(-t)>0\end{cases}$$

$$\Rightarrow y(t)\ne ay_1(t)+by_2(t)$$

سیستم غیر علی است چون برای $t<0$ محاسبه $y(t)$ به ورودی های آینده وابسته است.

۵۶- گزینه «۱»- (ساده)

هر دو معکوس پذیرند چون می‌توان در هر دو x را بطور یکتا بر حسب y به دست آورد.

۵۷- گزینه «۴»- (متوسط)

$$|y(t)|=\left|\int_{-\infty}^{t}e^{-\alpha^{2}}x(\alpha-t)d\alpha\right|$$

$$\le\int_{-\infty}^{t}\left|e^{-\alpha^{2}}\right|\left|x(\alpha-t)\right|d\alpha$$

حال اگر ورودی کراندار باشد $|x(\alpha-t)|<M$ در نتیجه $|y(t)|\le M\int_{-\infty}^{t}\left|e^{-\alpha^{2}}\right|d\alpha=M\times N<\infty$ یعنی ورودی های کراندار، خروجی کراندار تولید می‌کنند و سیستم پایدار است.

برای بررسی تغییر پذیری با زمان، پله را در زمان صفر و زمان t_0 اعمال کرده و خروجی‌های حاصل را قیاس می‌کنیم:

$$u(t)\to y(t)=\int_{-\infty}^{t}e^{-\alpha^{2}}d\alpha$$

$$u(t-t_0)\to\begin{cases}\int_{-\infty}^{t}e^{-\alpha^{2}}d\alpha & t_0\ge 0\\ \int_{-\infty}^{t+t_0}e^{-\alpha^{2}}d\alpha & t_0<0\end{cases}\ne y(t-t_0)$$

پس سیستم تغییرپذیر با زمان است.

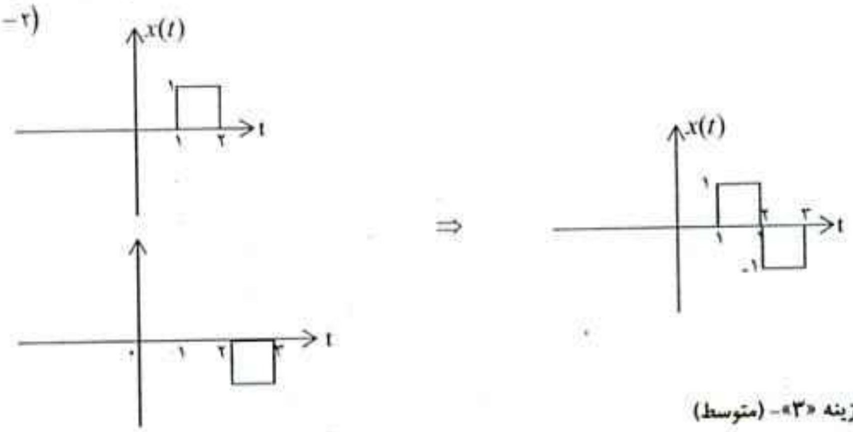
۵۸- گزینه «۴»- (ساده)

$$h(t)=\frac{ds(t)}{dt}$$

$$h(t)=\delta(t-1)-\delta(t-2)$$

$$s_2(t)=s(t)*h(t)=s(t)*\left(\delta(t-1)-\delta(t-2)\right)$$

$$=s(t-1)-s(t-2)$$



۵۹- گزینه «۳»- (متوسط)

$$y(t)=h(t)*x(t)\to y(2t)=2h(2t)*x(2t)$$

$$y(t-2)=h(t-2)*x(t)$$

۶۰- گزینه «۳»- (متوسط)

$$y(t)=e^{-t}u(t)*\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-k)$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}e^{-(t-k)}u(t-k)$$

اگر $0<t<1$:

$$=\sum_{k=-\infty}^{0}e^{-(t-k)}=e^{-t}\sum_{k=-\infty}^{0}e^{k}=e^{-t}\frac{-e}{1-e}$$

$$=\frac{e^{1-t}}{e-1}$$

فصل ۲

آنالیز فوریهٔ پیوسته در زمان

۲-۱ سری فوریه برای سیگنال های متناوب پیوسته در زمان

سیگنال پیوستهٔ متناوب، سیگنالی است که به ازاء یک T مثبت غیر صفر، داشته باشیم:

$$x(t+T)=x(t) \qquad (۲-۱)$$

دورهٔ تناوب پایه، کوچکترین مقدار غیر صفر T است که در (۲-۱) صدق کند و مقدار $\omega_0=\frac{2\pi}{T}$ فرکانس پایه نامیده می‌شود. حال اگر $x(t)$ یک سیگنال متناوب پیوسته با دورهٔ اصلی T باشد (و شرایط معینی هم داشته باشد) می‌توان آن را به صورت ترکیب خطی نمایی های مختلط نوشت:

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \qquad (۲-۲)$$

که در آن a_k ها به صورت زیر هستند:

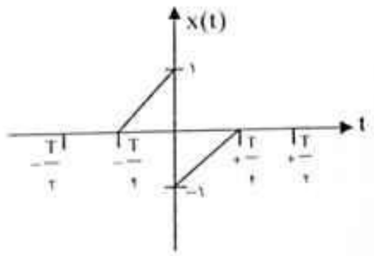
$$a_k=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt \qquad (۲-۳)$$

ضرایب a_k را ضرایب سری فوریه می‌گویند.

❋ **نکته:** *ضریب a_0 مقدار $D.C.$ یا مولفه ثابت $x(t)$ است و به ازاء $k=0$ از (۲-۳) به دست می‌آید.*

$$a_0=\frac{1}{T}\int_T x(t)\,dt \qquad (۲-۴)$$

مثال ۲-۱: یک دوره تناوب از سیگنال پیوسته متناوب $x(t)$ در شکل نشان داده شده است. ضرایب سری فوریه آن با کمک تعریف به صورت زیر محاسبه می‌شود:



$$a_k=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{0}\left(\frac{4}{T}t+1\right)e^{-jk\omega_0 t}dt+\frac{1}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}}\left(\frac{4}{T}t-1\right)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

$$=\frac{j}{k\pi}\left(1-\frac{\sin\frac{k\pi}{2}}{k\frac{\pi}{2}}\right)$$

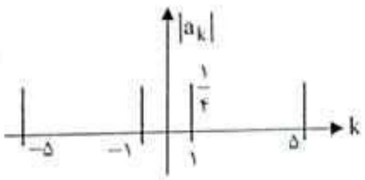
$$a_0=\frac{1}{T}\int x(t)dt=0$$

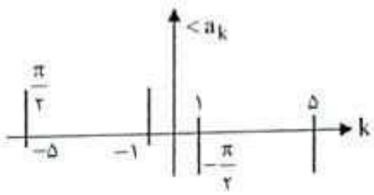
مثال ۲-۲ ضرایب سری فوریهٔ سیگنال $x(t)=\cos 2t\sin 3t$ با استفاده از روابط $\cos(t+\varphi)=\frac{e^{-j(t+\varphi)}+e^{+j(t+\varphi)}}{2}$ و $\sin(t+\varphi)=\frac{e^{j(t+\varphi)}-e^{-j(t+\varphi)}}{2j}$ به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$\cos 2t\sin 3t=\frac{1}{2}(\sin 5t+\sin t)$$

$$=\frac{-1}{j4}e^{-j5t}+\frac{1}{j4}e^{j5t}-\frac{1}{j4}e^{-jt}+\frac{1}{j4}e^{jt}$$

شکل زیر دامنه و فاز ضرایب سری فوریه را بر حسب k نشان می‌دهد.





۲-۲ همگرایی سری فوریه

شرایطی که کافی است سیگنال متناوب در آن صدق کند تا سری فوریه سیگنال همگرا باشد. شرایط دیریکله نامیده می‌شوند و به قرار زیرند:

۱- سیگنال $x(t)$ در هر دوره تناوب باید مطلقا" انتگرال پذیر باشد:

$$\int_T |x(t)|dt<\infty \qquad (۵-۲)$$

۲- در هر دوره تناوب سیگنال $x(t)$، تعداد ماکسیمم و مینیمم محدود باشد. به عبارتی در هر بازه زمانی محدود، تغییرات $x(t)$ محدود باشد.

۳- تعداد نقاط ناپیوستگی سیگنال در هر بازهٔ زمانی محدود کراندار باشد و هر کدام از این نقاط ناپیوستگی کراندار باشند.

اگر این سه شرط برقرار باشد، سری فوریه در همهٔ نقاط پیوستگی برابر $x(t)$ خواهد بود و در نقاط ناپیوستگی به سمت میانگین اندازه $x(t)$ در دو طرف نقطهٔ ناپیوستگی میل خواهد کرد.

* **نکته:** *این شرایط کافی هستند ولی لازم نیستند. برای مثال قطار ضربه در این شرایط صدق نمی‌کند ولی سری فوریه دارد.*

۲-۳ خواص سری فوریه پیوسته در زمان

در این بخش نماد زیر برای نشان دادن رابطه بین سیگنال و ضرایب سری فوریه آن به کار می‌رود:

$$x(t) \leftrightarrow a_k$$

الف- خطی بودن

$$\begin{matrix} x(t) \leftrightarrow a_k \\ y(t) \leftrightarrow b_k \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad c_1 x(t) + c_2 y(t) \leftrightarrow c_1 a_k + c_2 b_k \qquad (۶-۲)$$

ب- شیفت زمانی و فرکانسی

$$x(t) \leftrightarrow a_k \;\Rightarrow\; x(t-t_0) \leftrightarrow e^{-jk\omega_0 t_0} a_k \qquad (۷-۲)$$

$$e^{jM\omega_0 t} x(t) \leftrightarrow a_{k-M} \qquad (۸-۲)$$

که $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

ج- انعکاس زمانی

$$x(t) \leftrightarrow a_k \;\Rightarrow\; x(-t) \leftrightarrow a_{-k}$$

انعکاس زمانی سیگنال پیوسته متناوب به انعکاس دنبالهٔ ضرایب سری فوریه آن منجر می‌شود.

نکته: از این خاصیت استنباط می‌شود که اگر $x(t)$ زوج باشد ضرایب سری فوریه آن زوج اند.

$$x(-t) = x(t) \;\Rightarrow\; a_k = a_{-k} \qquad (۹-۲)$$

اگر $x(t)$ فرد باشد، ضرایب سری فوریه آن نیز فرد هستند

$$x(-t) = -x(t) \;\Rightarrow\; a_{-k} = -a_k \qquad (۱۰-۲)$$

د- تغییر مقیاس زمانی

اگر $x(t)$ با دوره تناوب T متناوب باشد، آنگاه $x(at)$ (a حقیقی و مثبت) با دوره تناوب $\frac{T}{a}$ متناوب است.

در این حالت ضرایب فوریه تغییر نمی کند ولی به خاطر تغییر فرکانس پایه از ω_0 به $a\omega_0$ نمایش سری فوریه تغییر می‌کند.

هـ- ضرب

$$\begin{matrix} x(t) \leftrightarrow a_k \\ y(t) \leftrightarrow a_k \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad x(t)y(t) \leftrightarrow \sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l b_{k-l} \qquad (۱۱-۲)$$

چون حاصلضرب $x(t)y(t)$ هم با دوره تناوب T متناوب است. جمع طرف راست معادله را می‌توان به عنوان کانولوشن گسسته دنباله های a_k، b_k در نظر گرفت.

و- تقارن مزدوج

$$x(t) \leftrightarrow a_k \;\Rightarrow\; x^*(t) \leftrightarrow a^*_{-k} \qquad (۱۲-۲)$$

* **نکته ۱:** *از این خاصیت استفاده می‌شود که اگر $x(t)$ حقیقی باشد.*

$$\mathrm{Re}\{a_k\} = \mathrm{Re}\{a_{-k}\}$$

$$\mathrm{Im}\{a_k\} = -\mathrm{Im}\{a_{-k}\}$$
$$|a_k| = |a_{-k}|$$
$$\angle a_k = -\angle a_{-k}$$

یعنی بخش حقیقی ضرایب، زوج و بخش موهومی ضرایب، فرد است. دامنه ضرایب، زوج و فاز ضرایب، فرد است.

اگر $x(t)$ حقیقی و زوج باشد، a_k حقیقی و زوج است.

اگر $x(t)$ حقیقی و فرد باشد، a_k موهومی و فرد است.

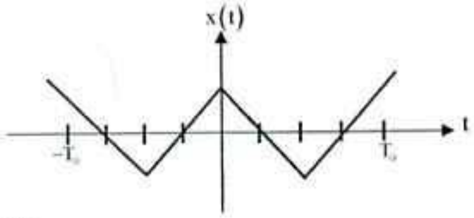
$\mathrm{Re}\{a_k\}$ ناشی از بخش زوج $x(t)$ و $\mathrm{Im}\{a_k\}$ ناشی از بخش فرد سیگنال است.

$x(t)$: بخش زوج $x_e(t) = \frac{1}{2}\left[x(t) + x(-t)\right]$

$x(t)$: بخش فرد $x_o(t) = \frac{1}{2}\left[x(t) - x(-t)\right]$ (۱۴-۲)

* **نکته ۲:** اگر $x(t)$ حقیقی و نیم موج فرد باشد ($x(t) = -x(t \pm \frac{T_0}{2})$) آنگاه برای همه k های زوج، a_k برابر صفر است.

مثال ۲-۳: اگر $x(t)$ به صورت شکل باشد دارای تقارن نیم‌موج فرد بوده و داریم:



$$a_k = \begin{cases} \frac{4}{\pi^2 k^2} & \text{k فرد} \\ 0 & \text{k زوج} \end{cases}$$

ز- رابطه پارسوال

$$\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2 \qquad (۱۵-۲)$$

یعنی توان متوسط کل سیگنال متناوب با مجموع توان متوسط تمام هارمونیک های آن برابر است چون $|a_k|^2$ توان متوسط مؤلفه‌های هارمونیک k ام است.

ح – مشتق گیری

$$x(t) \leftrightarrow a_k \Rightarrow \frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow jk\omega_0 a_k \qquad (۱۶-۲)$$

ط- انتگرال گیری

$$x(t) \leftrightarrow a_k \Rightarrow \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{1}{jk\omega_0}a_k \qquad (۱۷-۲)$$

ی-کانولوشن متناوب

$y(t) \leftrightarrow b_k$

$$x(t) \leftrightarrow a_k \Rightarrow \int_T x(\tau) y(t-\tau) d\tau \leftrightarrow T a_k b_k \qquad (۲-۱۸)$$

۲-٤ تبدیل فوریه برای سیگنال های غیر متناب پیوسته در زمان

اگر $x(t)$ یک سیگنال پیوسته در زمان غیر متناوب (با شرایط معینی) باشد. می‌توان آن را به صورت زیر نمایش داد.

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \qquad (۲-۱۹)$$

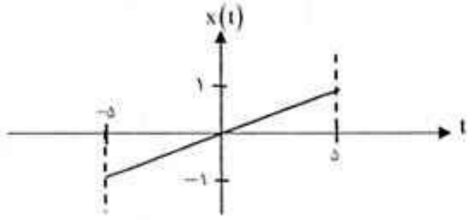
که در آن $X(\omega)$ از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \qquad (۲-۲۰)$$

$X(\omega)$ را تبدیل فوریه یا انتگرال فوریه $x(t)$ می‌گویند.

اگر $x(t)$ سیگنال مطلقا" انتگرال پذیر باشد و در هر بازهٔ زمانی محدود، تعداد نقاط ماکسیمم و مینیمم آن و نیز تعداد نقاط ناپیوستگی آن محدود باشد و اندازه سیگنال در نقاط ناپیوستگی احتمالی کراندار باشد $x(t)$ دارای تبدیل فوریه است.

مثال ۲-۴: برای $x(t)$ شکل زیر، تبدیل فوریه با توجه به تعریف به صورت زیر محاسبه می‌شود:



$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} = \int_{-5}^{5} \frac{1}{5} t e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{5} e^{-j\omega t} \left(\frac{-t}{j\omega} + \frac{1}{\omega^2}\right)\Bigg|_{-5}^{+5}$$

$$= \frac{1}{5}\left[\frac{-5}{j\omega}(e^{-j5\omega} + e^{j5\omega}) + \frac{1}{\omega^2}(e^{-j5\omega} - e^{j5\omega})\right]$$

$$= j\frac{2}{\omega}\cos 5\omega - j\frac{2}{5\omega^2}\sin 5\omega$$

۲-۵ تبدیل فوریه برای سیگنال های متناوب پیوسته در زمان

فرض کنید $x(t)$ سیگنال متناوب پیوسته با ضرایب سری فوریه a_k باشد. تبدیل فوریه $x(t)$، قطاری از ضربه هایی است که در حوزهٔ فرکانس در نقاطی با وابستگی هارمونیکی واقعند و سطح ضربه واقع شده در فرکانس هارمونیک $k\omega_0$ برابر است با 2π برابر ضریب سری فوریه ($2\pi a_k$).

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0) \qquad (۲-۲۱)$$

که در آن a_k ضرایب سری فوریه $x(t)$ است.

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \qquad (۲-۲۲)$$

۲-۵-۱ خواص تبدیل فوریه پیوسته در زمان

ارتباط سیگنال $x(t)$ و تبدیل فوریه آن $X(\omega)$ را به صورت $x(t) \leftrightarrow X(\omega)$ نشان می‌دهیم

الف- خطی بودن

$$\begin{matrix} x(t)\leftrightarrow X(\omega) \\ y(t)\leftrightarrow Y(\omega) \end{matrix} \Rightarrow ax(t)+by(t)\leftrightarrow aX(\omega)+bY(\omega) \qquad (۲۳-۲)$$

ب- شیفت زمانی و فرکانسی

$$x(t)\leftrightarrow X(\omega) \Rightarrow x(t-t_0)\leftrightarrow e^{-j\omega t_0}X(\omega) \qquad (۲۴-۲)$$

$$e^{j\omega_0 t}x(t)\leftrightarrow X(\omega-\omega_0) \qquad (۲۵-۲)$$

ج- خواص تقارنی

اگر $x(t)$ سیگنال حقیقی باشد داریم: $X(-\omega)=X^*(\omega)$ (۲۶-۲)

این خاصیت تقارن مزدوج نامیده می‌شود. از این خاصیت نتایج زیر حاصل می‌شود.

برای $X(\omega)=\mathrm{Re}\{X(\omega)\}+j\,\mathrm{Im}\{X(\omega)\}$ قسمت حقیقی، تابع زوج از ω و قسمت موهومی، تابع فرد از ω خواهد بود.

برای $X(\omega)=|X(\omega)|e^{j\angle X(\omega)}$ اندازه آن یعنی $|X(\omega)|$، تابع زوج از ω و فاز آن $\angle X(\omega)$، تابع فرد از ω خواهد بود.

اگر $x(t)$ حقیقی و زوج باشد، $X(\omega)$ هم حقیقی و زوج است.

اگر $x(t)$ حقیقی و فرد باشد، $X(\omega)$ موهومی محض و فرد است.

$\mathrm{Re}\{X(\omega)\}$ تبدیل فوریهٔ قسمت زوج $x(t)$ و $j\,\mathrm{Im}\{X(\omega)\}$ تبدیل فوریهٔ قسمت فرد $x(t)$ است.

د- مشتق و انتگرال گیری

اگر $X(\omega)$ تبدیل فوریه $x(t)$ باشد.

$$\frac{dx(t)}{dt}\leftrightarrow j\omega X(\omega) \qquad (۲۷-۲)$$

$$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau\leftrightarrow\frac{1}{j\omega}X(\omega)+\pi x(0)\delta(\omega) \qquad (۲۸-۲)$$

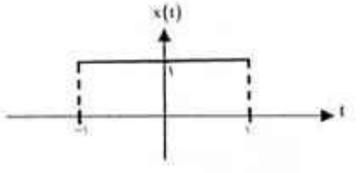
هـ- تغییر مقیاس زمانی و فرکانسی

$x(at)$ به ازای $|a|>1$ به معنی فشرده شدن در حوزه زمان است که در این صورت طیف در حوزه فرکانس گسترده می‌شود

$x(at)$ به ازای $|a|<1$ به معنی گسترده شدن سیگنال در زمان می‌باشد و در نتیجهٔ آن طیف در حوزه فرکانس فشرده می‌شود.

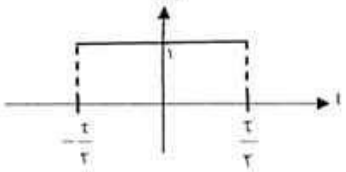
$$x(at)\leftrightarrow\frac{1}{|a|}X\left(\frac{\omega}{a}\right) \qquad (۲۹-۲)$$

مثال ۲-۵: از جدول زوج‌های اساسی تبدیل فوریه می‌دانیم که اگر $x(t)$ یک پالس مستطیلی با عرض ۲ باشد، تبدیل فوریه آن $\frac{2\sin\omega}{\omega}$ است:



$$\leftrightarrow 2\frac{\sin\omega}{\omega}$$

می‌خواهیم تبدیل فوریه یک پالس مستطیلی با عرض τ را به دست آوریم بنابراین با انتخاب $a=\frac{2}{\tau}$ و استفاده از خاصیت تغییر مقیاس زمانی داریم:



$$\leftrightarrow 2\frac{\tau}{2}\frac{\sin\frac{\tau}{2}\omega}{\frac{\tau}{2}\omega}=2\frac{\sin\frac{\tau}{2}\omega}{\omega}$$

و- رابطه پارسوال

(۳۰-۲)
$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|X(\omega)|^2\,d\omega$$

ز- خاصیت کانولوشن

(۳۱-۲)
$$h(t)*x(t)\leftrightarrow H(\omega)X(\omega)$$

در یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t)$، ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$، $H(\omega)$ را پاسخ فرکانس سیستم می‌گویند. این خاصیت کانولوشن را به ضرب تبدیل می‌کند.

ح – خاصیت ضرب

(۳۲-۲)
$$x(t).y(t)\leftrightarrow\frac{1}{2\pi}X(\omega)Y(\omega)$$

ط- دو گانی

(۳۳-۲)
$$g(t)\leftrightarrow f(\omega)$$
$$f(t)\leftrightarrow 2\pi g(-\omega)$$

ی - مشتق گیری و انتگرال گیری در فرکانس

(۳۴-۲)
$$-jtx(t)\leftrightarrow\frac{dX(\omega)}{d\omega}$$

(۳۵-۲)
$$\frac{-1}{jt}x(t)+\pi x(0)\delta(t)\leftrightarrow\int_{-\infty}^{\omega}X(\xi)d\xi$$

مثال ۲-۶: تبدیل فوریه سیگنال پیوستهٔ $x(t)$ به صورت $X(\omega)=\frac{1}{j\omega+1}$ است. تبدیل فوریهٔ سیگنال‌های زیر را با توجه به خواص تبدیل فوریه بدست آورید:

الف: $x(2t-3)$؛ با توجه به خواص شیفت و مقیاس زمانی داریم:

$$x(2t-3)=x\left(2(t-\frac{3}{2})\right)\leftrightarrow\frac{1}{2}\frac{1}{j\frac{\omega}{2}+1}e^{-j\frac{3}{2}\omega}$$

توجه کنید که ابتدا مقیاس و سپس شیفت انجام شده است.

ب - $t^2x(t)$؛ با دوباره استفاده از خاصیت مشتق‌گیری در فرکانس

$$t^2x(t)=-(-jt)(-jt)x(t)\leftrightarrow-\frac{d^2}{d\omega^2}\frac{1}{j\omega+1}=\frac{2}{(j\omega+1)^3}$$

ج- $x(t)\cos 2t$؛ با استفاده از خاصیت شیفت در فرکانس

$$x(t)\cos 2t=\frac{1}{2}x(t)e^{j2t}+\frac{1}{2}x(t)e^{-j2t}\leftrightarrow\frac{1}{2}\frac{1}{j(\omega-2)+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{j(\omega+2)+1}$$

د- $\frac{1}{jt-1}$؛ با استفاده از خاصیت دو گانی:

$$x(t)\leftrightarrow\frac{1}{j\omega+1}\Rightarrow\frac{1}{jt+1}\leftrightarrow 2\pi x(-\omega)$$

در نتیجه با توجه به خاصیت تغییر مقیاس با $a=-1$:

$$\frac{1}{-jt+1}\leftrightarrow 2\pi x(\omega)$$

و با توجه به خاصیت خطی بودن و ضرب طرفین در -1 داریم

$$\frac{1}{jt-1}\leftrightarrow -2\pi x(\omega)$$

۲-۶ پاسخ فرکانس سیستم توصیف شده با معادلات دیفرانسیل خطی با ضرائب ثابت

اگر معادله خروجی ـ ورودی یک سیستم LTI پیوسته در زمان با معادله دیفرانسیل

$$\sum_{k=0}^{N}a_k\frac{d^k y(t)}{dt^k}=\sum_{k=0}^{M}b_k\frac{d^k x(t)}{dt^k}\qquad(2-36)$$

توصیف شود. $H(\omega)$ پاسخ فرکانس سیستم به صورت زیر خواهد بود (که تبدیل فوریه پاسخ ضربه سیستم است)

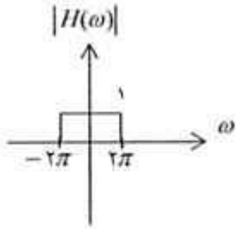
$$H(\omega)=\frac{Y(\omega)}{X(\omega)}=\frac{\sum_{k=0}^{M}b_k(j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{N}a_k(j\omega)^k}\qquad(2-37)$$

این تعریف کمک می‌کند به اینکه خروجی سیستم LTI به راحتی در حوزه فرکانس محاسبه شود.

مثال ۲-۷ : سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t)=\frac{\sin 2\pi t}{\pi t}$ مفروض است. خروجی آن در ازاء ورودی $x(t)=\cos\pi t$ به صورت زیر قابل محاسبه است: (با مراجعه به جدول تبدیل فوریه) داریم:

$$\sin\frac{Wt}{\pi t}\leftrightarrow\begin{cases}1 & |\omega|<W\\ 0 & other\end{cases}$$

پس $|H(\omega)|$ به صورت زیر است:



$$X(\omega)=\pi\left[\delta(\omega-\pi)+\delta(\omega+\pi)\right]$$
$$Y(\omega)=x(\omega).H(\omega)=\pi\left[\delta(\omega-\pi)+\delta(\omega+\pi)\right]$$
$$y(t)=\cos\pi t$$

۲-۷ برخی کاربردهای آنالیز فوریه

الف- محاسبه برخی انتگرال ها: با توجه به روابط

$$1)\ \int_{-\infty}^{+\infty}x(t)dt=X(0)$$

$$\text{۲)}\ \int_{-\infty}^{+\infty}\left|x(t)\right|^{2}dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|X(\omega)\right|^{2}d\omega$$

محاسبه برخی انتگرال‌ها ساده می‌شود.

مثال ۲-۸:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\pi t}{\pi t}dt=1$$

چون:

$$\frac{\sin\pi t}{\pi t}\leftrightarrow\begin{cases}1 & |\omega|<\pi\\ 0 & other\end{cases}$$

مثال ۲-۹:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin\pi t}{\pi t}\right)^{2}dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}1^{2}d\omega=\frac{1}{2\pi}\times 2\pi=1$$

ب- کاربرد تبدیل فوریه در محاسبه سری فوریه

هر تابع متناوب را می‌توان به صورت تکرار یک تناوب آن در نظر گرفت. اگر $x(t)$ متناوب با دوره تناوب اصلی T باشد

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h(t-kT) \qquad (\text{۲-۳۹})$$

که $h(t)$ ضابطه آن در یک تناوب است. داریم

$$a_k=\frac{1}{T}H\left(\frac{2\pi k}{T}\right) \qquad (\text{۲-۴۰})$$

که در آن $H(\omega)$ تبدیل فوریه $h(t)$ می‌باشد و a_k ضرایب سری فوریه $x(t)$ هستند.

مثال ۲-۱۰: تبدیل فوریه سیگنال پیوسته $x(t)$ به صورت $X(\omega)=\frac{2\sin\omega}{\omega}$ می‌باشد. سیگنال متناوب $y(t)$ به صورت زیر $y(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(t-4n)$ تعریف شده است. تبدیل فوریهٔ $y(t)$ را محاسبه کنید؟

با توجه به تعریف تبدل فوریه سیگنال پیوسته متناوب، ابتدا باید ضرایب سری فوریهٔ $x(t)$ مشخص شوند؛ توجه دارید که $y(t)$ با دوره $T=4$ متناوب است.

$$c_k=\frac{1}{T}X(jk\frac{2\pi}{T})=\frac{1}{4}\frac{2\sin(jk\frac{\pi}{2})}{jk\frac{\pi}{2}}=\frac{\sin(j\frac{k\pi}{2})}{jk\pi}$$

$$y(\omega)=2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k\delta(\omega-k\frac{2\pi}{4})$$

$$=-2j\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(j\frac{k\pi}{2})}{k}$$

۲-۸ جدول زوج های تبدیل فوریه پیوسته

جدول ۲-۱ زوج‌های اساسی تبدیل فوریه و ضرایب سری فوریه در صورت متناوب بودن را نشان میدهد. اگر با کمک تعریف ها و خواص معرفی شده، محتویات جدول را برای خودتان اثبات کنید در یادگیری و به خاطر سپاری آن بسیار مفید خواهد بود.

جدول ۲-۱

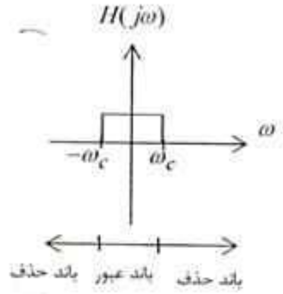
سیگنال	تبدیل فوریه	ضرایب سری فوریه (در صورت متناوب بودن)
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0)$	a_k
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$	$a_1 = 1$ $k \neq 1: a_k = 0$
$\cos\omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$	$a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2}$ $a_k = 0 \quad : \quad k \neq -1\ ,\ k \neq 1$
$\sin\omega_0 t$	$\frac{\pi}{j}[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]$	$a_1 = -a_{-1} = \frac{1}{2j}$ $a_k = 0 \quad : \ k \neq -1\ , k \neq 1$
$x(t) = 1$	$2\pi\delta(\omega)$	$k \neq 0 : a_k = 0\ , a_0 = 1$ این نمایش سری فوریه به ازای هر T دلخواهی صادق است.
موج مربعی متناوب $x(t) = \begin{cases} 1\ , & \lvert t\rvert < T_1 \\ 0\ , & T_1 < \lvert t\rvert \leq \frac{T}{2} \end{cases}$ $x(t) = x(t+T)$,	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2\sin k\omega_0 T_1}{k} \delta(\omega - k\omega_0)$	$\frac{\omega_0 T_1}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{k\omega_0 T_1}{\pi}\right) = \frac{\sin k\omega_0 T_1}{k\pi}$
$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$	$\frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$	$a_k = \frac{1}{T}$ برای هر T
$x(t) = \begin{cases} 1\ , & \lvert t\rvert < T_1 \\ 0\ , & \lvert t\rvert > T_1 \end{cases}$	$\frac{2\sin\omega T_1}{\omega}$	—
$\frac{\sin Wt}{\pi t}$	$X(j\omega) = \begin{cases} 1\ , & \lvert\omega\rvert < W \\ 0\ , & \lvert\omega\rvert > W \end{cases}$	—
$\delta(t)$	1	—
$u(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$	—
$\mathrm{Re}\{a\} > 0\ , e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{a+j\omega}$	—
$\mathrm{Re}\{a\} > 0\ , te^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(a+j\omega)^2}$	—
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at} u(t)$ $\mathrm{Re}\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a+j\omega)^n}$	—

۲-۹ فیلتر کردن

حذف یا تغییر دادن دامنهٔ نسبی مولفه های فرکانسی یک سیگنال فیلتر کردن نامیده می‌شود. سیستم های خطی تغییرناپذیر با زمانی که شکل طیف را تغییر می‌دهند، فیلترهای شکل دهی فرکانسی نامیده می‌شوند. سیستم هایی که برای عبور تقریبا" بدون اعوجاج بعضی فرکانسها و تضعیف شدید یا حذف بعضی دیگر طراحی می‌شوند، فیلترهای فرکانس گزین نام دارند.

الف- فیلتر پایین گذر

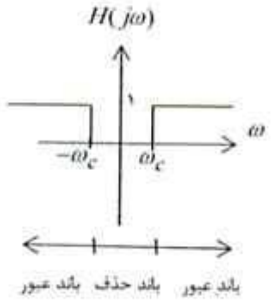
فیلتری است که فرکانسهای پایین یعنی فرکانسهای حول $\omega = 0$ را می‌گذراند و فرکانسهای بالا را تضعیف یا حذف می‌کند.



پاسخ فرکانسی فیلتر پایین گذر ایده‌آل

ب- فیلتر بالاگذر

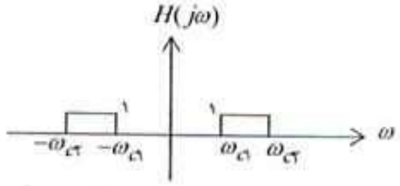
فیلتری است که فرکانسهای بالا را عبور می‌دهد و فرکانس‌های پایین را تضعیف می‌کند.



پاسخ فرکانسی فیلتر بالاگذر ایده آل

ج- فیلتر میان گذر

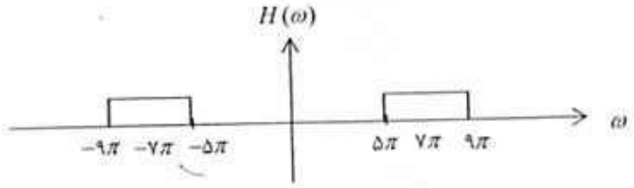
فیلتری است که یک باند فرکانسی را گذرانده، فرکانسهای بالاتر و پایین تر آن باند را تضعیف می‌کند.



پاسخ فرکانسی فیلتر میان گذر ایده آل

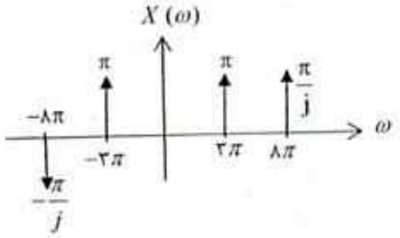
توجه کنید که در هر مورد، فرکانسهای قطع، فرکانس‌های مرز بین باند عبور و باند حذف هستند.

مثال ۲-۱۱: خروجی فیلتر $x(t)=\cos(۳\pi t)+\sin(۸\pi t)$ به ازه ورودی $x(t)$ را تعیین کنید؟



تبدیل فوریه ورودی به صورت زیر است (جدول ۲-۱)

$$X(\omega)=\pi\delta(\omega-۳\pi)+\pi\delta(\omega+۳\pi)+\frac{\pi}{j}\delta(\omega-۸\pi)-\frac{\pi}{j}\delta(\omega+۸\pi)$$



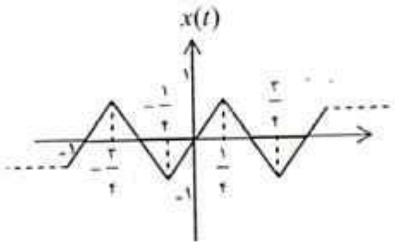
تبدیل فوریه خروجی با حاصلضرب $X(\omega)H(\omega)$ برابر است

$$Y(\omega)=\frac{\pi}{j}\delta(\omega-۸\pi)-\frac{\pi}{j}\delta(\omega+۸\pi)$$

در نتیجه $y(t)=\sin ۸\pi t$

۲-۱۰ چند تمرین حل شده

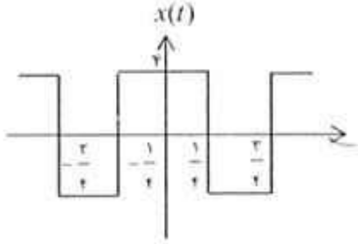
مثال ۲-۱۲ : هدف تعیین ضرایب سری فوریه a_k ها برای موج مثلثی نشان داده شده در شکل زیر است:

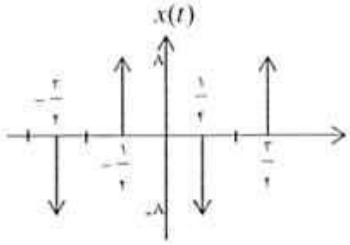


تناوب سیگنال $x(t)$ برابر $T=۱$ است در نتیجه $\omega_0=۲\pi$

$$a_0=\frac{1}{T}\int_T x(t)dt=\frac{۱}{۱}\times(\text{مساحت زیر منحنی در یک تناوب})=0$$

پیدا کردن a_kها با استفاده مستقیم از تعریف مستلزم محاسبات پیچیده و زمانبر است. با یک روش میانبر و استفاده از خاصیت انتگرال گیری مساله را حل می‌کنیم. ابتدا از $x(t)$ دو بار مشتق می‌گیریم: (هدف ایجاد امکان استفاده از خاصیت ضربه واحد در انتگرال گیری است)





اگر b_k ضرایب سری فوریه سیگنال $x(t)$ باشد از تعریف داریم:

$$b_k=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt=\frac{1}{1}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left[8\delta\left(t+\frac{1}{4}\right)-8\delta\left(t-\frac{1}{4}\right)\right]e^{-jk2\pi t}dt$$

$$=8e^{-jk2\pi\left(\frac{-1}{4}\right)}-8e^{-jk2\pi\left(\frac{1}{4}\right)}$$

$$=16j\left(\frac{1}{2j}\left(e^{+jk\frac{\pi}{2}}-e^{-jk\frac{\pi}{2}}\right)\right)$$

$$=16j\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$$

از خاصیت انتگرال:

$$a_k=\frac{b_k}{(jk\omega_0)^2}$$

$$a_k=\frac{16j}{(jk2\pi)^2}\sin\frac{k\pi}{2}=\frac{-4j}{k^2\pi^2}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$$

مثال ۲-۳ را با این مثال مقایسه کنید.

مثال ۲-۱۳: فرض کنید، رابطه ورودی - خروجی یک سیستم LTI علی با معادله دیفرانسیل زیر مشخص شده است:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+4\pi\frac{dy(t)}{dt}+4\pi^2y(t)=4\pi^2x(t)$$

که در آن x ورودی و y خروجی سیستم است. فرض کنید ورودی، $x(t)$ نشان داده شده در مثال ۲-۱۲ است و b_k ضرایب سری فوریه خروجی متناظر با این ورودی هستند می‌خواهیم b_{-3},b_3 را تعیین کنیم:

با کمک خاصیت مشتق‌گیری:

$$(j\omega)^2Y(\omega)+4\pi(j\omega)Y(\omega)+4\pi^2Y(\omega)=4\pi^2X(\omega)$$

$$H(\omega)=\frac{Y(\omega)}{X(\omega)}=\frac{4\pi^2}{(j\omega)^2+4\pi(j\omega)+4\pi^2}=\frac{1}{1+\frac{j\omega}{\pi}-\frac{\omega^2}{4\pi^2}}$$

از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$b_k=a_k H(k\omega_0)$$

در این مثال $\omega_0=2$ است.

$$b_k=a_k.H(2k\pi)$$

$$b_3=a_3.H(6\pi)=\frac{-4j}{(3\pi)^2}\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\times\frac{1}{1+j\frac{6\pi}{\pi}-\frac{(6\pi)^2}{4\pi^2}}$$

$$=\frac{4j}{9\pi^2(-8+6j)}$$

چون ورودی و خروجی هر دو حقیقی هستند از خاصیت معادله ۲-۱۲ داریم:

$$b_{-3}=b_3^*$$

$$=\frac{-4j}{9\pi^2(-8-6j)}=\frac{4j}{9\pi^2(8+6j)}$$

تست‌های طبقه‌بندی شده‌ی فصل دوم

۱- اگر H(f) تبدیل فوریه پاسخ ضربه یک سیستم LTI باشد، کدام یک از خواص H(f) علیت آن را ایجاب می‌کند؟ بنابه تعریف $\hat{H}(f) \triangleq \frac{1}{\pi f} * H(f)$.

(مهندسی برق ـ سراسری ۸۶)

۱) $2(H(f) - j\hat{H}(f)) = H(f)$

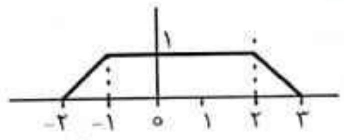
۲) $\frac{1}{2}(H(f) - j\hat{H}(f)) = H(f)$

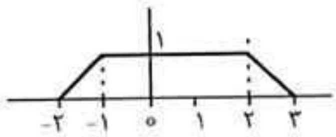
۳) $\frac{1}{2}(H(f) - j\hat{H}(f)) = \hat{H}(f)$

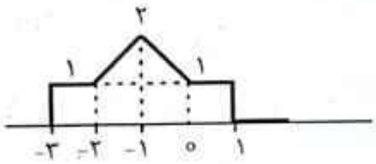
۴) $2(H(f) - j\hat{H}(f)) = \hat{H}(f)$

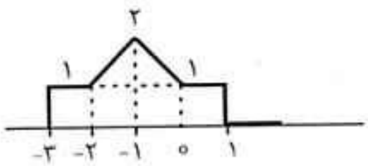
۲- در صورتی که تبدیل فوریه سیگنال x(t) یعنی $X(\omega)$ دارای مشخصات $\measuredangle X(\omega) = \omega$ ، $X(\omega)|_{\omega=0} = 4$ و $\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)d\omega = 2\pi$ باشد، کدام گزینه برای x(t) مناسب است؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۸۶)

۱) 

۲) 

۳) 

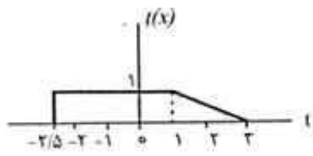
۴) 

۳- سیگنال x(t) زیر را در نظر بگیرید. اگر $X(\omega)$ تبدیل فوریه این سیگنال باشد، مقادیر A و B چقدر است؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۸۶)

$A = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\omega} X(\omega)d\omega$

$B = \int_{-\infty}^{\infty} \omega e^{j2\omega} X(\omega)d\omega$



۱) $A = \pi , B = \pi j$

۲) $A = \frac{1}{2}, B = \frac{j}{2}$

۳) $A = \pi , B = 2\pi j$

۴) $A = 2\pi , B = 0$

۴- یک سیستم خطی و تغییرناپذیر با زمان دارای پاسخ ضربهٔ $h(t) = e^{-2t}u(t)$ می‌باشد. اگر سری فوریه نمایی خروجی سیستم را به صورت $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{jn\omega_0 t}$ نمایش دهیم، در این صورت مقدار b_2 با فرض اینکه ورودی سیستم $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n)$ برابر کدام است؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۸۶)

۱) $\frac{1}{1+j2\pi}$

۲) $\frac{1}{4+j4\pi}$

۳) $\frac{1}{1+j4\pi}$

۴) $\frac{1}{4+j2\pi}$

۵- اگر x(t) و y(t) هر دو توابعی حقیقی و غیر منفی (یعنی $x(t)\ge 0$ و $y(t)\ge 0$) و از نوع انرژی باشند در این صورت کدام یک از دو نامساوی زیر لزوماً صحیح خواهد بود؟ در این نامساوی‌ها X(f) و Y(f) تبدیل فوریه‌های x(t) و y(t) هستند.

(مهندسی برق ـ سراسری ۸۶)

$$(1)\qquad \int_{-\infty}^{\infty}|X(f)+Y(f)|^2\,df \ge \int_{-\infty}^{\infty}|X(f)|^2\,df$$

$$(2)\qquad \int_{-\infty}^{\infty}|X(f)+Y(f)|^2\,df \ge \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}|X(f)|^2\,df+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}|Y(f)|^2\,df$$

۱) فقط (۱)　　۲) فقط (۲)　　۳) هر دو　　۴) هیچکدام

۶- S_1 و S_2 دو سیستم با پاسخ ضربه‌های ، به ترتیب، $h_1(t)=e^{-t}u(t)$ و $h_2(t)=\frac{\sin Wt}{\pi t}$ می‌باشند. در این صورت،

(مهندسی برق ـ سراسری ۸۶)

۱) S_1 معکوس‌ناپذیر و S_2 معکوس‌پذیر است.　　۲) S_1 و S_2 هر دو معکوس‌پذیرند.

۳) S_1 معکوس‌پذیر و S_2 معکوس‌ناپذیر است.　　۴) S_1 و S_2 هر دو معکوس‌ناپذیرند.

۷- دورهٔ تناوب اصلی سیگنال $x(t)$، T_0 و ضرایب سری فوریهٔ آن a_k می‌باشد. اگر ضرایب سری فوریه $y(t)=x(t)+x(\frac{3}{2}t)$ را با b_k نمایش دهیم، b_2 کدام یک از عبارت‌های زیر است؟　(مهندسی برق ـ سراسری ۸۵)

۱) a_1　　۲) a_2　　۳) $2a_1$　　۴) a_1+a_2

۸- فرض کنید $x(t)$ ورودی و $y(t)$ خروجی سیستم بوده و $X(j\omega)$ تبدیل فوریه ورودی سیستم است. کدام یک از دو سیستم زیر تغییر ناپذیر با زمان (TI) می‌باشد؟　(مهندسی برق ـ سراسری ۸۵)

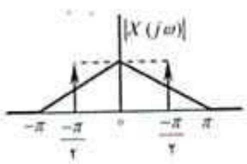
سیستم ۱: $y(t)=x(0)+X(t-3)$ ، سیستم ۲: $y(t)=X(0)+x(t-3)$

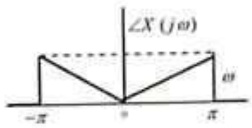
۱) فقط سیستم ۱　　۲) فقط سیستم ۲

۳) هر دو سیستم　　۴) هیچ یک از دو سیستم

۹- سیگنال پیوستهٔ $x(t)$ را با تبدیل فوریهٔ $X(j\omega)$ در نظر بگیرید که اندازه و فاز $X(j\omega)$ مطابق زیر می‌باشد. کدام یک از عبارات زیر صحیح است؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۸۵)





۱) $x(t)$ حقیقی بوده و $\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}$　　۲) $x(t)$ زوج بوده و $\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}$

۳) $x(t)$ زوج بوده و $\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2dt=\infty$　　۳) $x(t)$ حقیقی بوده و $\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2dt=\infty$

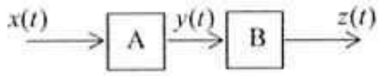
۱۰- $x(t)$ سیگنال پایین گذر با پهنای باند $\frac{1}{2T}$ و صادق در $x(nT)=0 : n=\pm1,\pm2,\ldots$ می‌باشد. $X(f)$ کدام فرم زیر را داراست؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۸۴)

۱) $X(f)\ \propto\ \Lambda(Tf)$　　۲) $X(f)\ \propto\ \Pi(Tf)$

۳) $X(f)\ \propto\ \Lambda(2Tf)$　　۴) هر سه مورد

۱۱- فرض کنید دو سیستم مجهول مطابق شکل زیر به صورت متوالی به هم متصل شده اند. به ورودی سیستم سیگنال $x(t)=sinc(t)$ را اعمال می‌کنیم $y(t)=sinc(2t)$ و $z(t)=sinc(t)$ می‌شود. کدام یک از دو سیستم B،A می‌توانند LTI باشند؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۴)



۱) فقط A

۲) فقط B

۳) هر دو

۴) هیچکدام

۱۲- برای سیگنال $x(t)$ با تبدیل فوریه $X(j\omega)$ خاصیت $\int_{-\infty}^{+\infty}\omega X(j\omega)e^{j\omega}d\omega=0$ برقرار است کدام یک از سیگنال های داده شده می‌تواند جزء این دسته باشند؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۳)

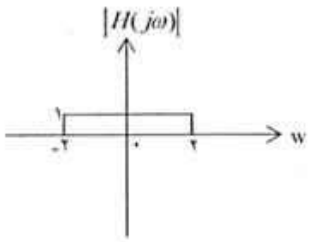
۱) $e^{-\frac{(t+1)^2}{2}}$

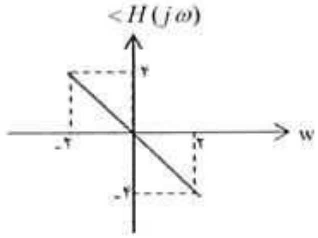
۲) $e^{-\frac{(t-1)^2}{2}}$

۳) $te^{\frac{-t^2}{2}}$

۴) $(t-1)e^{\frac{(t-1)^2}{2}}$

۱۳- سیگنال $x(t)=2\pi\delta(t)$ وارد سیستم LTI با مشخصات فرکانسی شکل می‌شود. در این صورت مقدار خروجی در لحظه $t=2$ برابر است با: (مهندسی برق ـ سراسری ۸۳)





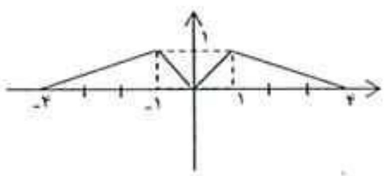
۱) 4π

۲) $\frac{4}{\pi}$

۳) ۴

۴) $\frac{2}{\pi}$

۱۴- در صورتی که $x(t)$ به صورت شکل تعریف شود. مقدار تبدیل فوریه آن در $\omega=0$ چه مقدار خواهد بود؟ (مهندسی برق ـ آزاد ۸۳)



۱) صفر

۲) ۰/۵

۳) ۴

۴) ۸

۱۵- اگر تبدیل فوریه $x(t)$ را با $X(j\omega)$ و تبدیل فوریه $g(t)$ را با $G(j\omega)$ نمایش دهیم، چنانچه رابطه بین $x(t)$ و $g(t)$ به صورت $x(t)=\int_{t-3}^{t-1} g(\tau)d\tau$ باشد، کدامیک از گزینه های زیر درست است؟ (مهندسی برق ـ آزاد ۸۳)

۱) $X(j\omega)=\left[\frac{1}{j\omega}G(j\omega)+\pi G(0)\delta(\omega)\right]*\frac{2\sin\omega}{\omega}e^{j2\omega}$

۲) $X(j\omega)=G(j\omega)\frac{2\sin\omega}{\omega}e^{-j2\omega}$

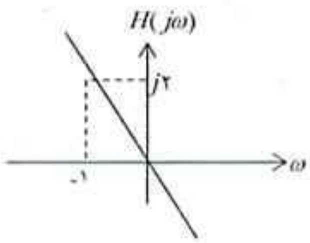
۳) $X(j\omega)=\left[\frac{1}{j\omega}G(j\omega)+\pi G(0)\delta(\omega)\right]*\frac{2\sin\omega}{\omega}e^{-j2\omega}$

۴) $X(j\omega)=G(j\omega)\frac{2\sin\omega}{\omega}e^{j2\omega}$

۱۶- برای سیگنال $x(t)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{t^2+1}$ مقدار تبدیل فوریه در $\omega=\frac{\pi}{4}$ چقدر است؟ (مهندسی برق ـ آزاد ۸۳)

۱) ۲/۱۹۳   ۲) ۱/۴۳۲   ۳) ۶/۸۹   ۴) ۰/۴۵۶

۱۷- فرض کنید پاسخ فرکانسی یک سیستم LTI و علی به صورت زیر باشد:



در صورتی که تبدیل فوریه ورودی سیستم $X(j\omega)=\frac{1}{2+j\omega}$ باشد و خروجی سیستم را $y(t)$ بنامیم کدامیک از گزینه های زیر ناصحیح است؟

۱) $y(t)=4e^{-2t}u(t)$ ۲) $y(0^+)=4$

۳) $y(\infty)=0$ ۴) $y(t)=4e^{-2t}u(t)-2\delta(t)$

۱۸- اگر رابطه زیر بین تبدیل فوریه های ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ در یک سیستم زمان پیوسته برقرار باشد، در آنصورت سیستم جزء کدام دسته است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۲)

$$Y(j\Omega)=e^{j2\Omega}X(j\Omega)+j\frac{dX(j\Omega)}{d\Omega}$$

۱) خطی ، تغییر ناپذیر با زمان ، غیرعلی   ۲) خطی ، تغییرناپذیر با زمان ، علی

۳) خطی ، تغییرپذیر با زمان ، غیر علی   ۴) غیر خطی ، تغییر ناپذیر با زمان ، علی

۱۹- دوره تناوب اصلی سیگنال $x(t)$ برابر T و ضرایب سری فوریه آن a_k می‌باشد. اگر ضرایب سری فوریه سیگنال $y(t)=x(t)+x(2t)$ را b_k بنامیم، آنگاه ضریب b_2 کدام است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۲)

۱) $b_2=2a_1$ ۲) $b_2=2a_2$

۳) $b_2=a_2-a_1$ ۴) $b_2=a_2+a_1$

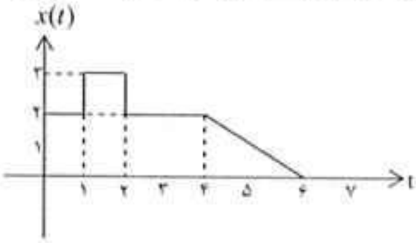
۲۰- پاسخ فرکانس سیستم زمان پیوسته ای به صورت $H(j\omega)=\cos\omega$ است. این سیستم در کدام گروه قرار دارد؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۸۲)

۱) غیرعلی ، پایدار ، معکوس ناپذیر
۲) علی ، پایدار ، معکوس پذیر
۳) غیر علی ، ناپایدار ، معکوس ناپذیر
۴) علی ، ناپایدار ، معکوس پذیر

۲۱- اگر سیگنال $x(t)$ مطابق شکل مقابل باشد و $X(\omega)$ تبدیل فوریه آن باشد ، در این صورت $X(0)=X(\omega)\Big|_{\omega=0}$ چقدر است؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۸۲)



۱) ۱۰
۲) ۱۱
۳) ۱۲
۴) ۱۳

۲۲- ضرایب سری فوریه قطار ضربه $x(t)=\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} 2\delta(2t+k\frac{T_0}{2})$ کدام هستند؟

(مهندسی برق ـ آزاد ۸۲)

۱) $a_k=\frac{4}{T_0}$
۲) $a_k=\frac{2}{T_0}$
۳) $a_k=\frac{6}{T_0}$
۴) $a_k=\frac{12}{T_0}$

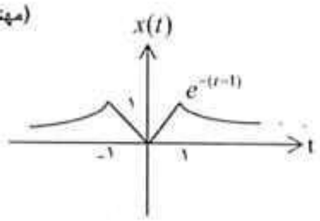
۲۳- برای سیگنال $x(t)=\frac{d}{dt}\frac{7\sin 50(t-2)}{2\pi(t-2)}$ ، مقدار تبدیل فوریه آن $X(j\omega)$ در $\omega=\frac{\pi}{4}$ چقدر است؟

(مهندسی برق ـ آزاد ۸۲)

۱) $\frac{7\pi}{8}e^{j\frac{\pi}{2}}$
۲) $\frac{7\pi}{4}e^{j\frac{\pi}{2}}$
۳) $\frac{7\pi}{8}$
۴) $\frac{7\pi}{4}e^{-j\frac{\pi}{2}}$

۲۴- برای سیگنال $x(t)$ نشان داده شده در شکل زیر، مقدار عبارت $a=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}X(j\omega)\frac{2\sin\omega}{2\pi\omega}e^{j2\omega}d\omega$ برابر است با:

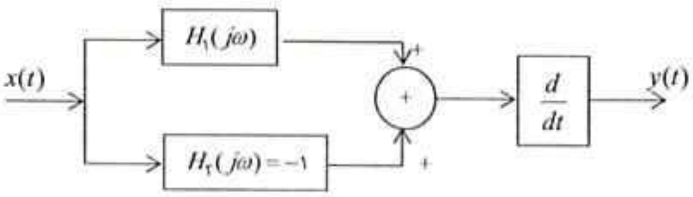
(مهندسی برق ـ آزاد ۸۲)



۱) ۱/۳۶۴۷
۲) ۰/۳۶۴۷
۳) ∞
۴) ۰/۸۶۴۷

۲۵- اگر در سیستم نمایش داده شده در شکل زیر $H_1(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega}$ باشد ، در این صورت تابع تبدیل کل سیستم $H(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$ کدام است؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۸۱)

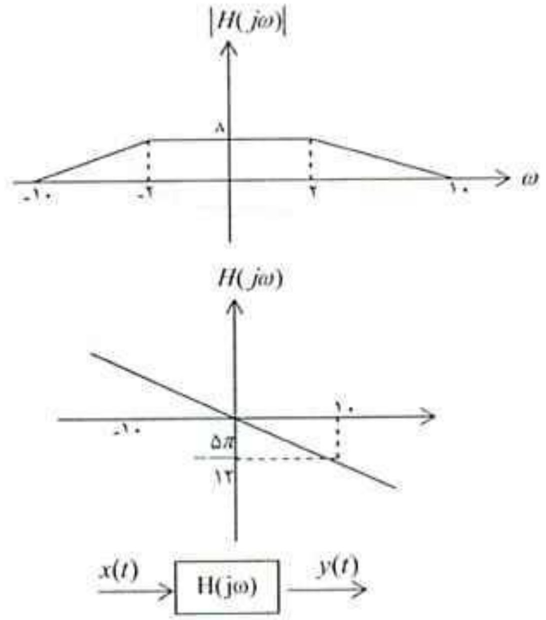


۱) $\frac{\omega^2}{1+j\omega}$
۲) $j\omega*[H_1(j\omega)-1]$
۳) $\frac{1}{j\omega}\left[\frac{1}{1+j\omega}-1\right]$
۴) $\frac{d}{d\omega}\left(\frac{-j\omega}{1+j\omega}\right)$

۲۶- اگر قسمت حقیقی پاسخ فرکانسی یک سیستم خطی و تغییر ناپذیر با زمان حقیقی و علی برابر $H_R(\omega)=\pi\delta(\omega)$ باشد، پاسخ ضربه آن کدام است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۱)

۱) $h(t)=\delta(t)$
۲) $h(t)=u(t)$
۳) $h(t)=e^{-t}u(t)$
۴) $h(t)=u(t)-u(t-۱)$

۲۷- منحنی های اندازه و فاز پاسخ فرکانسی یک فیلتر داده شده است. اگر $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(t-k\frac{\pi}{۲}\right)$ آنگاه خروجی $y(t)$ کدام است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۱)



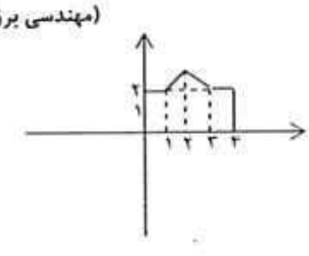
۱) $\frac{۳۲}{\pi}+\frac{۸}{\pi}\cos\left(۴t-\frac{\pi}{۳}\right)$

۲) $\frac{۳۲}{\pi}+\frac{۸}{\pi}\cos\left(۴t-\frac{۲\pi}{۳}\right)$

۳) $\frac{۱۶}{\pi}\cos\left(۴t-\frac{\pi}{۳}\right)+\frac{۸}{\pi}\cos\left(۱۶t-\frac{\pi}{۳}\right)$

۴) $\frac{۳۲}{\pi}+\frac{۱۶}{\pi}\cos\left(۴t-\frac{\pi}{۳}\right)$

۲۸- اگر سیگنال $x(t)$ مطابق شکل زیر باشد و $X(\omega)$ تبدیل فوریه آن باشد مقادیر $\int_{-\infty}^{+\infty}X(\omega)e^{-j\omega}d\omega, \angle X(\omega)$ به ترتیب چقدر است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۰)



۱) $۲\pi,\omega$
۲) $۰,۲\omega$
۳) $۲\pi,-\omega$
۴) $۰,-۲\omega$

۲۹- اگر یک سیستم LTI دارای تابع تبدیل فرکانسی برابر $H(\omega)=\frac{۲a-j\omega}{۲a+j\omega}$ باشد، پاسخ ضربه سیستم کدام است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۰)

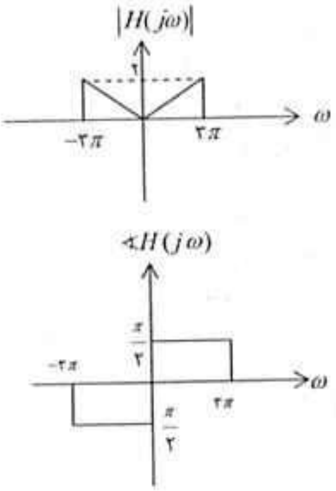
۱) $\delta(t)-۴ae^{-۲at}u(t)$
۲) $-\delta(t)+۴ae^{-۲at}u(t)$
۳) $-\delta(t)-۴ae^{-۲at}u(-t)$
۴) $\delta(t)-۴ae^{-۲at}u(-t)$

۳۰- ضرایب سری فوریه قطار ضربه $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 3\delta(2t-kT_0)$ عبارتند از: (مهندسی برق ـ آزاد ۸۰)

۱) $a_k=\frac{6}{T_0}$ ۲) $a_k=\frac{3}{T_0}$ ۳) $a_k=\frac{1}{T_0}$ ۴) $a_k=\frac{2}{T_0}$

۳۱- پاسخ فرکانسی یک فیلتر زمان پیوسته در شکل مقابل داده شده است. پاسخ پله فیلتر کدام است؟

(مهندسی برق ـ آزاد ۸۰)



۱) $s(t)=\frac{2}{\pi}sinc\left(\frac{3t}{\pi}\right)$

۲) $s(t)=\frac{2}{\pi}sinc\left(\frac{3t}{2}\right)$

۳) $s(t)=\frac{2}{3\pi}sinc(3t)$

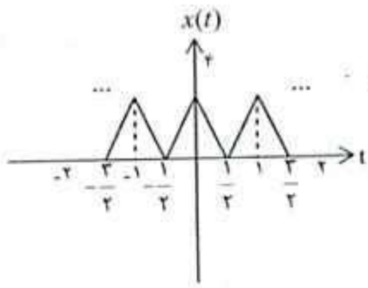
۴) $s(t)=\frac{2}{\pi}sinc(3t)$

۳۲- سیگنال $x(t)$ با دوره تناوب $T_0=1s$ ، دارای ضریب سری فوریه $a_k=\left(sinc\frac{k}{2}\right)^2$ می‌باشد. $x(t)$ کدام است؟

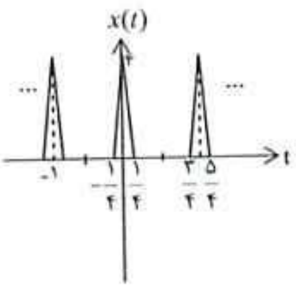
$\text{sinc}\ a=\frac{\sin \pi a}{\pi a}$

(مهندسی برق ـ آزاد ۸۰)

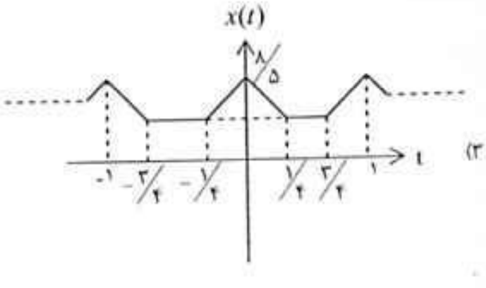
۱)



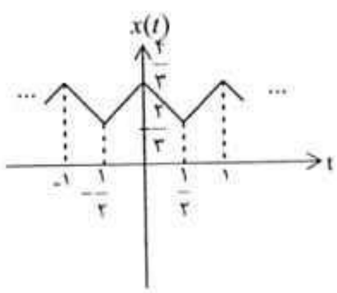
۲)



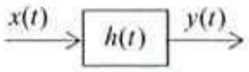
۳)

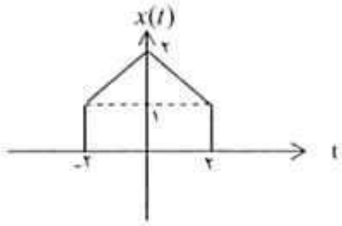


۴)



۳۳- به یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t)=e^{-2t}u(t)$ ورودی زیر اعمال شده . اگر $Y(j\omega)$ تبدیل فوریه خروجی باشد. مقدار آن در مبدأ (یعنی $Y(j0)$) چقدر است ؟ **(مهندسی برق ـ آزاد ۸۰)**





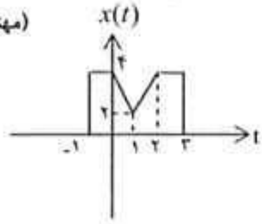
۱) ۳

۲) ۶

۳) $\frac{3}{2}$

۴) ۱۲

۳۴- سیگنال $x(t)$ در شکل مقابل داده شده است. مقدار انتگرال $\int_{-\infty}^{+\infty} X^2(j\omega)d\omega$ چقدر است؟ $X(j\omega)$ تبدیل فوریه $x(t)$ است. **(مهندسی برق ـ آزاد ۸۰)**



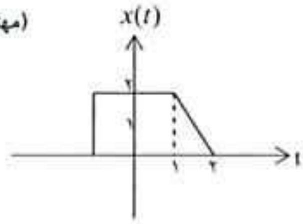
۱) 14π

۲) 24π

۳) 48π

۴) 8π

۳۵- اگر سیگنال $x(t)$ مطابق شکل زیر باشد و $X(\omega)$ فوریه آن باشد ، حاصل عبارت $\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)d\omega$ چقدر است؟ **(مهندسی برق ـ سراسری ۷۹)**



۱) 4π

۲) 2π

۳) ۴

۴) ۲

۳۶- اگر تبدیل فوریه $x(t)$ را با $X(f)$ نشان دهیم فوریه $y(t)=x(1-0/5t)$ کدام گزینه خواهد بود؟ **(مهندسی برق ـ سراسری ۷۹)**

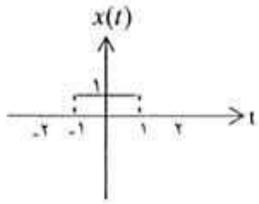
۱) $Y(f)=-2e^{-j4\pi f}X(-2f)$

۲) $Y(f)=-2e^{+j4\pi f}X(2f)$

۳) $Y(f)=2e^{-j4\pi f}X(-2f)$

۴) $Y(f)=2e^{j4\pi f}X(2f)$

۳۷- فرض کنید $X(\omega)$ تبدیل فوریه سیگنال $x(t)$ است که دارای شکل زیر است. در این صورت مقدار انتگرال $\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\omega X(\omega)d\omega$ برابر کدام گزینه است؟ **(مهندسی برق ـ سراسری ۷۹)**



۱) ۰

۲) ۱

۳) $-2\pi j$

۴) $\frac{1}{2\pi j}$

۳۸- پاسخ ضربه یک سیستم LTI به صورت $h(t)=\frac{1}{\pi t}(\cos 8\pi t)(\sin 2\pi t)$ می‌باشد. پاسخ این سیستم به ورودی $x(t)=(\cos 7\pi t)(\cos 2\pi t)$ برابر کدام گزینه است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۷۸)

۱) $\frac{1}{2}\cos 9\pi t$

۲) $\frac{1}{2}\cos 9\pi t+\frac{1}{2}\cos 5\pi t$

۳) $\frac{1}{4}\cos 9\pi t$

۴) $4\cos 9\pi t+\frac{1}{4}\cos 5\pi t$

پاسخ تشریحی تست‌های طبقه‌بندی شده فصل دوم

۱- گزینه «۲»ـ (دشوار)

$$\hat{h}(t) \leftrightarrow \hat{H}(f) \quad j\,\mathrm{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{1}{\pi f}$$

از خاصیت علیت داریم:

$$h(t) = h(t)u(t)$$

خاصیت علیت فقط در گزینه (۲) صدق می‌کند. داریم:

$$\frac{1}{2}[h(t) - j(j\,\mathrm{sgn}(t)h(t))] = \begin{cases} \frac{1}{2}[2h(t)] = h(t) & , \ t > 0 \\ \frac{1}{2}[h(t) - h(t)] = 0 & , \ t < 0 \end{cases}$$

۲- گزینه «۱»ـ (متوسط)

از تعریف تبدیل فوریه می‌دانیم که $X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt$ است. چون $X(0) = 4$ است. بنابراین سطح خالص زیر منحنی $x(t)$ باید ۴ باشد. از تعریف عکس تبدیل فوریه می‌دانیم که $\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)d\omega = 2\pi x(0)$ است. چون $\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)d\omega = 2\pi$ است. بنابراین $x(0)$ باید برابر ۱ باشد.

فرض کنید $x(t)$ سیگنالی باشد که اگر به اندازه t_0 شیفت پیدا کند، شکل موج حاصل حقیقی و زوج خواهد شد. با توجه به خاصیت شیفت زمانی و خواص تقارنی داریم:

$$x(t - t_0) \longleftrightarrow e^{-j\omega t_0} X(\omega)$$

$$\angle X(\omega) + (-\omega t_0) = 0 \Rightarrow \angle X(\omega) = \omega t_0$$

چون $\angle X(\omega) = \omega$ می‌باشد پس باید $t_0 = 1$ باشد یعنی $x(t)$ مطلوب با یک واحد شیفت به راست، دارای شکل موج زوج باشد. این سه خاصیت فقط برای گزینه (۱) درست است.

۳- گزینه «۱»ـ (ساده)

با توجه به خاصیت شیفت زمانی تبدیل فوریه داریم:

$$y(t) = x(t+2) \leftrightarrow Y(\omega) = e^{j2\omega} X(\omega)$$

حال با توجه به تعریف عکس تبدیل فوریه داریم:

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(\omega)d\omega = 2\pi y(0) = 2\pi x(0+2) = 2\pi x(2) = \pi$$

با توجه به خاصیت مشتق‌گیری در زمان داریم:

$$\frac{d}{dt}y(t) \longleftrightarrow j\omega Y(\omega)$$

بنابراین با استفاده مجدد از تعریف عکس تبدیل فوریه و خاصیت خطی بودن تبدیل فوریه داریم:

$$B = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega Y(\omega) = 2\pi(-j\frac{d}{dt}y(0)) = -j2\pi\frac{d}{dt}x(2) = j\pi$$

۴- گزینه «۲»ـ (متوسط)

با توجه به پاسخ ضربه سیستم داریم:

$$H(\omega) = \frac{1}{j\omega + 4}$$

از طرفی می‌دانیم که:

$$b_k = a_k H(k\frac{2\pi}{T})$$

بنابراین کافی است، a_k و T را مشخص کنیم. با توجه به ورودی $x(t)$ و جدول زوج‌های اساسی تبدیل فوریه داریم:

$$T = 1 \text{ و } a_k = 1$$

چون $b_k = a_k H(2\pi k)$ می‌باشد داریم:

$$b_2 = 1 \times H(4\pi) = \frac{1}{j4\pi + 4}$$

۵- **گزینه «۳»ـ(متوسط)**

با توجه به خاصیت خطی بودن تبدیل فوریه داریم:

$$z(t) = x(t) + y(t) \leftrightarrow Z(f) = X(f) + Y(f)$$

چون $x(t) \geq 0$ و $y(t) \geq 0$ آنگاه $z(t) \geq 0$، از طرفی طبق رابطه پارسوال داریم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |z(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} Z(f)|^2 \, df$$

پس با توجه به این که هم $x(t)$ و هم $y(t)$ همواره بزرگتر یا مساوی صفرند، اریم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)+Y(f)|^2 \, df = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)+y(t)|^2 \, dt \geq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 \, df$$

پس رابطه ۱ برقرار است. چون $x(t)$ و $y(t)$ همواره بزرگتر یا مساوی صفر هستند بنابراین:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)+y(t)|^2 \, dt \geq \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 \, dt$$

مشابه با استدلال بند قبلی مبتنی بر رابطه پارسوال صحت رابطه ۲ هم مشخص می‌شود.

۶- **گزینه «۳» ـ (متوسط)**

می‌دانیم که بین تبدیل فوریه‌های پاسخ ضربهٔ هر سیستم با سیستم معکوس آن رابطهٔ $H(j\omega)H_I(j\omega) = 1$ برقرار است. برای S_1 روشن است که $H_1(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 1}$ بوده و H_{1I} مربوطه قابل حصول و معتبر است در نتیجه معکوس این سیستم مشخص می‌شود. اما برای S_2، $H_2(j\omega)$ به صورت یک پالس مستطیلی است.(جدول ۲-۱ را ببینید). در نتیجه عکس آن H_{2I} تعریف نشده است. بنابراین S_2 معکوس پذیر نیست.

۷- **گزینهٔ «۲» - (متوسط)**

روش اول: اگر $x(t)$ متناوب با دورهٔ T_0 باشد، آنگاه $x(at)$ با دورهٔ $\frac{T_0}{a}$ متناوب خواهد بود. طبق خاصیت موجود در سری فوریه، در این حالت ضرایب فوریهٔ تغییر نمی‌کنند ولی به خاطر تغییر فرکانس پایه از $\frac{2\pi}{T_0}$ به $a\frac{2\pi}{T_0}$ نمایش سری فوریه تغییر می‌کند یعنی اگر c_k ضرایب سری فوریه $x(t)$ باشد، ضرایب سری فوریهٔ $x(at)$ برابر $c_{\frac{k}{a}}$ خواهد بود. با این توضیحات برای b_k در این سوال داریم:

$$b_k = a_k + a_{\frac{2}{3}k}$$

و چون $k = 2$ می‌باشد آنگاه $b_2 = a_2 + 0$ خواهد بود.

روش دوم: با توجه به تعریف ضرایب سری فوریه داریم:

$$b_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0}\left[x(t)+x(\tfrac{3}{2}t)\right]e^{-jk\omega_0 t}dt =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt}_{(I)} + \underbrace{\frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(\tfrac{3}{2}t)e^{-jk\omega_0 t}dt}_{(II)}$$

حاصل انتگرال I همان a_k است. برای ساده کردن انتگرال II از تغییر متغیر $\frac{3}{2}t = t'$ بهره می‌گیریم:

$$\frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(\tfrac{3}{2}t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{\frac{3}{2}T_0}\int_{\frac{3}{2}T_0} x(t')e^{-jk\omega_0 \frac{2}{3}t'}dt'$$

$$= a_{\frac{2}{3}k}$$

در نتیجه

$$b_2 = a_2 + a_{\frac{2}{3}} = a_2$$

۸- گزینهٔ «۲» - (متوسط)

در سیستم ۲، $X(0)$ در واقع کل سطح زیر منحنی $x(t)$ است که با شیفت زمانی آن ($x(t-\alpha)$ به ازاء هر α) تغییر نمی‌کند، ترم دوم یعنی $x(t-3)$ هم یک تأخیر ساده است پس اگر $x(t-\alpha)$ اعمال شود، خروجی $X(0)+x(t-\alpha-3)$ می‌باشد که همان $y(t-\alpha)$ هست. در نتیجه سیستم ۳، تغییر ناپذیر با زمان است.

در ضابطهٔ سیستم ۱، عبارت $X(t-3)$ وجود دارد، با توجه به خاصیت شیفت می‌دانیم که شیفت زمانی ورودی منجر می‌شود به ضرب یک عامل بر حسب ω در $X(\omega)$ (رابطه ۲-۲۴ را ببینید)، با توجه به جایگزینی ω با $t-3$ روشن است که خروجی به ازاء اعمال $x(t-\alpha)$ برابر $y(t-\alpha)$ نیست.

۹- گزینهٔ «۳» - (متوسط)

اگر $x(t)$ حقیقی باشد نمودار $\angle X(j\omega)$ بر حسب ω الزاماً باید فرد باشد در حالی که چنین نیست. از طرفی با توجه به رابطهٔ پارسوال داریم

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|X(j\omega)|^2 d\omega$$

چون $|X(j\omega)|^2$ در دو نقطه شامل ضرب دو تابع دیراک در هم دیگر می‌باشد بنابراین باعث می‌شود که انتگرال $\int_{-\infty}^{+\infty}|X(j\omega)|^2 d\omega$ نامتناهی شود.

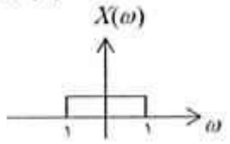
۱۰- گزینه«۲»- (متوسط)

با توجه به جدول زوج های تبدیل فوریه و بررسی گزینه ها . تنها گزینه«۲»می تواند درست باشد .

۱۱- گزینه«۲»- (متوسط)

در یک سیستم LTI با پاسخ فرکانسی $H(\omega)$ اگر ورودی دارای تبدیل فوریه $X(\omega)$ و خروجی دارای تبدیل فوریه $Y(\omega)$ باشد داریم :

$$Y(\omega) = H(\omega)\times X(\omega)$$



حال کافی است که طیف های x، y، z را مقایسه کنیم .

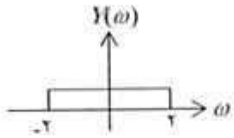
الف) نمی توان با ضرب هیچ $H_A(\omega)$ ، $X(\omega)$ را به $Y(\omega)$ تبدیل کرد چون برای

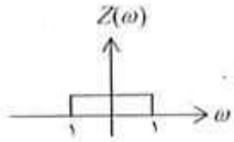
$|\omega|>1$، $X(\omega)$ برابر صفر است در حالی که $Y(\omega)$ در این بازه غیر صفر می باشد .

ب) می توان $H_B(\omega)$ ای تصور کرد که در $Y(\omega)$ ضرب شده و $Z(\omega)$ را به دست دهد .

با توجه به دو نکته الف و ب ، سیستم A نمی تواند LTI باشد .

اما B می تواند یک سیستم LTI باشد .





۱۲- گزینه «۲»- (متوسط)

از خاصیت «د» تبدیل فوریه داریم:

$$\frac{dx(t)}{dt}\leftrightarrow j\omega X(j\omega)$$

از تعریف عکس تبدیل فوریه:

$$-2\pi j\frac{dx(t)}{dt}=\int_{-\infty}^{+\infty}\omega X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega=1\Rightarrow\int_{-\infty}^{+\infty}\omega X(j\omega)e^{j\omega}d\omega=-2\pi j\left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=1}=0$$

باید دنبال گزینه‌ای باشیم که مشتق آن در $t=1$ صفر باشد برای گزینه «۲» داریم:

$$\frac{dx(t)}{dt}=-(t-1)e^{\frac{-(t-1)^2}{2}}\qquad\left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=1}=0$$

۱۳- گزینه «۳» (متوسط)

$$X(\omega)=2\pi$$
$$Y(\omega)=2\pi H(\omega)$$

با توجه به مشتقات فرکانسی $H(\omega)$ داریم

$$H(\omega)=\begin{cases}e^{-j2\omega} & -2\le\omega\le 2\\ 0 & other\end{cases}$$
$$\Rightarrow Y(\omega)=\begin{cases}2\pi e^{-j2\omega} & -2\le\omega\le 2\\ 0 & other\end{cases}$$

از جدول زوج های تبدیل فوریه داریم

$$\frac{\sin Wt}{\pi t}\xleftrightarrow{FT}\begin{cases}1 & |\omega|<W\\ 0 & |\omega|>W\end{cases}$$

در نتیجه چون ضرب $e^{-j2\omega}$ باعث شیفت به اندازهٔ «۲» در حوزه زمان به سمت راست می شود داریم :

$$y(t)=2\pi\frac{\sin 2(t-2)}{\pi(t-2)}\Rightarrow y(2)=4$$

۱۴- گزینه «۳» -(ساده)

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt\Rightarrow X(j0)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)dt=4$$

۱۵- گزینه«۲»- (متوسط)

$$x(t)=g(t)*\left[u(t-1)-u(t-3)\right]$$

با توجه به خواص تبدیل فوریه و جدول تبدیل فوریه های مهم:

$$X(j\omega)=G(j\omega).\left\{\frac{2\sin\omega}{\omega}e^{-2j\omega}\right\}$$

۱۶- گزینه«۱»- متوسط

با توجه به خاصیت دو گانی:

$$e^{-|t|}\leftrightarrow\frac{2}{1+\omega^2}$$
$$\frac{2}{1+t^2}\leftrightarrow 2\pi e^{-|\omega|}$$

طبق نکته گفته شده در متن درس:

$$g(t)\leftrightarrow g(\omega)$$
$$f(t)\leftrightarrow 2\pi g(-\omega)$$

در نتیجه

$$X\left(\frac{\pi}{4}\right)=e^{\frac{\pi}{4}}=2/193$$

۱۷- گزینه«۱» - (ساده)

$$Y(j\omega)=X(j\omega).H(j\omega)$$
$$=-2j\omega\frac{1}{2+j\omega}=\frac{-2j\omega}{2+j\omega}=\frac{4}{2+j\omega}-2$$
$$\Rightarrow y(t)=4e^{-2t}u(t)-2\delta(t)$$

۱۸- گزینه «۳» - (ساده)

با توجه به خواص تبدیل فوریه ، رابطه زمانی ورودی – خروجی سیستم به صورت زیر می باشد

$$y(t)=x(t+2)+tx(t)$$

با توجه به این رابطه روشن است که سیستم خطی ، تغییرپذیر با زمان و غیرعلی است .

۱۹- گزینه «۴» - (متوسط)

توجه کنید که نکتهٔ مطرح شده در خاصیت «د» سری فوریه بیان می کند که به هنگام تغییر مقیاس زمانی ، ضرایب سری فوریه $x(t)$، $x(at)$ زمانی یکسان می مانند که ضرایب فوریه $x(t)$ با پریود T و ضرایب فوریه $x(at)$ با پریود $\frac{T}{a}$ محاسبه شوند .

اما برای این مسأله ، پریود $y(t)$ برابر است با T_0 است .

$$b_2=\frac{1}{T_0}\int_{T_0}\left[x(t)+x(2t)\right]e^{-j\omega_0 2t}dt$$
$$=\frac{1}{T_0}\int_{T_0}x(t)e^{-j\omega_0 2t}dt+\frac{1}{T_0}\int_{T_0}x(2t)e^{-j\omega_0 t'}dt$$

در انتگرال سمت راست با تغییر متغیر $2t=t'$ داریم

$$b_2=\frac{1}{T_0}\int_{T_0}x(t)e^{-j\omega_0 2t}dt+\frac{1}{2T_0}\int_{2T_0}x(t')e^{-j\omega_0 t'}dt'$$

$$=\frac{1}{T_0}\int_{T_0}x(t)e^{-j\omega_0 2t}dt+\left(\frac{1}{2T_0}\int_{2T_0}x(t')e^{-j\omega_0 t'}dt'\right)$$

$$=a_2+a_1$$

۲۰- گزینه «۱» - (ساده)

$$H(j\omega)=\cos\omega=\frac{1}{2}\left(e^{j\omega}+e^{-j\omega}\right)$$

$$h(t)=\frac{1}{2}\{\delta(t+1)+\delta(t-1)\}$$

پاسخ ضربه نشان می دهد که سیستم غیرعلی و پایدار است برای ورودی های $x(t-1), x(t+1)$ پاسخ یکسانی از سیستم خواهیم داشت. بنابراین سیستم نمی تواند ، معکوس پذیر باشد.

۲۱- گزینه «۲» - (ساده)

از تعریف تبدیل فوریه داریم:

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{j\omega t}dt$$

$$X(\omega)\Big|_{\omega=0}=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)dt=x(t)\ \text{مساحت زیر منحنی}$$

$$=\left(\frac{4+6}{2}\times 2\right)+(1\times 1)=11$$

۲۲- گزینه «۱»- (متوسط)

$$\delta\left(3\left(t+k\frac{T_0}{6}\right)\right)=\frac{1}{3}\delta\left(t+k\frac{T_0}{6}\right)$$

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{2}{3}\delta\left(t+k\frac{T_0}{6}\right)$$

با توجه به جدول یا تعریف می توان a_k را حساب کرد .

$$a_k=\frac{1}{T}\int_{T}x(t)e^{-jk\omega t}dt=\frac{6}{T_0}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{T_0}$$

۲۳- گزینه «۳»-(متوسط)

با توجه به جدول زوج های تبدیل فوریه مهم داریم

$$\frac{\sin 50t}{\pi t}\leftrightarrow\begin{cases}1 & |\omega|<50\\ 0 & |\omega|>50\end{cases}$$

$$\frac{7}{2}\frac{d}{dt}\frac{\sin 50t}{\pi t}\leftrightarrow\begin{cases}\frac{7}{2}j\omega & |\omega|<50\\ 0 & |\omega|>50\end{cases}$$

$$\frac{7}{2}\frac{d}{dt}\frac{\sin 50(t-2)}{\pi(t-2)}\leftrightarrow\begin{cases}\frac{7}{2}j\omega e^{-j2\omega} & |\omega|<50\\ 0 & other.\end{cases}$$

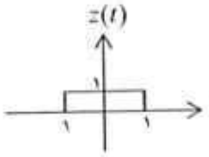
$$X\left(\frac{\pi}{۴}\right)=\frac{۷}{۲}j\times\frac{\pi}{۴}e^{-j۲\times\frac{\pi}{۴}}=\frac{۷\pi}{۸}$$

۲۴- گزینه «۴»- (متوسط)

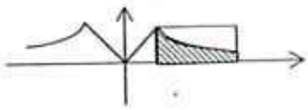
خاصیت کانولوشن در رابطه ۲-۳۲ را ببینید

$$\frac{۱}{۲\pi}X(j\omega).\left(\frac{۲\sin\omega}{\omega}\right)\leftrightarrow x(t)*z(t)$$

که در آن $z(t)$ به صورت زیر است:



اگر $y(t)=x(t)*z(t)$ باشد، با توجه به تعریف عکس تبدیل فوریه



$$a=\int_{-\infty}^{+\infty}Y(\omega)e^{j۲\omega}d\omega=۲\pi y(t)\Big|_{t=۲}$$

$$y(۲)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)z(۲-\tau)d\tau=\text{مساحت هاشور خورده}$$

$$\text{مساحت}=\int_{۱}^{۲}e^{-(\tau-۱)}d\tau=-e^{(\tau-۱)}\Big|_{۱}^{۲}=۰/۸۶۴۷$$

۲۵- گزینه «۱»- (ساده)

$$H(\omega)=\left[H_۱(\omega)+H_۲(\omega)\right].j\omega$$

$$H(\omega)=\left(-۱+\frac{۱}{۱+j\omega}\right).j\omega$$

$$=\frac{\omega^۲}{۱+j\omega}$$

۲۶- گزینه «۲»- (متوسط)

چون سیستم حقیقی است، قسمت حقیقی پاسخ فرکانسی، ناشی از قسمت زوج پاسخ ضربه است پس:

$$h_e(t)=\frac{۱}{۲}$$

و چون سیستم علی است، $h(t)$ برای $t<۰$ صفر است بنابراین

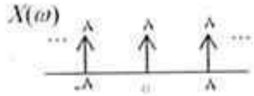
$$h(t)=u(t)$$

توجه کنید که $h_e(t)=\frac{۱}{۲}\{h(t)+h(-t)\}$ است.

۲۷- گزینه «۴» - (متوسط)

$$X(\omega)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}۲\pi\frac{۴}{\pi}\delta\left(\omega-k\frac{۲\pi}{\frac{\pi}{۴}}\right)=۸\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-۸k)$$

$$Y(\omega)=H(\omega).X(\omega)=۶۴\delta(\omega)+۱۶\left[e^{j\frac{\pi}{۲}}\delta(\omega+۸)+e^{-j\frac{\pi}{۲}}\delta(\omega-۸)\right]$$



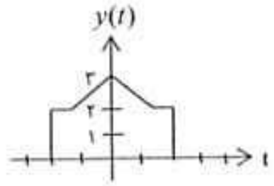
$$y(t)=\frac{32}{\pi}+\frac{16}{8}\cos\left(8t-\frac{\pi}{3}\right)$$

۲۸- گزینه «۴»- (ساده)

تعریف عکس تبدیل فوریه به صورت زیر است:

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(\omega)e^{+j\omega t}d\omega$$

$x(t)$ را «۲» واحد زمانی به سمت چپ شیفت دهیم و $x(t+2)$ را $y(t)$ می نامیم:



$y(t)$ حقیقی و زوج است در نتیجه $Y(\omega)$ هم حقیقی خواهد بود به عبارتی $\angle Y(\omega)=0$ با توجه به خاصیت شیفت زمانی

$$\angle Y(\omega)=\angle e^{j2\omega}X(\omega)=2\omega+\angle X(\omega)=0$$

$$\angle X(\omega)=-2\omega$$

۲۹- گزینه «۲»- (ساده)

$$H(\omega)=\frac{2a-j\omega}{2a+j\omega}=\frac{2a-j\omega-2a+2a-j\omega+j\omega}{2a+j\omega}$$

$$=\frac{-(2a+j\omega)+4a}{2a+j\omega}=-1+\frac{4a}{2a+j\omega}$$

$$h(t)=-\delta(t)+4ae^{-2at}u(t)$$

۳۰- گزینه «۲»- (ساده)

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}3\delta(2t-kT_0)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}3\delta\left(2\left(t-k\frac{T_0}{2}\right)\right)=\frac{3}{2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(t-k\frac{T_0}{2}\right)$$

$$a_k=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-j\omega t}dt=\frac{2}{T_0}\times\frac{3}{2}=\frac{3}{T_0}$$

۳۱- گزینه «۴»- متوسط

از شکل پاسخ فرکانسی داریم:

$$H(\omega)=j\omega\frac{2}{3\pi}\qquad |\omega|<3\pi$$

$$h(t)=\frac{d}{dt}\left\{\frac{2}{3\pi}\times\frac{\sin(3\pi t)}{\pi t}\right\}$$

$$=\frac{d}{dt}\left\{\frac{2}{\pi}\times\sin\left(\frac{3\pi t}{3\pi t}\right)\right\}$$

$$s(t)=\int h(t)dt=\frac{۲}{\pi}sinc(۲t)$$

توجه کنید که طبق تعریف:

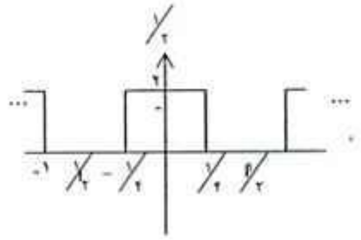
$$\frac{\sin Wt}{\pi t}=\frac{W}{\pi}\text{sinc}\left(\frac{Wt}{\pi}\right)$$

۳۲- گزینه «۱»- متوسط

$$x_1(t)=\begin{cases}۱ & |t|<T_1\\ ۰ & T_1<|t|\le\frac{T_۰}{۲}\end{cases}\leftrightarrow a_k=\frac{\sin k\omega_۰T_1}{k\pi}$$

$T_۰$ پریود

در این مسأله

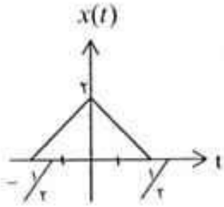


از طرفی خاصیت ضریب سری فوریه بیان می‌کند که:

$$x(t)*y(t)\leftrightarrow Ta_k b_k$$

T در تناوب

پس باید $\frac{۱}{T}\int_T x_1(\tau)x_1(t-\tau)d\tau$ محاسبه شود در یک دوره تناوب ، داریم : (نکته بخش ۱-۷-۲ را به خاطر آورید)



۳۳- گزینه«۱»- (ساده)

$$Y(j\omega)=H(j\omega).X(j\omega)$$

$$Y(j_۰)=H(j_۰)\times X(j_۰)$$

$$H(j\omega)=F\left\{e^{-۲t}u(t)\right\}=\frac{۱}{j\omega+۲}\Rightarrow H(j_۰)=\frac{۱}{۲}$$

$$X(j_۰)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)dt=۲\times\frac{(۲+۱)\times ۲}{۲}=۶$$

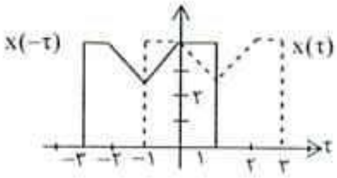
$$y(j_۰)=\frac{۱}{۲}\times ۶=۳$$

۳۴- گزینه «۳»- (ساده)

از خاصیت کانولوشن داریم :

$$y(t)=x(t)*x(t)\leftrightarrow X(j\omega)^۲$$

از تعریف عکس تبدیل فوریه:



$$\int_{-\infty}^{+\infty} Y(\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} X^{۲}(\omega)d\omega = ۲\pi y(۰)$$

$$y(۰) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)x(-\tau)d\tau$$

$$y(۰) = \int_{-۱}^{۰} ۴(۲t+۴)dt + \int_{۰}^{۱} ۴(-۲t+۴)dt = ۲۴$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X^{۲}(j\omega)d\omega = ۴۸\pi$$

۳۵- گزینه «۱»- (ساده)

تعریف عکس تبدیل فوریه

$$x(t) = \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)d\omega = ۲\pi x(۰) = ۴\pi$$

۳۶- گزینه «۳»- (ساده)

$$y(t) = x(۱-۰/۵t) = x\left(\frac{-۱}{۲}(t-۲)\right)$$

با توجه به خواص تغییر مقیاس و شیفت زمانی

$$Y(\omega) = e^{-j۲\omega} \times ۲X(-۲\omega)$$

یا بر حسب نمایش فرکانسی: $(\omega = ۲\pi f)$

$$Y(f) = ۲e^{-j۴\pi f}X(-۲f)$$

۳۷- گزینه «۱»- (ساده)

از خاصیت مشتق گیری

$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega X(\omega)$$

$$y(t) = -j\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow \omega X(\omega) = Y(\omega)$$

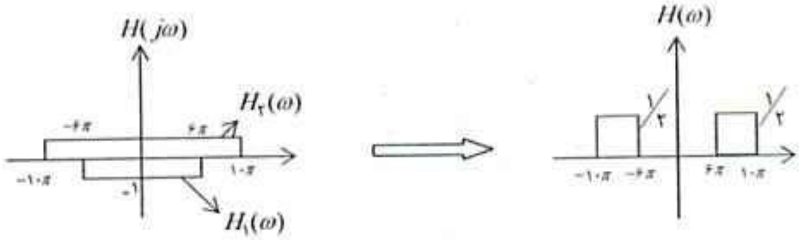
از عکس تبدیل فوریه:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Y(\omega)d\omega = ۲\pi y(۰)$$

$$y(۰) = -j\frac{dx(t)}{dt}\Big|_{t=۰} = ۰ \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \omega X(\omega)d\omega = ۰$$

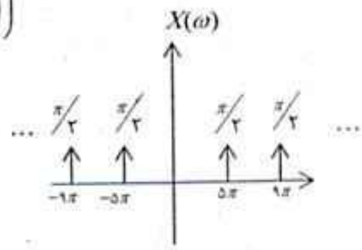
۳۸- گزینه «۳» - متوسط

$$h(t)=\frac{1}{\pi t}\cos(8\pi t)\sin(2\pi t)$$
$$=\frac{1}{\pi t}\{-\sin 6\pi t+\sin 10\pi t\}$$
$$=-\frac{\sin 6\pi t}{\pi t}+\frac{\sin 10\pi t}{\pi t}=H_1(j\omega)+H_2(j\omega)$$

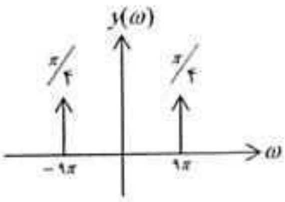


$$x(t)=\cos(7\pi t)\cos(2\pi t)=\frac{1}{2}(\cos 5\pi t+\cos 9\pi t)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(e^{j5\pi t}+e^{-j5\pi t}\right)+\frac{1}{2}\left(e^{j9\pi t}+e^{-j9\pi t}\right)\right)$$

$$X(\omega)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}2\pi a_k\,\delta(\omega-k\omega_0)\Rightarrow$$



می دانیم که $Y(\omega)=H(\omega)X(\omega)$ می باشد پس:



فصل ۳

آنالیز فوریهٔ گسسته در زمان

۳-۱ سری فوریه برای سیگنال‌های متناوب گسسته در زمان

سیگنال گسسته در زمان $x[n]$ را با دوره تناوب N **متناوب** گویند اگر به ازاء تمام مقادیر n:

$$x[n]=x[n+N] \qquad (۳-۱)$$

که N عدد صحیح مثبت است. دورهٔ تناوب پایه، کوچکترین مقدار مثبت N است که (۳-۱) را برآورده می‌کند $\Omega_\circ=\frac{۲\pi}{N}$ فرکانس پایه نامیده می شود.

حال اگر $x[n]$ یک دنباله با دورهٔ تناوب N باشد می‌توان آن را به صورت ترکیب خطی نمایی های مختلط گسسته نوشت:

$$x[n]=\sum_{k=<N>} a_k e^{jk\frac{۲\pi}{N}n} \qquad (۳-۲)$$

که در آن a_kها به صورت زیرند:

$$a_k=\frac{۱}{N}\sum_{n=<N>} x[n]e^{-jk\frac{۲\pi}{N}n} \qquad (۳-۳)$$

ضرایب a_k را ضرایب سری فوریه می‌گویند.

با توجه به اینکه نمایی‌های گسسته‌ای که اختلاف فرکانسی آنها مضرب ۲π می‌باشد، با هم برابرند جمع داده شده در معادلات (۳-۲) و (۳-۳) برای تغییرات k (یا n) در یک بازه از N عدد صحیح متوالی خواهد بود.

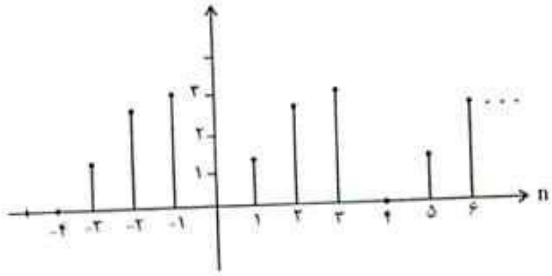
از آنجایی که تنها N تا نمایی مختلط مجزا با دوره تناوب N وجود دارد ، داریم :

(۳-۴)

$$a_k = a_{k+N}$$

ضرایب سری فوریه a_k را اغلب ضرایب طیفی $x[n]$ می گویند.

مثال ۳-۱: با کمک تعریف، ضرایب سری فوریهٔ سیگنال گسستهٔ $x[n]$ را محاسبه کنید.



اینجا $N=4$ است $a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$ در نتیجه $k=0,1,2,3$ خواهد بود:

$$a_0 = \frac{1}{4}(0+1+2+3) = \frac{3}{2}$$

$$a_1 = \frac{1}{4}(0+1\times(-j)+2\times(-1)+3(j)) = \frac{-1}{2}+j\frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{1}{4}(0+1\times(-1)+2\times(1)+3(-1)) = \frac{-1}{2}$$

$$a_3 = \frac{1}{4}(0+1\times(j)+2\times(-1)+3(-j)) = -\frac{1}{2}-j\frac{1}{2}$$

مثال ۳-۲: اگر $a_k = \cos(\frac{2\pi}{21}k)$ ضرایب سری فوریهٔ سیگنال گسستهٔ $x[n]$ باشند، با کمک تعریف، $x[n]$ را محاسبه کنید؟

توجه کنید که $N=21$ است:

$$a_k = \cos\frac{2\pi}{21}k = \frac{1}{2}[e^{j\frac{2\pi}{21}k} + e^{-j\frac{2\pi}{21}k}]$$

یک دوره $x[n]$ به صورت زیر است:

$$\Rightarrow x[n] = \begin{cases} \frac{1}{2} & n=\pm 1 \\ 0 & n=0,\pm 2,\ldots,\pm 10 \end{cases}$$

۳-۲ خواص سری فوریه گسسته در زمان

اگر $x[n]$ یک سیگنال متناوب با دوره تناوب N و a_k ضرایب سری فوریه آن باشند می نویسیم

(۳-۵)

$$x[n] \leftrightarrow a_k$$

الف – خطی بودن

$x[n]$ و $y[n]$ متناوب با دوره N باشند a_k و b_k ضرایب سری فوریه $x[n]$ و $y[n]$ با دوره N هستند در این صورت

(۳-۶)

$$c_1x[n]+c_2y[n] \leftrightarrow c_1a_k + c_2b_k$$

ب- شیفت زمانی و فرکانسی

(۳-۷)

$$x[n-n_0] \leftrightarrow a_k e^{-jk\frac{2\pi}{N}n_0}$$

(۸-۳)
$$e^{jM\frac{2\pi}{N}n}x[n]\leftrightarrow a_{k-M}$$

ج – انعکاس زمانی

(۹-۳)
$$x[-n]\leftrightarrow a_{-k}$$

د- مزدوج گیری

(۱۰-۳)
$$x^*[n]\leftrightarrow a^*_{-k}$$

هـ- انبساط زمانی

(۱۱-۳)
$$x_{(L)}[n]=\begin{cases}x\left[\dfrac{n}{L}\right] & \dfrac{n}{L}\in Z\\ 0 & \dfrac{n}{L}\notin Z\end{cases}\leftrightarrow\frac{1}{L}a_k$$

نکته مهم این است که ضرایب سری فوریه با دوره LN متناوب هستند.

و- ضرب

(۱۲-۳)
$$x[n]y[n]\leftrightarrow\sum_{l=<N>}a_l b_{k-l}$$

ز- دیفرنس

(۱۳-۳)
$$x[n]-x[n-1]\leftrightarrow\left(1-e^{-jk\frac{2\pi}{N}}\right)a_k$$

ح – جمع انباره‌ای

(۱۴-۳)
$$\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]\leftrightarrow\frac{1}{\left(1-e^{-jk\frac{2\pi}{N}}\right)}a_k$$

توجه داشته باشید که $\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]$ تنها به شرط $a_0=0$ کراندار و متناوب است. a_0 ضریب صفرم سری فوریه $x[n]$ است.

ط- خواص تقارنی

از خاصیت مزدوج گیری نتیجه می شود که

اگر $x[n]$ حقیقی باشد آنگاه

(۱۶-۳)
$$\begin{aligned}&a_k=a^*_{-k}\\&\mathrm{Re}\{a_k\}=\mathrm{Re}\{a_{-k}\}\\&\mathrm{Im}\{a_k\}=-\mathrm{Im}\{a_{-k}\}\\&|a_k|=|a_{-k}|\\&\measuredangle a_k=\measuredangle a_{-k}\end{aligned}$$

اگر $x[n]$ حقیقی و زوج باشد آنگاه a_k حقیقی و زوج است.

اگر $x[n]$ حقیقی و فرد باشد آنگاه a_k موهومی و فرد است.

$\mathrm{Re}\{a_k\}$ ناشی از بخش زوج $x[n]$ و $j\,\mathrm{Im}\{a_k\}$ ناشی از بخش فرد $x[n]$ است.

ی- کانولوشن متناوب

$$\sum_{k=<N>} x[k]y[n-k] \leftrightarrow N a_k b_k \qquad (۱۶-۳)$$

$x[n]$ و $y[n]$ هر دو متناوب با دوره N می باشند.

ک- رابطه پارسوال

$$\frac{1}{N}\sum_{n=<N>} |x[n]|^2 = \sum_{k=<N>} |a_k|^2 \qquad (۱۷-۳)$$

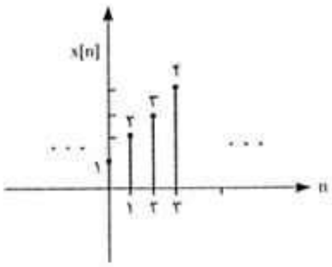
ل- دوگانی

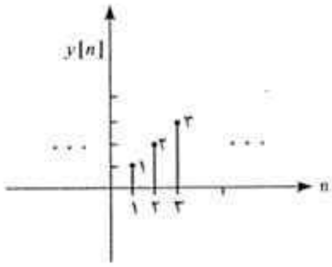
اگر $g[n]$ یک دنباله متناوب باشد، $h[k]$ ضرایب سری فوریه آن متناوب است:

$$g[n] \leftrightarrow h[k] \Rightarrow h[n] \leftrightarrow \frac{1}{N} g[-n]$$

مثال ۳-۳.

الف – برای سیگنال‌های گسسته $x[n]$ و $y[n]$ کانولوشن متناوب را در حوزهٔ زمان انجام دهید؟

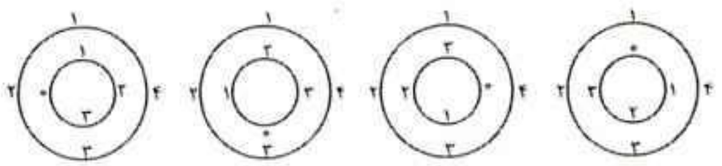




طبق تعریف داریم:

$$z[n] = \sum_{k=<N>} x[k]y[n-k]$$

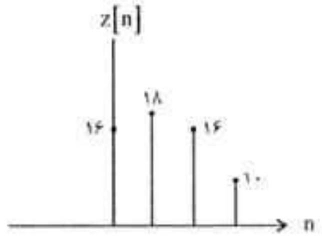
برای سادگی محاسبهٔ $z[n]$ از شکل‌های زیر استفاده می‌کنیم.



n=۳ n=۲ n=۱ n=۰

(توجه: کانولوشن متناوب را می‌توان به صورت قرار دادن N نمونهٔ $x[n]$ بر روی محیط یک دایره و N نمونهٔ $g[n]$ با ترتیب عکس بر روی دایرهٔ دیگر و سراندن یکی داخل دیگری، همرا با ضرب نمونه‌های منطبق و جمع حاصلضرب‌ها تجسم کرد)

$$z[0]=0\times1+1\times4+2\times3+3\times2=16$$
$$z[1]=1\times1+2\times4+3\times3+0\times2=18$$
$$z[2]=2\times1+3\times4+0\times3+1\times2=16$$
$$z[3]=3\times1+0\times4+1\times3+2\times2=10$$



ب- با کمک خاصیت کانولوشن متناوب سری فوریه $z[n]$ را بدست آورید.

ضرایب سری فوریهٔ $y[n]$ در مثال ۳-۱ با کمک تعریف محاسبه شد. برای $x[n]$ هم به طور مشابه عمل می‌کنیم.

$$Y_k:\left\{\frac{3}{2},\frac{-1}{2}+j\frac{1}{2},\frac{-1}{2},\frac{-1}{2}-j\frac{1}{2}\right\}$$

$$X_k:\left\{\frac{5}{2},\frac{-1}{2}+j\frac{1}{2},\frac{-1}{2},\frac{-1}{2}-j\frac{1}{2}\right\}$$

$$z[n]=\sum_{k=\langle N\rangle} z_k e^{+jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$Z_k=NX_kY_k:\{15,-j2,1,j2\}\longrightarrow\begin{cases}z[0]=16\\ z[1]=18\\ z[2]=16\\ z[3]=10\end{cases}$$

۳-۳ تبدیل فوریه برای سیگنال های غیر متناوب گسسته در زمان

اگر $x[n]$ یک دنبالهٔ غیر متناوب با شرایط معین باشد :

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega \qquad (۳-۱۸)$$

و

$$X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]e^{-j\Omega n} \qquad (۳-۱۹)$$

$X(\Omega)$ را طیف یا تبدیل فوریه گسسته $x[n]$ می نامند .

جمع نامحدود مربوط به معادله تعریف کننده $X(\Omega)$ زمانی همگرا خواهد شد که $x[n]$ مطلقاً جمع پذیر باشد یا به عبارتی انرژی سیگنال گسسته $x[n]$ محدود باشد.

نکته مهم این است که $X(\Omega)$ با دوره 2π متناوب است .

مثال ۳-۴ : برای سیگنال زمان گسسته $x[n]=(\frac{1}{2})^{|n|}$، تبدیل فوریه را محاسبه کنید؟

$$X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$$
$$=\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{1}{2})^{n}e^{-j\Omega n}+\sum_{n=-\infty}^{n=-1}(\frac{1}{2})^{-n}e^{-j\Omega n}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2}e^{-j\Omega})^{n}+\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2}e^{j\Omega})^{n}$$
$$=\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}+\frac{\frac{1}{2}e^{j\Omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}-\cos\Omega}$$

۳-٤ تبدیل فوریه برای سیگنال های متناوب گسسته در زمان

$x[n]$ دنباله ای با دوره تناوب N و سری فوریه زیر است :

$$x[n]=\sum_{k=<N>} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \qquad (3-20)$$

می توان فاصله جمع زنی را به صورت $k=0,\dots,N-1$ انتخاب کرد و نوشت:

$$x[n]=a_0+a_1e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}+a_2e^{j2\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}+\dots+a_{N-1}e^{j(N-1)\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} \qquad (3-21)$$

تبدیل فوریه $x[n]$ به صورت زیر خواهد کرد :

$$X(\Omega)=a_0\sum_{m=-\infty}^{+\infty}2\pi\delta(\Omega-2\pi m)+a_1\sum_{m=-\infty}^{+\infty}2\pi\delta\left(\Omega-\frac{2\pi}{N}-2\pi m\right)$$
$$+\dots+a_{N-1}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}2\pi\delta\left(\Omega-(N-1)\frac{2\pi}{N}-2\pi m\right) \qquad (3-22)$$

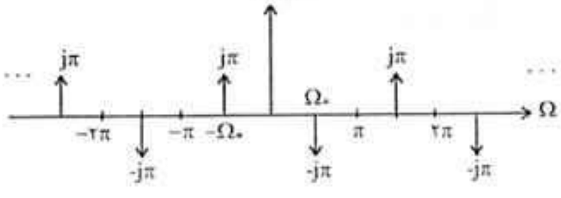
شکل بسته تر تبدیل فوریه سیگنال متناوب گسسته به صورت زیر است :

$$X(\Omega)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}2\pi a_k\,\delta\left(\Omega-\frac{2\pi}{N}k\right) \qquad (3-23)$$

مثال ۳-۵: تبدیل فوریه سیگنال متناوب گسستهٔ $z[n]=\sin(\Omega_0 n)$ و $y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta[n-kN]$ را تعیین کنید.

الف- ابتدا ضرایب سری فوریه مشخص می‌شوند:

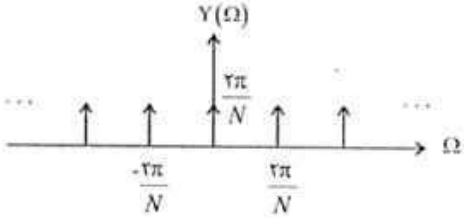
$$x[n]=\sin(\Omega_0 n)=\frac{1}{2j}(e^{j\Omega_0 n}-e^{-j\Omega_0 n})$$
$$X(\Omega)=2\pi\frac{-1}{2j}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\Omega-\Omega_0-2\pi k)+2\pi\frac{1}{2j}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\Omega+\Omega_0-2\pi k)$$



ب – ابتدا ضرایب سری فوریه تعیین می‌شوند:

$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}y[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\delta[n-mN]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}=\frac{1}{N}$$

$$Y(\Omega)=\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\Omega-\frac{2\pi}{N}k\right)$$



رابطه ضرایب سری فوریه و تبدیل فوریه سیگنال متناوب

اگر $x[n]$ سیگنال گسسته متناوب با دوره N بوده و $\tilde{x}[n]$ برابر یک دوره تناوب $x[n]$ باشد، a_k ضرایب سری فوریه $x[n]$ از روی تبدیل فوریه $\tilde{x}[n]$ یعنی $\tilde{X}(\Omega)$ به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$a_k=\frac{1}{N}\tilde{X}\left(k\frac{2\pi}{N}\right) \qquad (۳-۲۴)$$

یعنی ضرایب سری فوریه یک سیگنال متناوب در واقع نمونه های تبدیل فوریه یک دوره تناوب آن هستند که در $\frac{1}{N}$ ضرب شده‌اند.

۳-۵ خواص تبدیل فوریهٔ گسسته در زمان

الف – متناوب بودن تبدیل فوریه گسسته در زمان

تبدیل فوریه گسسته در زمان $X(\Omega)$ با دوره 2π تکرار می شود.

ب – خطی بودن

ارتباط سیگنال $x[n]$ و تبدیل فوریه $X(\Omega)$ را به صورت $x[n]\leftrightarrow X(\Omega)$ نشان می دهیم. حال اگر

$$x[n]\leftrightarrow X(\Omega)$$
$$y[n]\leftrightarrow Y(\Omega)$$
$$\Rightarrow ax[n]+by[n]\leftrightarrow aX(\Omega)+bY(\Omega) \qquad (۳-۲۵)$$

ج- شیفت زمانی و فرکانسی

$$x[n-n_0]\leftrightarrow e^{-j\Omega n_0}X(\Omega) \qquad (۳-۲۶)$$
$$e^{j\Omega_0 n}x[n]\leftrightarrow X(\Omega-\Omega_0) \qquad (۳-۲۷)$$

د- انعکاس زمانی

$$x[-n]\leftrightarrow X(-\Omega) \qquad (۳-۲۸)$$

هـ- انبساط زمانی

$$x_{(L)}[n]=\begin{cases}x\left[\frac{n}{L}\right] & \frac{n}{L}\in Z\\ 0 & \frac{n}{L}\notin Z\end{cases}\leftrightarrow X(L\Omega) \qquad (۳-۲۹)$$

توجه کنید که $X(L\Omega)$ با دوره تناوب $\frac{2\pi}{L}$ تکرار می شود .

و- ضرب

$$x[n]y[n]\leftrightarrow\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(\theta)Y(\Omega-\theta)d\theta \qquad (3-30)$$

ز- دیفرنس

$$x[n]-x[n-1]\leftrightarrow\left(1-e^{-j\Omega}\right)X(\Omega) \qquad (3-31)$$

ح- جمع انباره ای

$$\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]\leftrightarrow\frac{1}{1-e^{-j\Omega}}X(\Omega)+\pi X(0)\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\Omega-2\pi k) \qquad (3-32)$$

خ – خواص تقارنی

اگر $x[n]$ دنباله ای حقیقی باشد

$$X^*(-\Omega)=X(\Omega) \qquad (3-33)$$

از این خاصیت نتایج زیر حاصل می شود :

$\operatorname{Re}\{X(\Omega)\}$ تابعی زوج از Ω و $\operatorname{Im}\{X(\Omega)\}$ تابعی فرد از Ω می باشد .

اندازه $X(\Omega)$ تابعی زوج از Ω و فاز $X(\Omega)$ تابعی فرد از Ω می باشد .

اگر $x[n]$ حقیقی و زوج باشد . $X(\Omega)$ حقیقی و زوج خواهد بود .

اگر $x[n]$ حقیقی و فرد باشد . $X(\Omega)$ موهومی و فرد خواهد بود .

$\operatorname{Re}\{X(\Omega)\}$ از قسمت زوج $x[n]$ و $j\operatorname{Im}\{X(\Omega)\}$ از قسمت فرد $x[n]$ به دست می آید .

ط- کانولوشن

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x[m]y[n-m]\leftrightarrow X(\Omega)Y(\Omega) \qquad (3-34)$$

ی – مشتق گیری در فرکانس

$$nx[n]\leftrightarrow j\frac{dX(\Omega)}{d\Omega} \qquad (3-35)$$

ک – رابطه پارسوال

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x[n]|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}|X(\Omega)|^2d\Omega \qquad (3-36)$$

مثال ۳-۶: با توجه به اینکه تبدیل فوریه سیگنال گسسته $(\frac{1}{3})^n u[n]$ به صورت $\frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\Omega}}$ می‌باشد. با توجه به خواص، تبدیل فوریهٔ $x[n]=\cos(\frac{\pi}{3}n)(\frac{1}{3})^n u[n-2]$ را تعیین کنید؟

باتوجه به خاصیت خطی بودن و شیفت زمانی:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}u[n-2]\leftrightarrow\frac{1}{9}e^{-j2\Omega}\frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\Omega}}$$

از طرفی چون $\cos\frac{\pi}{3}n = \frac{1}{2}(e^{j\frac{\pi}{3}n} + e^{-j\frac{\pi}{3}n})$ است و با توجه به خاصیت شیفت فرکانسی :

$$\frac{1}{9}\times\frac{1}{2}(e^{j\frac{\pi}{3}n}(\frac{1}{3})^{n-2}u[n-2]+e^{-j\frac{\pi}{3}n}(\frac{1}{3})^{n-2}u[n-2]) \leftrightarrow \frac{1}{18}\frac{e^{-j2(\Omega-\frac{\pi}{3})}}{1-\frac{1}{3}e^{-j(\Omega-\frac{\pi}{3})}}+\frac{1}{18}\frac{e^{-j2(\Omega+\frac{\pi}{3})}}{1-\frac{1}{3}e^{-j(\Omega+\frac{\pi}{3})}}$$

مثال ۳-۷: اگر $X(\Omega)$ تبدیل فوریهٔ $x[n]$ باشد. تبدیل فوریهٔ سیگنالهای زیر را بر حسب $X(\Omega)$ بنویسید.

الف- $x[n]*x^*[-n]$:

برای تبدیل فوریهٔ $x^*[-n]$ راحت‌تر است که از تعریف استفاده کنیم.

$$x^*[-n]\leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^*[-n]e^{-jn\omega} = [\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[-n]e^{jn\omega}]^* = [\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-jn\omega}]^* = X^*(\Omega)$$

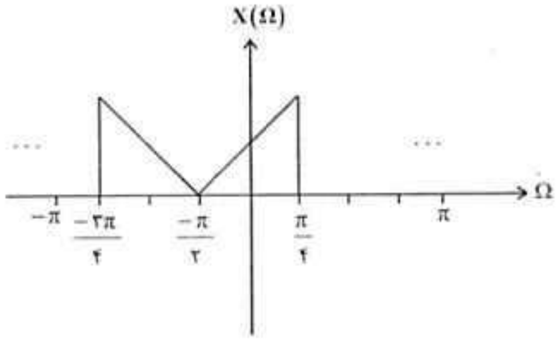
با توجه به خاصیت کانولوشن $x^*[-n]*x[n] = X(\Omega)X^*(\Omega) = |X(\Omega)|^2$

ب- $x[n]*x[n-1]$

با توجه به خاصیت شیفت زمانی و کانولوشن

$$x[n]*x[n-1]\leftrightarrow X(\Omega).e^{-j\Omega}X(\Omega) = e^{-j\Omega}X^2(\Omega)$$

مثال ۳-۸ : سیگنال گسستهٔ $x[n]$ دارای تبدیل فوریه $X(\Omega)$ به صورت شکل زیر است. مقادیر خواسته شده را محاسبه کنید؟



الف- $x[0]$

با توجه به تعریف تبدیل فوریه در رابطه ۳-۱۸ داریم:

$$x[0] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\Omega)d\Omega = \frac{1}{2\pi}\left(2\times\frac{2\pi}{4}\times 2\times\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

ب- $\measuredangle x[n]$

اگر $X(\Omega)$ را به اندازه $\frac{\pi}{4}$ به راست شیفت داده و حاصل را $Y(\Omega)$ بنامیم روشن است که $Y(\Omega) = X\left(\Omega-\frac{\pi}{4}\right)$ حقیقی و زوج است در نتیجه $y[n] = e^{j\frac{\pi}{4}n}x[n]$ هم حقیقی و زوج خواهد بود. به عبارتی داریم:

$$\measuredangle y[n] = 0 \Rightarrow \measuredangle y[n] = \measuredangle x[n] = \measuredangle x[n] + n\frac{\pi}{4} = 0 \Rightarrow \measuredangle x[n] = \frac{-n\pi}{4}$$

ج- $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2$

از رابطه پارسوال استفاده می‌کنیم:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}|X(\Omega)|^2 d\Omega = \frac{1}{2\pi}\times 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{4}{\pi}\Omega\right)^2 = \frac{2}{3}$$

د- $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} nx[n]$

با توجه به خاصیت مشتق‌گیری در فرکانس داریم: $nx[n] \leftrightarrow j\frac{d}{d\Omega}X(\Omega)$

از طرفی طبق تعریف ۳-۱۷ داریم:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} nx[n]e^{-j0n} = j\frac{d}{d\Omega}\Big|_{\Omega=0} = j\times\frac{4}{\pi} = \frac{j4}{\pi}$$

۳-۶ دو گانی تبدیل فوریه گسسته و سری فوریه پیوسته

اگر $f(\Omega)$ تبدیل فوریه گسسته در زمان $g[n]$ باشد (توجه کنید که $f(\Omega)$ تابع متناوب با دوره 2π است).

$$f(\Omega) \xleftrightarrow{\text{تبدیل فوریه گسسته}} g[n] \qquad (۳-۳۷)$$

در این حالت $g[-k]$ دنباله ضرایب سری فوریه $f(t)$ خواهد بود.

$$f(t) \xleftrightarrow{\text{ضرایب سری فوریه}} g[-k] \qquad (۳-۳۸)$$

۳-۷ پاسخ فرکانسی سیستم توصیف شده با معادلات دیفرنس خطی با ضرایب ثابت

سیستم گسسته درزمان LTI با ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ با معادله دیفرنس خطی با ضرایب ثابت به شکل زیر توصیف می شود:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \qquad (۳-۳۹)$$

پاسخ فرکانس این سیستم $H(\Omega)$ (که تبدیل فوریه پاسخ ضربه سیستم است) به صورت زیر خواهد بود.

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jk\Omega}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\Omega}}$$

۳-۸ جدول زوج های تبدیل فوریه گسسته

جدول ۳-۱ زوج های اساسی تبدیل فوریه گسسته در زمان و ضرایب سری فوریه در صورت متناوب بودن را نشان می دهد. اگر با کمک تعریف ها و خواص ارائه شده محتویات جدول را برای خود اثبات کنید در یادگیری و به خاطر سپاری آنها بسیار مفید خواهد بود.

جدول ۳-۱ زوج‌های اساسی تبدیل فوریه گسسته در زمان

سیگنال	تبدیل فوریه	ضرایب سری فوریه (در صورت متناوب بودن)
$\sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{N})n}$	$2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{N}\right)$	a_k
$e^{j\omega_0 n}$	$2\pi\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-\omega_0-2\pi l)$	$(a)\quad \omega_0=\frac{2\pi m}{N} \Rightarrow$ $a_k=\begin{cases}1 & k=m,\ m\pm N,\ m\pm 2N,\dots \\ o & \text{در غیر اینصورت}\end{cases}$ $(b)\quad \frac{\omega_0}{2\pi}=$ غیر گویا $\Rightarrow$ سیگنال نامتناوب است
$\cos\omega_0 n$	$\pi\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\left(\delta(\omega-\omega_0-2\pi l)+\delta(\omega+\omega_0-2\pi l)\right)$	$(a)\quad \omega_0=\frac{2\pi m}{N} \Rightarrow$ $a_k=\begin{cases}\frac{1}{2}, & k=\pm m,\pm N,\pm m\pm 2N,\dots \\ o & \text{در غیر اینصورت}\end{cases}$ $(b)\ \frac{\omega_0}{2\pi}$ غیر گویا $\Rightarrow$ سیگنال نامتناوب است
$\sin\omega_0 n$	$\frac{\pi}{j}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\left(\delta(\omega-\omega_0-2\pi l)-\delta(\omega+\omega_0-2\pi l)\right)$	$(a)\omega_0=\frac{2\pi r}{N}$ $a_k=\begin{cases}\frac{1}{2j} & k=r,r\pm N,r\pm 2N,\dots \\ -\frac{1}{2j} & k=-r,\ -r\pm N,\dots \\ 0 & \text{در غیر اینصورت}\end{cases}$ $(b)\frac{\omega_0}{2\pi}=$ غیر گویا $\Rightarrow$ سیگنال نامتناوب است
$x[n]=1$	$2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(\omega-2\pi l)$	$a_k=\begin{cases}1 & k=0,\pm N,\pm 2N,\dots \\ 0 & \text{در غیر اینصورت}\end{cases}$
$x[n]=\begin{cases}1 & \lvert n\rvert<N_1 \\ 0 & N_1<\lvert n\rvert\le N/2\end{cases}$ $x[n+N]=x[n]$	$2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\delta(\omega-\frac{2\pi k}{N})$	$a_k=\frac{\sin\left[(2\pi k/N)(N_1+\frac{1}{2})\right]}{N\sin[2\pi k/2N]}\quad k\neq 0,\pm N,\pm 2N,\dots$ $a_k=\frac{2N_1+1}{N}\quad k=0,\pm N,\pm 2N,\dots$
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta[n-kN]$	$\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-\frac{2\pi k}{N})$	$a_k=\frac{1}{N}$ برای هر k
$a^n u[n]\quad \lvert a\rvert<1$	$\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$	-
$x[n]=\begin{cases}1 & \lvert n\rvert\le N_1 \\ 0 & \lvert n\rvert>N_1\end{cases}$	$\frac{\sin\left[\omega(N_1+\frac{1}{2})\right]}{\sin(\omega/2)}$	-
$\frac{\sin Wn}{n}=\frac{W}{\pi}\text{sinc}\left(\frac{Wn}{\pi}\right)$ $0<W<\pi$	$X(\omega)=\begin{cases}1 & 0\le\lvert\omega\rvert\le W \\ 0 & W<\lvert\omega\rvert\le\pi\end{cases}$ متناوب با دوره ۲π	-
$\delta[n]$	1	-
$u[n]$	$\frac{1}{1-e^{-j\omega}}+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\pi\delta(\omega-2\pi k)$	-
$\delta[n-n_0]$	$e^{-j\omega n_0}$	-

$(n+1)a^n u[n] \quad \lvert a\rvert<1$	$\frac{1}{(1-ae^{-j\omega})^2}$	-
$\frac{(n+r-1)!}{n!(r-1)!}a^n u[n] \quad \lvert a\rvert<1$	$\frac{1}{(1-ae^{-j\omega})^r}$	-

۳-۹ جدول خلاصه معادلات سری و تبدیل فوریه

جدول ۳-۲ ، خلاصه معادلات مربوط به سری و تبدیل فوریه پیوسته و گسسته و خواص دو گانی بین آنها را نشان می دهد .

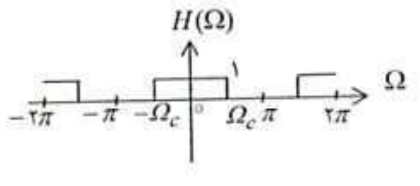
جدول ۳-۲

	پیوسته در زمان		گسسته در زمان	
	حوزه زمان	حوزه فرکانس	حوزه زمان	حوزه فرکانس
سری فوریه	$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$ متناوب و پیوسته	$a_k=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{jk\omega_0 t}dt$ گسسته و نامتناوب	$x[n]=\sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$ متناوب و گسسته	$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$ متناوب و گسسته
تبدیل فوریه	$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$ نامتناوب و پیوسته	$X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$ نامتناوب و پیوسته	$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\Omega)\cdot e^{j\Omega n}$ نا متناوب و گسسته	$X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$ متناوب و پیوسته

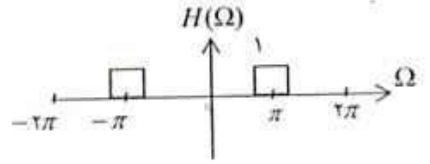
۳-۱۰ فیلتر کردن

پاسخ فرکانسی فیلترهای فرکانس گزین در سیستم های LTI گسسته در زمان در یک دوره تناوب به صورت زیر است .

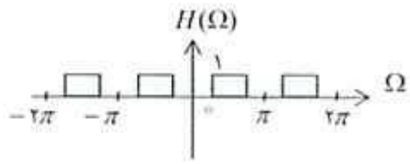
پایین گذره ایده آل:



بالاگذر ایده آل:

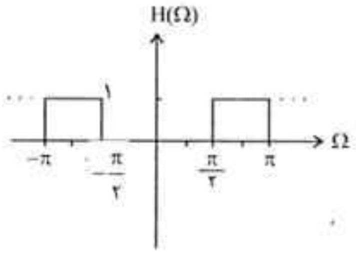


میان گذر ایده آل :



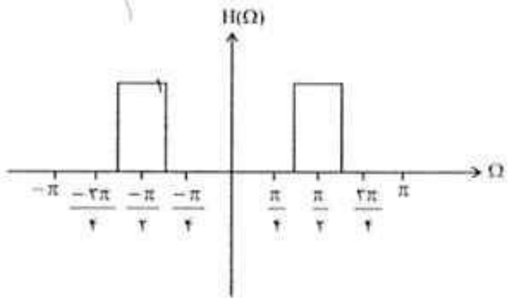
مثال ۳-۹: اگر ورودی گسسته $x[n]=\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)+\sin\left(\frac{3\pi}{4}n\right)$ از هر یک از فیلترهای ایده‌آل زمان گسسته زیر عبور داده شود خروجی چه خواهد بود؟

الف-



این سیستم فرکانس‌های $\frac{\pi}{2}\le|\Omega|\le\pi$ را عبور می‌دهد در نتیجه: $y[n]=\cos\left(\frac{3\pi}{4}n\right)$

ب-

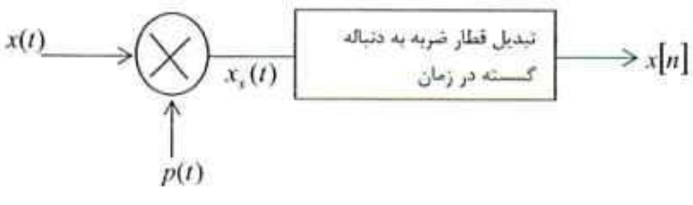


این سیستم فرکانس‌های $\frac{3\pi}{8}\le|\Omega|\le\frac{5\pi}{8}$ راعبور می‌دهد در نتیجه $y[n]=0$

* **نکته:** *البته توجه داشته باشید که سیگنال‌های متناوب هم تبدیل فوریه‌ی گسسته و پیوسته دارند.*

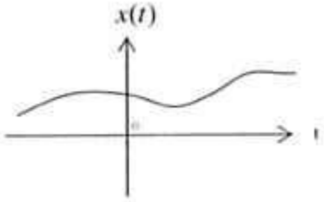
۳-۱۱ نمونه برداری

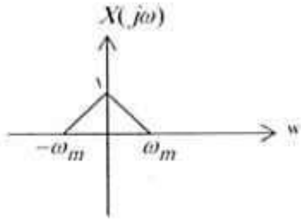
یک روش برای تبدیل سیگنال پیوسته به سیگنال زمان گسسته ، ضرب سیگنال زمان پیوسته مورد نظر در قطار ضربه متناوب و پس از آن تبدیل قطار ضربه به دنبالهٔ زمان گسسته می‌باشد . قطار ضربه $p(t)$ را تابع نمونه برداری ، دوره تناوب آن را تناوب نمونه برداری می‌نامند . $\omega_s=\frac{2\pi}{T}$ فرکانس نمونه برداری نامیده می‌شود .



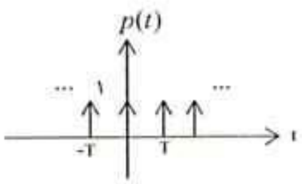
سیگنال $x(t)$ و طیف آن در شکل نشان داده شده و مراحل نمونه برداری نشان داده شده اند .

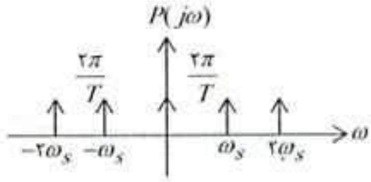
سیگنال پیوسته :



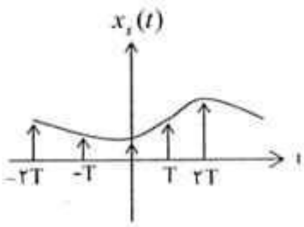


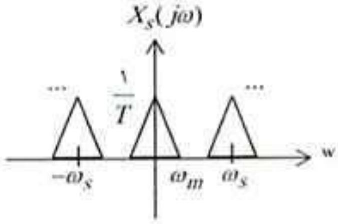
قطار ضربه پیوسته :



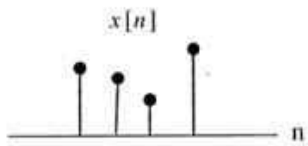


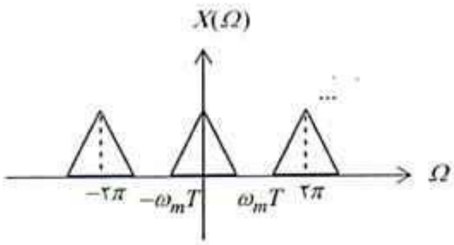
سیگنال پس از ضرب در قطار ضربهٔ پیوسته :





دنباله زمان گسسته :





$$x_s(t) = x(t).p(t) =$$

$$= x(t)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(nT)\delta(t-nT)$$

با توجه به خاصیت ضرب:

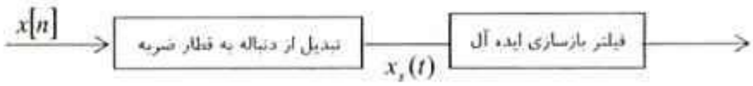
$$X_s(j\omega) = \frac{۱}{۲\pi}\left(X(j\omega)*P(j\omega)\right)$$

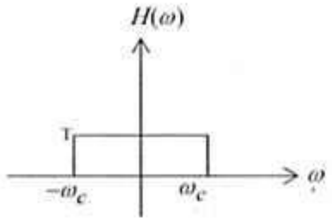
$$P(j\omega) = \frac{۲\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega - k\omega_s)$$

چون کانولوشن با ضربه تنها باعث جابه جایی سیگنال می‌شود :

$$X_s(j\omega)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(X(j(\omega-k\omega_s))\right)$$

اگر $\omega_M<\omega_s-\omega_M$ یا به عبارتی $\omega_s>2\omega_M$ باشد ، $X(\omega)$ های انتقال یافته همپوشانی ندارند و می‌توان $x(t)$ را از $x_s(t)$ با کمک یک فیلتر پایین گذر با بهره T و فرکانس قطع بزرگتر از ω_M و کوچکتر از $\omega_s-\omega_M$ به دست آورد .





$\omega_M<\omega_c<\omega_s-\omega_M$

قضیه نمونه برداری: فرض کنید $x(t)$ سیگنالی با باند محدود است یعنی در $|\omega|>\omega_m$: $X(\omega)=0$ در این صورت $x(t)$ به طور یکتا به وسیله نمونه های $x(nT)$: $n=0,\pm1,\dots$ تعیین می‌شود اگر $\omega_s>2\omega_m$ که در آن $\omega_s=\frac{2\pi}{T}$ است . فرکانس $2\omega_m$ که باید فرکانس نمونه برداری از آن بزرگتر باشد نرخ نایکوئیست نامیده می‌شود و ω_m اغلب فرکانس نایکوئیست نامیده می‌شود .

مثال ۳-۱۰: $x(t)$ یک سیگنال پیوسته است که نرخ نایکوئیست آن برابر ω_s می‌باشد. برای هر یک از سیگنال‌های زیر، نرخ نایکوئیست را بر حسب ω_s مشخص کنید؟

الف- $y(t)=\frac{dx(t)}{dt}$

با توجه به خاصیت مشتق‌گیری در زمان داریم: $Y(\omega)=j\omega X(\omega)$، پس به ازاء ω هایی که $X(\omega)$ صفر می‌باشد، $Y(\omega)$ هم صفر است. بنابراین نرخ نایکوئیست $y(t)$ یا $x(t)$ یکسان و برابر ω_s است.

ب- $y(t)=x^2(t)$

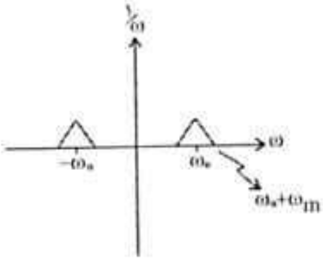
با توجه به خاصیت کانولوشن داریم: $Y(\omega)=\frac{1}{2\pi}X(\omega)*X(\omega)$، با توجه به آنچه که از فصل اول در مورد کانولوشن سیگنال‌های با طول محدود می‌دانیم، گستردگی فرکانسی $Y(\omega)$ دو برابر $X(\omega)$ بوده و نرخ نایکوئیست برای $y(t)$ برابر $2\omega_s$ می‌باشد.

ج- $y(t)=x\left(\frac{t}{4}\right)$

$x(t)$ با ضریب ۴ گسترده شده و $y(t)$ حاصل شده است. با توجه به خاصیت مقیاس زمانی $Y(\omega)=4X(4\omega)$ بوده و در نتیجه نرخ نایکوئیست $y(t)$ برابر $\frac{\omega_s}{4}$ می‌باشد.

د- $y(t)=x(t)\cos(\omega_0 t)$

با توجه به خاصیت شیفت فرکانسی $Y(\omega)=\frac{1}{2}X(\omega-\omega_0)+\frac{1}{2}X(\omega+\omega_0)$ می‌باشد، یعنی طیف x به اندازه ω_0 جابجا می‌شود در نتیجه نرخ نایکوئیست $y(t)$ برابر $\omega_s+2\omega_0$ می‌شود.



۳-۱۲ چند تمرین حل شده

مثال۳-۱۱، $x[n]$ یک سیگنال زمان گسسته با ویژگی های زیر است :

۱) $x[n]$ حقیقی و فرد است .

۲) $x[n]$ با دوره تناوب $N=6$ متناوب است .

۳) $\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}|x[n]|^2=10$

۴) $\sum_{n=<N>}(-1)^{\frac{n}{2}}x[n]=6j$

هدف تعیین ضرایب سری فوریه $x[n]$ است.

الف- چون $x[n]$ حقیقی و فرد است، a_kها موهومی محض و فرد بوده و در نتیجه از فرد بودن a_k داریم: $a_0=0$

ب- چون $x[n]$ با دوره $N=6$ متناوب است:

$$a_k=a_{k+6}\Rightarrow a_{-3}=a_3$$

از طرفی چون a_k فرد است :

$$a_k=-a_{-k}$$
$$a_{-3}=-a_3$$

در نتیجه $a_{-3}=-a_3=0$

نتیجه دیگر از این قسمت این است که a_k فقط ۶ مقدار مجزا می‌تواند داشته باشد. حال کافی است $a_{\pm1},a_{\pm2}$ را تعیین کنیم.

ج- قضیه پارسوال بیان می‌کند که:

$$\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}|x[n]|^2=\sum_{n=<N>}|a_k|^2$$

در نتیجه:

$$|a_{-2}|^2+|a_{-1}|^2+|a_0|^2+|a_1|^2+|a_2|^2+|a_3|^2=10$$
$$\Rightarrow |a_{-2}|^2+|a_{-1}|^2+|a_1|^2+|a_2|^2=10$$

از طرفی چون $a_{-k}=a_k^*$ برابر است داریم:

$$\Rightarrow 2|a_2|^2+2|a_1|^2=10$$

د-

$$\sum_{n=<N>} (-1)^{\frac{n}{2}} x[n] = \sum_{n=<N>} \left(e^{\pm j\pi}\right)^{\frac{n}{2}} x[n]$$

$$= \sum_{n=<N>} e^{\pm j\frac{\pi n}{2}} x[n] = 6j$$

انتهای رابطه فوق را با تعریف $a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$ مقایسه کنید نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} a_1 = j \Rightarrow a_{-1} = -j \\ a_1 = -j \Rightarrow a_{-1} = j \end{cases}$$

با توجه به نتیجه نهایی قسمت ج داریم:

$$\Rightarrow 2|a_2|^2 + 2|a_1|^2 = 2|a_2|^2 + 2|1|^2 = 10 \quad |a_2| = 2$$

چون a_k فرد است. $a_{-k} = -a_k$ و ضرایب موهومی محض‌اند داریم

$$\begin{cases} a_2 = -j2 \\ a_{-2} = j2 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} a_2 = j2 \\ a-2 = -j2 \end{cases}$$

در نتیجه مقادیر ممکن برای a_k ها می‌تواند به صورت زیر باشد:

a_{-2}	a_{-1}	a_0	a_1	a_2	a_3
$j2$	-j	0	j	$-j2$	0
$-j2$	-j	0	j	$j2$	0
$j2$	j	0	-j	$-j2$	0
$-j2$	j	0	-j	$j2$	0

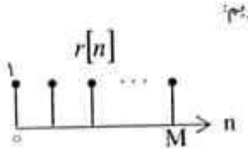
مثال ۳-۱۲: سیگنال زمان گسسته $w[n]$ به صورت زیر را در نظر بگیرید:

$$w[n] = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(1 - \cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right)\right) & 0 \le n \le M \\ 0 & other \end{cases}$$

که در آن M یک عدد صحیح زوج بزرگتر از یک است. تبدیل فوریهٔ $w[n]$ را تعیین می‌کنیم.

برای سهولت کار $r[n]$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$r[n] = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le M \\ 0 & other \end{cases}$$



$r[n]$ در واقع شیفت یافته سیگنال مستطیلی به اندازه $\frac{M}{2}$ به سمت راست می‌باشد (چون M زوج است $\frac{M}{2}$ صحیح می‌باشد).

در جدول زوج تبدیل های مهم فوریه داریم:

$$x[n] = \begin{cases} 1 & |n| \le N_1 \\ 0 & |n| > N_1 \end{cases} \leftrightarrow \frac{\sin\left(\Omega\left(N_1 + \frac{1}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)}$$

با توجه به خاصیت شیفت زمانی

$$R(\Omega)=e^{-j\Omega\frac{M}{2}}\frac{\sin\left[\Omega\left(\frac{M+1}{2}\right)\right]}{\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)}$$

حال $w[n]$ را بر حسب $r[n]$ بسط می‌دهیم:

$$w[n]=r[n]\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi n}{M}\right)$$
$$=r[n]\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}e^{j\frac{2\pi n}{M}}-\frac{1}{4}e^{-j\frac{2\pi n}{M}}\right)$$
$$=\frac{1}{2}r[n]-\frac{1}{4}r[n]e^{j\frac{2\pi n}{M}}-\frac{1}{4}r[n]e^{-j\frac{2\pi n}{M}}$$

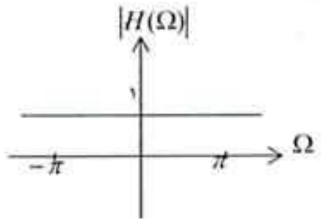
با توجه به خاصیت شیفت فرکانسی

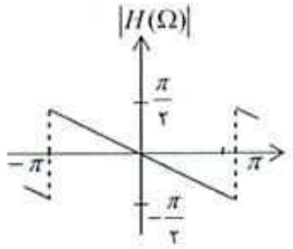
$$W(\Omega)=\frac{1}{2}R(\Omega)-\frac{1}{4}R\left(\Omega-\frac{2\pi}{M}\right)-\frac{1}{4}R\left(\Omega+\frac{2\pi}{M}\right)$$

مثال ۳-۱۳: سیستم زمان گسسته به صورت زیر مفروض است:

$$x[n]\longrightarrow\boxed{H(\Omega)}\longrightarrow y[n]$$

سیگنال ورودی $x[n]=\cos\left(\frac{5\pi}{2}n-\frac{\pi}{4}\right)$ بر آن اعمال می‌شود اگر دامنه و فاز $H(\Omega)$ در یک بریود مطابق شکل زیر باشند:





$y[n]$ را تعیین می‌کنیم:

$$x[n]=\cos\left(\frac{5\pi}{2}n-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}e^{j\frac{5\pi}{2}n}e^{-j\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{2}e^{-j\frac{5\pi}{2}n}e^{j\frac{\pi}{4}}$$

از خاصیت تناوبی نمایی گسسته: $=\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{j\frac{\pi}{2}n}+\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}e^{-j\frac{\pi}{2}n}$

$$X(\Omega)=\sum_{\ell=-\infty}^{+\infty}\pi e^{-j\frac{\pi}{4}}\delta\left(\Omega-\frac{\pi}{2}+2\pi\ell\right)+\pi e^{j\frac{\pi}{4}}\delta\left(\Omega+\frac{\pi}{2}+2\pi\ell\right)$$
$$|Y(\Omega)|=|X(\Omega)||H(\Omega)|$$
$$\angle Y(\Omega)=\angle X(\Omega)+\angle H(\Omega)$$

$Y(\Omega)$ فقط در محل ضربه های با فاصله $\frac{\pi}{2}+2\pi\ell, -\frac{\pi}{2}+2\pi\ell$ وجود دارد و بقیه جاها صفر است.

$$\begin{cases} Y\left(\frac{\pi}{2}+2\pi\ell\right)=\pi\delta\left(\Omega-\frac{\pi}{2}+2\pi\ell\right)e^{-j\frac{\pi}{2}}e^{-j\frac{\pi}{2}} & \ell=0,\pm 1,\dots \\ Y\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi\ell\right)=\pi\delta\left(\Omega+\frac{\pi}{2}+2\pi\ell\right)e^{j\frac{\pi}{2}}e^{j\frac{\pi}{2}} & \ell=0,\pm 1,\dots \\ Y(\Omega)=0 & other \end{cases}$$

$$Y(\Omega)=\sum_{\ell=-\infty}^{+\infty}\frac{\pi}{j}\delta\left(\Omega-\frac{\pi}{2}+2\pi\ell\right)-\frac{\pi}{j}\delta\left(\Omega+\frac{\pi}{2}+2\pi\ell\right)$$

$$\Rightarrow y[n]=\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$$

تست‌های طبقه‌بندی شده فصل سوم

۱- یک سیستم گسسته خطی و تغییرناپذیر با زمان را در نظر بگیرید که دارای پاسخ ضربه $h[n]=(\frac{1}{2})^n u[n]$ باشد u[n] مشخص‌کننده دنباله پله واحد می‌باشد). خروجی این سیستم y[n] را وقتی تبدیل فوریه ورودی $X(\Omega)=\frac{1}{1-\frac{3}{4}e^{-j\Omega}}$ باشد برابر کدام است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۶)

۱) $[-2(\frac{1}{2})^n-3(\frac{3}{4})^n]u[n]$

۲) $[2(\frac{1}{2})^n-3(\frac{3}{4})^n]u[n]$

۳) $[2(\frac{1}{2})^n+3(\frac{3}{4})^n]u[n]$

۴) $[-2(\frac{1}{2})^n+3(\frac{3}{4})^n]u[n]$

۲- x[n] یک سیگنال گسسته زمان با دوره تناوب اساسی N=۴ و ضرائب سری فوریه a_k است. اگر یک دوره تناوب x[n] به صورت زیر باشد کدام یک از گزینه‌ها صحیح خواهد بود؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۶)

$$x[n]=\begin{cases}1 & n=0\\ -1 & n=2\\ 0 & n=1,3\end{cases}$$

۱) $a_{-101}=\frac{1}{2}, a_{100}=0, a_{98}=0$

۲) $a_{-101}=0, a_{100}=\frac{1}{2}, a_{98}=0$

۳) $a_{-101}=0, a_{100}=\frac{1}{2}, a_{98}=\frac{1}{2}$

۴) $a_{-101}=0, a_{100}=0, a_{98}=\frac{1}{2}$

۳- اگر $X(\omega)$ تبدیل فوریه سیگنال زمان گسسته x[n] باشد در آن صورت ضرایب بسط سری فوریه X(t) عبارتند از: (مهندسی برق ـ سراسری ۸۶)

۱) $x[k]$

۲) $x[-k]$

۳) $\frac{1}{2\pi}x[k]$

۴) $\frac{1}{2\pi}x[-k]$

۴- x(t) سیگنال متناوب با پریود T و ضرائب سری فوریه a_k است. اگر y[n] دنباله زمان گسسته با تبدیل فوریه $Y(\omega)$ باشد و داشته باشیم $a_k=y[-k], \forall k$ در آن صورت کدام گزینه کامل‌تر است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۶)

۱) $x(\omega)=Y(l\omega)$ و l عدد صحیح حقیقی

۲) $x(\omega)=Y(\alpha\omega)$ و α عدد حقیقی دلخواه

۳) $x(\omega)=Y(\omega)$

۴) $x(\omega)=Y(\frac{2\pi}{T}\omega)$

۵- ضرایب سری فوریه دنباله متناوب $x[n]$ دارای دوره تناوب N (زوج) را با $X[k]$ نمایش می‌دهیم. درآن صورت ضرایب سری فوریه دنباله $(-1)^n x[n]$ برابرند با: (مهندسی برق ـ سراسری ۸۴)

۱) $X[-k]$

۲) $-X[k]$

۳) $X\left[k-\frac{N}{2}\right]$

۴) $-X\left[k+\frac{N}{2}\right]$

۶- سیگنال زمان گسسته $x[n]$ پریودیک با پریود $N_\circ=4$ است. ضرایب سری فوریه آن عبارتند از $c_3=j, c_2=1, c_1=-j, c_\circ=-1$ اگر $y[n]=x[-n+1]$ باشد و ضرایب سری فوریه آن را با $d_3, d_2, d_1, d_\circ$ نشان دهیم، d_2 چه خواهد بود؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۳)

۱) -1

۲) $-j$

۳) 1

۴) j

۷- در صورتی که رابطه بین تبدیل فوریه ورودی و خروجی یک سیستم زمان گسسته به صورت $Y(\Omega)=\int_{\Omega-\frac{\pi}{4}}^{\Omega+\frac{\pi}{4}} X(\theta)d\theta$ باشد، آنگاه رابطه بین ورودی ـ خروجی در حوزه زمان برابر است با: (مهندسی برق ـ سراسری ۸۳)

$$\begin{cases} x[n]=\dfrac{\sin W_n}{n\pi} \xleftrightarrow{DFT} X(\Omega)=\begin{cases}1 & 0\le|\Omega|\le W\\ 0 & W<|\Omega|\le\pi\end{cases}\\ 0<W<\pi\end{cases}$$

$X(\Omega)$ متناوب با دوره 2π

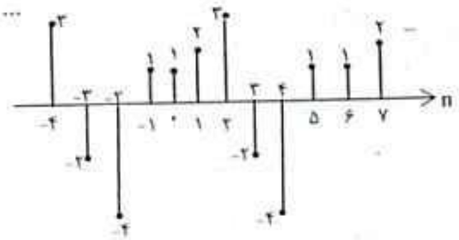
۱) $y[n]=2x[n]\dfrac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n}$

۲) $y[n]=x[n]\dfrac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n\pi}$

۳) $y[n]=2x[n]\dfrac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n\pi}$

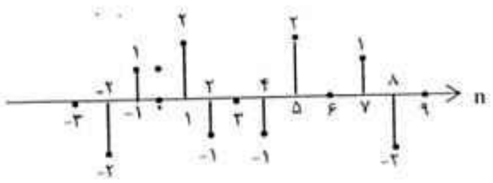
۴) $y[n]=2\pi x[n]\dfrac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n}$

۸- برای سیگنال گسسته و متناوب $x[n]$ در شکل زیر با ضرایب سری فوریه a_k مقدار $\sum_{k=-3}^{3} a_k$ کدام است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۲)



۱) $\frac{-1}{6}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{-5}{6}$ ۴) $\frac{5}{6}$

۹- فرض کنید $X(j\Omega)$ مشخص کننده تبدیل فوریه سیگنال $x[n]$ که در شکل نمایش داده شده است باشد. در این صورت مقدار $X(0)$ و فاز $X(j\Omega)$ به ترتیب برابر است با: (مهندسی برق ـ سراسری ۸۲)



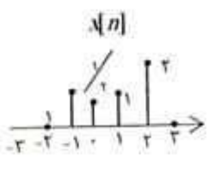
۱) $-2\Omega, 0$

۲) $-3\Omega, 0$

۳) $0, 6$

۴) $-2\Omega, 6$

۱۰- اگر $x[n]$ به صورت زیر باشد، مقدار $\int_{-\pi}^{\pi}\left|\dfrac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}\right|^2 d\omega$ کدام است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۲)



۱) 12π

۲) 18π

۳) 36π

۴) $\frac{45}{2}\pi$

۱۱- $x(t)$ یک سیگنال متناوب با دوره تناوب اصلی T_m و فرکانس اصلی $\omega_m = \frac{2\pi}{T_m}$ می‌باشد. نرخ نایکوئیست این سیگنال با کدام گزینه برابر است؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۸۲)

۱) ω_m
۲) $2\omega_m$
۳) مضرب محدود و صحیحی از ω_m
۴) به شکل موج $x(t)$ بستگی دارد

۱۲- رابطه بین ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ یک سیستم گسسته LTI توسط معادله زیر توصیف شده است.

$$y[n] = -0/75\,y[n-1] + 1/5\,x[n]$$

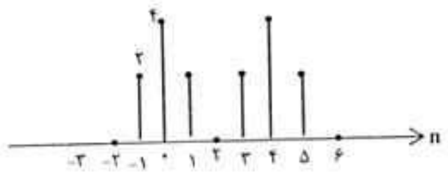
کدام یک از گزینه‌های زیر در مورد این سیستم صدق می‌کند؟

(مهندسی برق ـ آزاد ۸۲)

۱) سیستم یک فیلتر بالا گذران از نوع FIR است
۲) سستم یک فیلتر بالاگذران از نوع IIR است
۳) سیستم یک فیلتر پایین گذران از نوع FIR است
۴) سیستم یک فیلتر پایین گذران از نوع IIR است

۱۳- سیگنال $x[n]$ نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید. مقدار DC تبدیل فوریه آن چقدر است؟

(مهندسی برق ـ آزاد ۸۲)



۱) ۱۶
۲) $\frac{16}{7}$
۳) $\frac{8}{\pi}$
۴) $\frac{8}{7\pi}$

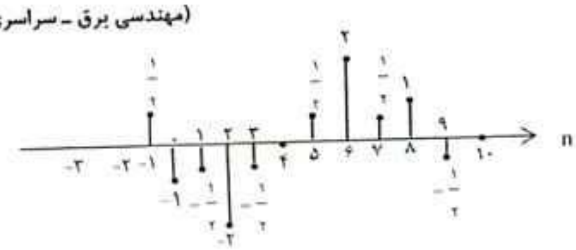
۱۴- کدام گزینه بیان کننده ضرایب سری فوریه برای سیگنال گسسته $x[n] = \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)$ می‌باشد؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۸۱)

۱) $a_1 = \frac{-1}{4j}, a_5 = \frac{1}{4j}, a_7 = \frac{1}{2j}, a_{11} = -\frac{1}{2j}$
۲) $a_1 = \frac{1}{4j}, a_5 = \frac{-1}{4j}, a_7 = \frac{1}{4j}, a_{11} = -\frac{1}{4j}$ و بقیه ضرایب در یک پریود صفر هستند.
۳) $a_1 = \frac{1}{2j}, a_5 = \frac{-1}{2j}, a_7 = \frac{1}{2j}, a_{11} = -\frac{1}{2j}$ و بقیه ضرایب در یک پریود صفر هستند.
۴) $a_1 = \frac{-1}{4j}, a_5 = \frac{1}{4j}, a_7 = \frac{-1}{4j}, a_{11} = \frac{1}{4j}$ و بقیه ضرایب در یک پریود صفر هستند.

۱۵- اگر سیگنال $x[n]$ به صورت زیر باشد، در این صورت فاز تبدیل فوریه این سیگنال کدام است؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۸۱)



۱) صفر
۲) $-\frac{\pi}{2}$
۳) -4ω
۴) $-4\omega \pm \frac{\pi}{2}$

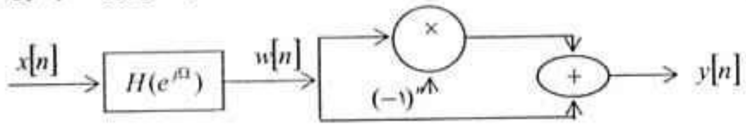
۱۶- تبدیل فوریه سیگنال $x[n]=4^{-n}u[n+2]$ کدام است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۱)

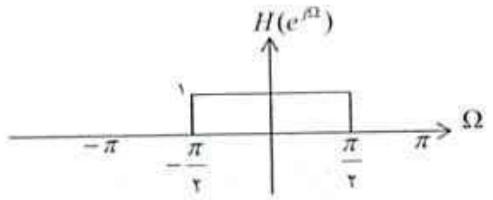
۱) $X(e^{j\Omega})=\frac{64e^{-2j\Omega}}{4-e^{-j\Omega}}$ ۲) $X(e^{j\Omega})=\frac{16e^{-j\Omega}}{4-e^{-j\Omega}}$

۳) $X(e^{j\Omega})=\frac{64e^{2j\Omega}}{4-e^{-j\Omega}}$ ۴) $X(e^{j\Omega})=\frac{16e^{j\Omega}}{4-e^{-j\Omega}}$

۱۷- با فرض اینکه ورودی سیستم مقابل برابر ضربه واحد باشد، در این صورت خروجی آن کدام است؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۸۱)





۱) $\delta[n]$
۲) $h[n]$
۳) $\left[(-1)^n+1\right]h[n]$
۴) $\left[(-1)^n+1\right]*h[n]$

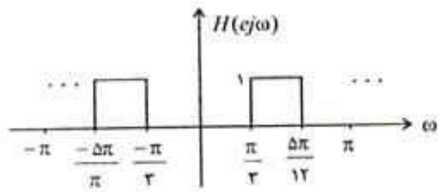
۱۸- اگر تبدیل فوریه سیگنال زمان گسسته $g[n]=x[2n]$، $G(e^{j\omega})$ و تبدیل فوریه سیگنال گسسته در زمان $v[n]=\begin{cases}x[n] & n \text{ زوج}\\ 0 & n \text{ فرد}\end{cases}$، $V(e^{j\omega})$ باشد آنگاه کدامیک از روابط زیر صحیح است؟ (مهندسی برق ـ آزاد ۸۱)

۱) $G(e^{j\omega})=V(e^{j2\omega})$ ۲) $G(e^{j\omega})=V\left(e^{-\frac{j\omega}{2}}\right)$

۳) $G(e^{j\omega})=V(e^{-2j\omega})$ ۴) $G(e^{j\omega})=V\left(e^{\frac{j\omega}{2}}\right)$

۱۹- اگر $x[n]$ سیگنال متناوب $1+\sin\left(\frac{3\pi}{8}n+\frac{\pi}{4}\right)$ باشد، فیلتر شده $x[n]$ با فیلتر $H(e^{j\omega})$ به شکل زیر کدام است؟

(مهندسی برق ـ آزاد ۸۱)



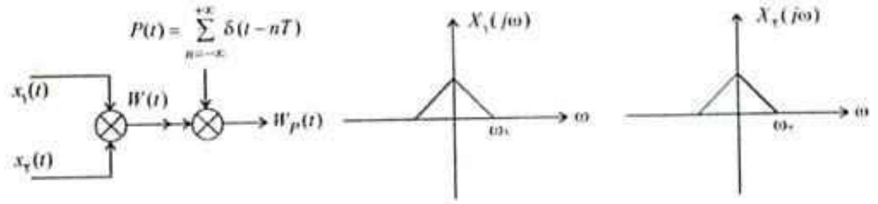
۱) $1+\sin\left(\frac{3\pi}{8}n+\frac{\pi}{4}\right)$ ۲) صفر ۳) $\sin\left(\frac{3\pi}{8}n+\frac{\pi}{4}\right)$ ۴) $1+\cos\left(\frac{3\pi}{8}n+\frac{\pi}{4}\right)$

۲۰- نرخ نایکوئیست سیگنال $x(t)$ زیر کدام است؟ (مهندسی برق ـ آزاد ۸۱)

$$x(t)=\left(\frac{\sin(4000\pi t)}{\pi t}\right)^2$$

۱) $8000\,Hz$ ۲) $16000\,Hz$ ۳) $4000\,Hz$ ۴) $32000\,Hz$

۲۱- حداکثر پریود نمونه برداری برای اینکه بتوان $w(t)$ را از $w_p(t)$ بازیابی کرد کدام است؟ (مهندسی برق ـ آزاد ۸۱)



۱) $\dfrac{\pi}{2(\omega_1+\omega_2)}$ ۲) $\dfrac{\pi}{\omega_1+\omega_2}$ ۳) $\dfrac{1}{2(\omega_1+\omega_2)}$ ۴) $\dfrac{2\pi}{\omega_1+\omega_2}$

۲۲- $x[n]$ را یک سیگنال متناوب با پریود اصلی N و ضرایب سری فوریه $a[k]$ در نظر می‌گیریم $a[n]$ نیز سیگنالی متناوب است. ضرایب سری فوریه آن کدام است ؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۰)

۱) $x[k]$ ۲) $x[-k]$ ۳) $\frac{1}{N}x[k]$ ۴) $\frac{1}{N}x[-k]$

۲۳- اگر بین سیگنال های زمان گسسته $x[n]$ و $y[n]$ رابطه زیر برقرار باشد . آنگاه چه رابطه ای بین تبدیل فوریه آنها یعنی $X(\omega)$ و $Y(\omega)$ برقرار است ؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۰)

$$y[n]=\begin{cases}x[-n], & n \text{ زوج}\\ -x[-n], & n \text{ فرد}\end{cases}$$

۱) $Y(\omega)=X(\pi-\omega)$ ۲) $Y(\omega)=X(\omega-\pi)$
۳) $Y(\omega)=X^*(\omega-\pi)$ ۴) $Y(\omega)=X^*(\pi-\omega)$

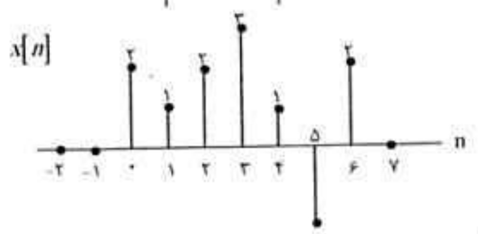
۲۴- گر ضرایب سری فوریه سیگنال گسسته و متناوب $x[n]$ را با a_k نشان دهیم و ضرایب سری فوریه سیگنال $y[n]=-x[-n-3]$ را b_k بنامیم. رابطه a_k و b_k چیست ؟ (دوره تناوب هر دو سیگنال N_0 است). (مهندسی برق ـ آزاد ۸۰)

۱) $b_k=e^{-jk\frac{6\pi}{N}}a_{-k}$ ۲) $b_k=-e^{-jk\frac{6\pi}{N}}a_k$ ۳) $b_k=-e^{jk\frac{6\pi}{N}}a_{-k}$ ۴) $b_k=-e^{jk\frac{6\pi}{N}}a_k$

۲۵- سیگنال گسسته $x[n]$ در شکل زیر نشان داده شده است. اگر $X(e^{j\omega})$ تبدیل فوریه آن باشد، مقادیر زیر کدام است؟ (مهندسی برق ـ آزاد ۸۰)

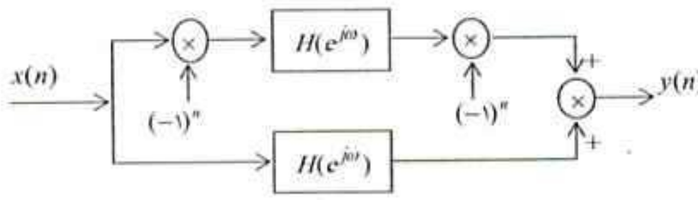
$$a=X(e^{j\pi}) \qquad b=\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})d\omega \qquad c=\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}\right|^2 d\omega$$

$x[n]=0 : n<0\,,\ n\geq 7$



۱) $a=5, b=4\pi, c=716\pi$ ۲) $a=5, b=2\pi, c=540\pi$
۳) $a=9, b=4\pi, c=716\pi$ ۴) $a=9, b=2\pi, c=540\pi$

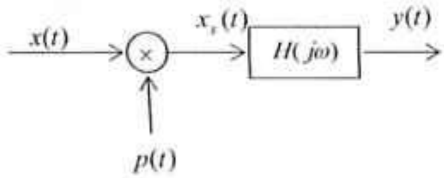
۲۶- یک فیلتر پایین گذران ایده‌آل گسسته زمان با پاسخ فرکانسی $H\left(e^{j\omega}\right)$ دارای فرکانس قطع $\frac{\pi}{۴}$ و بهره ۱ در باند عبور می‌باشد سیستم مقابل چه نوع فیلتری می‌باشد: (مهندسی برق ـ آزاد ۸۰)

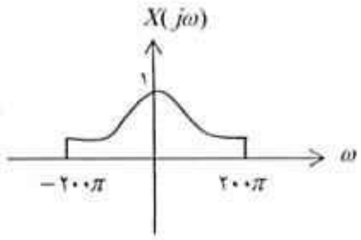


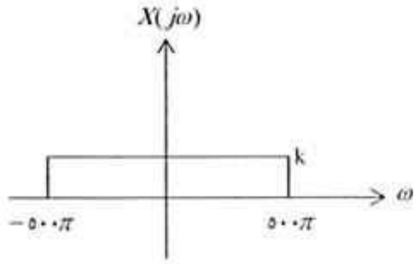
۱) پایین گذر ایده آل با فرکانس قطع $\frac{\pi}{۲}$
۲) پایین گذر ایده آل با فرکانس قطع $\frac{۳\pi}{۴}$
۳) میان گذر ایده آل با فرکانس های قطع $\frac{\pi}{۴},\frac{۳\pi}{۴}$
۴) میان نگذر ایده آل با فرکانس های قطع $\frac{\pi}{۴},\frac{۳\pi}{۴}$

۲۷- از سیگنال $x(t)$ به وسیله قطار ضربه $p(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT_S)$ نمونه برداری می‌شود و سیگنال نمونه برداری شده از یک فیلتر پایین گذر با پاسخ فرکانسی $H(j\omega)$ در شکل مقابل عبور داده می‌شود مقدار k و حداکثر T_S را طوری تعیین کنید که $y(t)=x(t)$ (طیف سیگنال ورودی داده شده است) (مهندسی برق ـ آزاد ۸۰)

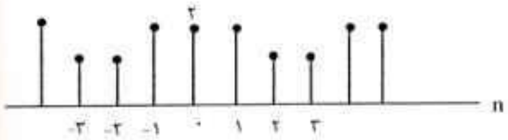
۱) $T_S<\frac{۱}{۱۰۰}s, k=T_S$
۲) $T_S<\frac{۱}{۱۵۰}s, k=T_S$
۳) $T_S<\frac{۱}{۳۵۰}s, k=T_S$
۴) $T_S<\frac{۱}{۲۵۰}s, k=۲T_S$

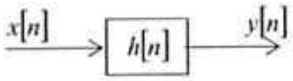


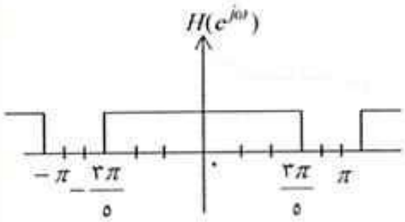




۲۸- سیگنال گسسته و متناوب $x[n]$ از یک فیلتر پایین گذر ایده آل عبور می‌کند. سیگنال خروجی کدام است؟
(مهندسی برق ـ آزاد ۸۰)







۱) $y[n]=\frac{16}{5}\pi$

۲) $y[n]=\frac{16}{5}\pi+0.32\cos\frac{\pi n}{5}$

۳) $y[n]=\frac{16}{5}\pi+0.32\cos\frac{2\pi n}{5}$

۴) $y[n]=\frac{16}{5}\pi+2\cos\frac{\pi n}{5}+0.32\cos\frac{2\pi n}{5}$

۲۹- اگر ضرایب سری فوریه سیگنال زمان گسسته $x[n]=(-1)^n$ را با $\{a_n\}$ و ضرایب سری فوریه سیگنال $y[n]=x[n+1]$ را با $\{b_n\}$ نشان دهیم، مقادیر a_0 ، a_1 ، b_0 ، b_1 چقدر خواهد بود؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۷۹)

۱) $a_0=0, a_1=1, b_0=0, b_1=-1$

۲) $a_0=0, a_1=1, b_0=0, b_1=j$

۳) $a_0=1, a_1=-1, b_0=-1, b_1=1$

۴) $a_0=1, a_1=-1, b_0=j, b_1=-j$

۳۰- دو سیستم زمان گسسته LTI توسط معادلات تفاضلی زیر توصیف شده اند:

سیستم ۱: $y_1[n]=0.9y_1[n-1]+0.1x_1[n]$

سیستم ۲: $y_2[n]=-0.9y_2[n-1]+0.1x_2[n]$

کدام گزینه در مورد این دو سیستم صحیح است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۷۹)

۱) هر دو سیستم فیلترهای بالاگذر هستند.

۲) هر دو سیستم فیلترهای پایین گذر هستند.

۳) سیستم ۱ فیلتر پایین گذر و سیستم ۲ فیلتر بالاگذر است.

۴) سیستم ۱ فیلتر بالاگذر و سیستم ۲ فیلتر پایین گذر است.

۳۱- سیگنال زمان گسسته پریود یک $x[n]=\{\dots,2,1,0,2,1,0,\dots\}$ که در آن نمونه سیگنال $x[0]=2$ می‌باشد را در نظر بگیرید. ضریب $e^{j\frac{2\pi}{3}n}$ در بسط به سری فوریه این سیگنال چیست؟ (مهندسی برق ـ آزاد ۷۹)

۱) $\frac{-1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}$

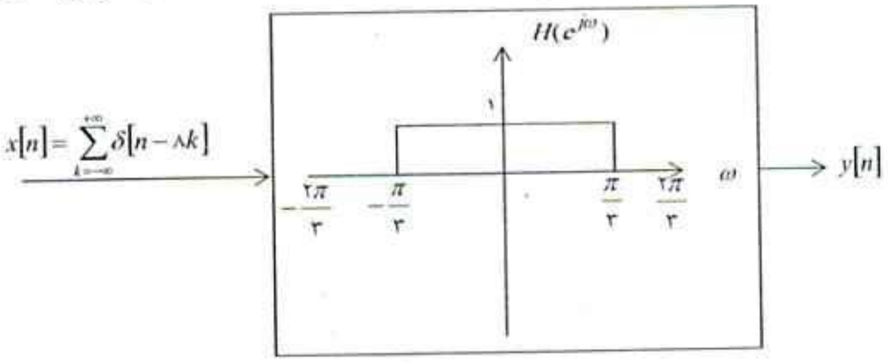
۲) $\frac{-1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{6}$

۳) $\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{6}$

۴) $\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}$

۳۲- در سیستم نشان داده شده در شکل زیر و برای ورودی مشخص شده، خروجی $y[n]$ سیستم کدام است؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۷۸)



۱) $\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\cos\frac{\pi n}{4}$

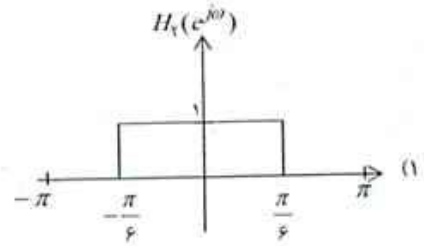
۲) $\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\cos\frac{\pi n}{8}$

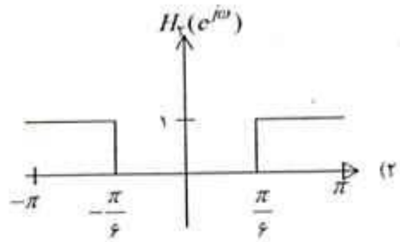
۳) $\frac{1}{4\pi}+\frac{1}{2\pi}\cos\frac{\pi n}{4}$

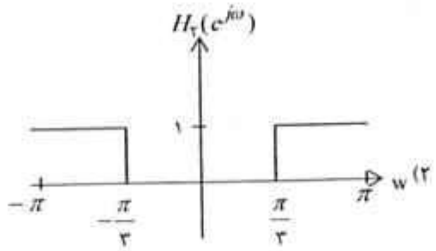
۴) $\frac{1}{4\pi}+\frac{1}{2\pi}\cos\frac{\pi n}{8}$

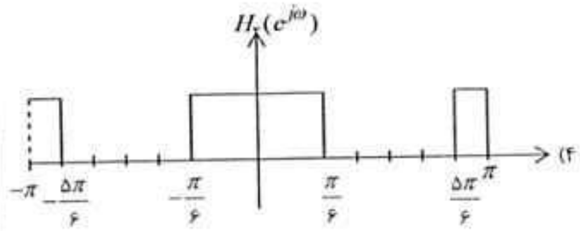
۳۳- اگر $h_1[n]$ پاسخ ضربه یک فیلتر پایین گذر ایده آل با فرکانس قطع $\omega=\frac{\pi}{3}$ باشد، آنگاه فیلتری با پاسخ ضربه $h_2[n]=\begin{cases} h_1\left[\frac{n}{2}\right] : & n \text{ زوج} \\ 0 : & n \text{ فرد} \end{cases}$ دارای کدام مشخصه است؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۷۸)









۳۴- رابطه بین یک سیگنال زمان پیوسته با انرژی محدود $\varphi(t)$ و یک سیگنال زمان گسسته با انرژی محدود $h[n]$ به صورت زیر است:

$$\varphi(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]\varphi(2t-n)$$

اگر تبدیل فوریه زمان گسسته $h[n]$ را با $H(\omega)$ و تبدیل فوریه زمان پیوسته $\varphi(t)$ را با $\Phi(\omega)$ نشان دهیم، رابطه بین این تبدیل فوریه کدام است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۷۸)

۱) $\Phi(\omega)\ H(\omega)=2\Phi(2\omega)$

۲) $\Phi(\omega)\ H(\omega)=2\Phi\left(\frac{\omega}{2}\right)$

۳) $\Phi(\omega)\ H(\omega)=\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{\omega}{2}\right)$

۴) $\Phi(\omega)\ H(\omega)=\frac{1}{2}\Phi(2\omega)$

پاسخ تشریحی تست‌های طبقه‌بندی شده فصل سوم

۱- گزینه «۴»- (ساده)

$$Y(\Omega)=X(\Omega).H(\Omega)$$

$$\mathrm{Y}(\Omega)=\frac{۱}{۱-\frac{۳}{۴}e^{-j\Omega}}.\frac{۱}{۱-\frac{۱}{۲}e^{-j\Omega}}=\frac{-۲}{۱-\frac{۱}{۲}e^{-j\Omega}}+\frac{۳}{۱-\frac{۳}{۴}e^{-j\Omega}}$$

$$\Rightarrow y[n]=[-۲(\frac{۱}{۲})^n+۳(\frac{۳}{۴})^n]u[n]$$

از روی پاسخ ضربه داده شده، $H(\Omega)$ را تعیین کردیم، در مرحله بعد از گسترش به کسرهای جزئی استفاده کردیم

۲- گزینه «۱»- (ساده)

با توجه به تعریف داریم:

$$a_k=\frac{۱}{N}\sum_{n=<N>}x[n]e^{-jk\frac{۲\pi}{N}n}$$

$$=\frac{۱}{۴}(۱-e^{-j\pi k})$$

داریم:

$$a_{۱۰۰}=a_{۹۸}=۰ \text{ و } a_{-۱۰۱}=\frac{۱}{۲}$$

۳- گزینه «۲»- (متوسط)

تعریف عکس تبدیل فوریه سیگنال زمان گسسته به صورت زیر است.

$$X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]e^{-j\Omega n}$$

که خود $X(\Omega)$ پیوسته و با دوره ۲π متناوب است. در این صورت ضرایب بسط سری فوریه برای ان قابل محاسبه‌اند که با q_k نشان داده می‌شوند. تعریف عکس سری فوریه زمان پیوسته به قرار زیر است.

$$\mathrm{X}(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk\frac{۲\pi}{۲\pi}t}$$

با قیاس این دو رابطه داریم $a_k=x[-k]$ (می‌توانید به خاصیت دوگانی در بخش ۳-۶ هم استناد کنید)

۴- گزینه «۴»- (متوسط)

تعریف عکس سری فوریه سیگنال زمان گسسته بدین قرار است:

$$Y(\Omega)=\sum_{h=-\infty}^{+\infty}y[n]e^{-j\Omega n}$$

عکس سری فوریه زمان پیوسته به صورت زیر است.

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk\frac{۲\pi}{T}t}$$

که برای این مسأله به صورت زیر بازنویسی می‌شود.

$$x(\Omega)=\sum_{h=-\infty}^{+\infty}y[-n]e^{j\frac{۲\pi}{T}\Omega n}$$

با قیاس رابطه اولی با سومی داریم:

۵- گزینه «۳» - (ساده)

روش اول : با توجه به خاصیت شیفت فرکانس در رابطه ۳-۸ داریم

$$-1 = e^{j\pi} :$$

$$\left(e^{j\pi}\right)^n = e^{j\frac{N}{2}\frac{2\pi}{N}n} \Rightarrow$$

$$X\left[k-\frac{N}{2}\right] \leftrightarrow (-1)^n x[n]$$

روش دوم : اگر خاصیت فوق را به خاطر ندارید می‌توانید از محاسبه مستقیم استفاده کنید :

$$y[n] = (-1)^n x[n]$$

$$Y[k] = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\pi n} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}n\left(k-\frac{N}{2}\right)} = X\left[k-\frac{N}{2}\right]$$

۶- گزینه «۱»ـ (ساده)

$$y[n] = x[-n+1] = x[-(n-1)]$$

از خواص سری فوریه گسسته :

$$d_k = c_{-k} e^{-j(-k)\frac{2\pi}{N}\times 1}$$

$$d_2 = c_{-2} e^{j2\frac{2\pi}{4}\times 1} = c_{-2}(-1) = -c_{-2}$$

از طرفی: $c_{-k} = c_{-k+N} \Rightarrow c_{-2} = c_2$

$$d_2 = -c_2 = -1$$

۷- گزینه «۱»ـ (متوسط)

$Z(\Omega)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$Z(\Omega) = \begin{cases} 1 & 0 \le |\Omega| \le \frac{\pi}{4} \\ 0 & \frac{\pi}{4} \le |\Omega| \le \pi \end{cases} \leftrightarrow z[n] = \frac{\sin\frac{\pi}{4}n}{n\pi}$$

از طرفی از خواص تبدیل فوریه:

$$Y(\Omega) = Z(\Omega) * X(\Omega) \leftrightarrow y[n] = 2\pi\ x[n] z[n]$$

$$Y(\Omega) = \int_{-\pi}^{\pi} Z(\Omega-\theta) X(\theta) d\theta = \int_{\Omega-\frac{\pi}{4}}^{\Omega+\frac{\pi}{4}} X(\theta) d\theta$$

$$\Rightarrow y[n] = 2\pi x[n] \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{4}n}{\pi n} = \frac{2\sin\frac{\pi}{4}n}{n} x[n]$$

۸- **گزینه «۴»- (متوسط)**

در این سیگنال $N=6$ است. از طرفی از تعریف سری فوریه داریم:

$$x[n]=\sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$x[0]=\sum_{k=-2}^{3} a_k = 1$$

از تعریف ضرایب سری فوریه:

$$a_3=\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{5} x[n]e^{-j3\frac{2\pi}{6}n}$$

$$=\frac{1}{6}\times\sum_{n=0}^{5} x[n](-1)^n=\frac{-1}{6}$$

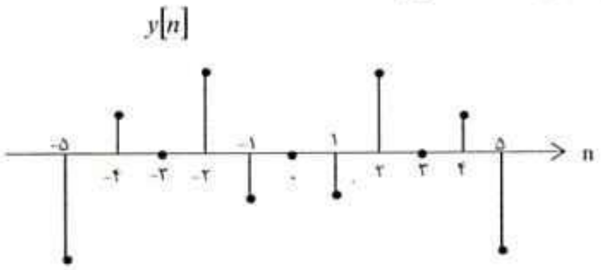
$$\sum_{k=-2}^{2} a_k = 1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

۹- **گزینه «۲»- (ساده)**

$$X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$$

$$X(0)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]=0$$

تعریف می‌کنیم $y[n]=x[n+2]$ در نتیجه $y[n]$ به صورت زیر خواهد شد:



که حقیقی و زوج است بنابراین تبدیل فوریه آن حقیقی می‌باشد:

$$\angle Y(j\Omega)=0\quad,\qquad Y(j\Omega)=e^{j2\Omega}X(j\Omega)$$

$$\angle Y(j\Omega)=\angle e^{j2\Omega}+\angle X(j\Omega)=0$$

$$\angle X(j\Omega)=-2\Omega$$

۱۰- **گزینه «۳»- (ساده)**

رابطه پارسوال بیان می‌کند:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x[n]|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}|X(\Omega)|^2 d\Omega$$

از طرفی خاصیت مشتق گیری بیان می‌کند:

$$-jn\ x[n]\leftrightarrow\frac{dX(\Omega)}{d\Omega}$$

با تلفیق این دو خاصیت داریم:

$$\int_{2\pi}\left|\frac{dX(\Omega)}{d\Omega}\right|^2 d\Omega = 2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|-jnx[n]\right|^2$$
$$=2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|nx[n]\right|^2 = 36\pi$$

۱۱- **گزینه «۴» ـ (ساده)**

نرخ نایکوئیست حداکثر فرکانس موجود در $x(t)$ می‌باشد که به شکل موج $x(t)$ بستگی دارد.

۱۲- **گزینه «۲» ـ (ساده)**

$$Y(\Omega)=-0/75e^{-j\Omega}Y(\Omega)+1/5X(\Omega)$$
$$H(\Omega)=\frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}=\frac{1/5}{1+0/75e^{-j\Omega}}\Rightarrow H(\Omega)\Big|_{\Omega=0}=\frac{1/5}{1/75}$$
$$H(\Omega)\Big|_{\Omega=\pi}=\frac{1/5}{0/25}$$

بررسی تقریبی دامنه فیلتر در فرکانس های پایین و بالا نشان می‌دهد که فیلتر بالاگذر است.
چون رابطه خروجی ـ ورودی بازگشتی است یعنی خروجی فعلی به خروجی قبلی وابسته است، سیستم IIR می‌باشد.

۱۳- **گزینه «۱» ـ (ساده)**

$$X(0)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]=16$$

۱۴- **گزینه «۲» ـ (ساده)**

$$x[n]=\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right).\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi n}{6}+\frac{1}{2}\sin\frac{7\pi n}{6}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2j}\left(e^{j\frac{\pi n}{6}}-e^{-j\frac{\pi n}{6}}\right)+\frac{1}{2j}\left(e^{j\frac{7\pi n}{6}}-e^{-j\frac{7\pi n}{6}}\right)\right)$$
$$=\frac{1}{4}e^{j\frac{\pi n}{6}}-\frac{1}{4j}e^{-j\frac{\pi n}{6}}+\frac{1}{4j}e^{j\frac{7\pi n}{6}}-\frac{1}{4j}e^{-j\frac{7\pi n}{6}}$$

پریود سیگنال $N=12$ است.

$$a_1=\frac{1}{4j}\qquad a_{-1}=\frac{-1}{4j}\qquad a_7=\frac{1}{4j}\qquad a_{-7}=\frac{-1}{4j}$$

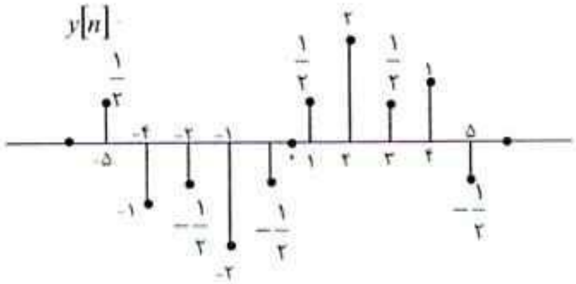
و چون $a_k=a_{k+12}$ داریم:

$$a_1=\frac{1}{4j}\qquad a_{11}=\frac{-1}{4j}\qquad a_7=\frac{1}{4j}\qquad a_5=\frac{-1}{4j}$$

و بقیه ضرایب در هر پریود صفر می‌باشند.

۱۵- گزینه «۴»ـ (ساده)

اگر $x[n]$ را ، ۴ نمونه به سمت چپ شیفت داده و آن را $y[n]$ بنامیم داریم:



چون $y[n]$ حقیقی و فرد است ، $Y(j\Omega)$ موهومی محض خواهد بود یعنی:

$$\angle Y(j\Omega)=\pm\frac{\pi}{2}$$

$$y[n]=x[n+2]\Rightarrow Y(j\Omega)=e^{j2\Omega}X(j\Omega)$$

$$\angle Y(\Omega)=2\Omega+\angle X(\Omega)=\pm\frac{\pi}{2}$$

$$\angle X(\Omega)=\pm\frac{\pi}{2}-2\Omega$$

۱۶- گزینه «۳»ـ (ساده)

$$x[n]=\left(\frac{1}{4}\right)^{n}u[n+2]$$

$$=16\left(\frac{1}{4}\right)^{n+2}u[n+2]$$

$$X(\Omega)=16e^{j2\Omega}\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega}}=\frac{64e^{j2\Omega}}{4-e^{-j\Omega}}$$

از خاصیت شیفت زمانی و جدول زوج تبدیل فوریه استفاده شد .

۱۷- گزینه «۳»ـ (ساده)

$$x[n]=\delta[n]\Rightarrow w[n]=h[n]$$

$$y[n]=(-1)^{n}\times w[n]+w[n]$$

$$\Rightarrow y[n]=\left((-1)^{n}+1\right)h[n]$$

۱۸- گزینه «۴» - (متوسط)

$$V\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n\text{ زوج}}x[n]e^{-j\omega n}$$

با تغییر اندیس بصورت $n=2m$ داریم:

$$V\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x[2m]e^{-j2\omega m}$$

از طرفی داریم:

$$G\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[2n]e^{-j\omega n}$$

با مقایسه دو رابطه فوق داریم :

$$G\left(e^{j\omega}\right)=V\left(e^{j\frac{\omega}{2}}\right)$$

۱۹- گزینه «۳»- (ساده)

سیگنال $x[n]$ دارای دو مولفه در $\omega=0$ و $\omega=\frac{3\pi}{8}$ است . که $\omega=0$ آن در باند حذف فیلتر و $\omega=\frac{3\pi}{8}$ آن در باند عبور فیلتر قرار دارد .

۲۰- گزینه «۱»- (متوسط)

$$x_1(t)=\frac{\sin(4000\pi t)}{\pi t}\leftrightarrow X_1(\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|<4000\pi\\ 0 & |\omega|>4000\pi\end{cases}$$

از جدول ۳-۱ داریم :

$$x(t)=X_1(t)^2\leftrightarrow X(\omega)=\frac{1}{2\pi}X_1(\omega)*X_1(\omega)$$

در نتیجه حداکثر فرکانس $X(\omega)$ برابر 8000π خواهد بود در نتیجه $\omega_s=2\times8000\pi$ و بنابراین $p_s=8000H_z$ است .

۲۱- گزینه «۲»- (متوسط)

با توجه به خاصیت ضرب داریم

$$W(\omega)=\frac{1}{2\pi}X_1(\omega)*X_2(\omega)$$

بنابراین حداکثر فرکانس $W(\omega)$ برابر $\omega_1+\omega_2$ می‌شود .

در نتیجه $\frac{2\pi}{T_s}\geq2(\omega_1+\omega_2)$

و $T_s\leq\frac{\pi}{\omega_1+\omega_2}$

۲۲- گزینه «۴»- (ساده)

$$x[n]=\sum_{k=0}^{N-1}a[k]e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$a[k]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$\Rightarrow a[k]=\frac{1}{N}x[-k]$$

۲۳- گزینه «۱»- (ساده)

$$y[n]=(-1)^n x[-n]=e^{j\pi n}x[-n]$$

$$Y(\Omega)=X(\pi-\Omega)$$

۲۴- گزینه «۱»- (متوسط)

$$y[n]=-x[-(n+2)]$$

$$-x[-n-2]\leftrightarrow-e^{-jk\frac{2\pi}{N}2}a_{-k}$$

از خواص شیفت زمانی ، انعکاس زمانی و خطی بودن سری فوریه استفاده شده است .

۲۵- گزینه «۱»ـ (ساده)

$$x[۰]=\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(\Omega)d\Omega \Rightarrow b=۲\pi\times ۲=۴\pi$$

$$a=X(\pi)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]e^{-j\pi n}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-۱)^n x[n]=۵$$

رابطه پارسوال بیان می‌کند :

$$\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|Y(\Omega)|^۲ d\Omega=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|y[n]|^۲$$

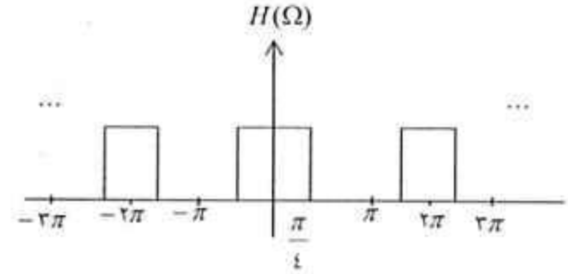
از خاصیت مشتق گیری داریم :

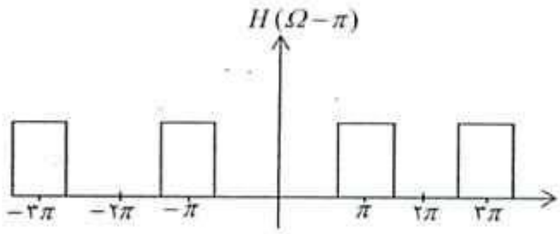
$$-jnx[n]\leftrightarrow\frac{dX(\Omega)}{d\Omega}$$

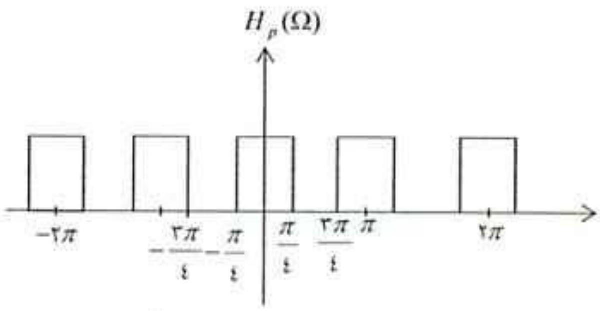
$$c=\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{dX(\Omega)}{d\Omega}\right|^۲ d\Omega=۲\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|-jnx[n]|^۲$$

$$=۲\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|nx[n]|^۲=۷۱۶\pi$$

۲۶- گزینه «۴»ـ (متوسط)







فیلتر میان نگذر با فرکانس های قطع $\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}$

با این توضیح که از خاصیت شیفت فرکانسی داریم :

$$(-1)^n z[n]=\left(e^{j\pi}\right)^n z(n)\leftrightarrow Z(\Omega-\pi)$$

$$W(\Omega)=X(\Omega-\pi)H(\Omega)$$

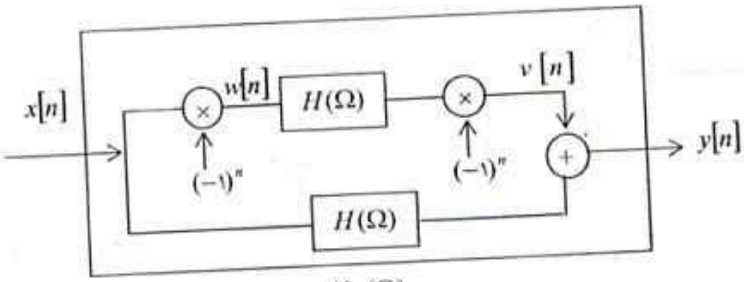
$$V(\Omega)=X(\Omega-2\pi)H(\Omega-\pi)=X(\Omega)H(\Omega-\pi)$$

ا زخاصیت تناوبی بودن $X(\Omega)$ با پریود 2π استفاده شد .

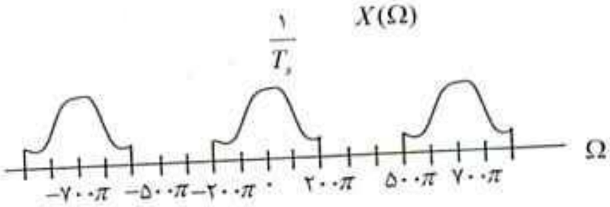
توجه کنید که

$$\left[X(\Omega)H(\Omega-\pi)\right]+X(\Omega).H(\Omega)=$$

$$X(\Omega)\{H(\Omega-\pi)+H(\Omega)\}=X(\Omega)H_p(\Omega)$$



۲۷- گزینه «۳»ـ (ساده)



توجه کنید که فرکانس قطع $H(\Omega)$ برابر 500π می‌باشد برای بازسازی کامل باید دوره تکرار $X(\Omega)$ حداقل 700π در نظر گرفته شود

$$\frac{2\pi}{T_s}>700\pi \qquad T_s<\frac{1}{350} \qquad , \qquad K=T_s$$

۲۸- گزینه «۳»ـ (ساده)

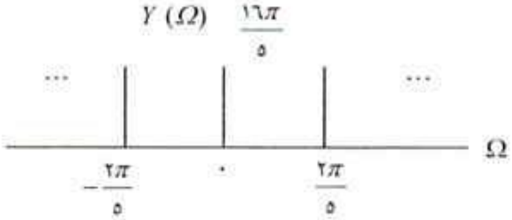
ازتعریف داریم :

$$X(\Omega)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}2\pi a_k\,\delta\!\left(\Omega-\frac{2\pi}{N}k\right)$$

$$N=5$$

$$a_k=\frac{1}{5}\sum_{n=\langle 5\rangle}x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{5}n}\Rightarrow\begin{cases}a_0=\frac{8}{5}\\ a_1=0/051\end{cases}$$

بقیه ضرایب خارج ازمحدوده $\frac{3\pi}{5}$ هستند



$$y[n]=\frac{16\pi}{5}+0/32\cos\frac{2\pi}{5}n$$

۲۹- گزینه «۱»ـ (ساده)

دوره تناوب $x[n]=(-1)^n$ برابر $N=2$ می‌باشد

$$x[n]=(-1)^n=e^{j\pi n}\Rightarrow\begin{cases}a_0=0\\a_1=1\end{cases}$$

$$y[n]=x[n+1]\leftrightarrow b_k=a_k e^{jk\pi}\Rightarrow\begin{cases}b_0=a_0=0\\b_1=-a_1=-1\end{cases}$$

۳۰- گزینه «۳»ـ (ساده)

سیستم ۱: $Y_1(\Omega)=0/9e^{-j\Omega}Y_1(\Omega)+0/1X_1(\Omega)$

$$H_1(\Omega)=\frac{Y_1(\Omega)}{X_1(\Omega)}=\frac{0/1}{1-0/9e^{-j\Omega}}\qquad \left|H_1(\Omega)\right|_{\Omega=0}=1$$

$$\Rightarrow$$

$$\left|H_1(\Omega)\right|_{\Omega=\pi}=\frac{1}{19}$$

$H_1(\Omega)$ پایین گذر است.

سیستم ۲: $Y_2(\Omega)=-0/9e^{-j\Omega}Y_2(\Omega)+0/1X_2(\Omega)$

$$H_2(\Omega)=\frac{Y_2(\Omega)}{X_2(\Omega)}=\frac{0/1}{1+0/9e^{-j\Omega}}$$

$$\left|H_2(\Omega)\right|_{\Omega=0}=\frac{1}{19}$$

$\Rightarrow$ $H_2(\Omega)$ بالا گذر است

$$\left|H_2(\Omega)\right|_{\Omega=\pi}=1$$

۳۱- گزینه «۳»ـ (ساده)

چون $N=3$ می‌باشد، بنابراین ضریب $e^{j\frac{2\pi}{3}n}$ عبارت از a_1 می‌باشد

$$a_1=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{2}x[n]e^{-j\frac{2\pi}{3}n}$$

$$=\frac{1}{3}\left[2+1\times e^{-j\frac{2\pi}{3}}+0\right]=\frac{1}{2}-j\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{6}$$

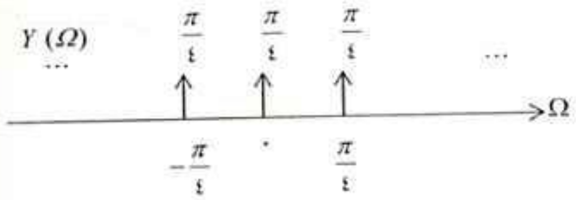
۳۲- گزینه «۱»ـ (ساده)

$$X(\Omega)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} ۲\pi a_k\,\delta\left(\Omega-\frac{۲\pi}{N}k\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} N=۸ \\ a_k=\frac{۱}{۸}\end{array}\right\}\Rightarrow \qquad X(\Omega)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{\pi}{۴}\delta\left(\Omega-\frac{\pi}{۴}k\right)$$

$\frac{\pi}{۴}\ \frac{۲\pi}{۴}\ -\frac{۲\pi}{۴}\ -\frac{\pi}{۴}\ \frac{\pi}{۴}\ X(\Omega)\ \Omega\ \frac{\pi}{۴}\ \frac{۲\pi}{۴}\ -\frac{۲\pi}{۴}\ -\frac{\pi}{۴}$

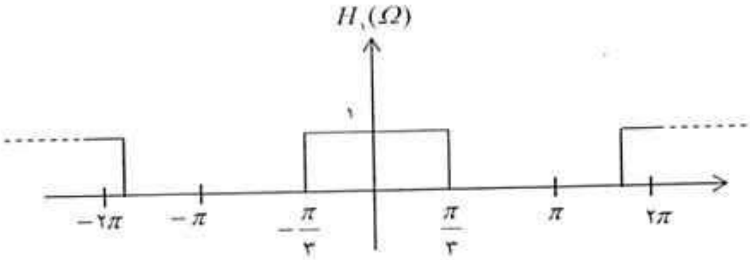
$\Rightarrow$

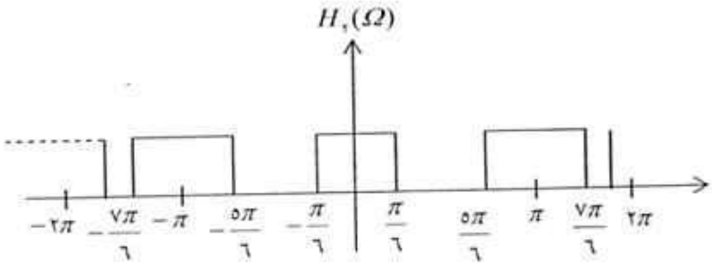


$$y[n]=\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۴}Cos\,\frac{\pi n}{۴}$$

۳۳- گزینه «۴»ـ (ساده)

ازخواص $H_۲(\Omega)=H_۱(۲\Omega)$





۳۴- گزینه «۱»ـ(متوسط)

$$\Phi(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}h[n]\varphi(2t-n)\right)e^{-j\omega t}dt$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}h[n]\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(2t-n)\,e^{-j\omega t}dt$$

باتغییر متغیر $2t-n=\tau$ داریم:

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}h[n]\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\tau)\,e^{-j\omega\left(\frac{\tau+n}{2}\right)}\frac{d\tau}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}h[n]e^{-j\omega\frac{n}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\tau)\,e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}d\tau$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}h[n]\,e^{-j\omega\frac{n}{2}}\;\Phi\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}H\left(\frac{\omega}{2}\right)\;\Phi\left(\frac{\omega}{2}\right)\quad\Rightarrow\quad\Phi(2\omega)=\frac{1}{2}\Phi(\omega)H(\omega)$$

فصل ۴

تبدیل لاپلاس

٤-۱ مقدمه و تعریف

پاسخ یک سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان که دارای پاسخ ضربه $h(t)$ است، به ورودی نمایی مختلط $x(t)=e^{st}$ عبارت است از:

$$y(t)=H(s)e^{st} \qquad (۱-۴)$$

که در آن

$$H(s)=\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-st}\,dt \qquad (۲-۴)$$

$H(s)$ تابعی از متغیر مختلط $s=\sigma+j\omega$ هست و تبدیل لاپلاس $h(t)$ نامیده می‌شود.

به ازاء $s=j\omega$ معادله $(۴-۲)$ همان تبدیل فوریه سیگنال است یعنی

$$X(s)\Big|_{s=j\omega}=F\{x(t)\} \qquad (۳-۴)$$

می توان $X(s)$ را به صورت زیر هم نشان داد:

$$X(s)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x(t)e^{-\sigma t}\right)e^{-j\omega t}\,dt \qquad (۴-۴)$$

یعنی تبدیل لاپلاس $x(t)$ همان تبدیل فوریه $x(t)e^{-\sigma t}$ که در آن σ یک عدد حقیقی است.

مثال ۴-۱: برای توضیح بیشتر تبدیل لاپلاس $x_1(t)=e^{-2t}u(t)$ و $x_2(t)=-e^{-2t}u(-t)$ را محاسبه می کنیم:

$$X_1(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2t}u(t)e^{-st}dt=\int_{0}^{\infty}e^{-(s+2)t}dt \qquad (۵-۴)$$
$$=\left.\frac{e^{-(s+2)t}}{-(s+2)}\right|_{0}^{\infty}=\frac{1}{s+2}$$

اگر $\mathrm{Re}\{s\}>-2$ باشد.

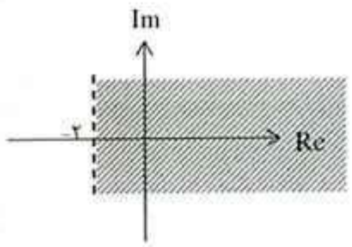
$$X_2(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2t}u(-t)e^{-st}dt=-\int_{-\infty}^{0}e^{-(2+s)t}dt \qquad (۶-۴)$$
$$=\left.\frac{e^{-(s+2)t}}{+(s+2)}\right|_{-\infty}^{0}=\frac{1}{s+2}$$

اگر $\mathrm{Re}\{s\}<-2$ باشد.

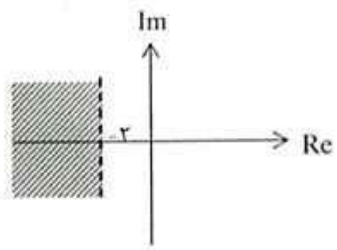
عبارت جبری به دست آمده برای $X_1(s)$، $X_2(s)$ یکسان است ولی مجموعه مقادیر s که عبارت تبدیل لاپلاس در آن معتبر است متفاوت‌اند. در واقع برای مشخص کردن تبدیل لاپلاس یک سیگنال ، هم به عبارت جبری تبدیل و هم محدوده مقادیر s که عبارت تبدیل لاپلاس در آن معتبر است نیاز است .

۴-۲ ناحیه همگرایی و خواص آن

محدوده مقادیری که به ازاء آن انتگرال تبدیل لاپلاس سیگنال همگراست ، ناحیه همگرایی تبدیل لاپلاس ROC نامیده می‌شود. ROC برای $X_1(s)$ مثال ۴-۱ به صورت زیر قابل نمایش است .



و ROC برای $X_2(s)$ مثال ۴-۱ به صورت زیر است :



در اغلب مسائل عملی ، تبدیل لاپلاس گویا است یعنی نسبت دو چند جمله ای از متغیر مختلط s است یعنی:

$$X(s)=\frac{N(s)}{D(s)} \qquad (۷-۴)$$

که در آن $N(s)$ چند جمله ای صورت و $D(s)$ چند جمله‌ای مخرج است. در تبدیل لاپلاس گویا ، ریشه های چند جمله‌ای صورت $(N(s))$ صفرهای $X(s)$ و ریشه های چند جمله‌ای مخرج $(D(s))$ قطب های $X(s)$ نامیده می‌شود .

اگر s_z صفر $X(s)$ باشد داریم $X(s_z)=0$ و اگر s_p قطب $X(s)$ باشد، $X(s_p)$ بی نهایت است . نمایش $X(s)$ به صورت صفرها و قطب ها در صفحه s را نمودار قطب – صفر $X(s)$ می‌گویند.

* **نکته:** اگر درجهٔ چند جمله ای مخرج بزرگتر از درجهٔ چند جمله ای صورت باشد با میل s به بی‌نهایت، $X(s)$ صفر می‌شود این رفتار به عنوان صفر بی نهایت تعبیر می‌شود. اگر درجه چند جمله ای صورت بزرگتر از درجه چند جمله ای مخرج باشد با میل s به بی نهایت، $X(s)$ بیکران می‌شود. این رفتار به عنوان قطب بی‌نهایت تعبیر می‌شود. اگر درجه مخرج به اندازه k از درجه صورت بزرگتر باشد، $X(s)$ دارای k صفر در بی‌نهایت است. به طور مشابه اگر درجه صورت به اندازه k از درجه مخرج بزرگتر باشد، $X(s)$ دارای k قطب در بینهایت است.

در مثال ۴-۱، $X_1(s)$ و $X_2(s)$ دارای یک قطب در $s=-2$ بوده و یک صفر در بی نهایت دارد.

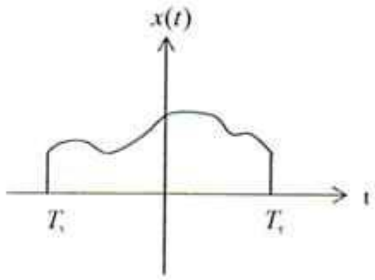
تعداد تکرارهای یک صفر یا قطب در یک محل را مرتبه قطب یا صفر می‌نامند.

دو سیگنال متفاوت می‌توانند عبارت تبدیل لاپلاس یکسانی داشته باشند و برای تعیین کامل یک تبدیل لاپلاس باید ROC آن هم مشخص باشد. در ادامه برخی ویژگی های ROC ارائه می‌شود که امکان می‌دهد با دانستن عبارت جبری $X(s)$ و برخی ویژگی های خود سیگنال $x(t)$، ROC را تا حدی مشخص می‌کنیم.

الف - ROC در صفحه s از نوارهایی موازی با محور $j\omega$ تشکیل می‌شود.

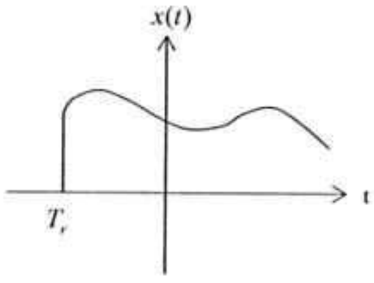
ب- ROC تبدیل لاپلاس های گویا هیچ قطبی را در بر ندارد.

ج- اگر $x(t)$ استمرار محدود داشته و مطلقاً" انتگرال پذیر باشد، ROC تمام صفحه s است. (سیگنال دارای استمرار محدود در خارج یک بازه زمانی محدود صفر است.)



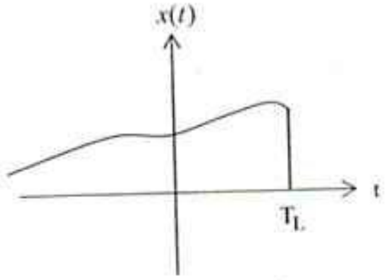
سیگنال دارای استمرار محدود

د- اگر $x(t)$ سیگنال سمت راستی و خط $\mathrm{Re}\{s\}=\sigma_0$ در ROC باشد، آنگاه تمام مقادیر s، با $\mathrm{Re}\{s\}>\sigma_0$ نیز در ROC است. (سیگنال سمت راستی سیگنالی است که تا پیش از یک زمان معین T_R صفر باشد یعنی $x(t)=0$ در $t<T_R$)



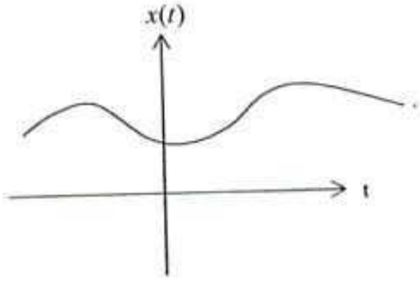
سیگنال سمت راستی

هـ - اگر $x(t)$ سیگنال سمت چپی و خط $\mathrm{Re}\{s\}=\sigma_0$ در ROC باشد، آنگاه تمام مقادیر s با $\mathrm{Re}\{s\}<\sigma_0$ نیز در ROC هستند. (سیگنال سمت چپی سیگنالی است که بعد از یک زمان معین T_L صفر باشد یعنی $x(t)=0$ در $t>T_L$)



سیگنال سمت چپی

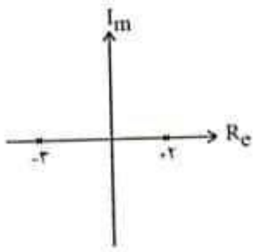
و- اگر $x(t)$ دو طرفه باشد و خط $\text{Re}\{s\}=\sigma_0$ در ROC باشد آنگاه ROC نواری در صفحه مشتمل بر $\text{Re}\{s\}=\sigma_0$ است.
(سیگنال دو طرفه سیگنالی است که از هر دو طرف تا بی نهایت گسترده است.)



سیگنال دو طرفه

* **نکته:** سیگنال یا اصلا تبدیل لاپلاس ندارد یا در یکی از چهار حالت ج تا و صدق می‌کند.
اگر تبدیل لاپلاس سیگنال، گویا باشد ، ROC آن یا به قطب محدود می‌شود یا تا بی نهایت ادامه می‌یابد.
علاوه بر این هیچ یک از قطب های $X(s)$ در ROC قرار ندارد.
اگر تبدیل لاپلاس سیگنال گویا باشد و $x(t)$ سمت راستی باشد، ROC ناحیه سمت راست آخرین قطب سمت راست می‌باشد.
اگر تبدیل لاپلاس سیگنال $x(t)$ گویا باشد ، و $x(t)$ سمت چپی باشد ، ROC ناحیه سمت چپ آخرین قطب سمت چپ می‌باشد.

مثال ۴-۲: نمودار صفر و قطب یک $X(s)$ گویا در شکل مشخص شده است. ناحیهٔ همگرایی را برای هر یک از موارد زیر مشخص کنید؟



الف- $x(t)$ برای $t<-7$ متحد با صفر است؛ چون $x(t)$ سیگنال سمت راستی است، با توجه به خواص ROC ناحیه همگرایی آن باید سمت راست آخرین قطب سمت راست باشد یعنی $\text{Re}\{s\}>+2$

ب- $x(t)e^{t}$ تبدیل فوریه دارد:

با توجه به تعریف تبدیل فوریه، چون $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{t}e^{-j\omega t}dt$ همگرا شده است، با مقایسه این رابطه و تعریف تبدیل لاپلاس مشخص می‌شود که $s=1$ در ناحیه همگرایی $X(s)$ واقع است و چون با توجه به خواص ROC، ناحیه همگرایی باید بین دو قطب محدود شود پس ROC عبارت است از $-3<\mathrm{Re}\{s\}<+2$

ج- $x(t)e^{-t}$ مطلقاً انتگرال‌پذیر است:

چون مطلقاً انتگرال‌پذیر است، بنابراین تبدیل فوریه هم دارد و با توجه به استدلال قسمت ب همین مثال، $s=-1$ در ناحیه همگرایی $X(s)$ قرار داشته و در نتیجه ROC عبارت است از $-3<\mathrm{Re}\{s\}<+2$

۴-۳ عکس تبدیل لاپلاس

اگر $X(s)$ تبدیل لاپلاس $x(t)$ باشد داریم:

$$x(t)=\frac{1}{j2\pi}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st}ds \qquad (۸-۴)$$

مسیر انتگرال گیری خطی به موازات محور $j\omega$ و به فاصله σ از آن می‌باشد σ باید چنان باشد که $X(\sigma+j\omega)$ همگرا شود (خط باید در ROC واقع باشد).

برای تبدیل لاپلاس های گویا ، عکس تبدیل با استفاده از روش بسط به صورت کسرهای جزئی تعیین می‌شود .

۱) اگر فرض کنیم قطب تکراری وجود ندارد و درجهٔ چند جمله ای مخرج بزرگتر از درجهٔ چند جمله ای صورت است می‌توان $X(s)$ را به صورت زیر بسط داد :

$$X(s)=\sum_{i=1}^{m}\frac{A_i}{s+p_i} \qquad (۹-۴)$$

ROC هر جمله را می‌توان با توجه به ROC تبدیل $X(s)$ تعیین کرده و سپس عکس تبدیل لاپلاس هر یک از جملات را پیدا کرد. برای جمله $\frac{A_i}{s+p_i}$ اگر ROC سمت راست قطب $s=-p_i$ باشد عکس آن $A_i e^{-p_i t}u(t)$ (یعنی دست راستی) است و اگر ROC سمت چپ قطب $s=p_i$ باشد عکس آن $-A_i e^{-p_i t}u(-t)$ (یعنی دست چپی) است. ضرایب A_i بصورت زیرتعیین می‌شوند:

$$A_i=(s+p_i)X(s)\Big|_{s=-p_i} \qquad (۱۰-۴)$$

۲) اگر مخرج $X(s)$ دارای ریشه مکرر باشد. مثلا اگر ریشه های $p_1,\ldots,p_r$ هر یک به ترتیب $n_1,\ldots,n_r$ مرتبه تکرار شده باشند.

$$X(s)=\frac{b_{n-1}s^{n-1}+\ldots+b_1 s+b_0}{(s+p_1)^{n_1}\ldots(s+p_r)^{n_r}} \qquad (۱۱-۴)$$

در این صورت بسط به صورت کسرهای جزئی $X(s)$ به صورت زیر است:

$$X(s)=\frac{A_{11}}{s+p_1}+\frac{A_{12}}{(s+p_1)^2}+\ldots+\frac{A_{1n_1}}{(s+p_1)^{n_1}}+\ldots+$$
$$+\frac{A_{r1}}{s+p_r}+\frac{A_{r2}}{(s+p_r)^2}+\ldots+\frac{A_{rn_r}}{(s+p_r)^{n_r}} \qquad (۱۲-۴)$$

که در آن A_{ik} از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$A_{ik}=\frac{1}{(n_i-k)!}\left[\frac{d^{n_i-k}}{ds^{n_i-k}}(s+p_i)^{n_i}X(s)\right]_{s=-p_i} \qquad (۱۳-۴)$$

مثال ۴-۳: عکس تبدیل لاپلاس $Y(s)=\frac{10s}{(s+2)^3(s+8)}$ با ناحیه همگرایی $Re\{s\}>-8$ را پیدا کنید.

$$Y(s)=\frac{A_1}{s+8}+\frac{A_{21}}{s+2}+\frac{A_{22}}{(s+2)^2}+\frac{A_{23}}{(s+2)^3}$$

$$A_1=(s+8)Y(s)\Big|_{s=-8}=\frac{10}{27}$$

$$A_{23}=(s+2)^3Y(s)\Big|_{s=-2}=\frac{-10}{3}$$

$$A_{22}=\frac{1}{(3-2)!}\frac{d}{ds}\Big[(s+2)^3Y(s)\Big]\Big|_{s=-2}=\frac{20}{9}$$

$$A_{21}=\frac{1}{(3-1)!}\frac{d^2}{ds^2}\Big[(s+2)^3Y(s)\Big]\Big|_{s=-2}=-\frac{10}{27}$$

بنابراین:

$$Y(s)=\frac{10}{27}\frac{1}{s+8}-\frac{10}{27}\frac{1}{s+2}+\frac{20}{9}\frac{1}{(s+2)^2}-\frac{10}{3}\frac{1}{(s+2)^3}$$

با توجه به ناحیه همگرایی $Y(s)$ و جدول زوج‌های اساسی تبدیل لاپلاس داریم:

$$y(t)=\left[\frac{10}{27}e^{-8t}-\frac{10}{27}e^{-2t}+\frac{20}{9}te^{-2t}-\frac{5}{3}t^2e^{-2t}\right]u(t)$$

در روش بسط به صورت کسرهای جزئی، برای تعیین مقدار ضریب مجهول می‌توان از جایگزینی مقادیر مناسب برای s استفاده کرد. با توجه به اینکه رابطهٔ ۴-۹ یا ۴-۱۲ برای هر s یک اتحاد است، می‌توان با جایگزین کردن دو مقدار مناسب برای s که هیچکدام از آنها برابر ریشه‌های مخرج نباشند، ضرایب را تعیین کرد.

مثال ۴-۴: عکس تبدیل لاپلاس $Y(s)=\frac{10}{(s+2)(s+8)}$ با ناحیه همگرایی $Re\{s\}>-8$ را پیدا کنید.

$$\frac{10}{(s+2)(s+8)}=\frac{A_1}{s+2}+\frac{A_2}{s+8}$$

$s=0$ جایگزینی: $\frac{10}{(2)(8)}=\frac{A_1}{2}+\frac{A_2}{8}$

$s=2$ جایگزینی: $\frac{10}{(4)(10)}=\frac{A_1}{4}+\frac{A_2}{10}$

$$\Rightarrow\begin{cases}4A_1+A_2=0\\5A_1+2A_2=0\end{cases}$$

$$A_1=\frac{+5}{3},\ A_2=-\frac{5}{3}$$

$$Y(s)=\frac{5}{3}\frac{1}{s+2}-\frac{5}{3}\frac{1}{s+8}\Rightarrow y(t)=\frac{5}{3}\left(e^{-2t}-e^{-8t}\right)u(t)$$

مثال ۴-۵ حالت خاصی از روش کلی است که در آن با یک میان بر، عکس تبدیل لاپلاس حاصل می‌شود.

مثال ۴-۵: عکس تبدیل لاپلاس $Y(s)=\frac{2s^2+6s+6}{(s+2)(s^2+2s+2)}$ با ناحیه همگرایی $-2<Re\{s\}<-1$ را تعیین کنید.

بسط را به صورت زیر انجام می‌دهیم:

$$Y(s)=\frac{A_1}{s+2}+\frac{Bs+C}{s^2+2s+2}$$

A_1 را به طریق معمول می‌توان تعیین کرد:

$$A_1=(s+2)Y(s)\Big|_{s=-2}=1$$

می‌توان با جایگزینی مقادیر خاصی از s ضرایب B و C را تعیین کرد:

$$s=0 \ \text{جایگزینی}: \ \frac{6}{(2)(2)}=\frac{1}{2}+\frac{C}{2}\Rightarrow C=2$$

برای تعیین B طرفین را در s ضرب کرده و s را به بی نهایت میل می‌دهیم:

$$\lim_{s\to\infty} s\frac{2s^2+6s+6}{(s+2)(s^2+2s+2)}=\lim_{s\to\infty}\frac{sA_1}{s+2}+\lim_{s\to\infty}\frac{s(Bs+C)}{s^2+2s+2}$$

$$2=1+B\Rightarrow B=1$$

در نتیجه

$$Y(s)=\frac{1}{s+2}+\frac{s+2}{s^2+2s+2}=\frac{1}{s+2}+\frac{s+1}{(s+1)^2+1}+\frac{1}{(s+1)^2+1}\Rightarrow y(t)=e^{-2t}u(t)+\left(-e^{-t}\cos t-e^{-t}\sin t\right)u(-t)$$

توجه کنید که با توجه به ناحیه همگرایی سیگنال دو طرفه است.

٤-٤ محاسبه هندسی تبدیل فوریه از نمودار قطب و صفر

در حالت کلی یک تبدیل لاپلاس گویا به صورت زیر است:

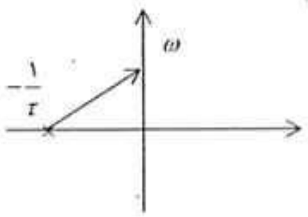
$$X(s)=M\frac{\prod_{i=1}^{R}(s-\beta_i)}{\prod_{j=1}^{P}(s-\alpha_j)} \qquad (14-4)$$

اگر هدف محاسبه $X(s_1)$ باشد. با توجه به اینکه هر جملهٔ حاصلضرب در معادله فوق نشان دهندهٔ برداری است که صفر یا قطب مربوطه را به نقطه s_1 وصل می‌کند. بنابراین اندازه $X(s_1)$ برابر است با اندازهٔ ضریب M که در حاصلضرب اندازهٔ بردارهای صفر (یعنی بردارهایی که صفرها را به s_1 متصل می‌کنند) ضرب شده و بر حاصلضرب اندازهٔ بردارهای قطب (یعنی بردارهایی که قطب‌ها را به s_1 متصل می‌کنند) تقسیم شده است. زاویه $X(s_1)$ برابر است با جمع زاویه های بردارهای صفر منهای جمع زاویه های بردارهای قطب.اگر ضریب M منفی باشد، یک زاویه π هم در مجموع اضافه می‌شود.

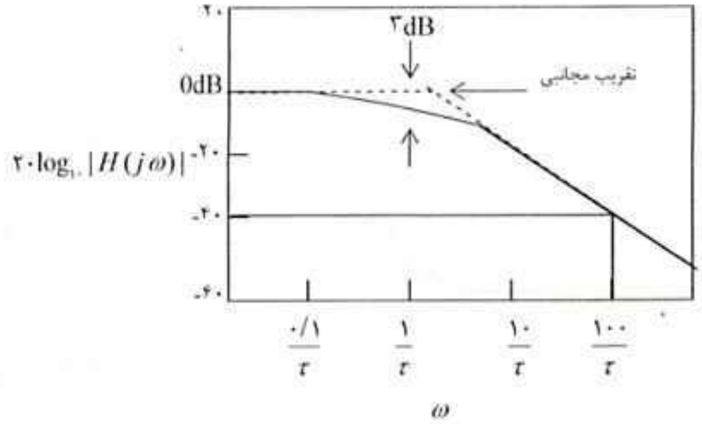
روشن است که اگر $X(s_1)$ صفر یا قطب مکرر داشته باشد اندازه و زاویه‌های بردارهای صفر یا قطب باید به تعداد تکرارهای صفر یا قطب منظور شود.

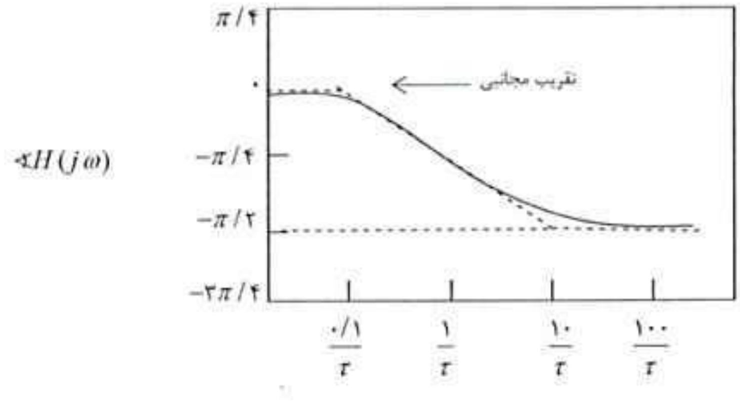
الف- سیستم های مرتبه اول

پاسخ ضربه سیستم مرتبه اول به صورت $h(t)=\frac{1}{\tau}e^{\frac{-t}{\tau}}u(t)$ هست که تبدیل لاپلاس آن $H(s)=\frac{1}{\tau s+1}$ و ROC آن $\mathrm{Re}\{s\}>\frac{-1}{\tau}$ می‌باشد . نمودار قطب و صفر آن به صورت شکل است.



در شکل بردار قطب در نقطه $s_1=\circ+j\omega$ نشان داده شده است.شکل نشان می‌دهد که اندازه بردار به ازا $j\omega=\circ$ مینیمم است و با افزایش ωبه طور یکنواخت زیاد می‌شود . با افزایش ωاز ۰ تا $+\infty$ زاویهٔ بردار قطب به طور یکنواخت از ۰ به $\frac{\pi}{2}$ میل می‌کند . در نتیجه فاز $H(j\omega)$ به طور یکنواخت از ۰ به $\frac{-\pi}{2}$ می‌رسد . پاسخ فرکانسی سیستم مرتبه اول در شکل زیر نشان داده شده است :





با توجه به تعبیر هندسی مشخص است که هر چه قطب از مبدأ صفحهٔ s دورتر می‌شود فرکانس $3dB$ افزایش می‌یابد از طرفی با کاهش ثابت زمانی ، پاسخ ضربه سریعتر می‌شود .

ب- سیستم‌های مرتبه دوم

تابع انتقال سیستم مرتبه دوم به صورت

$$H(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} \qquad (15-4)$$

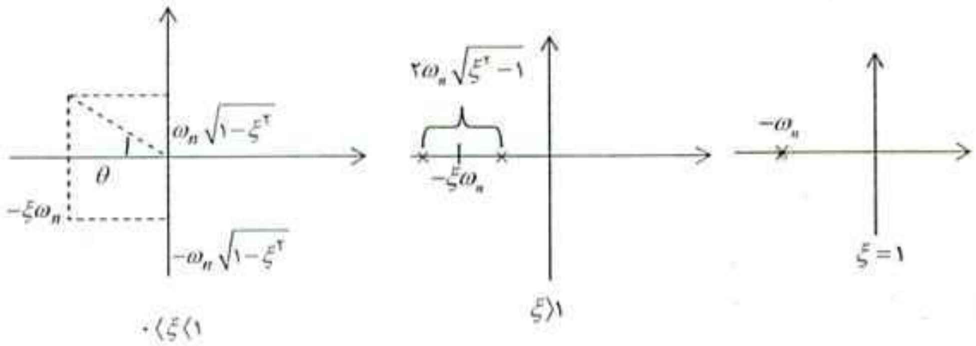
است و در نتیجه پاسخ ضربه سیستم به شکل زیر خواهد بود :

$$h(t)=M\left[e^{c_1 t}-e^{c_2 t}\right]u(t)$$

$$c_{1,2}=-\xi\omega_n\pm\omega_n\sqrt{\xi^2-1}$$

$$M = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\xi^2 - 1}}$$

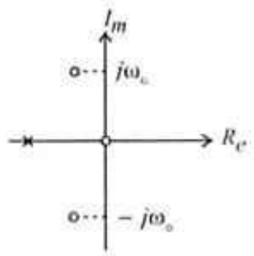
نمودار قطب صفر و سیستم به صورت زیر است :



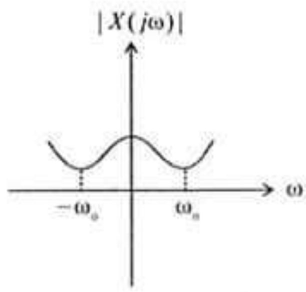
با توجه به $\xi = \cos\theta$ به ازاء ω_n معین و مثبت قطب ها حول یک نیم دایره به شعاع ثابت ω_n حرکت می‌کنند : وقتی $\xi = 0$ دو قطب روی محور موهومی قرار می‌گیرند . پاسخ زمانی در این حالت یک سینوسی بدون میرایی است . با افزایش ξ از ۰ تا ۱ دو قطب مختلط در داخل نیم صفحه سمت چپ حرکت می‌کنند و پاسخ زمانی دارای نوسان خواهد بود . در $\xi = 1$ قطب ها در یک نقطه روی محور حقیقی واقع هستند . با افزایش ξ از یک قطب ها روی محور حقیقی از هم دور می‌شوند . برای $\xi >> 1$ در فرکانس های پایین مشخصات پاسخ فرکانسی توسط قطب نزدیک به محور $j\omega$ تعیین می‌شود .

مثال ۴-۶ برای نمودار قطب و صفر نشان داده شده، با روش ترسیمی نموادر تقریبی $|X(j\omega)|$ را بدست آورید؟

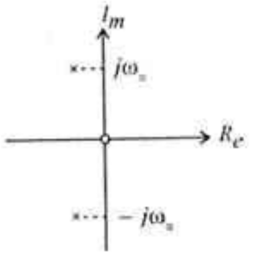
الف ـ



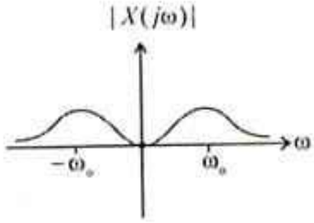
با توجه به وضعیت نسبی بردارهای قطب و صفر به ازاء $\omega = 0$ طول بردار قطب کمترین مقدار نسبی خود را دارد در نتیجه $\omega = 0$ یک ماکسیمم محلی محدود وجود دارد با نزدیک شدن به ω_0، حاصلضرب طول بردارهای صفر به کمترین مقدار خود می‌رسد درنتیجه یک مینیمم محلی محدود در ω_0وجود دارد. چون تبدیل لاپلاس در بی نهایت هم قطب دارد، نموداراندازه با بزرگتر شدن ω، بالاتر می‌رود.



ب ـ



با توجه به وضعیت نسبی بردارهای قطب و صفر به ازاء $\omega=0$، طول بردار صفر، برابر صفر بوده و منحنی اندازه در $\omega=0$ برابر صفر می‌باشد. با رسیدن ω به ω_0 حاصلضرب طول بردارهای قطب کمترین مقدار نسبی خود را دارد در نتیجه یک ماکسیمم محلی محدود روی نمودار اندازه به وجود می آید، چون تبدیل لاپلاس دارای صفر بی نهایت است، با بزرگ شدن ω، منحنی اندازه به صفر میل می‌کند.



٤-٥ خواص تبدیل لاپلاس

ارتباط سیگنال $x(t)$ و تبدیل لاپلاس آن $X(s)$ به صورت $x(t)\xleftrightarrow{L}X(s)$ نمایش داده و ناحیه همگرایی آن را R در نظر می‌گیریم .

الف- خطی بودن

$$x_1(t)\xleftrightarrow{L}X_1(s)\ :ROC=R_1$$
$$x_2(t)\xleftrightarrow{L}X_2(s):ROC=R_2 \qquad (۱۶-۴)$$
$$ax_1(t)+bx_2(t)\xleftrightarrow{L}aX_1(s)+bX_2(s)\ \ R_1\cap R_2 \text{ شامل } ROC$$

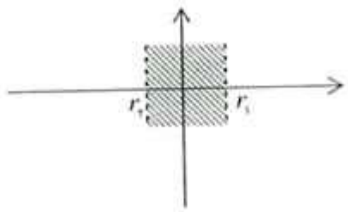
ناحیه همگرایی ترکیب خطی حداقل اشتراک R_2, R_1 است که می‌تواند تهی هم باشد در این حالت $X(s)$ ناحیه همگرایی ندارد یا به عبارتی $x(t)$ تبدیل لاپلاس ندارد .

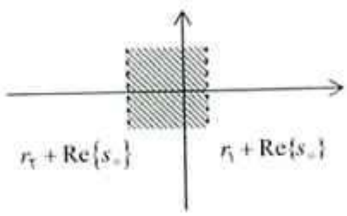
ب- شیفت زمانی و فرکانسی

$$x(t-t_0)\xleftrightarrow{L}e^{-st_0}X(s)\ :ROC=R$$
$$e^{s_0t}x(t)\xleftrightarrow{L}X(s-s_0):ROC=R+\mathrm{Re}\{s_0\}$$

ROC مربوط به $X(s-s_0)$ همان ROC مربوط به $X(s)$ که به اندازه $\mathrm{Re}\{s_0\}$ شیفت پیدا کرده است . توجه کنید که اگر $X(s)$ در $s=a$ قطب یا صفر داشته باشد، $X(s-s_0)$ در $s=a+s_0$ قطب یا صفر دارد.

ROC مربوط به $X(s)$ ROC مربوط به $X(s-s_0)$



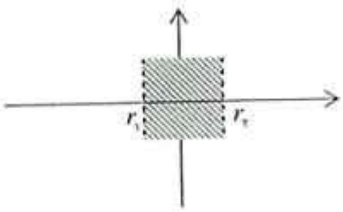


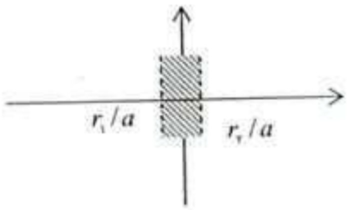
نمایش شیفت ناحیه همگرایی

ج – تغییر مقیاس زمانی

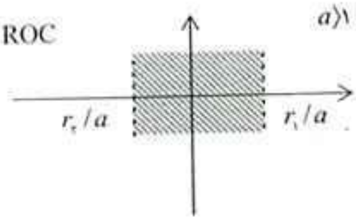
$$x(at)\xleftrightarrow{L}\frac{1}{|a|}X\left(\frac{s}{a}\right)\ :ROC=\frac{R}{a} \qquad (۱۷-۴)$$

به ازاء $a>1$ ناحیه همگرایی $X(s)$ با ضریب $\frac{1}{a}$ فشرده می‌شود و به ازاء $0<a<1$ ناحیه همگرایی $X(s)$ با ضریب $\frac{1}{a}$ منبسط می‌شود . برای a منفی ناحیه همگرایی علاوه بر تغییر وضعیت با تغییر علامت نیز همراه است یعنی حول محور $j\omega$ وارونه می‌شود .





ROC مربوط به $x(t)$ ROC مربوط به $x(at)$ با $a>1$



ROC مربوط به $x(at)$ با $-1<a<0$

د- مزدوج گیری

$$x^*(t)\xleftrightarrow{L}X^*(s^*)\quad :ROC=R \qquad (۱۸-۴)$$

برای $x(t)$ حقیقی ، اگر $X(s)$ در s_0 قطب یا صفر داشته باشد در s_0^* هم قطب یا صفر خواهد داشت .

هـ- خاصیت کانولوشن

$$x_1(t)*x_2(t)\leftrightarrow X_1(s)X_2(s)\ :\ ROC \text{ شامل } R_1\cap R_2 \qquad (۱۹-۴)$$

توجه کنید که اگر در اثر ضرب ، قطب یا صفر با هم حذف شوند ، ROC کلی می‌تواند از اشتراک ROC های $X_2(s).X_1(s)$ بزرگتر باشد .

و- مشتقگیری در زمان

$$\frac{dx(t)}{dt}\leftrightarrow sX(s)\qquad :ROC \text{ شامل } R \qquad (۴-۲۴)$$

ROC مربوط به $sX(s)$ ناحیه همگرایی $X(s)$ را شامل می‌شود ولی اگر $X(s)$، در $s=\circ$ قطب مرتبهٔ اول داشته باشد، با ضرب شدن در s حذف می‌شود و ROC حاصل می‌تواند از ROC مربوط به $X(s)$ بزرگتر باشد.

ز- مشتق‌گیری در فرکانس

(۴-۲۰) $$-tx(t)\xleftrightarrow{L}\frac{dX(s)}{ds} \qquad : ROC=R$$

ح) انتگرال گیری زمانی

$$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau\xleftrightarrow{L}\frac{1}{s}X(s): \qquad ROC \text{ شامل } R\cap\{\mathrm{Re}\{s\}>\circ\}$$

(۴-۲۱)

ط- قضیه مقدار اولیه

اگر در $t<\circ$ سیگنال $x(t)$ برابر صفر باشد و در مبدأ شامل ضربه یا مشتقات ضربه نباشد داریم:

(۴-۲۲) $$x(\circ^+)=\lim_{s\to\infty}sX(s)$$

ی- قضیه مقدار نهایی

اگر $t<\circ$ سیگنال $x(t)$ برابر صفر باشد و در مبدأ شامل ضربه یا مشتقات ضربه نباشد داریم:

(۴-۲۳) $$x(\infty)=\lim_{s\to\circ}sX(s)$$

* **نکته:** *اگر $x(t)$ سیگنال زوج باشد، قطب ها و صفرهای نسبت به محور $j\omega$ در صفحه متقارن هستند. برای مثال برای یک سیگنال نوعی زوج $x(t)$ نمایش قطب و صفر چنین است.*

مثال ۴-۷: تبدیل لاپلاس سیگنال پیوسته $y(t)=\sin(2t)u(t)$ با $Y(s)$ نشان داده می‌شود. سیگنال $x(t)$ مربوط به هر یک از تبدیل لاپلاس‌های $X(s)$ را تعیین کنید.

الف - $X(s)=(3s+2)Y(s)$

با توجه به خاصیت خطی بودن و خاصیت مشتق‌گیری داریم:

$$x(t)=3\frac{d}{dt}y(t)+2y(t)=3\times2\cos(2t)u(t)+2\sin(2t)u(t)$$
$$=2(3\cos2t+\sin2t)u(t)$$

ب- $X(s)=Y(5s)$

با توجه به خاصیت تغییر مقیاس داریم:

$$x(t)=\frac{1}{5}y\left(\frac{t}{5}\right)=\frac{1}{5}\sin\left(\frac{2t}{5}\right)u(t)$$

ج- $X(s)=s^{-1}Y(s)$

با توجه به خاصیت انتگرال‌گیری داریم:

$$x(t)=\int_{-\infty}^{t}y(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{t}\sin(2\tau)u(\tau)d\tau=\int_{\circ}^{t}\sin2\tau\, d\tau=-\frac{\cos2\tau}{2}\bigg|_{\circ}^{t}=\left(\frac{1}{2}-\frac{\cos2t}{2}\right)u(t)$$

د- $X(s)=\frac{d}{ds}\left(e^{-2s}Y(s)\right)$

با توجه به خاصیت شیفت زمانی و مشتق در فرکانس داریم:

$$x(t)=-ty(t-2)=-t\sin(2(t-2))u(t-2)$$

مثال ۴-۸ : تبدیل لاپلاس سیگنال پیوستهٔ $x(t)$ به صورت $X(s)=\frac{4s}{s^2+9}$ می‌باشد. تبدیل لاپلاس $y(t)$ را در هر یک از موارد زیر تعیین کنید:

الف - $y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(2\tau)d\tau$

با توجه به خاصیت مقیاس زمانی و انتگرال‌گیری زمانی داریم:

$$Y(s)=\frac{\frac{1}{2}X\left(\frac{s}{2}\right)}{s}=\frac{4}{s^2+36}$$

ب - $y(t)=3tx(t)$

با توجه به خاصیت مشتق در فرکانس و خطی بودن داریم:

$$Y(s)=-3\frac{d}{ds}X(s)=\frac{12s^2-108}{\left(s^2+9\right)^2}$$

ج - $y(t)=3x(t)*\frac{d}{dt}x(t)$

باتوجه به خاصیت مشتق زمانی، کانولوشن و خطی بودن داریم:

$$Y(s)=3X(s).(sX(s))=\frac{48s^3}{\left(s^2+9\right)^2}$$

د - $y(t)=4e^{-3t}x(t)$

باتوجه به خاصیت شیفت فرکانسی و خطی بودن داریم:

$$Y(s)=4X(s+3)=\frac{16(s+3)}{(s+3)^2+9}$$

٤-٦ جدول زوج های تبدیل لاپلاس مهم

جدول ۴-۱ تبدیل لاپلاس توابع مقدماتی را همراه با ناحیه همگرایی مربوط نشان می‌دهد.

جدول ۴-۱ تبدیل لاپلاس توابع مقدماتی

ROC	تبدیل	سیگنال
تمام صفحه s	1	$\delta(t)$
$Re\{s\}>0$	$\frac{1}{s}$	$u(t)$
$Re\{s\}<0$	$\frac{1}{s}$	$-u(-t)$
$Re\{s\}>0$	$\frac{1}{s^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(t)$
$Re\{s\}<0$	$\frac{1}{s^n}$	$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(-t)$
$Re\{s\}>-a$	$\frac{1}{s+a}$	$e^{-at}u(t)$

$-e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{s+a}$	$Re\{s\}<-a$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$Re\{s\}>-a$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$Re\{s\}<-a$
$\delta(t-T)$	e^{-sT}	تمام صفحه s
$[\cos\omega_0 t]u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$	$Re\{s\}>0$
$[\sin\omega_0 t]u(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	$Re\{s\}>0$
$[e^{-at}\cos\omega_0 t]u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}$	$Re\{s\}>-a$
$[e^{-at}\sin\omega_0 t]u(t)$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2}$	$Re\{s\}>-a$
$u_n(t)=\frac{d^n\delta(t)}{dt^n}$	s^n	تمام صفحه s
$u_{-n}(t)=\underbrace{u(t)*.....*u(t)}_{n}$	$\frac{1}{s^n}$	$Re\{s\}>0$

۴-۷ توصیف سیستم های LTI و خواص آنها با تبدیل لاپلاس

تبدیل لاپلاس پاسخ ضربه سیستم LTI تابع سیستم یا تابع انتقال نامیده می‌شود. خاصیت کانولوشن نتیجه می‌دهد که

$$Y(s)=H(s)X(s) \qquad (۲۴-۴)$$

که در آن $X(s)$ و $Y(s)$ به ترتیب تبدیل لاپلاس های ورودی و خروجی سیستم هستند. برای یافتن صورت زمانی سیگنال خروجی $y(t)$ کافی است از عکس تبدیل لاپلاس استفاده شود.

می دانیم که معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت به شرط سکون اولیه یک سیستم LTI علی را توصیف می‌کند:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k}=\sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \qquad (۲۵-۴)$$

با گرفتن تبدیل لاپلاس از طرفین معادله و استفاده از خواص خطی بودن و مشتق گیری داریم:

$$H(s)=\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k} \qquad (۲۶-۴)$$

تا اینجا هیچ قیدی برای ROC ارائه نشده است. اما با توجه به ویژگی های سیستم می‌توان نتایجی را در مورد ROC به دست آورد.

الف - علی بودن

پاسخ ضربه سیستم LTI علی در $t<0$، متحد با صفر است یعنی $h(t)$ سیگنال سمت راستی است و با توجه به خواص ROC نتیجه می‌شود که «ROC مربوط به تابع تبدیل سیستم علی ، سمت راست آخرین قطب سمت راست می‌باشد». توجه کنید که

عکس قضیه همواره صادق نیست یعنی اگر ROC در سمت راست آخرین قطب سمت راست باشد، علی بودن سیستم را تضمین نمی کند مگر اینکه تابع تبدیل گویا باشد . پس به طور خلاصه علی بودن سیستم دارای تابع تبدیل گویا معادل است با اینکه ROC تابع تبدیل سمت راست آخرین قطب سمت راست باشد.

ب- پایداری

یک سیستم LTI در صورتی پایدار است که پاسخ ضربه آن مطلقا انتگرال پذیر باشد یا به عبارتی تبدیل فوریه پاسخ ضربه موجود باشد چون تبدیل فوریه سیگنال در واقع تبدیل لاپلاس آن روی محور $j\omega$ هست داریم « سیستم LTI پایدار است اگر و تنها اگر ROC تابع تبدیل شامل محور $j\omega$ باشد»

ج- علی بودن و پایداری

سیستم دارای تابع تبدیل گویا، علی و پایدار است اگر و تنها اگر تمام قطب های آن در نیم صفحه چپ صفحه s باشد یعنی ROC هم شامل محور $j\omega$ بوده و هم سمت راست آخرین قطب سمت راست قرار گیرد.

مثال: ۴-۹ ، یک سیستم زمان پیوسته با رابطه $\frac{dy(t)}{dt}+3y(t)=\frac{d^2x(t)}{dt^2}+2\frac{dx(t)}{dt}-8x(t)$ توصیف می‌شود. آیا معکوس این سیستم می‌تواند هم علی و هم پایدار باشد؟

تابع تبدیل این سیستم به صورت زیر تعیین می‌شود.

$$sY(s)+3Y(s)=s^2X(s)+2sX(s)-8X(s)$$

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{s^2+2s-8}{s+3}$$

تابع تبدیل معکوس این سیستم به صورت زیر است:

$$H_I s=\frac{1}{H(s)}=\frac{s+3}{s^2+2s-8}=\frac{s+3}{(s+4)(s-2)}$$

چون هر دو قطب $H_I(s)$ در نیم صفحه چپ واقع نیستند پس نمی‌تواند هم علی و هم پایدار باشد.

۸-٤ تبدیل لاپلاس یکطرفه

تبدیل لاپلاس یکطرفه در تحلیل سیستم های علی به ویژه سیستم های توصیف شده با معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت دارای شرایط اولیه (سکون اولیه ندارد) به کار می‌رود.

تبدیل لاپلاس یکطرفه سیگنال $x(t)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$X_1(s)=\int_{0^-}^{\infty}x(t)e^{-st}dt \qquad (۴-۲۷)$$

در حالت کلی تبدیل لاپلاس یکطرفه سیگنال $x(t)$ همان تبدیل لاپلاس $x(t)$ است که برای $t\le 0$ مقدار $x(t)$ صفر باشد. با توجه به اینکه در این شرایط سیگنال مدنظر سمت راستی است و ROC سیگنال های سمت راستی با تبدیل لاپلاس گویا سمت راست آخرین قطب سمت راست می‌باشد، بنابراین ROC تبدیل لاپلاس یکطرفه همواره سمت راست، آخرین قطب سمت راست است در نتیجه در تبدیل لاپلاس یکطرفه گویا ROC صریحا ذکر نمی شود.و با توجه به این نکته می‌توان از روی جدول تبدیل لاپلاس سیگنال های تبدیل لاپلاس یکطرفه آنها را هم تعیین کرد. برای گرفتن عکس تبدیل لاپلاس یکطرفه هم می‌توان از همان جدول بهره برد که در این حالت ضریب $u(t)$ با $t>0$ جایگزین می‌شود.

※ **نکته:** *اغلب خواص تبدیل لاپلاس برای تبدیل لاپلاس یکطرفه هم صادق است یک مورد اختلاف مهم مربوط به خاصیت مشتق می‌باشد.*

$$x(t) \xleftrightarrow{L_1} X(s)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{L_1} sX(s) - x(0^-) \qquad (۲۸-۴)$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} \xleftrightarrow{L_1} s^2X(s) - sx(0^-) - x'(0^-)$$

برای مثال فرض کنید یک سیستم با معادله دیفرانسیل زیر توصیف می‌شود:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t) \qquad (۲۹-۴)$$

اگر در $t=0$ مقدار خروجی برابر ۳ و مشتق خروجی برابر ۵- باشد، پاسخ این سیستم به ورودی $x(t) = 2u(t)$ با استفاده از تبدیل لاپلاس یکطرفه قابل محاسبه است؛ از طرفین معادله تبدیل لاپلاس یکطرفه می‌گیریم:

$$\left(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) + 3\left(sY(s) - y(0)\right) + 2Y(s) = \frac{2}{s} \qquad (۳۰-۴)$$

$$\begin{cases} y(0) = 3 \\ y'(0) = -5 \end{cases}$$

$$Y(s) = \frac{2+4s+3s^2}{s(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s} + \frac{-1}{s+1} + \frac{3}{s+2} \qquad (۳۱-۴)$$

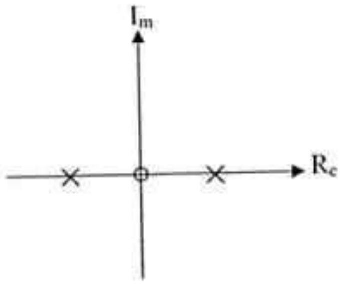
مشاهده می‌کنید که $Y(s)$ به کسرهای جزئی بسط داده شده است حال با استفاده از عکس تبدیل داریم:

$$y(t) = 1 - e^{-t} + 3e^{-2t} \quad ; t > 0 \qquad (۳۲-۴)$$

۴-۹ چند تمرین حل شده

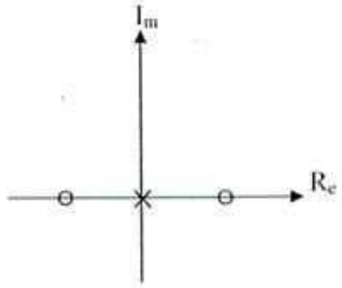
مثال ۴-۱۰: در بخش خواص تبدیل لاپلاس اشاره شد که اگر $x(t)$ سیگنال زوج باشد، تبدیل لاپلاس آن تابع زوجی از s خواهد بود و بطور مشابه اگر $x(t)$ سیگنال فرد باشد.تبدیل لاپلاس آن تابعی فرد از s خواهد بود. حال مشخص می‌کنیم که کدام یک از نمودارهای صفر و قطب نشان داده شده می‌توانند مربوط به سیگنال زوج یا سیگنال فرد باشد:

الف-



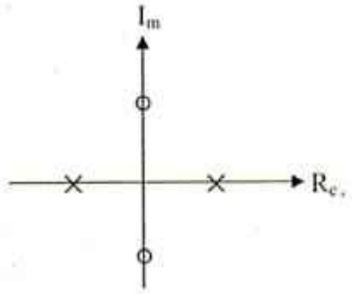
فرم کلی $X(s)$ بصورت $k\dfrac{s}{s^2-a^2}$ است که تقارن فرد دارد می‌توان برای آن ROC متقارن در نظر گرفت (نوار بین دو قطب) پس سیگنال مربوط به آن تقارن فرد دارد.

ب-



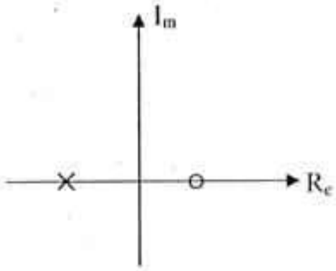
فرم کلی $X(s)$ بصورت $k\,\frac{s^{2}-a^{2}}{s}$ است که تقارن فرد دارد اما توجه کنید که نمی توان برای آن ROC متقارن در نظر گرفت پس سیگنال مربوط به آن فرد نیست.

ج-



تقارن زوج تبدیل لاپلاس از روی آرایش صفرها و قطب های آن روشن است. اگر ROC نوار بین دو قطب باشد، آنگاه ROC دارای تقارن بوده و سیگنال مربوطه زوج خواهد بود.

د-



فرم کلی $X(s)$ به صورت $k\,\frac{s-b}{s-a}$ هست که تقارن زوج یا فرد ندارد در نتیجه $x(t)$ هم فرد یا زوج نیست.

مثال ۴-۱۱: سیگنال پیوسته $x(t)$ برای $t<0$ برابر e^{2t} است. $X(s)$ آن فقط دارای دو صفر مرتبه اول در $s=-1$ و ∞ است و تنها قطب واقع در نیم صفحه چپ آن $s=-3$ است. هدف تعیین $x(t)$ برای $t>0$ بر اساس اطلاعات موجود است:
چون $X(s)$ در $s=-1$ و $s=+\infty$ دارای صفر است، پس صورت آن از درجه یک و مخرج آن از درجه دو است و می‌دانیم که یک ریشه مخرج هم در $s=-3$ هست و ریشه دیگر آن در نیم صفحه چپ نیست پس

$$X(s)=\frac{K(s+1)}{(s+3)(s-a)} \quad , \quad a>0$$

با گسترش $X(s)$ به کسرهای جزئی داریم

$$X(s)=\frac{A}{s+3}+\frac{B}{s-a}$$

که

$$A=\frac{2k}{a+3} \quad \text{و} \quad B=\frac{k(a+1)}{a+3}$$

هر کدام از جمله های فوق در بسط را می‌توان در حوزه زمان با سیگنال سمت راستی یا سیگنال سمت چپی مشخص کرد، با توجه به اینکه برای $t<0$ داریم $x(t)=e^{2t}$ پس عکس تبدیل $X(s)$ به صورت زیر است:

$$x(t)=\frac{2k}{3+a}e^{-3t}u(t)+\frac{k(a+1)}{3+a}e^{at}u(-t)$$

توجه کنید که چون $x(t)$ دو طرفه فرض شده ، ROC تبدیل لاپلاس به صورت نواری در صفحه s است که بین دو قطب ۳- و $a>0$ قرار دارد.

$$t<0: e^{2t}=\frac{-k(a+1)}{3+a}e^{at} \Rightarrow a=2$$

$$k=\frac{-5}{3}$$

و در نتیجه $x(t)=\frac{2}{3}e^{-3t}$ است برای $t>0$

مثال ۴-۱۲، سیستم LTI پایدار و علی با پاسخ ضربه $h(t)$ مفروض است . پاسخ حالات ماندگار آن به پله واحد $s(+\infty)=\frac{1}{3}$ است. وقتی ورودی $e^{t}u(t)$ به سیستم اعمال می‌شود ، خروجی مطلقا" انتگرال پذیر است . سیگنال $\frac{d^2h(t)}{dt^2}+5\frac{dh(t)}{dt}+6h(t)$ استمرار زمانی محدود دارد . $h(t)$ دقیقاً دارای یک صفر در بی نهایت است . $H(s)$ و ROC آن را تعیین کنید .

از پایداری و علی بودن سیستم نتیجه می‌شود که ROC سمت راستی و شامل محور موهومی است .

با توجه به اینکه $s(t)=\int_{-\infty}^{t}h(t')dt'$ می‌باشد داریم $s(+\infty)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(t')dt'$ که مقدار آن از طرفی با $H(0)$ برابر است پس

$$H(s)\Big|_{s=0}=s(+\infty)=\frac{1}{3}$$

برای $x(t)=e^{t}u(t)$ داریم $\operatorname{Re}\{s\}>1$، $X(s)=\frac{1}{s-1}$، $Y(s)=H(s)X(s)$ و ROC مربوط به Y حداقل برابر اشتراک ROC های مربوط به X,H است . چون $y(t)$ مطلقاً انتگرال پذیر می‌باشد در نتیجه دارای تبدیل فوریه است و به عبارتی ROC مربوط به Y شامل محور $j\omega$ هست و چون ROC هیچ قطبی را در بر نمی گیرد پس قطب $s=1$ مربوط به X با صفر $s=1$ مربوط به H حذف شده است . در نتیجه H در $s=1$ دارای صفر می‌باشد .

چون $h(t)$ دقیقاً یک صفر در بی نهایت دارد پس مرتبه مخرج از مرتبه صورت دقیقا" یک واحد بزرگتر است پس مخرج دارای دو ریشه است .

اگر سیگنالی دارای استمرار محدود بوده و مطلقا" انتگرال پذیر باشد ، ROC مربوط به آن کل صفحه s است . می‌دانیم که $g(t)=\frac{d^2h(t)}{dt^2}+5\frac{dh(t)}{dt}+2h(t)$ دارای استمرار محدود است و چون $h(t)$ مطلقا" انتگرال پذیر می‌باشد ، $g(t)$ نیز مطلقا" انتگرال پذیر است (با توجه به خاصیت مشتق گیری) چون ROC مشتق یک سیگنال ، ROC سیگنال اصلی را هم در بر دارد و ROC مربوط به $h(t)$ شامل محور $j\omega$ هست ، ROC مربوط به مشتقات آن نیز ، محور $j\omega$ را در بر دارند . چون ROC

مربوط به $g(t)$ کل صفحه s است . $g(t)$ نمی تواند قطبی داشته باشد مگر در ∞ . از طرفی می‌دانیم که $H(s)$ حداقل دو قطب دارد . برای اینکه $G(s)$ دارای قطب نباشد ، باید قطب های $H(s)$ توسط صفرهای G حذف شوند .

$$G(s)=s^{2}H(s)+5sH(s)+6H(s)$$
$$=(s+2)(s+3)H(s)$$

بنابراین $H(s)$ فقط دارای دو قطب در $S=-2$ و $S=-3$ است .

با ترکیب همه اطلاعات استخراج شده در مورد صفر و قطب های $H(s)$ داریم :

$$H(s)=k\frac{s-1}{(s+2)(s+3)},\mathrm{Re}\{s\}>-2$$

چون $H(0)=\frac{1}{3}$ است داریم $k=-2$ و در نهایت $H(s)$ و ROC آن به صورت زیر تعیین می‌شوند :

$$H(s)=-2\frac{s-1}{(s+2)(s+3)},\mathrm{Re}\{s\}>-2$$

تست‌های طبقه‌بندی شده فصل چهارم

۱- مقدار نهایی پاسخ زمانی سیستم LTI با تابع تبدیل $H(s)=\frac{1}{s-2}$ به ورودی $x(t)=3u(t)$ چقدر است؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۸۵)

۱) صفر ۲) $\frac{-3}{2}$ ۳) 3 ۴) بی‌نهایت

۲- یک سیستم LTI پایدار توسط معادله دیفرانسیل

$$4y(t)-\frac{d^2y(t)}{dt^2}=x(t)$$

توصیف می‌شود. پاسخ سیستم به کدام یک از ورودی‌های $x_1(t)=e^{-t}$ ، $x_2(t)=e^{-4t}$ ، $x_3(t)=e^{4t}$ کراندار است؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۸۴)

۱) فقط $x_1(t)$ ۲) $x_2(t), x_1(t)$ ۳) هرسه ۴) هیچکدام

۳- اگر محدوده $Real[s]>-3$ منطقه همگرایی برای تبدیل لاپلاس سیگنال $x(t)$ باشد ، منطقه همگرایی برای تبدیل لاپلاس $x(\alpha t)$ که $-1<\alpha<0$ باشد عبارت است از :

(مهندسی برق ـ سراسری ۸۳)

۱) $Real[s]>-3\alpha$ ۲) $Real[s]>\frac{-3}{\alpha}$ ۳) $Real[s]<-3\alpha$ ۴) $\frac{3}{\alpha}<Real[s]<\frac{-3}{\alpha}$

۴- اگر $z(t)=x(t)*y(t)$ باشد ، در آن صورت $x(2t)*y(2t)$ برابر است با :

(مهندسی برق ـ سراسری ۸۳)

۱) $z(2t)$ ۲) $2z(2t)$ ۳) $\frac{1}{4}z(2t)$ ۴) $\frac{1}{2}z(2t)$

۵- سیستم LTI پیوسته با معادله دیفرانسیل

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\frac{dy(t)}{dt}-6y(t)=\frac{d^2x(t)}{dt^2}-\frac{dx(t)}{dt}-2x(t)$$

را داریم. وارون این سیستم می‌تواند :

(مهندسی برق ـ سراسری ۸۳)

۱) علی و ناپایدار باشد.
۲) علی و پایدار باشد.
۳) ضد علی و پایدار باشد.
۴) گزینه ها همگی ناصحیح هستند.

۶- پاسخ ضربه سیستم معکوس توصیف شده با رابطه

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}e^{-(t-\tau)}x(\tau)d\tau$$

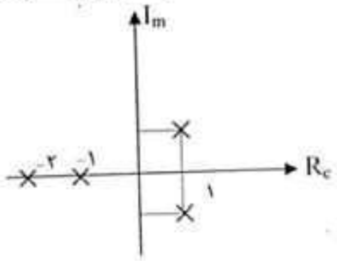
را به دست آورید ؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۸۳)

۱) $\delta'(t)$ ۲) $u(t)$ ۳) $\delta(t)$ ۴) $\delta(t)+\delta'(t)$

۷- در سیستم با آرایش صفرها و قطب‌های نشان داده شده در شکل زیر، به ازاء ناحیه همگرایی $-1<Re\{s\}<1$ پاسخ ضربه سیستم برابر است با:

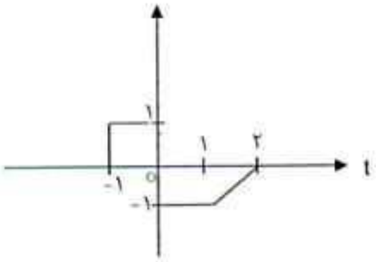
(مهندسی برق ـ سراسری ۸۲)



۱) $h(t)=\left[e^{-2t}-e^{-t}+e^{t}\sin(t)\right]u(t)$
۲) $h(t)=\left[-e^{-2t}+e^{-t}-e^{t}\sin(t)\right]u(t)$
۳) $h(t)=e^{-2t}u(t)+\left[e^{-t}-e^{t}\sin(t)\right]u(-t)$
۴) $h(t)=\left(e^{-2t}-e^{-t}\right)u(t)-e^{t}\sin(t)u(-t)$

۸- یک سیستم خطی و تغییر ناپذیر با زمان دارای پاسخ ضربه $h(t)=e^{-t}\delta(t)+u(t-1)$ می‌باشد. پاسخ این سیستم به ورودی $x(t)$ که در زیر نمایش داده شده، در نقاط $t=\frac{3}{2}$ و $t=+\infty$ به ترتیب با کدام گزینه برابر است؛

(مهندسی برق ـ سراسری ۸۱)



۱) $-1,1$

۲) $0,1$

۳) $\frac{-1}{2},0$

۴) $\frac{-1}{2},\frac{-1}{2}$

۹- اگر پاسخ پله یک سیستم LTI برابر $s(t)=\left(1-e^{-t}-te^{-t}\right)u(t)$ باشد و پاسخ خروجی سیستم به ورودی $x(t)$ برابر $y(t)=\left(2-3e^{-t}+e^{-3t}\right)u(t)$ باشد $x(t)$ کدام است ؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۱)

۱) $2+e^{-3t}$

۲) $\left(2+4e^{-t}\right)u(t)$

۳) $\left(1+e^{-t}+3te^{-t}\right)u(t)$

۴) $\left(2+4e^{-3t}\right)u(t)$

۱۰- پاسخ ضربه یک سیستم در معادله دیفرانسیل زیر صدق می‌کند ؛

$$\frac{dh(t)}{dt}+2h(t)=e^{-4t}u(t)+bu(t)$$

که در آن $u(t)$ پله واحد و b یک ثابت نامعین می‌باشد خروجی سیستم به ورودی $x(t)=e^{2t}$ به ازاء تمام زمان ها برابر $y(t)=\frac{1}{12}e^{2t}$ می‌باشد . مقدار b کدام است ؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۱)

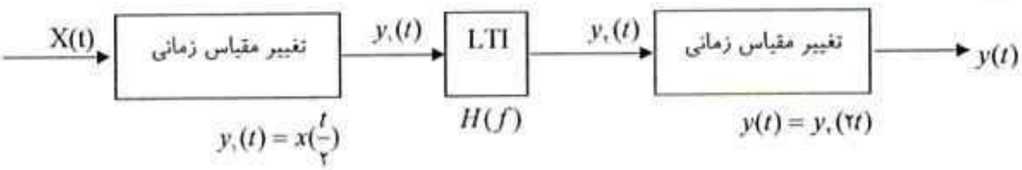
۱) $b=\frac{1}{12}$

۲) $b=\frac{1}{3}$

۳) $b=\frac{-1}{12}$

۴) $b=\frac{-1}{3}$

۱۱- سیستمی از سه طبقه متوالی مطابق شکل زیر تشکیل شده است . در این شکل $H(f)$ تابع تبدیل طبقه وسط می‌باشد کدام گزینه در مورد این سیستم صحیح است ؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۰)



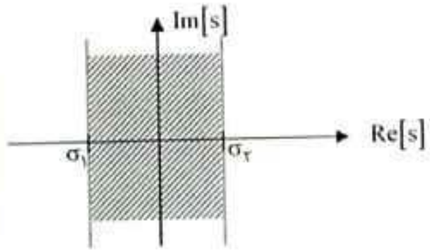
۱) LTI نیست.

۲) LTI است با تابع تبدیل $H(2f)$

۳) LTI است با تابع تبدیل $H\left(\frac{f}{2}\right)$

۴) LTI است با تابع تبدیل $H(f)$

۱۲- اگر ناحیه همگرایی تبدیل لاپلاس سیگنال $x(t)$ به صورت زیر باشد، ناحیه همگرایی تبدیل لاپلاس سیگنال $y(t)=x(t)u(t)$ کدام است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۰)



۱) $\mathrm{Re}[s]>\sigma_1$

۲) $\mathrm{Re}[s]<\sigma_2$

۳) $\mathrm{Re}[s]>\sigma_2$

۴) $\sigma_1<\mathrm{Re}[s]<\sigma_2$

۱۳- تبدیل لاپلاس سیگنال $x(t)$ دارای یک قطب در $s=-2$ می‌باشد. سیگنال $x_1(t)=e^{2t}x(t)$ مطلقاً انتگرال پذیر است. سیگنال $x_2(t)=e^{4t}x(t)$ تبدیل فوریه ندارد. سیگنال $x(t)$ یک سیگنال: (مهندسی برق ـ آزاد ۸۰)

۱) سمت راستی است. ۲) سمت چپی است.

۲) با دوره محدود است. ۴) دو طرفه است.

۱۴- تابع تبدیل یک سیستم پیوسته LTI به صورت $H(s)=\frac{6s}{s^2+2s-8}$ می‌باشد و ناحیه همگرایی آن $-4<\mathrm{Re}[s]<2$ می‌باشد. در مورد این سیستم کدام گزاره نادرست است؟ (مهندسی برق ـ آزاد ۸۰)

۱) سیستم پایدار است.

۲) سیستم غیر سببی است.

۳) پاسخ پله سیستم به صورت $s(t)=-e^{-4t}u(t)+4e^{2t}u(-t)$ می‌باشد.

۴) اگر $h(t)$ پاسخ ضربه سیستم باشد $\int_{-\infty}^{+\infty}h(t)dt=0$.

۱۵- پاسخ یک سیستم LTI پیوسته سببی با تابع تبدیل

$$H(s)=\frac{s+1}{(s+2)(s+a)}$$

به ورودی $x(t)=1$ به ازای هر t، $y(t)=\frac{a}{32}t$ می‌باشد مقدار a کدام است؟ (مهندسی برق ـ آزاد ۸۰)

۱) $a=-4$ ۲) $a=4$ ۳) $a=0$ ۴) $a=\pm4$

۱۶- اگر $X(s)$ تبدیل لاپلاس $x(t)$ بوده و

الف: $X(0)=8$

ب: $e^{-2t}x(t)$ به طور مطلق انتگرال پذیر نباشد.

ج: $X(s)$ یک قطب در $s=-1+j$ داشته باشد.

در آن صورت $x(t)$ مطابق با کدام گزینه می‌شود؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۷۹)

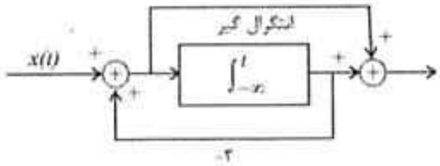
۱) یک سیگنال چپ سو خواهد بود.

۲) یک سیگنال راست سو خواهد بود.

۳) یک سیگنال از دو طرف محدود خواهد بود.

۴) یک سیگنال از دو طرف نامحدود خواهد بود.

۱۷- پاسخ ضربه سیستم LTI در شکل مقابل کدام است ؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۷۹)



۱) $\delta(t)-e^{-2t}u(t)$ ۲) $\delta(t)+2\delta(t-1)$

۳) $2\delta(t)-e^{-t}u(t)$ ۴) $e^{-2t}u(t)$

۱۸- تابع سیستم یک سیستم زمان پیوسته LTI و علی به صورت

$$H(s)=\frac{s^2+as+1}{s^2+3s+5}$$

داده شده است . اگر به ازاء ورودی $x(t)=e^{2t}$ خروجی این سیستم برابر $y(t)=\frac{3}{5}e^{2t}$ باشد مقدار a چقدر است ؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۷۸)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۹- تابع تبدیل یک سیستم LTI به صورت $H(s)=K\frac{s-\sigma_1}{s+\sigma_2}$ می‌باشد که در آن $\sigma_1\geq 0, \sigma_2>0$ است . می‌دانیم که پاسخ این سیستم به ورودی دو طرفه $x(t)=\cos t$ برابر $y(t)=\sin t$ است σ_1,σ_2 چه مقادیری می‌توانند داشته باشند ؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۷۸)

۱) فقط $\sigma_1=\sigma_2=1$ باید باشد. ۲) کافی است که $\sigma_1=0$ باشد.

۳) کافی است که $\sigma_1=\sigma_2$ باشد. ۴) کافی است که $\sigma_1\sigma_2=1$ باشد.

۲۰- تابع تبدیل یک سیستم LTI به صورت $H(s)=\frac{s+2}{s^2-2s+1-a^2}$ مفروض است که در آن a یک عدد ثابت حقیقی است. کدامیک از گزاره های زیر صحیح است ؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۷۸)

۱) این سیستم نمی تواند توأماً علی و پایدار باشد (به ازاء هیچ مقداری از a)

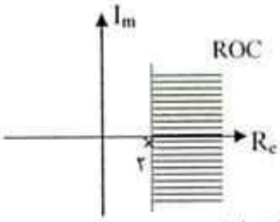
۲) این سیستم نمی‌تواند توأماً غیر علی و پایدار باشد (به ازاء هیچ مقداری از a)

۱) گزاره (۱) ۲) گزاره (۲) ۳) هردو گزاره ۴) هیچکدام

پاسخ تشریحی تست‌های طبقه‌بندی شده فصل چهارم

۱- گزینه «۴»- (ساده)

با توجه به این که تنها قطب سیستم LTIمفروض در $s=2$ واقع است و سیستم علی نیز می‌باشد ROCآن به صورت شکل زیر خواهد بود



بنابراین به ازاء ورودی پله، پاسخ سیستم واگرا خواهد شد:

$$Y(s)=\frac{1}{s-2}\cdot\frac{3}{s}=\frac{\frac{3}{2}}{s-2}+\frac{-\frac{3}{2}}{s}$$

$$y(t)=\frac{3}{2}(e^{2t}-1)u(t)$$

$$\begin{cases} t\to\infty \\ y(t)\to\infty \end{cases}$$

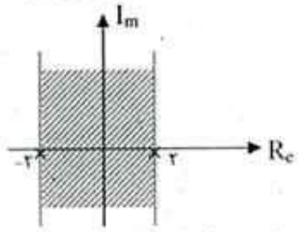
توجه کنید که چون ROCتابع تبدیل سیستم شامل محور $j\omega$ نیست، سیستم ناپایدار است.

۲- گزینه «۱»- (متوسط)

تابع تبدیل سیستم و ناحیهٔ همگرایی آن از روی معادلهٔ دیفرانسیل و توجه به خاصیت پایداری محاسبه می‌شود:

$$4Y(s)-s^2Y(s)=X(s)$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{1}{-s^2+4}$$

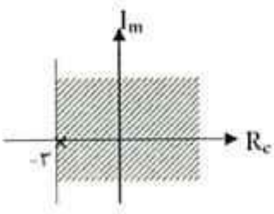


توجه کنید چون سیستم پایدار است ناحیه همگرایی تابع تبدیل باید شامل محور موهومی باشد.از طرفی پاسخ سیستم LTI با تابع تبدیل $H(s)$ به ورودی e^{st} به صورت $H(s_0)e^{st}$ می‌باشد. فقط در $x_1(t)=e^{-t}$ مقدار $s_0=-1$ در ناحیه همگرایی $H(s)$ واقع بوده و منجر به خروجی کراندار می‌شود. در $x_2(t)=e^{-4t}$ مقدار $s_0=-4$ و خارج از ناحیه همگرایی $H(s)$ می‌باشد. در $x_3(t)=e^{6t}$ مقدار $s_0=+6$ و باز هم خارج ناحیه همگرایی $H(s)$ هست.

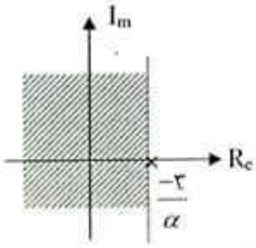
۳- گزینه «۲» (متوسط)

با توجه به خاصیت تبدیل لاپلاس در رابطه (۴-۱۹)، روشن است که اگر ناحیه همگرایی تبدیل لاپلاس $x(t)$ برابر R باشد آنگاه ناحیه همگرایی تبدیل لاپلاس $x(at)$ برابر $\frac{R}{a}$ خواهد بود. به ازاء $-1<\alpha<0$ ، R با ضرایب $\frac{1}{a}$ منبسط شده و حول محور $j\omega$ وارونه می‌شود.

$$R=\mathrm{Re}\{s\}>-3$$



$$\frac{R}{a}=\mathrm{Re}\{s\}<-\frac{3}{\alpha}$$



۴- گزینه «۴» - (ساده)

از خاصیت کانولوشن داریم:

$$Z(s)=X(s)Y(s)$$

با توجه به خاصیت تغییر مقیاس زمانی

$$W(s)=\frac{1}{2}X(\frac{s}{2})\frac{1}{2}Y(\frac{s}{2})=\frac{1}{4}Z(\frac{s}{2})\leftrightarrow\frac{1}{2}z(2t)$$

۵- گزینه «۲» - (ساده)

تابع تبدیل سیستم به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\frac{dy(t)}{dt}-6y(t)=\frac{d^2x(t)}{dt^2}-\frac{dx(t)}{dt}-2x(t)$$

$$s^2Y(s)+sY(s)-6Y(s)=s^2X(s)-sX(s)-2X(s)$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{s^2-s-2}{s^2+s-6}=\frac{(s+1)(s-2)}{(s+3)(s-2)}=\frac{s+1}{s+3}$$

در نتیجه تابع تبدیل سیستم معکوس آن برابر است با:

$$H_I(s)=\frac{s+3}{s+1}$$

چون قطب این سیستم در $s=-1$ واقع است با انتخاب ناحیه همگرایی به صورت $\mathrm{Re}\{s\}>-1$ می‌تواند هم پایدار و هم علی باشد.

۶- گزینه «۴»- (متوسط)

با توجه به اینکه رابطهٔ توصیف کننده سیستم به فرم انتگرال کانولوشن با پاسخ ضربه $h(t)=e^{-t}$ است، تابع تبدیل سیستم به صورت زیر می‌باشد.

$$H(s)=L\{h(t)\}=\frac{1}{s+1}$$

در نتیجه تابع تبدیل سیستم معکوس $H_I(s)=s+1$ می‌باشد با گرفتن عکس تبدیل از $H_I(s)$، پاسخ ضربه سیستم معکوس به دست می‌آید.

$$h_I(t)=\delta'(t)+\delta(t)$$

۷- گزینه «۴»- (متوسط)

با توجه به ناحیه همگرایی، برای قطب‌های ۱- و ۲- پاسخ زمانی سمت راستی خواهد بود (چون ROC در سمت راست آنها قرار گرفته) و برای قطب $\pm1+j$ پاسخ زمانی سمت چپی خواهد بود (چون ROC در سمت چپ آنها قرار گرفته) از طرفی رفتار زمانی برای قطب‌های حقیقی، پاسخ زمانی میرای نمایی و برای قطب‌های مختلط با قسمت حقیقی مثبت، نوسانی نامیرا می‌باشد. پس جواب درست گزینه «۴» می‌تواند باشد.

۸- گزینه «۳»- (ساده)

برای یافتن پاسخ در $t=\frac{3}{2}$ از انتگرال کانولوشن استفاده می‌کنیم

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[e^{-\tau}\delta(\tau)+u(t-1)\right]x(t-\tau)d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\tau}\delta(\tau)x(t-\tau)d\tau+\int_{-\infty}^{+\infty}x(t-\tau)u(\tau-1)d\tau$$

$$=x(t)+\int_{-\infty}^{t-1}x(\tau)d\tau$$

$$y(\frac{3}{2})=x(\frac{3}{2})+\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}}x(\tau)d\tau=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0$$

برای یافتن پاسخ در $t=+\infty$ داریم:

$$y(+\infty)=Lim_{t\to+\infty}x(t)-\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)d\tau=0-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

۹- گزینه «۴»- (ساده)

ابتدا تابع تبدیل سیستم به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$H(s)=\frac{S(s)}{U(s)}=\frac{\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}-\frac{1}{(s+1)^2}}{\frac{1}{s}}=\frac{1}{(s+1)^2} \quad \text{و} \quad \operatorname{Re}\{s\}>-1$$

$$X(s)=\frac{Y(s)}{H(s)}=\frac{\frac{2}{s}-\frac{3}{s+1}+\frac{1}{s+3}}{\frac{1}{(s+1)^2}}=$$

$$=\frac{6(s+1)}{s(s+3)}=\frac{2}{s}+\frac{4}{s+3} \quad \text{و} \quad \operatorname{Re}\{s\}>0$$

$$x(t)=(2+4e^{-3t})u(t)$$

۱۰- گزینه «۲» - (ساده)

با توجه به معادله دیفرانسیل سیستم، تابع تبدیل آن به صورت زیر است:

$$sH(s)+2H(s)=\frac{1}{(s+4)}+\frac{b}{s}$$

$$H(s)=\frac{\frac{1}{s+4}+\frac{b}{s}}{s+2}$$

با توجه به اینکه خروجی سیستم با تابع تبدیل $H(s)$ به ورودی e^{st} برابر $H(s_0)e^{st}$ می‌باشد داریم:

$$\frac{1}{12}e^{2t}=\frac{\frac{1}{6}+\frac{b}{2}}{4}e^{2t}\Rightarrow b=\frac{1}{3}$$

۱۱- گزینه «۳»- (متوسط)

از خاصیت‌های تبدیل لاپلاس داریم:

$$y_1(t)=x(\frac{t}{2}) \quad \Rightarrow \quad Y_1(s)=2X(2s)$$

$$\Rightarrow \quad Y_2(s)=2H(s)X(2s)$$

$$y(t)=y(2t) \quad \Rightarrow \quad Y(s)=2\frac{1}{2}H(\frac{s}{2})X(s)$$

در نتیجه تابع تبدیل کلی به صورت $H(\frac{s}{2})$ می‌باشد.

۱۲- گزینه «۱»- (متوسط)

ضرب $u(t)$ در $x(t)$ باعث می‌شود که سیگنال حاصل $(y(t))$ سمت راستی شود. در نتیجه ناحیه همگرایی تبدیل لاپلاس $y(t)$ به صورت $\operatorname{Re}[s]>\sigma_1$ خواهد بود. توجه کنید که چون ROC سیگنال $x(t)$ شامل محور موهومی است که این سیگنال پایدار است و ضرب آن در پله واحد خاصیت پایداری را تغییر نمی‌دهد بنابراین ROC تبدیل لاپلاس سیگنال $y(t)$ هم باید شامل محور موهومی باشد.

۱۳- گزینه «۴»- (متوسط)

چون $e^{2t}x(t)$ مطلقا انتگرال پذیر است . ROC تبدیل لاپلاس آن محور موهومی را در بر دارد . می‌دانیم ROC سیگنال $e^{2t}x(t)$ همان ROC سیگنال $x(t)$ هست که ۴ واحد جابجا شده از طرفی چون $e^{4t}x(t)$ تبدیل فوریه ندارد پس ROC آن محور موهومی را در بر ندارد. می‌دانیم که ROC سیگنال $e^{4t}x(t)$ ، همان ROC سیگنال $x(t)$ است که ۸ واحد به راست شیفت یافته است . پس قطبی بزرگتر از ۲- دارد بنابراین ROC تبدیل لاپلاس $x(t)$ از سمت راست محدود است . ROC تبدیل لاپلاس $x(t)$ از سمت چپ به ۲- که قطب آن می‌باشد، محدود می‌شود در نتیجه ROC تبدیل لاپلاس $x(t)$ به صورت یک نوار در صفحه s هست و بنابراین $x(t)$ سیگنال دو طرفه است.

۱۴- گزینه «۳»- (ساده)

$$H(s)=\frac{6s}{s^2+2s-8}=\frac{2}{s-2}+\frac{4}{s+4} \qquad -4<\text{Re}[s]<2$$

$$\Rightarrow h(t)=2e^{2t}u(-t)+4e^{-4t}u(t)$$

$$s(t)=\int h(t)dt=e^{2t}u(-t)-e^{-4t}u(t)$$

توجه کنید که پایداری و غیر علی بودن از ROC تابع تبدیل روشن است . با توجه به $h(t)$ به دست آمده

$$\int_{-\infty}^{+\infty}h(t)dt=\int_{-\infty}^{0}2e^{2t}dt+\int_{0}^{\infty}4e^{-4t}=0$$

می‌باشد. پس گزینه های ۱،۲ و ۴ صحیح هستند.

۱۵- گزینه «۴» - (ساده)

می‌دانیم که پاسخ سیستم LTI به ورودی e^{st} به صورت $H(s_0)e^{st}$ می‌باشد. در این جا ورودی

$$x(t)=1=e^{0t}$$

می‌باشد یعنی $s_0=0$ پس داریم:

$$y(t)=H(s_0)e^{st}\Rightarrow\frac{a}{32}=\frac{1}{2a}\Rightarrow a=\pm4$$

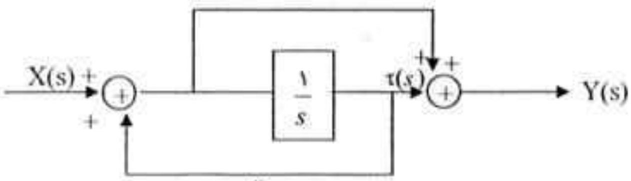
چون در مورد پایداری سیستم چیزی گفته نشده، هر دو جواب قابل قبول هستند.

۱۶- گزینه «۴»- (متوسط)

چون $e^{-2t}x(t)$ مطلقا انتگرال پذیر نیست، می‌توان گفت که ROC سیگنال $e^{-2t}x(t)$ محور موهومی را در برندارد. ROC این سیگنال ، همان ROC سیگنال $x(t)$ هست که دو واحد به چپ شیفت یافته است (به خاصیت رابطه ۴-۱۸ رجوع کنید) خلاصه اینکه ROC سیگنال $x(t)$ از سمت راست محدود است یعنی تبدیل لاپلاس آن قطبی که قسمت حقیقی آن بزرگتر از ۱- است. از طرفی ROC از سمت چپ به ۱- محدود است. پس ROC آن به صورت نواری در صفحه s بوده و در نتیجه $x(t)$ دو طرفه است. توجه کنید چون $X(0)$ دارای مقدار است $\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)dt$ همگراست .یعنی ROC تبدیل لاپلاس $x(t)$ محور موهومی را در بردارد وجود قطب با مقدار حقیقی ۱- الزام می‌دارد که ROC در سمت راست ۱- باشد.

۱۷- گزینه «۱»- (ساده)

بلوک دیاگرام سیستم را به صورت زیر در نظر بگیرید:



$$Z(s)=\frac{X(s)-2Z(s)}{s}$$

$$sZ(s)+2Z(s)=X(s)\Rightarrow Z(s)=\frac{X(s)}{s+2}$$

$$Y(s)=Z(s)+\left(X(s)-2Z(s)\right)=X(s)-Z(s)$$

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{s+1}{s+2}=1-\frac{1}{s+2}\Rightarrow h(t)=\delta(t)-e^{-2t}u(t)$$

۱۸- گزینه «۲» - (ساده)

می‌دانیم:

$$x(t)=e^{s_0t}\Rightarrow y(t)=H(s_0)e^{s_0t}$$

$$\frac{3}{5}e^{2t}=\frac{5+2a}{15}e^{2t}\qquad\Rightarrow a=2$$

۱۹- گزینه «۴»- (متوسط)

ضرایب سری فوریه $\cos t$ عبارتند از $a_{-1}=\frac{1}{2}$ و $a_1=\frac{1}{2}$ ضرایب سری فوریه $\sin t$ عبارتند از $b_1=\frac{1}{2j}\quad b_{-1}=\frac{-1}{2j}$

از طرفی می‌دانیم:

$$b_k=H(jk\omega_0)a_k\qquad (*)$$

که در آن a_k ها ضرایب سری فوریه ورودی و b_k ها ضرایب سری فوریه خروجی اند.

اینجا $\omega_0=1$ است و داریم:

$$H(j1)=\frac{1}{j}\quad\Rightarrow\quad k\,\frac{j-\sigma_1}{j+\sigma_2}=\frac{1}{j}\quad\Rightarrow\quad\frac{j-\sigma_1}{j+\sigma_2}=\frac{1}{kj}$$

$$H(-j1)=\frac{-1}{j}\quad\Rightarrow\quad k\,\frac{-j-\sigma_1}{-j+\sigma_2}=\frac{-1}{j}\quad\Rightarrow\quad\frac{j+\sigma_1}{j-\sigma_2}=\frac{-1}{kj}$$

به راحتی می‌توان نوشت

$$\frac{j-\sigma_1}{j+\sigma_2}=\frac{j+\sigma_1}{j-\sigma_2}$$

$$(j+\sigma_1)(j+\sigma_2)=-(j-\sigma_1)(j-\sigma_2)$$

$$j^2+j\sigma_2+j\sigma_1+\sigma_1\sigma_2=-\left(j^2-j\sigma_2-j\sigma_1+\sigma_1\sigma_2\right)$$

$$-1+j\left(\sigma_1+\sigma_2\right)+\sigma_1\sigma_2=1+j\left(\sigma_1+\sigma_2\right)-\sigma_1\sigma_2$$

$$\Rightarrow 2\sigma_1\sigma_2=2\Rightarrow\sigma_1\sigma_2=1$$

۲۰- گزینه «۱»- (ساده)

قطب های سیستم عبارتند از : $1\pm|a|$ ، چون یک قطب همواره در سمت راست است به ازاء هیچ مقدار a نمی تواند توأما علی و پایدار باشد پس گزاره (۱) درست است. اگر ناحیه همگرایی را سمت چپ قطب $1-|a|$ در نظر بگیرید ، سیستم ناپایدار و غیرعلی است پس گزاره ۲ صحیح نیست.

فصل ۵

تبدیل Z

۵-۱ مقدمه و تعریف

خروجی $y[n]$ یک سیستم LTI گسسته در زمان با پاسخ ضربه $h[n]$ به ورودی نمایی مختلط $x[n]=z^{n}$ به صورت زیر است (z عدد مختلط)

$$y[n]=H(z)z^{n} \tag{۵-۱}$$

که در آن

$$H(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]z^{-n} \tag{۵-۲}$$

$H(z)$ تبدیل Z، $h[n]$ نامیده می‌شود.

در صفحه اعداد مختلط z، تبدیل Z بر روی دایره به مرکز مبدأ و شعاع واحد ($z=e^{j\Omega}$) همان تبدیل فوریه سیگنال است:

$$F\{x[n]\}=X(z)\big|_{z=e^{j\Omega}} \tag{۵-۳}$$

تبدیل Z سیگنال گسسته $x[n]$ همان تبدیل فوریه $x[n]r^{-n}$ است:

$$X(z)=F\left\{x[n]r^{-n}\right\} \tag{۵-۴}$$

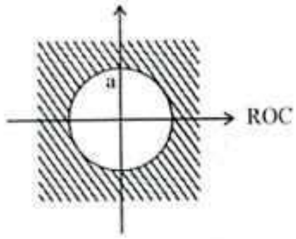
از معادله (۵-۴) نتیجه می‌شود که برای همگرایی تبدیل Z باید تبدیل فوریه $x[n]r^{-n}$ همگرا باشد و این موضوع تنها به ازاء مقادیر معینی از r اتفاق می‌افتد.

در حالت کلی محدوده‌ای از مقادیر z که به ازاء آنها $X(z)$ همگراست ، ناحیهٔ همگرایی (ROC) نامیده می‌شود. اگر ROC تبدیل Z سیگنال ، دایرهٔ واحد را در بر داشته باشد ، تبدیل فوریه آن سیگنال هم همگرا هست.

مثال۵-۱: $x_1[n]=a^n u[n]$ یک سیگنال زمان گسسته است $(a>0)$ که تبدیل Z آن به صورت زیر قابل محاسبه است.

$$X_1(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty}(az^{-1})^n = \frac{1}{1-az^{-1}} \qquad (۵-۵)$$

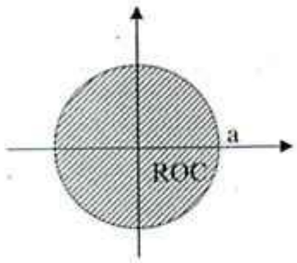
اگر $\left|az^{-1}\right|<1$ یا به عبارتی $|z|>a$ باشد که این ناحیه ROC آن نامیده می‌شود:



تبدیل Z سیگنال $x_2[n]=-a^n u[-n-1]$ به صورت زیر قابل محاسبه است

$$X_2(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} -a^n u[-n-1] z^{-n} = -\sum_{n=1}^{\infty}(a^{-1}z)^n = \frac{a^{-1}z}{1-a^{-1}z} = \frac{1}{1-az^{-1}} \qquad (۶-۵)$$

اگر $\left|a^{-1}z\right|<1$ یا $|z|<a$ باشد که این ناحیه ROC آن نامیده می‌شود.



با توجه به مثال واضح است که عبارت جبری تبدیل Z مربوط به دو سیگنال متفاوت، یکسان هستند و این تبدیل Z تنها از لحاظ ناحیهٔ همگرایی متفاوت می‌باشند. پس برای مشخص کردن تبدیل Z ، علاوه بر عبارت جبری $X(z)$ باید ROC آن تعیین شود. در اغلب مسائل ، تبدیل Z سیگنال‌ها، گویا است یعنی به صورت نسبت دو چند جمله‌ای بر حسب z می‌باشد. ریشه‌های چند جمله‌ای صورت «صفر» و ریشه‌های چند جمله‌ای مخرج «قطب» نامیده می‌شود.در مثال قبل $X_1(z)$ و $X_2(z)$ دارای صفر در $z=0$ و قطب در $z=a$ هستند. می‌توان صفر و قطب‌های هر $X(z)$ گویا را در صفحه z مشخص کرد که به آن نمودار صفر-قطب اطلاق می‌شود.

۵-۲ ناحیه همگرایی تبدیل Z و خواص آن

۱) ناحیه همگرایی $X(z)$ ، همواره ناحیه‌ای حلقوی به مرکز مبدأ صفحه z می‌باشد.

۲) ROC هیچ قطبی را در برندارد.

۳) اگر $x[n]$ سیگنالی با استمرار محدود باشد، ROC تمام صفحه z به جز احتمالا $z=0$ یا $z=\infty$ است.

۴) فرض کنید $x[n]$ یک سیگنال گسسته با استمرار محدود باشد که نمونه‌های آن بین N_1 و N_2 قرار دارند طبق تعریف $X(z)$ آن به صورت زیر خواهد بود:

$$X(z)=\sum_{n=N_1}^{N_2} x[n]z^{-n} \qquad (۵-۷)$$

این مجموع دارای تعداد محدودی جمله است . حال اگر:

الف- N_1 منفی و N_2 مثبت باشد یعنی $x[n]$ هم در بخش مثبت و هم در بخش منفی محور n دارای مقدار باشد، مجموع معادله ۵-۷ دارای جملاتی با توان های مثبت و منفی بوده و در نتیجه $z=0$ و $z=\infty$ جزء ROC نیستند.

ب- اگر N_1 صفر یا بزرگتر از صفر باشد در مجموع معادله ۵-۷ تنها توانهای منفی z وجود دارد و $z=0$ جزء ROC نیست.

ج- اگر N_2 صفر یا کوچکتر از صفر باشد در مجموع معادله ۵-۷ تنها توانهای مثبت z وجود دارد و $z=\infty$ جزء ROC نیست.

۵) اگر $x[n]$ یک سیگنال سمت راستی باشد و دایره $|z|=r_0$ در ROC باشد، آنگاه تمام مقادیر $|z|>r_0$ نیز در ROC هستند . در حالت کلی $z=\infty$ جز ROC سیگنال های گسسته سمت راستی نیست اما اگر $x[n]$ سمت راست ، علی هم باشد، $z=\infty$ هم جزء ROC می‌باشد.

۶) اگر $x[n]$ یک سیگنال سمت چپی باشد و دایره $|z|=r_0$ در ROC باشد آنگاه تمام مقادیر $0<|z|<r_0$ نیز در ROC هستند در حالت کلی $z=0$ جز ROC سیگنال های گسسته سمت چپی نیست ولی اگر $x[n]$ سمت چپی ، ضد علی هم باشد، $z=0$ هم جز ROC هست. (ضد علی بودن به این معنی است که به ازاء $n>0$ $\quad (x[n]=0$)

۷) اگر $x[n]$ سیگنال دو طرفه باشد و دایرهٔ $|z|=r_0$ در ROC باشد، ROC حلقه‌ای شامل دایره $|z|=r_0$ است .

۸) اگر تبدیل Z سیگنال گویا باشد، ROC به قطب یا ∞ محدود می‌شود.

۹) اگر تبدیل Z سیگنال $x[n]$ گویا بوده و $x[n]$ سمت راستی باشد ROC، ناحیهٔ بیرون از دورترین قطب از مبدأ می‌باشد. اگر $x[n]$ مزبور علی هم باشد $z=\infty$ هم در ROC واقع است.

۱۰) اگر تبدیل Z سیگنال $x[n]$ گویا بوده و $x[n]$ سمت چپی باشد، ROC ناحیهٔ درون نزدیکترین قطب به مبدأ می‌باشد (البته قطب غیر صفر) اگر $x[n]$ مزبور ضدعلی هم باشد، $z=0$ هم در ROC واقع است.

۵-۳ عکس تبدیل Z

اگر $X(z)$ عبارت جبری تبدیل z سیگنال گسسته $x[n]$ باشد آنگاه

$$x[n]=\frac{1}{j2\pi}\oint X(z)z^{n-1}dz \qquad (۵-۸)$$

انتگرال روی مسیر دایره‌ای بسته به شعاع r و مرکز مبدأ در جهت پاد ساعتگرد محاسبه می‌شود. r را می‌توان هرمقداری که به ازاء آن $X(z)$ همگرا باشد انتخاب کرد.

محاسبه انتگرال (۵-۸) با قضیهٔ مانده امکان پذیر است.اگر قطب های $X(z)z^{n-1}$ عبارت از $z_1,z_2,\dots,z_m$ باشند آنگاه $\oint X(z)z^{k-1}=2\pi j(k_1+k_2+\dots+k_m)$ هست که در آن k_i ها مانده‌های $X(z)z^{n-1}$ در z_i ها می‌باشند در نتیجه برای $x[n]$ داریم:

$$x[n]=\sum_{i=1}^{m} \{\text{مانده‌های } X(z)z^{n-1} \text{ در قطب های } z_i\} \qquad (۵-۹)$$

برای محاسبه مانده اگر مخرج $X(z)z^{n-1}$ ریشه ساده‌ای در z_i داشته باشد.

$$k_i=\lim_{z\to z_0}[(z-z_i)z^{n-1}] \qquad (۵-۱۰)$$

و اگر $X(z)z^{n-1}$ دارای قطب مکرر z_i از مرتبه p باشد آنگاه مانده در z_i به صورت زیر است:

$$k_i=\frac{1}{(p-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}}\left[(z-z_i)^p X(z)z^{n-1}\right] \qquad (۵-۱۱)$$

محاسبه عکس تبدیل z با روش مانده به شرط اینکه $X(z)z^{n-1}$ قطبی در مبدأ نداشته باشد ساده است ، در غیر این صورت منجر به محاسبات پیچیده شده و استفاده از این روش پیشنهاد نمی شود. در مواردی که مطمئن هستید که سیگنال سمت راستی و علی است به سراغ این روش بیایید.

می‌توانیم برای به دست آوردن عکس تبدیل $X(z)$ از روش گسترش کسر جزئی استفاده کنیم. اگر $X(z)$ حداقل دارای یک صفر در مبدأ باشد، بهتر است $\frac{X(z)}{z}$ را به صورت مجموع جملات مرتبه اول و دوم و ... بسط دهیم.

الف- فرض کنید تمام قطب‌ها ساده بوده و حداقل یک صفر در مبدأ موجود باشد، هر دو طرف $X(z)$ را بر z تقسیم کرده و سپس $\frac{X(z)}{z}$ را گسترش می‌دهیم.

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{a_1}{z-p_1}+\frac{a_2}{z-p_2}+\ldots+\frac{a_n}{z-p_n}$$

$$a_1=\left[(z-p_i)\frac{X(z)}{z}\right]_{z=p_i}$$

ب- اگر $\frac{X(z)}{z}$ دارای قطب مکرر باشد، مثلا یک قطب مضاعف در $z=p_1$ داشته باشد و قطب دیگری نداشته باشد یعنی به صورت زیر باشد:

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{1}{(z-p_1)^2} \tag{۱۳-۵}$$

بسط آن به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{c_1}{(z-p_1)^2}+\frac{c_2}{z-p_1}$$

$$c_1=\left[(z-p_1)^2\frac{X(z)}{z}\right]_{z=p_1} \tag{۱۴-۵}$$

$$c_2=\left[\frac{d}{dz}(z-p_1)^2\frac{X(z)}{z}\right]_{z=p_1}$$

برای حالت کلی تر بحث مطرح شده در بخش ۴-۳ را ببینید.

اگر ROC به طرف خارج قطب $z=p_i$ باشد، عکس تبدیل جمله متناظر با آن به صورت $a_i p_i^n u[n]$ است و اگر ROC به طرف داخل قطب $z=p_i$ باشد، عکس تبدیل جمله متناظر با آن $-a_i p_i^n u[-n-1]$ است.

روش مفید دیگر تعیین عکس تبدیل z، بسط $X(z)$ به سری توانی است . اساس این روش تعریف تبدیل Z هست که می‌توان آن را به صورت یک سری توانی تعبیر کرد. این روش برای یافتن عکس تبدیل مخصوصا برای تبدیل Zهای غیر گویا مفید است.

مثال۲-۵ عکس تبدیل z مربوط به عبارت زیر راتعیین کنید.

$$X(z)=\log(1+az^{-1}),|z|>|a| \tag{۱۵-۵}$$

با توجه به سری تیلور:

$$\log(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} \quad و \quad |X|<1 \tag{۱۶-۵}$$

در مورد $X(z)$ داریم:

$$X(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}a^n z^{-n}}{n}$$

در نتیجه:

$$x[n]=\frac{(-1)^{n+1}a^n}{n}u[n-1] \qquad (۱۷\text{-}۵)$$

در کلی ترین حالت اگر $X(z)$ به صورت نسبت دو چند جمله‌ای بر حسب z^{-1} بیان شده باشد:

$$X(z)=\frac{\sum_{k=0}^{M}b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N}a_k z^{-k}}$$

و $M\geq N$ باشد در حالت کلی می‌توان $X(z)$ را به صورت زیر بسط داد:

$$X(z)=\sum_{r=0}^{M-N}B_r z^{-r}+\sum_{k=1,k\neq i}^{N}\frac{A_k}{1-d_k z^{-1}}+\sum_{m=1}^{S}\frac{C_m}{(1-d_i z^{-1})^m}$$

فرض شده که $X(z)$ هم دارای قطب‌ های مرتبه اول و هم مکرر است. B_r با تقسیم طولانی صورت بر مخرج تعیین می‌شود، توجه کنید که عملیات تقسیم طولانی وقتی متوقف می‌شود که درجه باقی مانده کمتر از درجه مخرج می‌شود.

$$A_k=(1-d_k z^{-1})X(z)\Big|_{z=d_k}$$

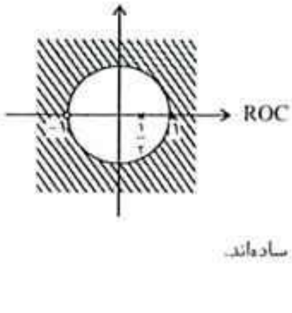
$$C_m=\frac{1}{(S-m)!(-d_i)^{S-m}}\left\{\frac{d^{S-m}}{dv^{S-m}}(1-d_i v)^S X(v^{-1})\right\}_{v=d_i^{-1}}$$

البته استفاده از روش جایگزینی مقدار برای z در این نوع مسائل اغلب کارگشاست.

مثال ۵-۳: عکس تبدیل z عبارت $X(z)=\dfrac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1-\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}$ با ناحیه همگرایی $|z|>1$ را پیدا می‌کنیم. توجه کنید که $X(z)$ در مبدا دارای صفر نیست.

$$X(z)=\frac{(1+z^{-1})^2}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-z^{-1})} \quad \text{و} \quad |z|>1$$

نمودار صفرو قطب و ROC تبدیل $X(z)$ نشان داده شده است:



در اینجا $M=N=2$ است و همه قطب‌ها ساده‌اند.

$$X(z)=B_0+\frac{A_1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{A_2}{1-z^{-1}}$$

B_0 را با تقسیم زیر به دست می‌آوریم:

$$z^{-2}+2z^{-1}+1 \;\Big|\; \frac{1}{2}z^{-2}-\frac{3}{2}z^{-1}+1 \quad \longrightarrow \quad 2$$

$$\underline{z^{-2}-3z^{-1}+2}$$

$$5z^{-1}-1$$

چون درجه باقی مانده از درجه مخرج کوچکتر شد، تقسیم متوقف می‌شود:

$$X(z)=2+\frac{-1+5z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-z^{-1})}$$

$$A_1=\left[\left(\frac{-1+5z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-z^{-1})}\right)(1-\frac{1}{2}z^{-1})\right]_{z=\frac{1}{2}}=-9$$

$$A_2=\left[\left(\frac{-1+5z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-z^{-1})}\right)(1-z^{-1})\right]_{z=1}=8$$

پس:

$$X(z)=2-\frac{9}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{8}{1-z^{-1}}$$

با توجه به ROC همه جملات باید سمت راستی باشند بنابراین:

$$x[n]=2\delta[n]-9(\frac{1}{2})^n u[n]+8u[n]$$

مثال ۵-۴: عکس تبدیل $X(z)=\frac{1+2z^{-1}+2z^{-2}}{(1+z^{-1})^2(1-2z^{-1})}$ را برای همه نواحی همگرایی ممکن مشخص کنید؟

$$X(z)=\frac{C_1}{1+z^{-1}}+\frac{C_2}{(1+z^{-1})^2}+\frac{A_1}{1-2z^{-1}}$$

$$A_1=(1-2z^{-1})X(z)\Big|_{z=2}=\frac{10}{9}$$

$$C_2=(1+z^{-1})^2X(z)\Big|_{z=-1}=\frac{1}{3}$$

با جایگزینی $z=\infty$ در طرفین داریم:

$$1=\frac{C_1}{1}+\frac{\frac{1}{3}}{1}+\frac{\frac{10}{9}}{1} \qquad C_1=\frac{-4}{9}$$

یا این که از رابطه ۵-۲۰ داریم:

$$C_1=\frac{1}{1!(+1)^1}\frac{d}{dv}\left[(1+v)^2\frac{1+2v+2v^2}{(1+v^2)(1-2v)}\right]_{v=-1}=\frac{-4}{9}$$

الف) اگر ROC به صورت $2<|z|$ باشد داریم:

$$x[n]=-\frac{4}{9}(-1)^n u[n]+\frac{1}{3}n(-1)^{n-1}u[n-1]+\frac{10}{9}(2)^n u[n]$$

ب) اگر ROC به صورت $1<|z|<2$ باشد داریم:

$$x[n]=-\frac{4}{9}(-1)^n u[n]+\frac{1}{3}n(-1)^{n-1}u[n-1]-\frac{10}{9}(2)^n u[-n-1]$$

ج) اگر ROC به صورت $|z|<1$ باشد داریم:

$$x[n]=(\frac{4}{9}(-1)^n-\frac{1}{3}n(-1)^{n-1}-\frac{10}{9}(2)^n)\,u[-n-1]$$

۵-٤ خواص تبدیل Z

ارتباط سیگنال گسسته $x[n]$ با تبدیل لاپلاس آن $X(z)$ به صورت زیر نمایش داده می‌شود.

$$x[n]\overset{Z}{\longleftrightarrow}X(z) \qquad (۱۹-۵)$$

که ROC آن برابر R است.

الف- خطی بودن

$$x_1[n]\overset{Z}{\longleftrightarrow}X_1(z) \qquad ROC=R_1$$

$$x_2[n]\overset{Z}{\longleftrightarrow}X_2(z) \qquad ROC=R_2$$

$$\Rightarrow$$

$$ax_1[n]+bx_2[n]\overset{Z}{\longleftrightarrow}aX_1(z)+bX_2(z) \qquad (۲۰-۵)$$

ROC آن شامل $R_1\cap R_2$ است.

برای تبدیل های گویا اگر قطب های $aX_1(z)+bX_2(z)$ تمام قطب های $X_1(z), X_2(z)$ را داشته باشد (حذف قطب و صفر رخ ندهد)، ناحیه همگرایی ترکیب خطی دقیقا مساوی اشتراک نواحی همگرایی است. اگر ترکیب خطی به نحوی باشد که صفرهای ایجاد شده قطبهایی را خنثی کند ، ناحیه همگرایی ممکن است بزرگتر شود.

ب- شیفت زمانی

$$x[n-n_0]\overset{Z}{\longleftrightarrow}z^{-n_0}X(z) \qquad ROC=R \qquad (۲۱-۵)$$

تنها ممکن است که $z=0$ یا $z=\infty$ به ROC اضافه یا از آن حذف شوند.

ج- تغییر مقیاس در حوزه Z

$$z_0^n x[n]\overset{Z}{\longleftrightarrow}X(\frac{z}{z_0}) \qquad ROC=|z_0|R \qquad (۲۲-۵)$$

به ازاء $z_0=e^{j\Omega_0}$ داریم:

$$e^{j\Omega_0 n}x[n]\overset{Z}{\longleftrightarrow}X(e^{-j\Omega_0}z) \qquad (۲۳-۵)$$

طرف راست در واقع متناظر با چرخش صفحه z است یعنی قطبها و صفرها با زاویه Ω_0 می‌چرخند.

د- انعکاس زمانی

$$x[-n]\leftrightarrow X(\frac{1}{z}) \qquad ROC=\frac{1}{R} \qquad (۲۴-۵)$$

یعنی اگر z_0 در ROC سیگنال $x[n]$ باشد، $\frac{1}{z_0}$ در ROC سیگنال $x[-n]$ است.

هـ- انبساط زمانی

$$x_{(k)}[n]=\begin{cases} x[\frac{n}{k}] & \frac{n}{k}\in Z \\ 0 & \frac{n}{k}\notin Z \end{cases} \qquad (۲۵-۵)$$

$$x_{(k)}[n]\xleftrightarrow{Z} X(z^k) \qquad ROC: R^{\frac{1}{k}}$$

به این معنی که اگر z در ناحیه همگرایی $X(z)$ باشد، نقطه $z^{\frac{1}{k}}$ در ناحیه همگرایی $X(z^k)$ است. اگر $z=a$ قطب یا صفر $X(z)$ باشد، $z=a^{\frac{1}{k}}$ قطب یا صفر $X(z^k)$ است.

و- مزدوج گیری

$$x^*[n]\xleftrightarrow{Z} X^*(z^*) \qquad ROC=R$$

اگر $x[n]$ حقیقی باشد، قطب و صفرهای مختلط $X(z)$ به صورت مزدوج ظاهر می‌شوند یعنی اگر $z=a$ قطب یا صفر $X(z)$ باشد $z=a^*$ هم قطب یا صفر $X(z)$ است.

ز- خاصیت کانولوشن

$$x_1[n]*x_2[n]\xleftrightarrow{Z} X_1(z)X_2(z) \qquad (۲۶-۵)$$

ROC شامل $R_1\cap R_2$ است.

ح- مشتق گیری در حوزه z

$$nx[n]\xleftrightarrow{Z} -z\frac{dX(z)}{dz} \qquad ROC=R \qquad (۲۷-۵)$$

ط- قضیه مقدار اولیه

اگر $x[n]$ سیگنالی باشد که برای $n<0$ برابر صفر است داریم:

$$x[0]=\lim_{z\to\infty} X(z) \qquad (۲۸-۵)$$

ی- قضیه مقدار نهایی

اگر $x[n]$ سیگنالی باشد که برای $n<0$ برابر صفر است و تمام قطب‌های $X(z)$ درون دایره واحد باشد به استثناء امکان یک قطب ساده در $z=1$، داریم:

$$x[\infty]=\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})X(z) \qquad (۲۹-۵)$$

***نکته:** اگر $x[n]$ سیگنال زوج باشد، قطب ها و صفرهای آن در صفحه z نسبت به دایرهٔ واحد متقارن هستند یعنی اگر $z=\alpha$ قطب یا صفر باشد $z=\frac{1}{\alpha}$ هم قطب یا صفر است.*

مثال ۵-۵: با استفاده از خواص تبدیل Z برای سیگنال گسسته $x[n]=\frac{1}{n}u[n-1]$ عبارت $X(z)$ را حساب کنید.

فرض کنید $y[n]=nx[n]=u[n-1]$. در نتیجه با توجه به جدول و خاصیت شیفت زمانی داریم:

$$Y(z)=\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}=\frac{1}{z-1}$$

از طرفی با توجه به خاصیت مشتق‌گیری در z داریم:

$$Y(z)=-z\frac{dX(z)}{dz}$$

با ترکیب دو رابطه فوق به معادله دیفرانسیل زیر می‌رسیم که حل آن $X(z)$ را به دست می‌دهد:

$$-z\frac{dX(z)}{dz}=\frac{1}{z-1}\Rightarrow X(z)=-\ln(1-z^{-1})\quad,\ |z|>1$$

مثال ۵-۶: برای سیگنال گسسته $x[n]$ داریم: $X(z)=\frac{z^2}{z^2-9}$. با کمک خواص تبدیل Z در هر یک از موارد زیر $Y(z)$ را تعیین کنید.

الف) $y[n]=2(\frac{1}{3})^n x[n]$

با توجه به خاصیت تغییر مقیاس در حوزه z

$$Y(z)=2X(3z)=\frac{2z^2}{z^2-1}$$

ب) $y[n]=3x[-n]*x[n]$

با توجه به خاصیت انعکاس زمانی و کانولوشن:

$$Y(z)=3X(\frac{1}{z}).X(z)=\frac{3}{-1+3z^2-z^4}$$

ج) $y[n]=2\cos(3n)x[n]$

با توجه به خاصیت تغییر مقیاس در حوزه z و خطی بودن:

$$y[n]=e^{j3n}x[n]+e^{-j3n}x[n]$$
$$Y(z)=X(e^{-j3}z)+X(e^{j3}z)=\frac{e^{-j6}z^2}{e^{-j6}z^2-9}+\frac{e^{j6}z^2}{e^{j6}z^2-9}$$

مثال ۵-۷: اگر تبدیل Z سیگنال گسسته $x[n]=n^2\ 2^n u[n]$ با $X(z)$ نشان داده شود، سیگنال $y[n]$ مربوط به هر یک از تبدیل‌های $Y(z)$ را تعیین کنید.

الف) $Y(z)=\frac{-z^{-2}}{2}X(z)$

با توجه به خاصیت شیفت زمانی و خطی بودن:

$$y[n]=-\frac{1}{2}x[n-2]=\frac{-1}{2}(n-2)^2\ 2^{n-2}u[n-2]$$

ب) $Y(z)=3X(z^{-1})$

با توجه به خاصیت انعکاس زمانی و خطی بودن:

$$y[n]=3x[-n]=-3n^2 2^{-n}u[-n]$$

ج) $Y(z)=\frac{dX(z)}{dz}$

با توجه به خاصیت مشتق گیری در حوزه z

$$Y(z)=-z^{-1}[-z\frac{dX(z)}{dz}]$$

$$y[n] = -(n-1)x[n-1] = -(n-1)^{3} 3^{n-1} u[n-1]$$

۵-۵ جدول چند زوج مهم تبدیل لاپلاس

جدول ۵-۱ چند زوج تبدیل Z مهم را همراه با ROC آنها ارائه می‌دهد. همهٔ این روابط با استفاده از تعریف اصلی و خواص تبدیل Z به دست آمده‌اند.

جدول ۵-۱

سیگنال	تبدیل Z	ROC
$\delta[n]$	1	تمام صفحه z
$u[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\|>1$
$-u[-n-1]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\|<1$
$\delta[n-m]$	z^{-m}	تمام صفحه بجز صفر (اگر $m>0$) یا ∞ (اگر $m<0$)
$a^n u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\|>\|a\|$
$-a^n u[-n-1]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\|<\|a\|$
$na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\|>\|a\|$
$-na^n u[-n-1]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\|<\|a\|$
$[\cos\omega_0 n]u[n]$	$\frac{1-[\cos\omega_0]z^{-1}}{1-[2\cos\omega_0]z^{-1}+z^{-2}}$	$\|z\|>1$
$[\sin\omega_0 n]u[n]$	$\frac{[\sin\omega_0]z^{-1}}{1-[2\sin\omega_0]z^{-1}+z^{-2}}$	$\|z\|>1$
$[r^n\cos\omega_0 n]u[n]$	$\frac{1-[r\cos\omega_0]z^{-1}}{1-[2r\cos\omega_0]z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\|z\|>r$
$[r^n\sin\omega_0 n]u[n]$	$\frac{[r\sin\omega_0]z^{-1}}{1-[2r\cos\omega_0]z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\|z\|>r$

برای تمرین بیشتر آنها را برای خود اثبات کنید.

۵-۶ توصیف سیستم های LTI با تبدیل Z

با توجه به خاصیت کانولوشن داریم:

$$Y(z) = H(z)X(z) \qquad (۵-۳۰)$$

که در آن $X(z)$ و $Y(z)$ و $H(z)$ به ترتیب تبدیل Z ورودی، خروجی و پاسخ ضربه سیستم است. $H(z)$ را تابع سیستم یا تابع انتقال سیستم می‌نامند.

الف- علی بودن

پاسخ ضربه $h[n]$ سیستم‌های LTI علی در $n<0$ صفر است پس سمت راستی است. می‌توان نتیجه گرفت که سیستم LTI گسسته در زمان علی است اگر و تنها اگر ROC تابع انتقال آن خارج یک دایره و شامل بی نهایت باشد.

اگر $H(z)$ گویا هم باشد برای علی بودن، ROC باید خارج دورترین قطب بوده و بی نهایت را هم شامل باشد(یعنی $\lim_{z\to\infty} H(z)$ متناهی باشد) پس بطور خلاصه سیستم LTI گسسته در زمان با تابع انتقال $H(z)$ گویاعلی است. اگر و تنها اگر ROC خارج دایره‌ای از دورترین قطب باشد و در $H(z)$ (که به صورت نسبت دو چند جمله‌ای بیان می‌شود)، درجهٔ صورت نباید از درجهٔ مخرج بزرگتر باشد.

ب- پایداری

برای پایداری سیستم LTI گسسته در زمان باید پاسخ ضربه آن مطلقاً جمع پذیر باشد. در این صورت تبدیل فوریه $h[n]$ همگراست پس سیستم LTI پایدار است اگر و تنها اگر ROC تابع انتقال $H(z)$ دایره واحد $|z|=1$ را شامل شود.

ج- علی بودن و پایداری

یک سیستم LTI با تابع انتقال گویا ، علی و پایدار است اگر و تنها اگر تمام قطب‌های $H(z)$ داخل دایره واحد باشد یعنی اندازه آنها کوچکتر از ۱ باشد.

در یک سیستم LTI گسسته که ورودی و خروجی آن با معادله تفاضلی خطی با ضرایب ثابت به صورت زیر توصیف می‌شود:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k]=\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \tag{۳۱-۵}$$

با گرفتن تبدیل Z از طرفین و استفاده از خواص خطی بودن و شیفت زمانی تابع انتقال به صورت زیر به دست می‌آید:

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} \tag{۳۲-۵}$$

تابع انتقال سیستم توصیف شده با معادلهٔ تفاضلی خطی با ضرایب ثابت همیشه گویا است و اگر سیستم علی و پایدار باشد ROC آن باید بیرون دورترین قطب بوده و شامل دایره واحد هم باشد.

مثال ۵-۸: یک سیستم زمانی گسسته با معادله دیفرنس زیر توصیف می‌شود. آیا سیستم معکوس آن می‌تواند هم علی و هم پایدار باشد؟

$$y[n]-\frac{1}{4}y[n-2]=6x[n]-7x[n-1]+3x[n-2]$$

ابتدا تابع تبدیل سیستم را تعیین می‌کنیم:

$$Y(z)-\frac{1}{4}z^{-2}Y(z)=6X(z)-7z^{-1}X(z)+3z^{-2}X(z)$$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{6-7z^{-1}+3z^{-2}}{1-\frac{1}{4}z^{-2}}$$

تابع تبدیل سیستم معکوس عبارت است از :

$$H_1(z)=\frac{1}{H(z)}=\frac{z^2-\frac{1}{4}}{6z^2-7z+3}$$

قطب‌های سیستم معکوس ($\frac{7 \pm j\sqrt{23}}{12}$) همگی داخل دایره واحد هستند، پس سیستم معکوس، پایدار و علی است.

۵-۷ تبدیل Z یکطرفه

تبدیل Z یکطرفه برای تحلیل سیستم های علی توصیف شده با معادلات دیفرنس خطی دارای ضریب ثابت هنگامی که شرایط اولیه صفر نیست به کار می‌رود. تبدیل Z یکطرفه سیگنال $x[n]$ را می‌توان تبدیل Z سیگنال $x[n]u[n]$ دانست . اگر دنباله‌ای به ازاء $n<0$ صفر باشد، تبدیل Z و تبدیل Z یکطرفه آن یکسان هستند .علاوه بر این چون $x[n]u[n]$ سمت راستی است ، ناحیه همگرایی $X(z)$ همیشه خارج یک دایره است. محاسبه عکس تبدیل یکطرفه اساساً شبیه عکس تبدیل دو طرفه است ولی باید به خاطر داشت که ROC هر تبدیل یکطرفه‌ای همیشه خارج یک دایره است. یک تفاوت مهم در خواص تبدیل Z و تبدیل Z یکطرفه در شیفت زمانی است برای تبدیل z یکطرفه داریم:

$$x[n-1] \xleftrightarrow{Z_1} z^{-1}X(z)+x[-1] \qquad (۵-۳۴)$$
$$x[n+1] \xleftrightarrow{Z_1} zX(z)-zx[0]$$

در حالت کلی در تبدیل z یکطرفه داریم:

$$x[n-m] \xleftrightarrow{Z_1} z^{-m}X(z)+x[-1]z^{-m+1}+x[-2]z^{-m+2}+\dots+x[-m] \qquad (۵-۳۵)$$

برای مثال پاسخ سیستم توصیف شده با معادلهٔ دیفرنس زیر با شرط اولیه $y[-1]=1$ به ورودی پله واحد محاسبه می‌شود.

$$y[n]+3y[n-1]=u[n] \qquad (۵-۳۶)$$
$$y[-1]=1$$

با گرفتن تبدیل Z یکطرفه از طرفین معادله دیفرنس:

$$Y(z)+3[z^{-1}Y(z)+y[-1]]=\frac{1}{1-z^{-1}}$$

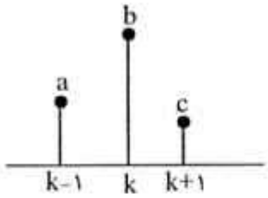
$$Y(z)\{3z^{-1}+1\}+3=\frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$Y(z)=\frac{-2+3z^{-1}}{(1-z^{-1})(1+3z^{-1})}=\frac{\frac{1}{4}}{1-z^{-1}}+\frac{-\frac{9}{4}}{1+3z^{-1}}$$

$$y[n]=\left[\frac{1}{4}-\frac{9}{4}(-3)^n\right] \qquad n\ge 0$$

۵-۸ چند تمرین حل شده

مثال ۵-۹: پاسخ ضربه یک سیستم LTI گسسته مطابق شکل زیر است.

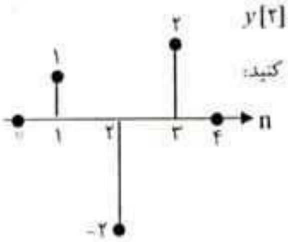


که در آن k عدد صحیح و c,b,a اعداد حقیقی بوده و همگی مجهول اند. اگر $h[n]$ دارای خصوصیات زیر باشد:

با فرض اینکه $H(j\Omega)$ تبدیل فوریه $h[n]$ است $H(j\Omega)e^{j\Omega}$ حقیقی و زوج است.

اگر ورودی $x[n]=(-1)^n$ برای همه n ها باشد آنگاه $y[n]=0$ است.

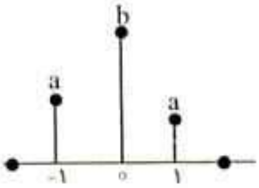
اگر ورودی $x[n]=(\frac{1}{2})^n u[n]$ برای همه n ها باشد آنگاه $y[2]=\frac{9}{2}$ خروجی $y[n]$ را وقتی ورودی $x[n]$ به صورت زیر باشد تعیین کنید:



تبدیل Z پاسخ ضربه را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$H(z)=az^{-(k-1)}+bz^{-k}+cz^{-(k+1)}$$

چون $H(j\Omega)e^{j\Omega}$ حقیقی و زوج است و با توجه به خاصیت شیفت زمانی، $h[n+1]$ حقیقی و زوج می‌باشد یعنی $a=c$ و $k=1$



بنابراین

$$H(z)=a+bz^{-1}+az^{-2}$$
$$=h[0]+h[1]z^{-1}+h[2]z^{-2}$$

می‌دانیم که اگر ورودی سیستم z_0^n باشد خروجی آن $H(z_0)z_0^n$ است در نتیجه داریم:

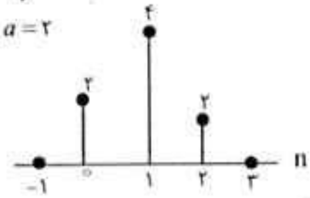
$$y[n]=(-1)^n H(-1)=0\Rightarrow H(-1)=0$$
$$H(-1)=a-b+a=0\Rightarrow 2a=b$$

رابطه جمع کانولوشن گسسته به صورت زیر است:

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[n-k]$$
$$y[2]=x[0]h[2]+x[1]h[1]+x[2]h[0]=\frac{9}{2}$$
$$x[n]=(\frac{1}{2})^n u[n]$$
$$1a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{4}a=\frac{9}{2}$$

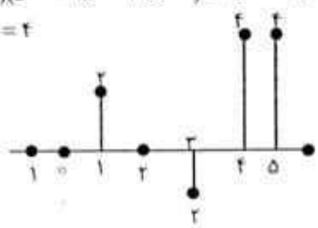
به دست می‌آید: $c=2\,,\,b=4\,,\,a=2$

به عبارتی $h[n]$ به صورت زیر است:



برای به دست آوردن پاسخ به ورودی داده شده از تبدیل Z استفاده می‌کنیم:

$$Y(z)=H(z)X(z)=(2+4z^{-1}+2z^{-2})(z^{-1}-2z^{-2}+2z^{-3})=2z^{-1}-2z^{-3}+4z^{-4}+4z^{-5}$$
$$\Rightarrow y[1]=2\,,\,y[3]=-2\,,\,y[4]=4\,,\,y[5]=4$$



مثال۵-۱۰: عکس تبدیل z عبارت $X(z)=\log(1+az^{-1})$ با ناحیه همگرایی $|z|>|a|$ را محاسبه کنید.

روش اول:

$\log(1+x)$ را در ناحیه $|x|<1$ را می‌توان با سری توانی زیر نمایش داد (بسط تیلور):

$$\log(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$$

در نتیجه برای $X(z)$ داریم:

$$X(z)=\log(1+az^{-1})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}a^n z^{-n}}{n}$$

در نتیجه داریم:

$$x[n]=\frac{(-1)^{n+1}a^n}{n}u[n-1]$$

روش دوم:

می توان از خواص تبدیل Z برای رسیدن به جواب استفاده کرد:

$$x[n]\xleftrightarrow{Z}X(z)=\log(1+az^{-1})$$

$$nx[n]\xleftrightarrow{Z}-z\frac{dX(z)}{dz}=-z\frac{-az^{-2}}{1+az^{-1}}=\frac{az^{-1}}{1+az^{-1}}$$

با استفاده از جدول زوج های تبدیل لاپلاس و خاصیت شیفت زمانی روشن است که طرف دوم تبدیل Z مربوط به سیگنال زیر است:

$$y[n]=a(-a)^{n-1}u[n-1]$$

در نتیجه برای $x[n]$ داریم:

$$x[n]=\frac{(-1)^{n-1}a^n}{n}u[n-1]$$

همان جوابی است که با روش اول به دست آمده بود.

مثال ۵-۱۱: الف- فرض شده که $x_1[n]$ یک سیگنال سمت چپی است که تبدیل z آن بصورت $X_1(z)=e^z$ می‌باشد. با کمک بسط تیلور $X_1(z)$ حول $z=0$ می‌توان سیگنال زمان گسسته $x_1[n]$ را پیدا کرد:

$$X_1(z)=e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n=\sum_{n=-\infty}^{0}\frac{1}{(-n)!}z^{-n}$$

در نتیجه $x_1[n]=\frac{1}{(-n)!}u[-n]$

ب- فرض شده که $x_2[n]$ یک سیگنال سمت راستی است که تبدیل Z آن به صورت $X_2(z)=e^{\frac{1}{z}}$ است. با کمک بسط تیلور $X_2(z)$ می‌توان سیگنال زمان گسسته $x_2[n]$ را پیدا کرد:

$$X_2(z)=e^{\frac{1}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^{-n}$$

در نتیجه $x_2[n]=\frac{1}{(n)!}u[n]$

توجه داشته باشید که بسط تیلور تابع $f(x)$ حول $x=x_0$ به صورت زیر است:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dots$$

تست‌های طبقه‌بندی شده فصل پنجم

۱- پاسخ یک سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان گسسته با پاسخ ضربه $h[n]=(\frac{1}{2})^n u(n)$ به ورودی $x[n]=2^n$ در $n=0$ کدام مورد خواهد بود؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۵)

۱) نامحدود ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) 1 ۴) $\frac{2}{3}$

۲- یک سیستم زمان گسسته LIT علی دارای فقط یک صفر و یک قطب می‌باشد و می‌دانیم پاسخ ضربه آن در شرایط زیر صدق می‌کند: $h[0]=1$ و $\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]=4$ محل صفر z_0 و قطب p_0 آن را مشخص کنید؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۵)

۱) $p_0=\frac{1}{2}, z_0=1$ ۲) $p_0=\frac{1}{3}, z_0=1$ ۳) $p_0=\frac{1}{2}, z_0=-1$ ۴) $p_0=\frac{1}{3}, z_0=-1$

۳- سیگنال زمان گسسته $x(n)$ را در نظر بگیرید با فرض اینکه $n>0$: $x(n)=0$ آنگاه: ($X(z)$ تبدیل z سیگنال $x(n)$ است) (مهندسی برق ـ سراسری ۸۴)

۱) $x(0)=\lim_{z\to 0} X(z)$ ۲) $x(0)=\lim_{z\to 1} X(z)$

۳) $x(0)=\lim_{z\to \infty} X(z)$ ۴) $x(0)=\lim_{z\to 1} X(z)$

۴- سیستم گسسته زمان LTI را با پاسخ ضربه $h[n]=\delta[n]+\frac{3}{2}\delta[n-1]-\delta[-n+2]$ مفروض است. وارون علی این سیستم .... (مهندسی برق ـ سراسری ۸۴)

۱) وجود ندارد. ۲) IIR وپایدار است. ۳) FIR است. ۴) IIR و نا پایدار است.

۵- h[n] دنباله‌ای با H(z) دارای دو قطب در $\sqrt{3}e^{\pm j\frac{\pi}{8}}$ است. اگر $h_1[n]\overset{\Delta}{=}h[n]\cos\frac{\pi n}{4}$ باشد در حالت کلی محل قطب‌های $H_1(z)$ به فرم زیر است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۴)

۱) $\sqrt{3}e^{\pm j\frac{3\pi}{8}}$ ۲) $\sqrt{\frac{3}{2}}e^{\pm j\frac{3\pi}{8}}$

۳) $\sqrt{\frac{3}{2}}e^{\pm j\frac{\pi}{8}}$ و $\sqrt{\frac{3}{2}}e^{\pm j\frac{3\pi}{8}}$ ۴) $\sqrt{3}e^{\pm j\frac{\pi}{8}}$ و $\sqrt{3}e^{\pm j\frac{3\pi}{8}}$

۶- فرض کنید $X(z)$ تبدیل Z سیگنال زمان گسسته $x[n]$ است. صفرهای تابع $X(z)$ در $z=\pm 2$ و قطب‌های آن در $z=0$ می‌باشد. اگر $y[n]=x^2[n]$ باشد، صفرهای تابع $Y(z)$ (یعنی تبدیل Z سیگنال $y[n]$) در کجا قرار خواهد داشت؟ مهندسی برق ـ سراسری ۸۳)

۱) $z=\pm 4$ ۲) $z=\pm j4$ ۳) $z=\pm 2$ به طور مضاعف ۴) $z=4$ و بصورت مضاعف

۷- اگر پاسخ ضربه واحد یک سیستم LTI زمان گسسته به صورت $(\frac{1}{4})^n u[n]$ باشد، خروجی سیستم در حالت دائمی به ورودی پله به اندازه ۳ برابر است با: (مهندسی برق ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) 4 ۴) 3

۸- رابطه بین ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ برای یک سیستم LTI زمان گسسته با معادله تفاضلی

$$y[n]-\frac{1}{2}y[n-1]+\frac{1}{16}y[n-2]=x[n]+x[n-1]$$

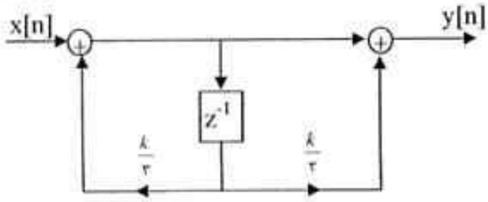
داده شده است. خروجی سیستم در حالت دائمی به ورودی $x[n]=\sin\frac{\pi n}{2}+2\cos\pi n$ برابر است با:

(مهندسی برق ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{9}{8}\cos \pi n$ ۲) $\frac{16\sqrt{2}}{25}\sin \frac{\pi}{2}(n-\frac{1}{2})$

۳) $\frac{32}{23}Sin\frac{\pi}{2}(n-\frac{1}{2})$ ۴) $\frac{16\sqrt{2}}{25}\sin\frac{\pi}{2}(n-\frac{1}{2})-\frac{9}{8}\cos\pi n$

۹- ساختار یک فیلتر دیجیتال در شکل زیر نشان داده شده است. در صورتیکه برای ورودی $x[n]=3^n$ خروجی این سیستم $y[n]=16(3)^{n-2}$ باشد مقدار k چیست؟ (مهندسی برق ـ آزاد ۸۳)



۱) $\frac{1}{4}$

۲) ۲

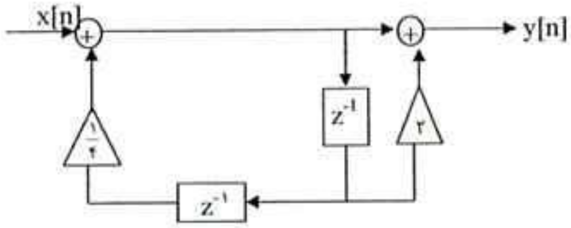
۳) ۳

۴) $\frac{1}{3}$

۱۰- اگر پاسخ ضربهٔ یک سیستم LTI گسسته به صورت $h[n]=(n+1)u[n+1]$ باشد در این صورت پاسخ سیستم به ورودی $x[n]=u[n]-u[n-2]$ کدام است ؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۲)

۱) $2nu[n]$ ۲) $nu[n]$ ۳) $(2n+1)u[n]$ ۴) $(n+1)u[n]$

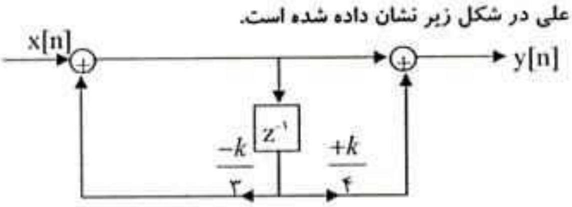
۱۱- پاسخ ضربهٔ سیستم نشان داده شده در شکل زیر با فرض علی بودن سیستم کدام است؟($u_{-1}[n]$ معرف دنباله پله واحد می‌باشد) (مهندسی برق ـ سراسری ۸۲)



۱) $h[n]=\left[\frac{5}{2}(\frac{1}{2})^n+\frac{3}{2}(-\frac{1}{2})^n\right]u_{-1}[n]$ ۲) $h[n]=\left[\frac{3}{2}(\frac{1}{2})^n-\frac{3}{2}(\frac{-1}{2})^n\right]u_{-1}[n]$

۳) $h[n]=\left[\frac{5}{2}(\frac{1}{2})^n-\frac{3}{2}(-\frac{1}{2})^n\right]u_{-1}[n]$ ۴) $h[n]=\left[\frac{3}{2}(\frac{1}{2})^n-\frac{5}{2}(\frac{-1}{2})^n\right]u_{-1}[n]$

۱۲- ساختار یک فیلتر دیجیتال علی در شکل زیر نشان داده شده است.



کدام یک از گزینه های زیر در مورد این سیستم صحیح است؟ (مهندسی برق ـ آزاد ۸۲)

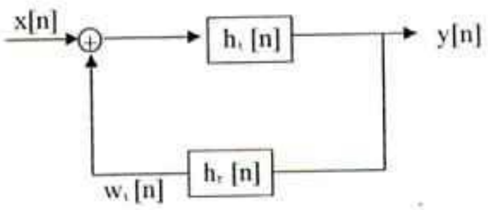
۱) این سیستم به ازای $4>|k|$ پایدار و پاسخ ضربه آن به صورت $h[n]=(\frac{k}{4})^n u[n]+\frac{k}{3}(\frac{k}{4})^{n-1}u[n-1]$ است.

۲) این سیستم به ازای $4<|k|$ پایدار و پاسخ ضربه آن به صورت $h[n]=(\frac{-k}{4})^n u[n]+\frac{k}{3}(-\frac{k}{4})^{n-1}u[n-1]$ است.

۳) این سیستم به ازی $3>|k|$ پایدار و پاسخ ضربه آن به صورت $h[n]=(\frac{k}{3})^n u[n]+\frac{k}{4}(\frac{k}{3})^{n-1}u[n-1]$ است.

۴) این سیستم به ازای $|k| < 3$ پایدار و پاسخ ضربه آن به صورت $h[n] = (-\frac{k}{3})^n u[n] + \frac{k}{4}(-\frac{k}{3})^{n-1} u[n-1]$ است.

۱۳- یک سیستم LTI در شکل زیر نمایش داده شده است:



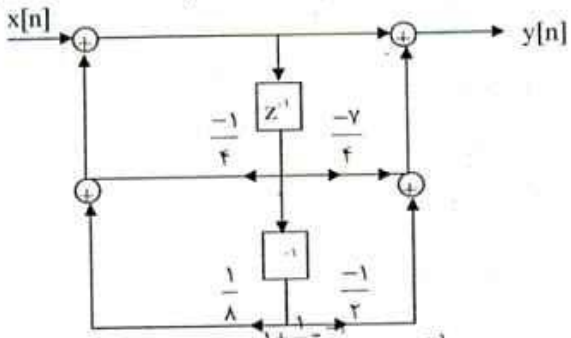
گفته شده: $y[n] = y[n-1] + \frac{20}{3}\omega_1[n]$ و $\omega_2[n] = 2\omega_2[n-1] - y[n-1]$ است. سیستم فوق به ازای کدام یک از نواحی همگرایی تابع تبدیل $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$ زیر پایدار است؟ (مهندسی برق ـ آزاد ۸۲)

۱) $|z| < 3$ ۲) $|z| > \frac{2}{3}$ ۳) $\frac{2}{3} < |z| < 3$ ۴) $|z| > 3$

۱۴- سیستم داده شده در سؤال قبل به ازاء کدام یک از نواحی همگرایی تابع تبدیل $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$ زیر علی است؟ (مهندسی برق ـ آزاد ۸۲)

۱) $|z| < 3$ ۲) $|z| > \frac{2}{3}$ ۳) $\frac{2}{3} < |z| < 3$ ۴) $|z| > 3$

۱۵- شکل مقابل نمایش جعبه‌ای یک سیستم LTI را نشان می‌دهد کدام یک از گزینه های زیر در مورد این سیستم تا صحیح است؟ (مهندسی برق ـ آزاد ۸۲)



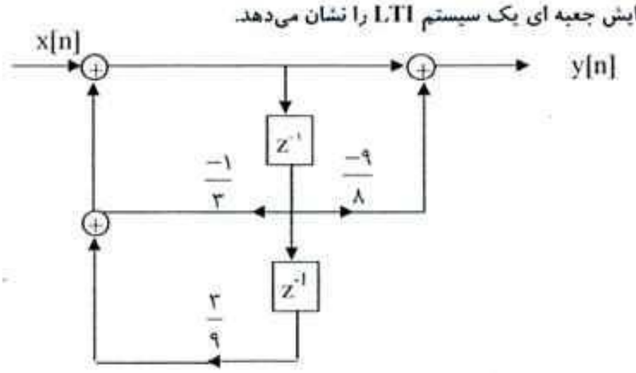
۱) تابع تبدیل این سیستم به صورت $H(z) = (\frac{1+\frac{1}{4}z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}})(\frac{1-2z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}})$ است.

۲) تابع تبدیل این سیستم به صورت $H(z) = 4 + \frac{\frac{5}{3}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{-\frac{14}{3}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$ است.

۳) تابع تبدیل این سیستم به صورت $H(z) = \frac{1+\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{1}{8}z^{-2}}{1-\frac{7}{4}z^{-1}-\frac{1}{2}z^{-2}}$ است.

۴) تابع تبدیل این سیستم به صورت $H(z) = \frac{1-\frac{7}{4}z^{-1}-\frac{1}{2}z^{-2}}{1+\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{1}{8}z^{-2}}$ است.

۱۶- شکل مقابل نمایش جعبه ای یک سیستم LTI را نشان می‌دهد.



کدام یک از گزینه های زیر در مورد این سیستم صحیح است؟ (مهندسی برق ـ آزاد ۸۲)

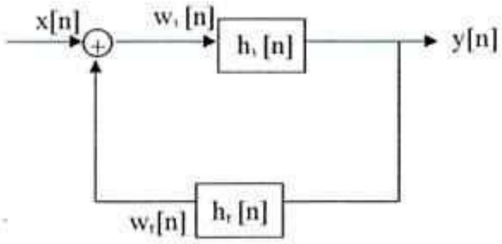
۱) دو قطب در $z=0$ و $z=\frac{9}{8}$ و دو صفر در $z=\frac{1}{3}$ و $z=\frac{-2}{3}$ دارد و ناپایدار است.

۲) دو قطب در $z=0$ و $z=\frac{9}{8}$ و دو صفر در $z=\frac{1}{3}$ و $z=\frac{-2}{3}$ دارد و اگر غیر علی باشد پایدار است.

۳) دو صفر در $z=0$ و $z=\frac{9}{8}$ و دو قطب در $z=\frac{1}{3}$ و $z=\frac{-2}{3}$ دارد و ناپایدار است.

۴) دو صفر در $z=0$ و $z=\frac{9}{8}$ و دو قطب در $z=\frac{1}{3}$ و $z=\frac{-2}{3}$ دارد و اگر علی باشد پایدار است.

۱۷- سیستمی را که در زیر آورده شده در نظر بگیرید:



که در آن $y[n]=y[n-1]+\frac{20}{3}w_1[n]$, $w_2[n]=2w_2[n-1]-y[n-1]$ است کدام گزینه زیر معادله تفاضلی ورودی- خروجی حلقه بسته را به درستی توصیف می‌کند؟ (مهندسی برق ـ آزاد ۸۲)

۱) $\frac{20}{3}y[n]=\frac{40}{3}y[n-1]+x[n]+\frac{11}{3}x[n-1]+2x[n-2]$

۲) $y[n]=-\frac{11}{3}y[n-1]-2y[n-2]+\frac{20}{3}x[n]-\frac{40}{3}x[n-1]$

۳) $y[n]=+\frac{11}{3}y[n-1]+2y[n-2]+\frac{20}{3}x[n]-\frac{40}{3}x[n-1]$

۴) $\frac{20}{3}y[n]=\frac{40}{3}y[n-1]+x[n]-\frac{11}{3}x[n-1]-2x[n-2]$

۱۸- گفته شده اگر ورودی یک سیستم LTI بصورت $x_1[n]=(\frac{1}{3})^n u[n]$ باشد، خروجی آن $y_1[n]=\left[b(\frac{1}{2})^n+10(\frac{1}{3})^n\right]u[n]$ خواهد بود و چنانچه ورودی $x_2[n]=(-\frac{1}{2})^n$ باشد خروجی آن $y_2[n]=\frac{118}{9}(-\frac{1}{2})^n$ خواهد بود. مقدار b چقدر است؟ (مهندسی برق ـ آزاد ۸۲)

۱) $b=1$ ۲) $b=2$ ۳) $b=3$ ۴) $b=4$

۱۹- ورودی یک سیستم زمان گسسته LTI با پاسخ ضربه $h[n]=(\frac{1}{4})^n u[n]$ به صورت $x[n]=(-\frac{7}{8})^n$ است. خروجی این سیستم در لحظه $n=1$ برابر است با: (مهندسی برق ـ آزاد ۸۲)

۱) $-\frac{49}{72}$ ۲) $\frac{49}{72}$ ۳) $-\frac{7}{9}$ ۴) $-\frac{7}{8}$

۲۰- اگر $x[n]=\delta[n]+2\delta[n-1]-\delta[n-3]$, $h[n]=2\delta[n+1]+2\delta[n-1]$ باشد، حاصل عبارت $x[n]*h[n]$ کدام است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۱)

۱) $2\{\delta[n+1]+2\delta[n]+\delta[n-1]\}+2\delta[n-2]$

۲) $\delta[n+1]+\delta[n-1]+2\delta[n]+\delta[n-2]-2\delta[n-3]$

۳) $4\delta[n-1]+4\delta[n-2]+2\delta[n]+\delta[n+1]-\delta[n-4]$

۴) $2\delta[n+1]+4\delta[n]+2\delta[n-1]+2\delta[n-2]-2\delta[n-4]$

۲۱- در صورتی که پاسخ ضربه سیستم LTI و علی $y[n]-\frac{1}{4}y[n-1]=\frac{1}{3}x[n]$ از پاسخ پله سیستم LTI و علی $y[n]-\frac{3}{4}y[n-1]+\frac{1}{8}y[n-2]=x[n]$ کسر شود، حاصل با کدام برابر است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۱)

۱) $\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]u[n]$ ۲) $\left[2\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]u[n]$

۳) $\left[\frac{8}{3}-2\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]u[n]$ ۴) $\left[\frac{8}{3}+2\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]u[n]$

۲۲- تابع تبدیل یک سیستم LTI گسسته به صورت $H(z)=\dfrac{1-\frac{1}{3}z^{-1}}{z^{-1}\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+2z^{-1}\right)}$ ، و ناحیه همگرایی آن $2<|z|<\infty$ می‌باشد در مورد این سیستم کدام گزینه درست است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۰)

۱) سیستم علی است.

۲) سیستم پایدار است

۳) اگر $h[n]$ پاسخ ضربه سیستم باشد آنگاه $h[-1]=1$

۴) $h[n]$ پاسخ ضربه سیستم باشد آنگاه $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]=0$

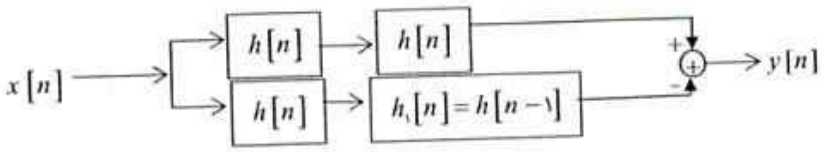
۲۳- اگر در یک سیستم زمان گسسته LTI و پایدار ، معادله تفاضلی زیر بین ورودی سیستم و خروجی آن برقرار باشد :

$y[n]-ay[n-1]+y[n-2]=x[n]$

می‌توان نتیجه گرفت که سیستم به ازای ...... است. (مهندسی برق ـ سراسری ۸۰)

۱) جمیع مقادیر a غیر علی است
۲) جمیع مقادیر a علی
۳) $a<-2$ علی به ازاء $a\geq -2$ غیر علی
۴) $a<0$ علی و به ازاء $a\geq 0$ غیر علی

۲۴- اگر $h[n]=(n+1)u[n]$ باشد، پاسخ ضربه کلی سیستم مقابل کدام است. (مهندسی برق ـ آزاد ۸۰)



۱) $h_{tot}[n]=\dfrac{n+1}{2}u[n]$
۲) $h_{tot}[n]=\dfrac{n+2}{2}u[n]$
۳) $h_{tot}[n]=\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}u[n]$
۴) $h_{tot}[n]=\dfrac{n+1}{n+2}u[n]$

۲۵- ورودی یک سیستم علی به صورت $x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ می‌باشد اگر $y[0]=1, y[1]=2, y[2]=4$ باشد. مقدار پاسخ ضربه سیستم در $n=2$ یعنی $h[2]$ کدام است؟ (مهندسی برق ـ آزاد ۸۰)

۱) ۲
۲) ۱/۵
۳) ۱
۴) ۲/۵

۲۶- تابع تبدیل یک سیستم LTI گسسته به صورت $H(z)=\dfrac{1-2z^{-1}}{z^{-1}\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}$ می‌باشد. در مورد این سیستم کدام گزاره درست است؟ (مهندسی برق ـ آزاد ۸۰)

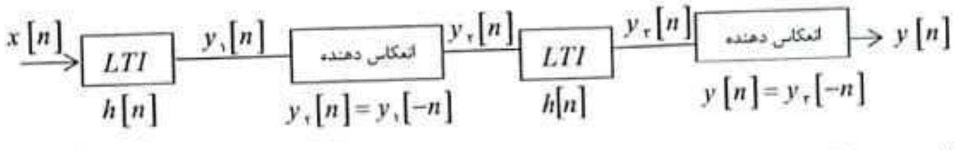
۱) این تابع تبدیل می‌تواند به یک سیستم سببی مربوط باشد

۲) برای ناحیه همگرایی $|z|<\frac{1}{2}$ پاسخ سیستم به ورودی $x[n]=2^n u[-n-1]$ بصورت $y[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}u[-n-2]$ می‌باشد.

۳) برای ناحیه همگرایی $|z|<\frac{1}{2}$ سیستم پایدار است

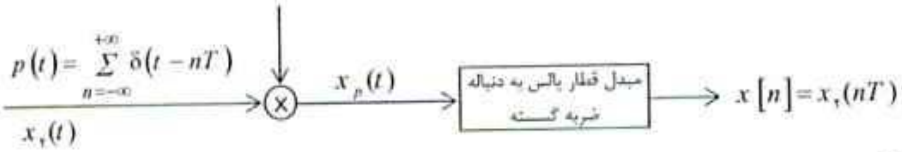
۴) پاسخ ضربه برای $|z|>\frac{1}{2}$ به صورت $h[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}u[n]-2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ می‌باشد.

۲۷- سیستم زمان گسسته متشکل از اجزای نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید. در این شکل $h[n]$ یک پاسخ ضربه حقیقی است در مورد تابع تبدیل این سیستم در حوزه فرکانس کدامیک از گزینه‌های زیر صحیح است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۷۹)



۱) این سیستم LTI است و تابع تبدیلی حقیقی و با تقارن زوج دارد
۲) این سیستم LTI است و تابع تبدیل آن ممکن است حقیقی نباشد
۳) این سیستم LTI است و تابع تبدیل آن حقیقی است ولی ممکن است تقارن زوج نداشته باشد
۴) این سیستم تغییرپذیر با زمان است و لذا برای آن تابع تبدیل تعریف نمی شود.

۲۸- سیگنال $x_c(t)$ که از نظر پهنای باند محدود است با نرخی بیش از نرخ نایکوئیست نمونه برداری می‌شود. نمونه‌ها که به فاصله T ثانیه از هم فاصله دارند به یک دنباله $x[n]$ مطا بق شکل زیر تبدیل می‌شوند. رابطه بین انرژی دنباله E_d و انرژی سیگنال اصلی E_c و بازه T به کدام صورت زیر است. (مهندسی برق - سراسری ۷۹)



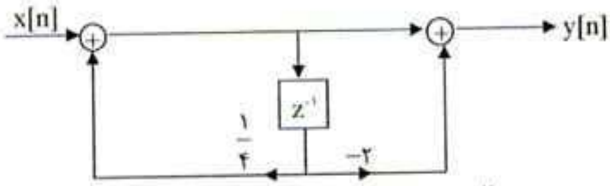
۱) $E_c=\frac{E_d}{T}$ ۲) $E_c=TE_d$ ۳) $E_c=T^2E_d$ ۴) $E_c=\frac{E_d}{T^2}$

۲۹- تابع تبدیل یک سیستم زمان گسسته به صورت $H(z)=\frac{z^{-1}}{1+kz^{-1}+z^{-2}}$ می‌باشد که در آن k یک ضریب ثابت است. کدام یک از موارد زیر می‌تواند صحیح باشد ؟ (مهندسی برق - سراسری ۷۹)

۱) این سیستم نمی تواند توأماً علی و پایدار باشد. ۲) این سیستم نمی تواند توأماً علی و ناپایدار باشد.

۳) این سیستم نمی تواند توأماً غیر علی و ناپایدار باشد. ۴) این سیستم نمی تواند توأماً غیرعلی و پایدار باشد.

۳۰- مقدار پاسخ ضربهٔ سیستم LTI زمان گسسته علی شکل مقابل در $n=2$ چقدر است ؟ (مهندسی برق - سراسری ۷۹)



۱) $\frac{3}{16}$ ۲) $\frac{7}{16}$ ۳) $\frac{-3}{16}$ ۴) $\frac{-7}{16}$

۳۱- تابع تبدیل یک سیستم زمان گسسته خطی تغییرناپذیر با زمان و علی به صورت $H(z)=\frac{1-3z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$ می‌باشد. پاسخ این سیستم به ورودی $x[n]=\begin{cases}1+3^n & , n\geq 0\\ 1 & , n<0\end{cases}$ چیست ؟ (مهندسی برق - سراسری ۷۹)

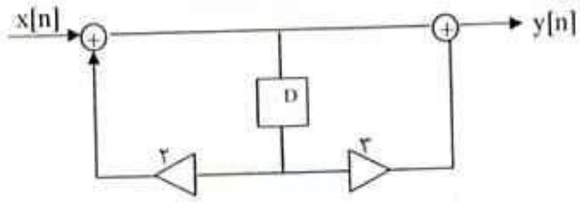
۱) $y[n]=\begin{cases}\frac{4}{3}+\left(\frac{-1}{2}\right)^n & , n\geq 0\\ \frac{-4}{3} & , n<0\end{cases}$

۲) $y[n]=\begin{cases}\frac{-4}{3}+\left(\frac{-1}{2}\right)^n & , n\geq 0\\ \frac{-4}{3} & , n<0\end{cases}$

۳) $y[n]=\begin{cases}\frac{4}{3}+3^n & , n\geq 0\\ \frac{4}{3} & , n<0\end{cases}$

۴) $y[n]=\begin{cases}\frac{-4}{3}+3^n & , n\geq 0\\ \frac{-4}{3} & , n<0\end{cases}$

۳۲- تابع تبدیل سیستم زمان گسسته نشان داده شده در شکل زیر که در آن D معرف یک شیفت واحد می‌باشد، چیست ؟ (مهندسی برق ـ آزاد ۷۹)



۱) $H(z)=\frac{1+3z^{-1}}{1+2z^{-1}}$ ۲) $H(z)=\frac{1-3z^{-1}}{1+2z^{-1}}$ ۳) $H(z)=\frac{1+3z^{-1}}{1-2z^{-1}}$ ۴) $H(z)=\frac{1-3z^{-1}}{1-2z^{-1}}$

۳۳- تابع تبدیل یک سیستم زمان گسسته LTI علی به صورت $H(z)=\frac{1}{1+0/5z^{-1}}$ است. پاسخ پله این سیستم چیست ؟ (مهندسی برق ـ آزاد ۷۹)

۱) $\frac{2}{3}u[n]+\frac{1}{3}(-0/5)^n u[n]$ ۲) $\frac{1}{3}u[n]+\frac{2}{3}(-0/5)^n u[n]$

۳) $\frac{2}{3}u[n]+\frac{1}{3}(0/5)^n u[n]$ ۴) $\frac{1}{3}u[n]+\frac{2}{3}(0/5)^n u[n]$

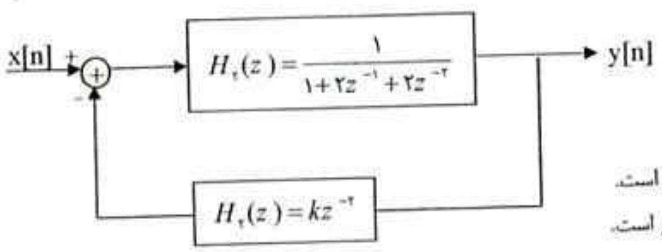
۳۴- تابع تبدیل یک زمان گسسته LTI به صورت $H(z)=\frac{1-az^{-1}+z^{-2}}{7+az^{-1}}$ می‌باشد. ضمناً می‌دانیم پاسخ این سیستم به ورودی $x[n]=a^n$ به صورت $y[n]=a^{n+1}$ می‌باشد. مقدار a چقدر است ؟ (مهندسی برق ـ آزاد ۷۹)

۱) ۲ ۲) ۱/۵ ۳) ۱ ۴) ۰/۵

۳۵- یک سیستم زمان گسسته LTI علی را در نظر بگیرید و فرض کنید بین ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ آن معادله تفاضلی $y[n]=2ay[n-1]-\frac{25}{4}a^2y[n-2]+x[n]$ برقرار است. به ازای چه مقادیری از a این سیستم پایدار خواهد بود؟ (مهندسی برق ـ آزاد ۷۹)

۱) $|a|>\frac{2}{3}$ ۲) $|a|>\frac{2}{5}$ ۳) $|a|<\frac{2}{5}$ ۴) $|a|<\frac{2}{3}$

۳۶- دیاگرام بلوکی یک سیستم زمان گسسته علی به صورت مقابل داده شده است در مورد پایداری و یا ناپایداری این سیستم کدام عبارت درست است ؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۷۸)



۱) به ازاء جمیع مقادیر k سیستم پایدار است.

۲) به ازاء جمیع مقادیر k سیستم ناپایدار است.

۳) به ازاء $k\le -1$ سیستم ناپایدار و به ازاء $k>-1$ سیستم پایدار است.

۴) به ازاء $k\le -2$ سیستم ناپایدار و به ازاء $k>-2$ سیستم پایدار است.

پاسخ تشریحی تست‌های طبقه‌بندی شده فصل پنجم

۱- گزینه «۲» ـ (ساده)

اگر ورودی z^n به سیستم LIT گسسته در زمان اعمال شود خروجی آن به صورت $H(z)z^n$ خواهد بود. $H(z)$ برای این سیستم به صورت زیر است:

$$H(z)=z\{h[n]\}=z\{(\frac{۱}{۲})^n u(n)\}=\frac{۱}{۱-\frac{۱}{۲}z^{-۱}}$$

$$z=۲\Rightarrow y[n]=\frac{۱}{۱-\frac{۱}{۲}۲^{-۱}}\times ۲^n=\frac{۴}{۳}۲^n$$

$$y[۰]=\frac{۴}{۳}$$

۲- گزینه «۳» ـ (متوسط)

از تعریف داریم:

$$H(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}h[n]z^{-n}$$

از طرفی با توجه به شرایط مساله داریم:

$$\left.\begin{array}{l} H(z)=\frac{z-z_۰}{z-p_۰} \\ H(۱)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}h[n]=۴ \\ H(-۱)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}h[n](-۱)^n=۰ \end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l}\frac{۱-z_۰}{۱-p_۰}=۴ \\ \frac{-۱-z_۰}{-۱-p_۰}=۰\end{array}\Rightarrow \begin{array}{l} z_۰=-۱ \\ p_۰=\frac{۱}{۲}\end{array}$$

۳- گزینه «۱» ـ (ساده)

با توجه به اینکه برای $n>۰$ داریم $x[n]=۰$، $X(z)$ به صورت زیر می‌باشد:

$$X(z)=x[۰]+x[-۱]z+x[-۲]z^۲+\dots$$

در نتیجه

$$x[۰]=\lim_{z\to ۰}X(z)$$

۴- گزینه «۴» - (ساده)

تابع تبدیل سیستم به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$H(z)=۱+\frac{۳}{۲}z^{-۱}-\left(\frac{۱}{z}\right)^{-۲}$$

$$H(z)=۱+\frac{۳}{۲}z^{-۱}-z^۲$$

تابع تبدیل وارون سیستم برابر عکس تابع تبدیل سیستم است

$$H_I(z)=\frac{۱}{۱+\frac{۳}{۲}z^{-۱}-z^۲}=\frac{z}{\frac{۳}{۲}+z-z^۳}$$

چون دارای قطب خارج از دایره واحد است پس ناپایدار است از روی $H_1(z)$ روشن است که پاسخ ضربه آن نامحدود است پس سیستم IIR است.

۵- گزینه «۴» - (متوسط)

$$h_1[n]=h[n]\left(\frac{e^{j\frac{n\pi}{4}}+e^{-j\frac{n\pi}{4}}}{2}\right)$$

در نتیجه برای $H_1(z)$ با توجه به خاصیت تغییر مقیاس در حوزه z (رابطه ۵-۲۳) داریم:

$$H_1(z)=\frac{1}{2}H(e^{-j\frac{\pi}{4}}z)+\frac{1}{2}H(e^{j\frac{\pi}{4}}z)$$

$H(e^{\pm j\frac{\pi}{4}}z)$ به معنی چرخش قطبها و صفرها با زاویه $\pm\frac{\pi}{4}$ است.

$$\sqrt{3}e^{\pm j\frac{\pi}{8}}\rightarrow\sqrt{3}e^{j\frac{3\pi}{8}}$$
$$\rightarrow\sqrt{3}e^{j\frac{\pi}{8}}$$
$$\rightarrow\sqrt{3}e^{-j\frac{\pi}{8}}$$
$$\rightarrow\sqrt{3}e^{-j\frac{3\pi}{8}}$$

توجه کنید که $\pm\frac{\pi}{8}$ با $\pm\frac{\pi}{4}$ جمع شده است.

۶- گزینه «۲» - (ساده)

با توجه به محل قطب و صفرها در $X(z)$ می‌توان تابع تبدیل آن را به صورت زیر نوشت:

$$X(z)=k\frac{z^2-4}{z^2}=k(1-4z^{-2})\Rightarrow x[n]=\delta[n]-4\delta[n-2]$$

$$y[n]=x^2[n]=k^2(\delta[n]+16\delta[n-2])$$

$$Y(z)=k^2(1+16z^{-2})=k^2\frac{16+z^2}{z^2}\Rightarrow \text{صفرها}=\pm j4$$

۷- گزینه «۳» - (ساده)

از پاسخ ضربه سیستم نتیجه می‌شود که تابع تبدیل آن برابر است با:

$$H(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$$

اگر ورودی پله واحد با دامنه ۳ باشد، تبدیل Z آن برابر است با:

$$X(z)=\frac{3}{1-z^{-1}}$$

بنابراین تبدیل Z خروجی برابر می‌شود با:

$$Y(z)=H(z).X(z)=\frac{3}{(1-z^{-1})(1-\frac{1}{4}z^{-1})}$$

با توجه به قضیه مقدار نهایی رابطه (۵-۲۹) داریم

$$y[+\infty]=Lim_{z\to 1}(1-z^{-1})Y(z)=4$$

۸- **گزینه «۲» - (ساده)**

تابع تبدیل سیستم عبارت است از :

$$H(z)=\frac{1+z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-2}+\frac{1}{16}z^{-4}}$$

پاسخ به $x[n]$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$y[n]=\left|H(e^{j\frac{\pi}{2}})\right|\sin(\frac{\pi}{2}n+\angle H(e^{j\frac{\pi}{2}}))$$

$$+3\left|H(e^{j\pi})\right|\cos(\pi n+\angle H(e^{j\pi}))$$

$$H(e^{j\pi})=H(-1)=0$$

$$H(e^{j\frac{\pi}{2}})=H(j)=\frac{16}{25}(1-j)=\frac{16\sqrt{2}}{25}e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

بنابراین داریم:

$$y[n]=\frac{16\sqrt{2}}{25}\sin(\frac{\pi}{2}n-\frac{\pi}{4})$$

۹- **گزینه «۳» - (ساده)**

تابع تبدیل سیستم به صورت زیر است :

$$\frac{Y(z)}{X(z)}=H(z)=\frac{1+\frac{k}{3}z^{-1}}{1-\frac{k}{4}z^{-1}}$$

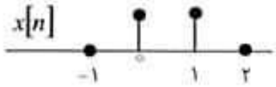
با توجه به اینکه ورودی به فرم Z_0^n است ، خروجی $H(z_0)z_0^n$ خواهد بود .

$$3^n H(3)=16(3)^{n-2}$$

$$H(3)=16\times\frac{1}{9}=\frac{16}{9}\Rightarrow k=3$$

۱۰- **گزینه «۳» - (ساده)**

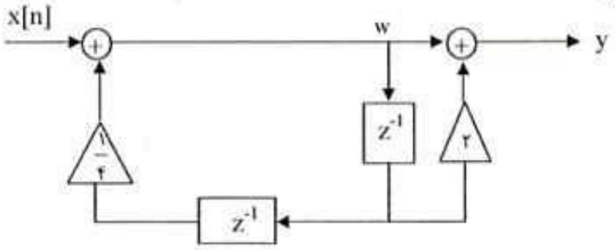
توجه کنید که ورودی به صورت زیر قابل نمایش است :



در نتیجه می‌توان خروجی را به صورت زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned}y[n]&=h[n]+h[n-1]\\&=(n+1)u[n+1]+nu[n]\\&=(n+1)u[n]+nu[n]=(2n+1)u[n]\end{aligned}$$

۱۱- گزینه «۳» - (ساده)



$$Y(z)=W(z)+2z^{-1}W(z)=(1+2z^{-1})W(z)$$

$$W(z)=X(z)+\frac{1}{4}z^{-2}W(z)\Rightarrow W(z)=\frac{4}{4-z^{-2}}X(z)$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)}=H(z)=\frac{4(1+2z^{-1})}{4-z^{-2}}=\frac{1+2z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-2}}$$

با بسط $H(z)$ به صورت کسرهای جزئی داریم :

$$H(z)=\frac{-\frac{3}{2}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{\frac{5}{2}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

و در نتیجه:

$$h[n]=-\frac{3}{2}(-\frac{1}{2})^n u_{-1}[n]+\frac{5}{2}(\frac{1}{2})^n u_{-1}[n]$$

۱۲- گزینه «۴» - (ساده)

تابع تبدیل سیستم به صورت زیر محاسبه می‌شود :

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1-\frac{k}{4}z^{-1}}{1+\frac{k}{3}z^{-1}}=\frac{1}{1+\frac{k}{3}z^{-1}}+\frac{\frac{k}{4}z^{-1}}{1+\frac{k}{3}z^{-1}}$$

قطب سیستم در $-\frac{k}{3}$ قرار دارد که به ازاء $|k|<3$ داخل دایره واحد قرار می‌گیرد و سیستم پایدار است . داریم:

$$h[n]=(-\frac{k}{3})^n u[n]+\frac{k}{4}(-\frac{k}{3})^{n-1}u[n-1]$$

۱۳- گزینه «۳» - (ساده)

از روابط داده شده داریم :

$$Y(z)=z^{-1}Y(z)+\frac{20}{3}W_1(z)$$

$$W_2(z)=2z^{-1}W_2(z)-z^{-1}Y(z)$$

با توجه به شکل سیستم داریم:

$$W_1(z)=X(z)+W_2(z)$$

با ترکیب سه رابطه فوق $H(z)$ سیستم به دست می‌آید:

محل قطب های سیستم در ۳- و $\frac{-2}{3}$ است.

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{20(1-2z^{-1})}{6z^{-2}+11z^{-1}+3}\quad\Rightarrow$$

برای پایداری ROC باید دایره واحد را در بر گیرد بنابراین:

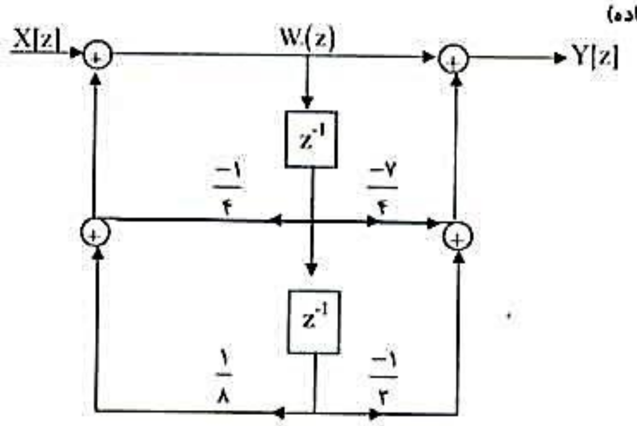
$$\frac{۲}{۳}<|z|<۳$$

۱۴- گزینه «۴» - (ساده)

برای علی بودن باید ROC خارج دورترین قطب باشد تا پاسخ ضربه مربوطه سمت راستی شود:

$$|z|>۳$$

۱۵- گزینه «۴» - (ساده)



$$W(z)=X(z)-\frac{۱}{۴}z^{-۱}W(z)+\frac{۱}{۸}z^{-۲}W(z)$$

$$\Rightarrow X(z)=W(z)[۱+\frac{۱}{۴}z^{-۱}-\frac{۱}{۸}z^{-۲}]$$

از طرفی:

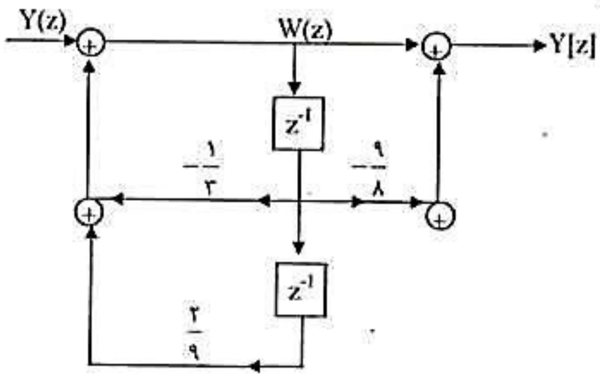
$$Y(z)=W(z)-\frac{۷}{۴}z^{-۱}W(z)-\frac{۱}{۲}z^{-۲}W(z)$$

$$\Rightarrow Y(z)=W(z)[۱-\frac{۷}{۴}z^{-۱}-\frac{۱}{۲}z^{-۲}]$$

بنابراین

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{۱-\frac{۷}{۴}z^{-۱}-\frac{۱}{۲}z^{-۲}}{۱+\frac{۱}{۴}z^{-۱}-\frac{۱}{۸}z^{-۲}}$$

۱۶- گزینه «۴» - (ساده)



از طرفی :

$$W(z)=X(z)-\frac{1}{3}z^{-1}W(z)+\frac{2}{9}z^{-2}W(z)$$
$$\Rightarrow X(z)=W(z)[1+\frac{1}{3}z^{-1}-\frac{2}{9}z^{-2}]$$

داریم :

$$Y(z)=W(z)-\frac{9}{8}z^{-1}W(z)$$
$$\Rightarrow Y(z)=W(z)[1-\frac{9}{8}z^{-1}]$$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1-\frac{9}{8}z^{-1}}{1+\frac{1}{3}z^{-1}-\frac{2}{9}z^{-2}}$$

دو قطب در $\frac{-2}{3}$ و $\frac{1}{3}$ و دو صفر در $\frac{9}{8}$ و 0 دارد.اگر ROC به صورت $\frac{2}{3}>|z|>\frac{1}{3}$ یا $|z|<\frac{1}{3}$ باشد ، سیستم پایدار و علی نیست . اما اگر ROC به صورت $|z|>\frac{2}{3}$ باشد سیستم علی و پایدار است.

-۱۷ **گزینه «۲» - (ساده)**

از روابط داده شده داریم:

با توجه به شکل داریم :

$$Y(z)=z^{-1}Y(z)+\frac{20}{3}W_1(z)$$
$$W_2(z)=2z^{-1}W_2(z)-z^{-1}Y(z)$$

$$W_1(z)=X(z)+W_2(z)$$

با ترکیب سه رابطه فوق $H(z)$ سیستم به صورت زیر به دست می‌آید:

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{20(1-2z^{-1})}{6z^{-2}+11z^{-1}+3}$$

در حوزه زمان داریم:

$$6y[n-2]+11y[n-1]+3y[n]=20x[n]-40x[n-1]$$

و در نتیجه

$$y[n]=\frac{-11}{3}y[n-1]-2y[n-2]+\frac{20}{3}x[n]-\frac{40}{3}x[n-1]$$

-۱۸ **گزینه «۴» - (ساده)**

اگر ورودی سیستم LTI گسسته Z_0^n باشد خروجی آن $H(z_0)z_0^n$ خواهد بود در نتیجه چون پاسخ ورودی $x_2[n]=(-\frac{1}{4})^n$ برابر $\frac{118}{9}(-\frac{1}{4})^n$ است بنابراین $H(-\frac{1}{4})=\frac{118}{9}$ می‌باشد.

از طرفی داریم:

$$H(z)=\frac{Y_1(z)}{X_1(z)}=\frac{\frac{b}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{10}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}}{\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}}=\frac{10+b-(\frac{b}{3}+5)z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})}$$

بنابراین:

$$\frac{10+b-(\frac{b}{3}+5)(\frac{-1}{4})^{-1}}{1-\frac{1}{2}(\frac{-1}{4})^{-1}}=\frac{118}{9} \quad \Rightarrow b=2$$

۱۹- گزینه «۱» - (ساده)

می دانیم که پاسخ به ورودی z_0^n برابر $y[n]=H(z_0)z_0^n$ است از طرفی $H(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$ بنابراین:

$$y[n]=\frac{1}{1-\frac{1}{4}(-\frac{7}{8})^{-1}}\times(-\frac{7}{8})^n$$

$$y[1]=\frac{-49}{72}$$

۲۰- گزینه «۴» - (ساده)

$$Y(z)=[1+2z^{-1}-z^{-3}][2z+2z^{-1}]$$
$$=2z+2z^{-1}+4+2z^{-2}-2z^{-4}$$

در نتیجه

$$y[n]=x[n]*h[n]=2\delta[n+1]+4\delta[n]+$$
$$2\delta[n-1]+2\delta[n-2]-2\delta[n-4]$$

۲۱- گزینه «۳» - (ساده)

$$H_1(z)=\frac{Y_1(z)}{X_1(z)}=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}\Rightarrow h_1[n]=\frac{1}{3}(\frac{1}{4})^n u[n]$$

$$H_2(z)=\frac{Y_2(z)}{X_2(z)}=\frac{1}{1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}$$

تبدیل Z پاسخ پله سیستم ۲ عبارت است از:

$$s_2(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}\frac{1}{1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}$$

$$=\frac{\frac{8}{3}}{1-z^{-1}}+\frac{-2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$$

$$\Rightarrow s_2[n]=\left(-2(\frac{1}{2})^n+\frac{1}{3}(\frac{1}{4})^n+\frac{8}{3}\right)u[n]$$

بنابراین:

$$s_2[n]-h_1[n]=[\frac{8}{3}-2(\frac{1}{2})^n]u[n]$$

۲۲- گزینه «۳» - (ساده)

چون ROC دایره واحد را در بر نمی گیرد، پس پایدار نیست . و چون قطب بی نهایت دارد ، پس علی نیست.

$$H(z)=\frac{z^{3}-\frac{1}{2}z^{2}}{(z-\frac{1}{2})(z+2)}=z+\ldots$$

پس $h[-1]=1$ است .

۲۳- **گزینه «۱» - (ساده)**

$$H(z)=\frac{1}{1-az^{-1}+z^{-2}}=\frac{1}{z^{2}-az+1}$$

سیستم پایدار است در نتیجه برای اینکه علی باشد باید هر دو قطب داخل دایره واحد قرار گیرند به ازاء هیچ مقداری از a هر دو قطب نمی توانند همزمان داخل دایره واحد باشند چون حاصلضرب آنها ۱ است یا به عبارتی قطب ها عکس همدیگرند.

۲۴- **گزینه «۳» - (متوسط)**

از شکل داریم:

$$H_{tot}=H^{2}(z)-z^{-1}H^{2}(z)=\left(1-z^{-1}\right)H^{2}(z)$$

از طرفی $H(z)$ از روی پاسخ ضربه $h[n]$ محاسبه می‌شود :

$$h[n]=(n+1)u[n]=(n+1)u[n+1]$$

$$nu[n]\xleftrightarrow{Z}-z\frac{d}{dz}\frac{1}{1-z^{-1}}=\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^{2}}$$

$$(n+1)u[n+1]\xleftrightarrow{Z}z\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^{2}}=\frac{1}{(1-z^{-1})^{2}}$$

$$H_{tot}(z)=(1-z^{-1})\frac{1}{(1-z^{-1})^{4}}=\frac{1}{(1-z^{-1})^{3}}$$

از جدول زوج تبدیل‌های مهم داریم:

$$h_{tot}[n]=\frac{(n+2)!}{n!2!}u[n]=\frac{(n+2)(n+1)}{2}u[n]$$

۲۵- **گزینه «۴» - (ساده)**

$$Y(z)=1+2z^{-1}+3z^{-2}+4z^{-3}$$

$$X(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

در نتیجه:

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+2z^{-1}+3z^{-2}+4z^{-3})$$

$$=1+1/5z^{-1}+2z^{-2}+2/5z^{-3}-2z^{-4}$$

بنابراین $h[3]=2/5$ است .

۲۶- **گزینه «۲» - (متوسط)**

$$H(z)=\frac{z^{2}-2z}{z-\frac{1}{2}}$$

چون قطب بی‌نهایت دارد، ROC نمی‌تواند کاملا سمت راستی باشد و در نتیجه سیستم نمی‌تواند علی باشد. اگر آن ROC $|z|<\frac{1}{2}$ باشد، سیستم پایدار نیست چون دایره واحد را در بر ندارد.

$$H(z)=z-\frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

بنابراین پاسخ ضربه نمی تواند به صورت گزینه «۴» باشد.

۲۷- گزینه «۱» - (متوسط)

$$Y_1(z)=H(z)X(z)$$
$$Y_2(z)=Y_1(\frac{1}{z})=X(\frac{1}{z})H(\frac{1}{z})$$
$$Y_3(z)=H(z)Y_2(z)=X(\frac{1}{z})H(\frac{1}{z})H(z)$$
$$Y(z)=Y_3(\frac{1}{z})=X(z)H(z)H(\frac{1}{z})$$

توجه دارد که $H_{tot}(z)=H(z)H(\frac{1}{z})$ است که حقیقی و زوج می‌باشد.

۲۸- گزینه «۲» - (متوسط)

به یاد آورید که :

$$E_c=\int_{-\infty}^{+\infty}|x_c(t)|^2\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{+\omega_c}|X_c(\omega)|^2\,d\omega$$

،

$$E_d=\sum_n|x[n]|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|X(\Omega)|^2\,d\Omega$$

،

$$X(\Omega)=\frac{1}{T}X_c(\frac{\Omega}{T})$$

با توجه به سه رابطه فوق داریم :

$$E_d=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|X(\Omega)|^2\,d\Omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{T^2}\left|X_c(\frac{\Omega}{T})\right|^2 d\Omega$$

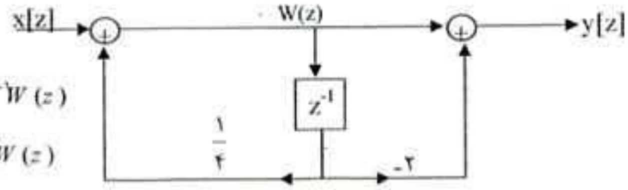
و با تغییر متغیر $\Omega'=\frac{\Omega}{T}$ و در نتیجه $d\Omega=T\,d\Omega'$

$$E_d=\frac{1}{2\pi T}\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}}|X_c(\Omega')|^2\,d\Omega'=\frac{1}{T}E_c\Rightarrow E_c=TE_d$$

۲۹- گزینه «۱» - (ساده)

برای اینکه سیستم زمان گسسته LTI تواما پایدار و علی باشد باید همه قطب های آن داخل دایره واحد باشند. در $H(z)$، قطبها معکوس همدیگرند (توجه کنید که حاصلضرب ریشه های مخرج یک است) در نتیجه یکی از آنها داخل دایره واحد باشد، حتما دومی خارج دایره واحد خواهد بود.

۳۰- گزینه «۴» - (ساده)



$$W(z)=X(z)+\frac{1}{4}z^{-1}W(z)$$
$$Y(z)=W(z)-2z^{-1}W(z)$$

بنابراین $H(z)$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$H(z)=\frac{1-2z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}=\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}-2\frac{z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$$

$$h[n]=(\frac{1}{4})^n u[n]-2(\frac{1}{4})^{n-1}u[n-1]$$

$$h[2]=(\frac{1}{4})^2-2(\frac{1}{4})^1=\frac{-7}{16}$$

۳۱- گزینه «۲» - (متوسط)

ورودی $x[n]$ را به صورت مجموع دو سیگنال $x_1[n]$ و $x_2[n]$ با تعریف زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{matrix} x_1[n]=1 \\ x_2[n]=3^n u[n] \end{matrix} \Rightarrow x[n]=\begin{cases}1+3^n & n\ge 0\\ 1 & n<0\end{cases}$$

پاسخ به ورودی $x_1[n]=1=1^n$ با توجه به اینکه پاسخ به ورودی z_0^n به صورت $H(z_0)z_0^n$ است، محاسبه می‌شود.

$$y_1[n]=H(1)1^n=\frac{1-3}{1+\frac{1}{2}}1=\frac{-4}{3}$$

پاسخ به ورودی $x_2[n]$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$Y_2(z)=X_2(z)H(z)=\frac{1}{1-3z^{-1}}\times\frac{1-3z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}=\frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$y_2[n]=\left(\frac{-1}{2}\right)^n u[n]$$

در نتیجه با توجه به جمع آثار، $y[n]$ پاسخ به ورودی $x[n]$ برابر است با:

$$y[n]=\begin{cases}\frac{-4}{3}+\left(\frac{-1}{2}\right)^n & n\ge 0\\ \frac{-4}{3} & n<0\end{cases}$$

۳۲- گزینه «۳» - (ساده)

$$Y(z)=W(z)+2z^{-1}W(z)$$

$$W(z)=X(z)+2z^{-1}W(z)$$

$$\Rightarrow W(z)=\frac{X(z)}{1-2z^{-1}}$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1+2z^{-1}}{1-2z^{-1}}$$

۳۳- گزینه «۱» - (متوسط)

نکته قابل تامل این است که مقدار تابع تبدیل به ازاء $z=1$ برابر با پاسخ حالت ماندگار سیستم به ورودی پله است بنابراین چون $H(1)=\frac{2}{3}$ است، مولفه ماندگار خروجی $\frac{2}{3}u[n]$ است از طرفی با توجه به $H(z)$، مولفه گذاری خروجی به صورت $k(-0/5)^n u[n]$ می‌باشد که k یک ضریب ثابت است در نتیجه گزینه «۱» صحیح می‌باشد.

۳۴- گزینه «۴» - (ساده)

$$y[n]=H(a)a^{n}=a^{n+1}\Rightarrow H(a)=a$$

$$H(a)=\frac{a^{-2}}{8}=a\Rightarrow 8a^{3}=1\Rightarrow a=0/5$$

۳۵- گزینه «۳» - (ساده)

تابع تبدیل سیستم به صورت زیر است :

$$H(z)=\frac{1}{1-4az^{-1}+\frac{25}{4}a^{2}z^{-2}}=\frac{z^{2}}{z^{2}-4az+25a^{2}}$$

قطب های سیستم عبارتند از $2a\pm j\frac{3}{2}a$ اگر سیستم پایدار و علی باشد باید قطبها داخل دایره واحد باشند یا اندازه آنها کوچکتر از ۱ باشد :

$$\sqrt{4a^{2}+\frac{9}{4}a^{2}}<1\Rightarrow |a|<\frac{2}{5}$$

۳۶- گزینه «۲» - (ساده)

با توجه به شکل

$$Y(z)=H_{1}(z)=\left[X(z)-H_{2}(z)Y(z)\right]$$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{H_{1}(z)}{1+H_{1}(z)H_{2}(z)}$$

$$=\frac{1}{(k+2)z^{-2}+2z^{-1}+1}=\frac{z^{2}}{z^{2}+2z+(k+2)}$$

محل قطب های $H(z)$ به صورت زیر است :

$$z_{1,2}=-1\pm\sqrt{-1-k}$$

k هر مقداری داشته باشد همواره حداقل یک قطب خارج دایره قرار میگیرد و سیستم ناپایدار است.

پایان

www.gselectronic.ir