www.ieun.ir

مقدمه

مجموعه‌ی حاضر در ۱۱ فصل برحسب اهمیت و ارتباط مفهومیشان با یکدیگر طبقه بندی شده است که شامل مطالب مهم درسی به همراه تست های کنکور سراسری سال های ۸۵ تا ۸۹ می باشد. با توجه به حذف ماشین حساب و تغییر در روند سوالات درس کنترل موجودی در تهیه ی این جزوه سعی شده است تا کلیه ی نکات کلیدی لازم برای پاسخگویی به سوالات مفهومی و محاسباتی لحاظ شود تا در حداقل زمان ممکن داوطلبان به مهمترین مطالب درسی مبحث "کنترل موجودی" دسترسی داشته باشند. بدین امید که راهکار مناسب برای کسب نتیجه ی بهتر در آزمون کارشناسی ارشد باشد.

با آرزوی موفقیت

پورسعیدی

پورسلطان

www.ieun.ir

www.ieun.ir

در جدول ذیل دروس به سرفصلهای مهم آن طبقه بندی شده و مشخص شده است که در هر سال از هر مبحث چند تست سوال شده است و دانشجوی محترم می تواند زمان باقیماندهٔ خود را با توجه به اهمیت مباحث مدیریت نماید.

سر فصل اصلی درس کنترل موجودی	۱۳۸۵	۱۳۸۶	۱۳۸۷	۱۳۸۸	۱۳۸۹	مجموع سوالات در ۵ سال	درصد ۵ سال
	تعداد تست	تعداد تست	تعداد تست	تعداد تست	تعداد تست		
تعاریف و مفاهیم موجودی						۲۰	٪۱۸٫۱۸
مفاهیم کلی	۴		۱			۵	٪۴٫۵
هزینه های سیستم موجودی	۴		۲	۱	۲	۹	٪۸٫۲
خط مشی مرور سیستم موجودی		۱		۱	۲	۴	٪۳٫۶
انالیز ABC	۱		۱			۲	٪۱٫۸
مدل مقدار سفارش اقتصادی EOQ						۱۶	%۱۴,۵
مدل اصلی	۴	۳	۲	۵	۱	۱۵	٪۱۳٫۶
مدل EOQ گسسته	۱					۱	٪۰٫۹
مدل های کمبود						۶	%۵,۵
کمبود فروش از دست رفته	۱	۱				۲	٪۱٫۸
کمبود پس افت	۰			۲	۲	۴	٪۳٫۶
مدل تولیدی						۱۰	%۹,۱
تولیدی ساده	۲	۳	۱	۲	۲	۱۰	٪۹٫۱
تولیدی کمبود دار						۰	٪۰٫۰
مدل چند محصولی و محدودیت دار						۱۰	%۹,۱
مدل چند محصولی تولیدی	۱		۳		۳	۷	٪۶٫۴
مدل چند محصولی محدودیت دار	۱	۱				۲	٪۱٫۸
مدل تک محصولی محدودیت دار				۱		۱	٪۰٫۹
مدل های تخفیف						۷	٪۶٫۴
تخفیف کلی			۱	۲		۳	٪۲٫۷
تخفیف نموی		۱				۱	٪۰٫۹
مدل حراج و افزایش قیمت		۱	۱	۱		۳	٪۲٫۷
مدل های احتمالی						۳۳	٪۳۰٫۰
مدل های احتمالی یک دوره ای	۲	۲	۲	۱	۱	۸	٪۷٫۳
مدل های احتمالی FOS	۶	۴	۲	۲	۳	۱۷	٪۱۵٫۵
مدل های احتمالی FOI	۲	۱	۲	۱	۲	۸	٪۷٫۳
پیش بینی						۸	٪۷٫۳
هموار سازی نمائی		۱	۱	۱	۲	۵	٪۴٫۵
سایر روش ها	۱	۱	۱			۳	٪۲٫۷
جمع	۳۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۱۱۰	٪۱۰۰٫۰

www.ieun.ir

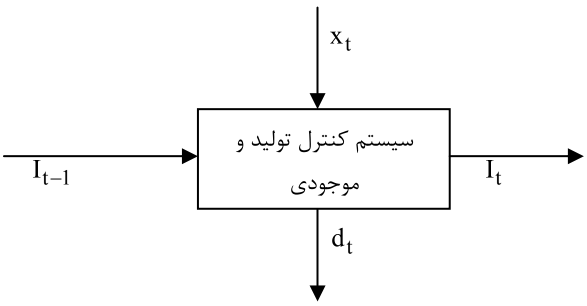
۱ـ تعاریف و مفاهیم کنترل موجودی

۱ـ۱ـ تعریف موجودی و کنترل موجودی

ـ **موجودی:** ذخیره‌ای از مواد و کالاست که برای مدت زمان مشخصی جهت جوابگویی تقاضا تحت کنترل سازمان به‌صورت ثابت نگهداری می‌شود.

تعریف کنترل تولید و موجودی: برنامه‌ریزی و کنترل جریان مواد و عملیات تولیدی شامل موادی که وارد سیستم می‌شود. (مواد اولیه و قطعات) موادی که در خط تولید جریان دارند (کالای نیمه ساخته) و اقلامی که از سیستم بصورت محصولات نهایی (کالای ساخته شده) خارج می‌شوند، بعبارت بهتر کنترل تولید و موجودی عبارت است از فن نگهداری موجودی اقلام در سطح مطلوب به منظور برآوردن تقاضای مشتریان به میزان مناسب و در موعد مقرر بطوریکه هزینه سیستم حداقل گردد.

بطور کلی هر سیستم موجودی را می‌توان بصورت زیر نمایش داده و پارامترهای آن را تعریف نمود:



$x(t)$: تابع چگالی خرید (تولید) هر یک از اقلام (قطعی، احتمالی)

$D(t)$: تابع چگالی مصرف (تقاضا) هر یک از اقلام (قطعی، احتمالی)

$I(t)$: تابع چگالی مقدار موجودی در دسترس (قطعی، احتمالی)

$$I_{t-1} + x_t = I_t + d_t$$

نکته: موادی که به‌صورت ثابت نگهداری نمی‌شوند مانند نفت داخل لوله‌های پالایشگاه جزو موجودی به حساب نمی‌آیند ولی موادی مانند نفت داخل مخازن نفتی که بر طبق تعریف هستند، جزو موجودی به حساب می‌آیند.

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

۱ـ۲ـ عوامل موثر در مدل‌های موجودی

عوامل زیر سازنده فرضیات مدل‌های موجودی می‌باشند و با شناخت نوع آن‌ها در هر مدل می‌توان مدل‌های مختلف را از یکدیگر متمایز ساخت.

۱ـ تقاضا: مهم‌ترین عامل در کنترل موجودی است و به دو دسته قطعی و احتمالی که آن‌ها نیز به دو دسته ساکن و پویا تقسیم می‌گردند.

۲ـ کمبود: تقاضایی است که در زمان مقرر به آن جواب نمی‌دهیم. در مدل‌های موجودی می‌تواند کمبود مجاز باشد و یا مجاز نباشد

۳ـ محدودیت: در مدل‌های موجودی ممکن است محدودیت‌های زیر وجود داشته باشد:

- محدودیت فضا
- محدودیت تعداد دفعات سفارش در سال
- محدودیت سرمایه درگیر موجودی

۴ـ سفارش: مدل‌های موجودی با توجه به نرخ و چگونگی دریافت سفارش به دو نوع مدل‌های تولیدی و مدل‌های خرید تقسیم می‌شوند.

- مدل خرید: در مدل خرید کل سفارش در یک لحظه به انبار تحویل داده می‌شود بنابراین نرخ دریافت سفارش بی‌نهایت است.
- مدل تولید: در مدل تولید سفارش به تدریج به انبار تحویل می‌گردد و در واقع نرخ دریافت سفارش یک عدد است.

۵ـ مدت زمان تحویل سفارش (L): مدت زمان بین لحظه سفارش تا لحظه دریافت اولین قطعه سفارش است و می‌تواند قطعی و یا احتمالی باشد.

۶ـ قیمت کالا در طول مدت برنامه‌ریزی: قیمت کالا در طول مدت برنامه‌ریزی می‌تواند ثابت باشد و یا این‌که متغیر باشد مانند مدل‌های تورمی، حراج، تخفیف و ...

۷ـ برنامه‌ریزی: در مدل‌های موجودی می‌توان برای یک محصول به‌صورت جدا و یا چند محصول به‌طور همزمان برنامه‌ریزی کرد.

نکته : تقاضا، محدودیت‌ها، هزینه‌ها، جایگزینی اجزایی هستند که با شناخت آن‌ها می‌توان سیستم‌های موجودی را از یکدیگر متمایز کرد و آن‌ها را شناخت.

مثال: کدام یک از موارد زیر مجموعه اجزای کاملی هستند که با شناخت آن‌ها می‌توان سیستم موجودی را تجزیه و تحلیل کرد؟ (کنکور ۸۵)

۱)زمان تدارک، تقاضا، محدودیت‌ها و هزینه‌ها

۲) محدودیت‌ها، جایگزینی، تقاضا، زمان تدارک

۳) زمان تدارک، تقاضا، هزینه‌ها و جایگزینی

۴) تقاضا، محدودیت‌ها، هزینه‌ها و جایگزینی (Replenishment)

حل : گزینه ۴ درست است.

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

۱ـ۳ـ متغیرهای حالت در یک سیستم موجودی

در یک سیستم موجودی، متغیرهای حالت، متغیرهایی هستند که در هر لحظه وضعیت یا حالت سیستم موجودی را مشخص می‌کنند. این متغیرها به شرح ذیل می‌باشند:

$I(t)$: موجودی در دست در زمان t

$b(t)$: مقدار کمبود در زمان t

$O(t)$: مقدار مواد در سفارش در زمان t یا مقدار سفارش در راه در زمان t

نکته: سه متغیر فوق همگی غیرمنفی و مستقل می‌باشند در حالی که 2 متغیری که در ادامه می‌آید وابسته به سه متغیر فوق هستند و می‌توانند منفی یا مثبت باشند.

نکته: در هر لحظه از زمان داریم:

$$I(t)\ b(t)=0$$

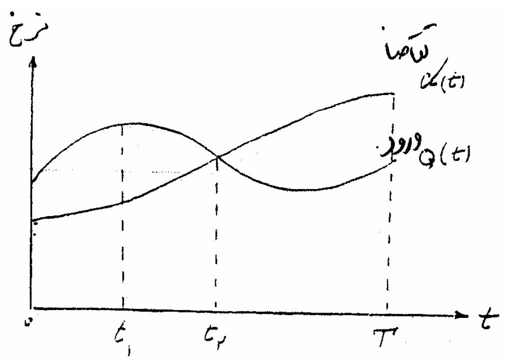
$NS(t)$: موجودی خالص در زمان t

$$NS(t)=I(t)-b(t)$$

$Y(t)$: موقعیت موجودی در زمان t

$$Y(t)=NS(t)+O(t)=O(t)+I(t)-b(t)$$

مثال: اگر در شکل زیر $Q(t)$ و $d(t)$ به ترتیب نرخ ورود کالا به سیستم و نرخ کالا از سیستم در زمان t باشد و در زمان صفر هیچ موجودی در سیستم نباشد؟ (کنکور ۸۵)



www.ieun.ir

۱)در مورد موجودی سیستم نمی‌توان اظهارنظر قطعی کرد.

۲) درزمان t_2 بیشترین موجودی انباشته شده در سیستم وجود خواهد داشت.

۳) در زمان t_1 بیشترین موجودی انباشته شده در سیستم وجود خواهد داشت.

۴) در زمان T بیشترین موجودی انباشته شده در سیستم وجود خواهد داشت.

حل : گزینه ۲ درست است.

تا زمان t_2 همیشه نرخ ورود کالا بیشتر از نرخ خروج کالاست، پس کالاها به صورت موجودی انباشته می‌شوند، از لحظه‌ی t_2 به بعد $Q(t)$ از $d(t)$ کوچکتر خواهد شد پس کالاها بیشتر از این که وارد شوند خارج می‌شوند و از موجودی کاسته می‌شود بنابراین در زمان t_2 بیشترین موجودی انباشته در سیستم وجود خواهد داشت.

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

نکته :

$NS(t)=$ موجودی خالص

$\omega(t)=$ نرخ خروجی

$$\omega(t)=\begin{cases} d(t) & NS(t)>0 \\ a(t) & NS(t)<0 \end{cases}$$

$a(t)=$ نرخ ورود

$d(t)=$ نرخ تقاضا

در این سئوال با توجه به نکته از آنجا که مدت فعالیت این سیستم نرخ تقاضا $d(t)$ بیش از نرخ خروج $\omega(t)$ بوده است. بنابراین نرخ خروج باید برابر با نرخ ورود $a(t)$ باشد و همچنین با توجه به این که $d(t)>\omega(t) \leftarrow d(t)>a(t)$ نیز خواهد بود و از آن جا که سطح موجودی اولیه برابر صفر بوده و نرخ ورود نیز از نرخ تقاضا کمتر است هیچ گاه امکان ندارد موجودی در انبار انباشته شود و همیشه با کمبود روبرو هستیم.

مثال: فرض کنید در ابتدا شروع فعالیت یک سیستم موجودی سطح موجودی صفر و در مدت فعالیت این سیستم نرخ تقاضا بیش از نرخ خروج کالا از سیستم بده است کدام عبارت زیر غلط است؟ (کنکور ۸۷)

۱)حتماً در سیستم تقاضای عقب افتاده وجود خواهد داشت.

۲) هیچگاه موجودی انباشته شده در سیستم وجود نداشته است.

۳) حتماً نرخ ورود کالا در این مدت کوچکتر از نرخ تقاضا بوده است.

۴) دقیقاً نرخ خروج کالا برای نرخ ورود کالا به سیستم بوده است.

حل : گزینه ۱ درست است.

۱ـ۴ـ هزینه‌های سیستم موجودی

انواع هزینه‌های کنترل موجودی:

بطو کلی هزینه‌های کنترل تولید و موجودی به پنج دسته زیر تقسیم می شوند:

الف) هزینه نگهداری:

عبارتست از کلیه هزینه‌های درون کارخانه ای انبار که به تعداد اقلام وابسته می‌باشد. این هزینه وابسته به زمان می‌باشد، یعنی با افزایش زمان نگهداری هزینه بیشتر می شد و شامل موارد زیر است:

هزینه انبارداری هر واحد کالا در طول دوره (H)

هزینه فضای انبار (W)

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

بیمه و مالیات در درون کارخانه اگر به تعداد اقلام وابسته باشد.

هزینه سربار (سرمایه راکد)

اگر همین پول را در جای دیگر بکار می‌گرفتیم سود بیشتری حاصل می‌شد. این هزینه گاهی به هزینه فرصت از دست رفته (بهره وام) تعبیر می‌شود.

هزینه حمل و نقل درون کارخانه‌ای اگر به تعداد اقلام وابسته باشد.

هزینه متروکه یا دمده شدن کالا به دلیل تغییر تکنولوژی و دلایل مشابه.

هزینه فاسد شدن، خرابی و ضایعات کالا اگر به تعداد اقلام وابسته باشد.

هزینه کم شدن کالا (تبخیر، خشک شدن، آب رفتن، دزدی و ...)

اگر این مقدار کم شدن ناچیز باشد از آن صرفنظر می‌کنند.

هزینه اسقاط، جابجایی کالا در انبار و ... .

هزینه بازرسی صددرصد

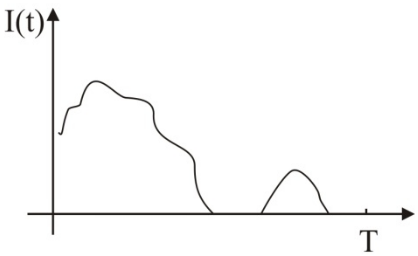
این هزینه بدلیل صددرصد بودن بازرسی به تعداد اقلام وابسته می‌باشد.

الف) روش‌های محاسبه هزینه نگهداری (H)

در انباری که قطعات با ابعاد مختلف، اشکال مختلف، موارد مصرف مختلف، مدت نگهداری مختلف، قیمت‌های مختلف، حساسیت‌های مختلف و ... وجود دارد، اگر بخواهیم هزینه نگهداری یک قطعه را به دلخواه انتخاب کرده و محاسبه کنیم می‌توانیم به یکی از سه روش زیر عمل کنیم.

نحوه محاسبه هزینه نگهداری از 0 تا T

هزینه نگهداری بر اساس منحنی موجودی در دست به‌صورت زیر محاسبه می‌گردد.



کل هزینه نگهداری از 0 تا T $= h\times$ (مساحت زیرمنحنی موجودی در دست) $= h\int_0^T I(t)\,dt = h\bar{I}T$

(متوسط موجودی) $\bar{I} = \dfrac{\text{مساحت زیرمنحنی در دست}}{T} = \dfrac{\int_0^T I(t)\,dt}{T}$

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

با استفاده از رابطه هزینه نگهداری، کل هزینه نگهداری سالیانه با قرار دادن $T=1$ به‌دست می‌آید.

کل هزینه نگهداری سالیانه $=h\bar{I}$

نکته: تمامی هزینه‌های نگهداری موجودی عموماً به قیمت محصول بستگی دارد به جز هزینه تسهیلات انبار که از دو جهت با بقیه متفاوت است:

۱ـ به قیمت واحد محصول (C) بستگی ندارد.

۲ـ تسهیلات انبار می‌تواند بر اساس ماکزیمم موجودی در مدت زمان بررسی می‌شود، اما سایر هزینه‌های نگهداری بر اساس متوسط موجودی بیان می‌شود.

کل هزینه‌های سالیانه برای این حالت به‌صورت زیر محاسبه می‌گردد:

h_1: هزینه‌هایی از نگهداری که به متوسط موجودی بستگی دارد.

h_2: هزینه‌هایی از نگهداری که به ماکزیمم موجودی بستگی دارد.

کل هزینه نگهداری سالیانه $=h_1\bar{I}+h_2I_{max}$

نکته : هزینه ساخت انبار جزو هزینه های سرمایه گذاری می‌باشد.

ب) هزینه ثبت و سفارش یا تدارک:

عبارتست از کلیه هزینه‌هایی که در زمان تدارک انجام می شود، این هزینه برخلاف هزینه نگهداری هزینه مستقل از تعداد اقلام است ولی هر چه LT زیادتر شود این هزینه زیادتر می‌شود و شامل موارد زیر است:

هزینه آماده‌سازی تجهیزات

هزینه پیگیری های خرید

هزینه بازرسی بصورت نمونه‌گیری

هزینه مهارت‌یافتن کارگران انبار (راندمان‌کاری)

هزینه تهیه و اجرای سیستم انبار

هزینه کارهای دفتری انبار

هزینه عدم استفاده از تخفیف

هزینه خرابی، ضایعات و فاسد شدن کالا اگر به تعداد اقلام وابسته نباشد.

هزینه حمل و نقل درون و برون کارخانه‌ای اگر به تعداد اقلام وابسته نباشد.

هزینه گمرک اگر مستقل از تعداد اقلام باشد.

هزینه خدمات ویژه (نور، حرارت، مرتب کردن تجهیزات، تهیه ابزار جدید و ...)

هزینه استهلاک اماکن و تجهیزات انبار

هزینه ناشی از تغییرات فصلی قیمت‌ها

سایر موارد (هزینه سربار = سرمایه راکد)

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

www.ieun.ir

ج) هزینه کمبود

این هزینه بطور کلی به دو دسته زیر تقسیم می‌شود:

الف) هزینه کمبود وابسته به زمان (قابل جبران – سفارشات عقب افتاده) $\widehat{b} = \widehat{\pi}$

ب) هزینه کمبود مستقل از زمان (غیرقابل جبران – فروش از دست‌رفته) $\widehat{b} = \widehat{\pi}$

تذکر:

اگر با کمبود مواجه شویم در صورت برآوردن تقاضا در آینده کمبود قابل جبران است ولی اگر مشتری از دست برود حالت غیرقابل جبران است.

هزینه‌های کمبود وابسته به زمان شامل موارد زیر است:

متوقف شدن خط تولید (بیکاری کارگران و ماشین آلات)

هزینه کاهش اعتبار شرکت (دیرکرد سفارشات عقب‌افتاده)

هزینه جایگزینی اقلام گران از منابع دیگر (خالی بودن انبار)

هزینه ناشی از عدم اجرای قرارداد در موعد مقرر (فرصت از دست‌رفته)

سایر موارد

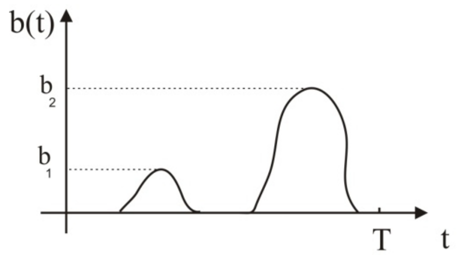
محاسبه ی هزینه کمبود

هزینه ی کمبود هزینه‌ای است که به‌صورت جریمه باعث عدم تامین به موقع تقاضا به سیستم شارژ می‌شود. این هزینه به دو دسته تقسیم می‌شود.

- هزینه کمبود وابسته به زمان $(\hat{\pi})$
- هزینه کمبود مستقل از زمان (π)

نحوه محاسبه کل هزینه کمبود از 0 تا T

هزینه کمبود بر اساس منحنی میزان کمبود بر حسب زمان محاسبه می‌گردد.



کل هزینه کمبود از 0 تا T = $\hat{\pi}$ (مساحت زیرمنحنی کمبود) $+\pi$ (تعداد کمبود از 0 تا T)

$$= \hat{\pi}\int_0^T b(t)dt + \pi(b_1 + b_2) = \hat{\pi}\bar{b}T + \pi(b_1 + b_2)$$

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

$$\bar{b}=\frac{\int_0^T b(t)\,dt}{T}$$ (متوسط کمبود)

د) هزینه خرید

این هزینه وابسته به مقدار یا تعداد کالا می‌باشد و معمولاً بصورت متوسط قیمت وزنی (هزینه تولید سالیانه وزنی) محاسبه شده و شامل موارد زیر است:

قیمت خرید یا هزینه متغیر تولید

هزینه حمل و نقل کالا در بیرون کارخانه اگر به تعداد اقلام وابسته باشد.

هزینه گمرگ در صورتیکه به تعداد اقلام وابسته باشد.

هزینه فاسد شدن خرابی و ضایعات اقلام در بیرون کارخانه اگر به تعداد اقلام وابسته است.

هزینه بارگیری و باراندازی اگر به تعداد اقلام وابسته باشد.

سایر موارد

هـ) سایر موارد

این هزینه‌ها بطور کلی شامل تقسیم‌بندی زیر می‌باشد:

- سایر هزینه‌ها
  - داخل کارخانه
    - وابسته به تعداد ← نگهداری
    - مستقل به تعداد ← تدارک
  - خارج از کارخانه
    - وابسته به تعداد ← خرید
    - مستقل به تعداد ← تدارک

کلیه هزینه‌ها باید به کمک دسته‌بندی بالا در جای خود قرار گرفته و محاسبه شوند.

تذکر: هزینه های بیمه، مالیات، گمرک، ضایعات، شمارش کالا، مرور خرابی، فاسد شدن، بارگیری، باراندازی، حمل و نقل درون کارخانه‌ای بطور معمول به تعداد اقلام وابسته است.

نکته: هزینه‌های حمل و نقل مواد سفارش داده شده و بازرسی جزو هزینه‌های تدارک مواد محسوب می‌شوند. این هزینه‌ها اگر قابل بیان به ازای واحد محصول باشند در قیمت محصول محاسبه شده و جزو هزینه‌های خرید مواد و یا هزینه‌های تولید محصول قرار می‌گیرند. در غیر این‌صورت در هزینه‌های سفارش‌دهی و یا هزینه‌های آماده‌سازی محاسبه می‌گردند.

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

مثال: هزینه‌های بازرسی و دریافت موجودی می‌تواند جزو کدام یک از هزینه‌های زیر باشد؟ (کنکور ۸۵)

۱)هزینه خرید

۲) هزینه نگهداری

۳) هزینه افت موجودی

۴) جزو هیچ یک از هزینه‌های خرید، نگهداری و افت موجودی نمی‌تواند باشد.

حل : گزینه ۱ درست است.

مثال: کدام یک از جملات زیر نادرست است؟ (کنکور ۸۵)

۱)نگهداری موجودی بعضاً باعث هموار سازی عملیات سازمان می‌شود.

۲) نگهداری موجودی می‌تواند به دلیل مقابله با عدم قطعیت تقاضا باشد.

۳) نگهداری موجودی می‌تواند به دلیل جلوگیری از زیان ناشی از افزایش قیمت در آینده باشد.

۴) نگهداری موجودی در هر شرایطی امری غیر اقتصادی است، چرا که اصولاً نگهداری موجود هزینه زا است.

حل : گزینه ۴درست است.

مثال: کدام یک از موارد زیر جزو هزینه‌های نگهداری موجودی محسوب نمی‌شود؟ (کنکور ۸۵)

۱)هزینه ساخت انبار　　　۲) هزینه فاسد شدن موجودی

۳) هزینه حمل و نقل موجودی در داخل انبار　　　۴) هیچ کدام

حل : گزینه ۱ درست است.

مثال: هزینه‌های حمل و نقل موجودی جزو کدام‌یک از هزینه‌های سیستم موجودی است؟

۱) هزینه خرید

۲) هزینه سفارش

۳) هزینه نگهداری

۴) می‌تواند جزو هر یک از هزینه‌های نگهداری، خرید یا سفارش باشد.

حل : گزینه ۴ درست است.

نکته: هزینه‌های حمل و نقل در صورتی که در داخل انبار باشد و بر اساس واحد محصول قابل بیان باشد جزو هزینه‌های نگهداری است. در صورتی که خارج از انبار و از زمان سفارش تا درب انبار باشد، اگر به ازای واحد محصول قابل بیان باشد جزو هزینه‌های خرید و اگر قابل بیان به ازای واحد محصول نباشد جزو هزینه‌های سفارش‌دهی است.

یادداشت:

....

....

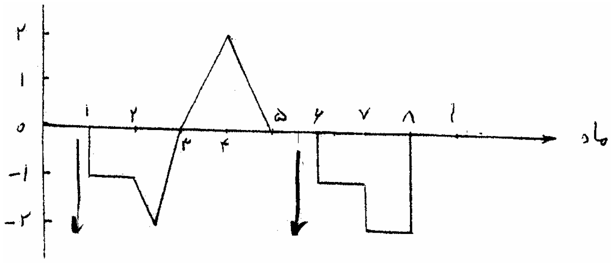
....

....

www.ieun.ir

مثال: اگر هزینه نگهداری یک واحد موجودی د ر ماه برابر 300 تومان و هزینه کمبود یک واحد موجودی برابر 100 تومان باشد و منحنی موجودی خالص به شرح شکل زیر باشد، کدام یک از گزاره‌های زیر در مورد هزینه نگهداری و کمبود در طی 9 ماه گذشته صحیح است؟ (کنکور ۸۵)

۱) 1300 تومان
۲) 1100 تومان
۳) 1000 تومان
۴) 900 تومان



گزینه ۳ درست است.

$$h = 300 \rightarrow \text{هزینه نگهداری} = 30 \times \left(\frac{2\times 2}{2}\right) = 600$$

$$\pi = 100 \rightarrow \text{هزینه نگهداری} = 100(2+2) = 400$$

$$\text{مجموع هزینه‌ها} = 600 + 400 = 100$$

نکته: هزینه انبارگردانی پایان سال مالی جهت دقیق کردن اطلاعات موجودی بوده و بنابراین جزو هزینه‌های موجودی است

مثال: هزینه انبار گردانی پایان سال مالی جزو کدام هزینه‌هاست؟ (کنکور ۸۵)

۱)جزو هزینه‌های سیستم تولید است.
۲) جزو هزینه‌های سیستم خرید است.
۳) جزو هزینه‌های سیستم موجودی است.
۴) جزو هزینه‌های سیستم مالی و حسابداری است.

حل : گزینه ۳ درست است.

مثال: مدیر یک موسسه تهیه و توزیع کالاهای اساسی تصمیم گرفته است برای هر یک از کالاها، ذخیره احتیاطی ایجاد نماید. C قیمت هر واحد کالا، H هزینه نگهداری سالیانه هر واحد کالا، ROP نقطه سفارش مجدد و SS مقدار ذخیره احتیاطی یک نوع کالا است. به نظر شما در صورت ایجاد ذخیره احتیاطی برای این نوع کالا، هزینه سالیانه سیستم کنترل موجودی چقدر افزایش پیدا می‌کند؟ (کنکور ۸۹)

۱) $H \times ROP$
۲) $H \times SS$
۳) $(C+H) \times SS$
۴) $(C+H) \times ROP$

حل : گزینه ۳ درست است.

هزینه‌ی خرید و نگهداری موجودی اطمینان اضافه می‌گردد.

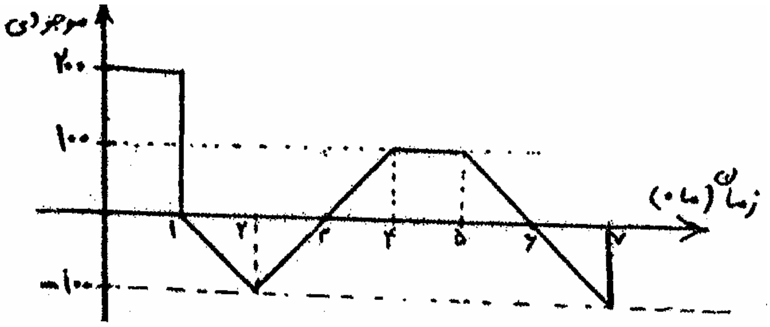
$$(C+H) \times SS$$

یادداشت:

....
....
....
....

www.ieun.ir

مثال: هزینه نگهداری هر واحد کالا 10 تومان در ماه و هزینه ثابت کمبود هر واحد آن 20 تومان است. مجموع هزینه‌های نگهداری و کمبود مربوط به کالایی که وضعیت موجودی آن مشابه شکل زیر است، در طی هفت ماه چند تومان است؟ (کنکور ۸۹)



۱) 4000

۲) 2000

۳) 8000

۴) 10000

حل : گزینه ۳ درست است.

$h=10$ درماه $\quad b=b_1+b_2=100+100=200$

$\pi=20 \qquad \pi(b)=20\times 200=4000$ هزینه کمبود

سطح بالای نمودار $= 200+\frac{4\times 100}{2}=400$ هزینه نگهداری $=400\times 10=4000$

مجموع هزینه‌ی کمبود نگهداری $=4000+4000=8000$

۲ـ مدل قطعی ساده، ویلسون، مقدار سفارش اقتصادی یا EOQ

فرضیات مدل به شرح ذیل است. این فرضیات همان‌طور که ذکر گردید بر اساس عوامل موثر در مدل‌های موجودی تعیین می‌گردند.

۱ـ تقاضا قطعی و ساکن است.

۲ـ کمبود جایز نیست.

۳ـ محدودیت وجود ندارد.

۴ـ سفارش یک‌جا دریافت می‌شود.

۵ـ مدت زمان تحویل سفارش قطعی و عددی است.

۶ـ قیمت کالا در طول مدت برنامه‌ریزی ثابت است.

۷ـ مدل تک محصولی است.

پارامترهای مدل:

A : هزینه هر بار سفارش (هزینه سفارش‌دهی)

D : نرخ تقاضا

h : هزینه نگهداری هر واحد کالا در واحد زمان

i : نرخ هزینه نگهداری در سال

c : قیمت واحد کالا

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

ω : هزینه نگهداری که به قیمت کالا بستگی ندارد

$\pi, \hat{\pi}$: هزینه‌های کسری واحد کالا هزینه‌های کسری در مدل EOQ بسیار زیاد (∞) می‌باشند

P : نرخ تولید، دریافت سفارش در مدل EOQ آنی و بنابراین نرخ تولید بسیار زیاد (∞) می‌باشد

L : مدت زمان تحویل سفارش

متغیرهای مدل:

Q : مقدار هر بار سفارش

r : نقطه سفارش بر حسب موقعیت موجودی. بدین معنی که هر وقت در نمودار موقعیت موجودی، موجودی محصول برابر مقدار r شود زمان سفارش است.

r_h : نقطه سفارش بر حسب موجودی خالص یا موجودی در دست. بدین‌معنی که هر وقت در نمودار موجودی خالص موجودی محصول برابر مقدار r_h شود، زمان سفارش است.

متغیر دیگری که می‌توان آن را از طریق بقیه متغیرها به‌دست آورد T است.

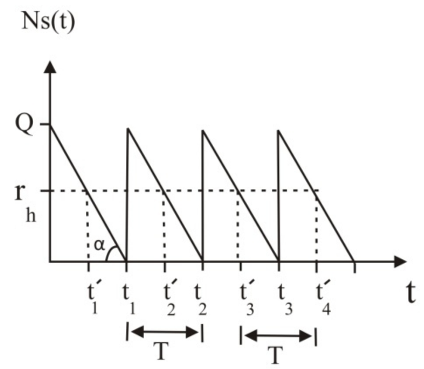
T : فاصله بین دو سفارش متوالی یا فاصله بین رسیدن دو سفارش متوالی یا مدت زمانی یک دوره

هدف مدل EOQ تعیین مقدار سفارش اقتصادی (Q^*) و تعیین r_h^*, r^* با کمینه کردن هزینه‌ها (مجموع هزینه نگهداری+ هزینه سفارش‌دهی سالیانه) است.

در این مدل Q^* را با Q_ω یا EOQ نیز نشان می‌دهند.

۲ـ۱ـ نحوه محاسبه مقدار سفارش اقتصادی (Q^*)

نمودار موجودی خالص در مدل EOQ مانند شکل زیر می‌باشد. در این نمودار زمان‌های t، زمان دریافت سفارش و زمان‌های t'، زمان صدور سفارش است که فاصله زمانی بین هر دو t و یا t' متوالی برابر زمان یک دوره T است.



$b(t)=0$

$Ns(t)=I(t)-b(t)$

$D=tg\alpha$ نرخ کاهش یا مصرف کالا

$$\text{متوسط کل هزینه سالیانه سیستم موجودی} = n \ (\text{هزینه یک دوره}) = \frac{D}{Q}A + h\frac{Q}{2} + CD$$

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

کل هزینه نگهداری سالیانه = $h\frac{Q}{2}$

کل هزینه سفارشی طی سالیانه = $\frac{D}{Q}A$

کل هزینه خرید سالیانه = CD

برای یافتن Q^* باید از رابطه فوق بر حسب Q مشتق گرفته شود. از آن‌جا که CD به مقدار Q بستگی ندارد بنابراین در مشتق‌گیری مقدارش برابر صفر قرار می‌گیرد. از این‌رو $k(Q)$ را به‌صورت زیر تعریف کرده و هزینه متغیر سالیانه می‌نامند.

$$K(Q)=\frac{DA}{Q}+\frac{hQ}{2}$$

در صورتی که مشتق تابع فوق بر حسب Q برابر صفر قرار دهیم، مقدار Q^* به‌دست می‌آید.

$$=\frac{dK(Q)}{dQ}=0 \quad\Rightarrow\quad Q^*=Q_{\omega}=EOQ=\sqrt{\frac{2DA}{h}}$$

همچنین هزینه متغیر سالیانه بهینه $(K(Q^*))$ و زمان دوره بهینه (T^*) از روابط زیر محاسبه می‌گردد:

$$K(Q^*)=\frac{DA}{Q^*}+\frac{hQ^*}{2}=\sqrt{2DAh}$$

$$T^*=\frac{Q^*}{D}=\sqrt{\frac{2A}{Dh}}$$

نکته: اگر $h\to 0$ در رابطه مقدار سفارش اقتصادی $Q\to\infty$ میل می‌کند.

مثال: کدام عبارت زیر در مورد مدل ساده قطعی صادق است؟ (کنکور ۸۷)

۱) هزینه هر بار سفارش دهی بستگی به مقدار دارد.

۲) هزینه خرید واحد موجودی بستگی به محدوده‌ی خرید دارد.

۳) هزینه نگهداری سالیانه موجودی مستقل از مقدار سفارش است.

۴) هزینه سالیانه سیستم موجودی بدون در نظر گرفتن محدودیت‌ها تعیین می‌شود.

حل : گزینه ۴ درست است.

مثال: در یک سیستم کنترل موجودی با شرایط مدل ساده قطعی دو نوع کالا کنترل می‌شود. تقاضای سالیانه و هزینه ثابت هر بار سفارش برای کالای یک به ترتیب 500 واحد کالا و 50 واحد پول و برای کالاش شماره 2 به ترتیب 400 واحد کالا و 20 واحد پول برآورده شده استا. اگر هزینه نگهداری قابل چشم پوشی باشد مقدار سفارش برای هر کالا چقدر است؟ (کنکور ۸۶)

۱) $Q_2=80 \quad , \quad q_1=1100$

۲) $Q_2=100 \quad , \quad Q_1=500$

۳) $Q_2=Q_1=$ مقدار بسیار زیاد

۴) $Q_2=80 \quad , \quad Q_1=50$

حل : گزینه ۳ درست است.

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

مثال: تقاضای محصول 300 کیلو در ماه و هزینه آماده سازی دستگاه برای تولید هر بار محصول 7000 تومان تخمین زده است. نرخ بهره قابل قبول به عنوان هزینه سرمایه گذاری در موجودی 20% در سال و هزینه نگهداری هر کیلو موجودی در ماه 10 تومان است. با فرض نرخ تولید نامحدود و مجاز نبودن کمبود در صورتی که هزینه تولید هر کیلوی این محصول 100 تومان باشد، به نظر شما مقدار سفارش اقتصادی تولید بر حسب کیلوگرم حدوداً چقدر است؟ (کنکور ۸۸)

۱) $Q^*=374$ ۲) $Q^*=458$ ۳) $Q^*=648$ ۴) $Q^*=600$

حل : گزینه ۴ درست است.

$$D=300\times12=3600$$
$$A=7000 \quad i=0.2 \quad w=10\times12=120 \qquad C=100$$
$$h=i.c+w=0.2\times100+120=140$$
$$Q^*=\sqrt{\frac{2AD}{h}}=\sqrt{\frac{2\times3600\times7000}{140}}=600$$

مثال: در مدل EOQ اگر هزینه اجارهٔ انبار یکی از اجزای هزینه نگهداری محصول باشد، آنگاه در فرمول EOQ هزینه اجاره بر چه مبنایی محاسبه شده است؟ (کنکور ۸۵)

۱) بر مبنای حداکثر موجودی در انبار محاسبه شده است.
۲) بر مبنای متوسط موجودی در انبار محاسبه شده است.
۳) بر مبنای حداقل موجودی در انبار محاسبه شده است.
۴) بستگی به سایر اجزاء هزینه نگهداری دارد.

حل : گزینه ۲ درست است.

۲ـ۲ـ نقطه سفارش بهینه r^*, r_h^*

نقطه سفارش مجدد در مدل EOQ از رابطه‌های زیر محاسبه می‌گردد.

$$\begin{cases} r^*=D.L \\ r_h^*=D.L-mQ^* \end{cases}$$
$$m=\left[\frac{L}{T}\right]$$

مثال: فرض کنید در یک سیستم کنترل موجودی با فرضیات مدل سادهٔ قطعی $L=mT$ است که درآن L مدت زمان تحویل، m یک عدد و T طول یک دورهٔ سفارش است. کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟ (کنکور ۸۵)

۱)کالای در سفارش برابر $(m+1)Q$ است.
۲) همیشه موجود در دست در لحظهٔ صدور سفارش برابر صفر خواهد بود.
۳) همیشه موجودی در دست در لحظه صدور سفارش برابر Q خواهد بود.
۴) به جز در نقطه سفارش، کالای در سفارش برابر $(m+1)Q$ است.

یادداشت:

....
....
....
....

www.ieun.ir

حل : گزینه ۲ درست است.

نکته : در صورتی که $L = mT$ (مدت زمان تحویل مضرب صحیحی از طول یک دوره سفارش است) موجودی در دست در لحظه‌ی صدور سفارش برابر صفر است .

$$r_h^* = D.L' = D.0 = 0$$

مثال: در یک مدل ساده قطعی کنترل موجودی مصرف سالیانه 1000 واحد و مقدار اقتصادی سفارش 200 واحد تعیین شده است اگر مدت زمان تحویل سه ماه باشد متوسط موجودی در سفارش چند واحد خواهد بود؟ (کنکور ۸۶)

۱) 100 ۲) 200 ۳) 250 ۴) 300

حل : گزینه ۳ درست است.

متوسط موجودی در سفارش برابر است با : $D \times L = 1000 \times \frac{3}{12} = 250$

مثال: مقدار سفارش اقتصادی محصولی برابر 1000 واحد است. تقاضا برای این محصول در سال برابر 20000 واحد است. بر اساس اطلاع فروشنده زمان تدارک (مدت تحویل) محصول به نصف کاهش پیدا کرده است. با توجه به این اطلاع کدام عبارت، صحیح است؟ (کنکور ۸۸)

۱)نقطه سفارش کالا کاهش پیدا می‌کند.

۲) مقدار سفارش اقتصادی کاهش پیدا می‌کند.

۳) هزینه نگهداری سالیانه سیستم افزایش پیدا می‌کند.

۴) هزینه نگهداری سالیانه کاهش ولی هزینه سفارش دهی افزایش می‌یابد.

حل : گزینه ۱ درست است.

نکته: در تقاضای قطعی مدت زمان تحویل فقط روی نقطه سفارش تأثیر مستقیم دارد.

۲ـ۳ـ نکات مدل EOQ

نکته ۱: روابط زیر برای موقعیت موجودی $(y(t))$ برقرار است.

$$r^* \le y(t) \le r^* + Q^*$$
$$D.L \le y(t) \le DL + DT^*$$

همچنین برای موجودی در دست $(I(t))$ داریم:

$$0 \le I(t) \le Q^* = DT^*$$

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

www.ieun.ir

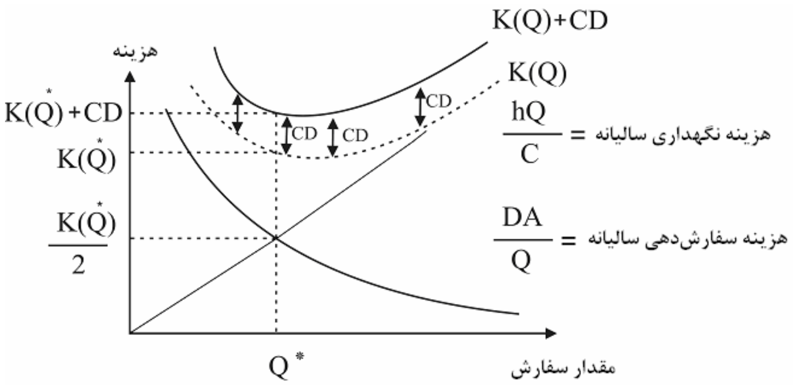
نکته ۲: در مدل‌های EOQ، r_h^* می‌تواند برابر صفر گردد ولی نمی‌تواند برابر Q^* شود.

$$0 \le r_h^* < Q^* = DT^*$$

اگر مدت زمان تحویل سفارش مضرب صحیحی از T باشد $(L = mT \quad , \quad L'=0)$ آن‌گاه r_h^* برابر با صفر است $\left(r_h^* = D.L' = 0\right)$

نکته ۳: در مدل EOQ در زمان‌های قبل از زمان سفارش مقدار سفارش در راه معادل mQ^* و زمان‌های پس از سفارش، مقدار آن $(m+1)Q^*$ است. به‌طور متوسط مقدار سفارش در راه معادل D.L است. همچنین متوسط تعداد محموله‌های در سفارش یا متوسط تعداد دفعات سفارشی که به دست ما نرسیده برابر با $\frac{DL}{Q^*} = \frac{L}{T^*}$ است.

نکته ۴: بررسی هزینه‌های سفارش‌دهی و نگهداری سالیانه با افزایش مقدار سفارش



همان‌طور که مشاهده می‌شود منحنی $k(Q)$ از جمع دو منحنی هزینه سفارش‌دهی سالیانه و هزینه نگهداری سالیانه به‌دست می‌آید. منحنی هزینه نگهداری سالیانه روند صعودی و منحنی هزینه سفارش‌دهی سالیانه روند نزولی دارد. منحنی کل هزینه‌های سالیانه $(k(Q)+CD)$ نیز با اضافه شدن مقدار ثابت CD به منحنی $K(Q)$ به‌دست آمده است.

نکته ۵: در نقطه بهینه هزینه سفارش‌دهی سالیانه با هزینه نگهداری سالیانه برابر است یعنی محل تلاقی منحنی‌های هزینه نگهداری سالیانه و هزینه سفارش‌دهی سالانه نقطه بهینه است.

$$\frac{DA}{Q^*} = \frac{hQ^*}{2} = \frac{\sqrt{2DAh}}{2} = \frac{K(Q^*)}{2} \quad \Rightarrow \quad K(Q^*) = \sqrt{2DAh} = hQ^* = \frac{2DA}{Q^*} = \frac{2A}{T} = 2nA$$

نکته ۶: شیب منحنی هزینه‌ها در نقطه بهینه به‌ترتیب برای هزینه نگهداری سالیانه و هزینه سفارش‌دهی سالیانه معادل $\frac{-h}{2}, \frac{h}{2}$ است.

نکته ۷: رابطه بین هزینه سفارش‌دهی سالیانه و هزینه نگهداری سالیانه در صورتی که بیشتر یا کمتر از سفارش اقتصادی سفارش دهیم به‌صورت زیر است.

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

اگر $Q > Q^*$ ↔ هزینه نگهداری > هزینه سفارش‌دهی

اگر $Q = Q^*$ ↔ هزینه نگهداری = هزینه سفارش‌دهی

اگر $Q < Q^*$ ↔ هزینه نگهداری < هزینه سفارش‌دهی

نکته ۸: شیب منحنی هزینه‌ها در سمت راست نقطه بهینه نسبت به سمت چپ آن ملایم‌تر است.

$$K(Q^*-a)>K(Q^*+a)$$

نکته ۹: در صورتی که در محاسبه مقدار سفارش بهینه به اشتباه یا از روی تخمین به جای یکی از پارامترها مقداری را جایگزین کنیم، مقدار سفارش انجام شده با این پارامتر نابهینه خواهد بود و هزینه‌های سالیانه افزایش خواهد یافت. به طور کلی هنگامی که به جای Q^*، Q نابهینه سفارش دهیم، نسبت این افزایش برای کل هزینه متغیر سالیانه از رابطه زیر محاسبه می‌گردد.

$$\frac{K(Q)}{K(Q^*)}=\frac{1}{2}\left(\frac{Q^*}{Q}+\frac{Q}{Q^*}\right)$$

مثال: شرکتی در پایان یک دوره 12 ماهه متوجه می‌شود که هزینه‌های کنترل موجودی نسبت به حالت بهینه 25 درصد افزایش داشته است طی بررسی‌های به عمل آمده مشخص می‌شود که هزینه‌های نگهداری هر واحد کالا اشتباهاً عدد ۲ واحد پول در نظر گرفته شده است هزینه نگهداری واقعی برابر است با : (کنکور ۸۷)

۱) 4 واحد پول ۲) 8 واحد پول ۳) 12 واحد پول ۴) 20 واحد پول

حل : گزینه ۲ درست است.

$$\frac{K(Q)}{K(Q^*)}=1.25 \;\rightarrow\; \frac{1}{2}\left(\frac{Q}{Q^*}+\frac{Q^*}{Q}\right) \;\Rightarrow\; \frac{Q}{Q^*}=2 \text{ یا } \frac{1}{2}$$

(۱) $Q=2Q^* \qquad h'=\frac{h}{4} \;\rightarrow\; h=4\times 2=8$

(۲) $Q=\frac{Q^*}{2} \qquad h'=4h \;\rightarrow\; h=\frac{2}{4}=0.5$

با توجه به رابطه $Q=\sqrt{\frac{2AD}{h}}$ حالت (۱) زمانی اتفاق می‌افتد که واحد هزینه نگهداری به اشتباه $\frac{1}{4}$ مقدار واقعی قرار گرفته باشد و حالت (۲) زمانی اتفاق می‌افتد که واحد هزینه نگهداری 4 برابرم قدار واقعی در رابطه ویلسون قرار باشد.

مثال: در یک شرکت خدماتی هزینه سالیانه سیستم موجودی 1.25 برابر هزینه سالیانه سیستم در حالت بهینه است مقدار افزایش هزینه سالیانه سیستم به نظر شما ناشی از کدام مورد، است؟ (کنکور ۸۸)

۱) مقدار سفارش 2.5 برابر مقدار بهینه است.

۲) مقدار سفارش نسبت به حالت بهینه ده درصد کمتر است.

۳) مقدار سفارش به میزان نصف مقدار سفارش اقتصادی است.

۴) مقدار سفارش 25% بیش‌تر از مقدار سفارش اقتصادی است.

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

حل : گزینه ۳ درست است.

$$\frac{K(Q)}{K(Q^*)}=\frac{1}{2}\left(\frac{Q}{Q^*}+\frac{Q^*}{Q}\right)=1.25$$

$$\frac{Q}{Q^*}=2 \text{ یا } \frac{1}{2}$$

نکته۱۰: برای مقایسه تغییرات کل هزینه سالیانه $(K(Q)+CD)$ نمی‌توان مانند هزینه متغیر سالیانه $K(Q)$ رابطه‌ای یافت، تنها می‌توان حدود تغییر آن را از نامساوی زیر به‌دست آورد.

$$1\le\frac{K(Q)+CD}{K(Q^*)+CD}<\frac{K(Q)}{K(Q^*)}$$

نکته ۱۱: در صورتی که یکی از پارامترهای مدل تغییر کند، آن‌گاه مطمئناً مقدار سفارش بهینه (Q^*) و هزینه بهینه متغیرسالیانه $(K(Q^*))$ تغییر می‌کند و نسبت این تغییرات به‌صورت زیر است.

$$\frac{Q_1^*}{Q_0^*}=\frac{\sqrt{\frac{2D_1A_1}{h_1}}}{\sqrt{\frac{2D_0A_0}{h_0}}}=\sqrt{\frac{D_1}{D_0}}.\sqrt{\frac{A_1}{A_0}}.\sqrt{\frac{h_0}{h_1}}$$

$$\frac{K(Q_1^*)}{K(Q_0^*)}=\frac{\sqrt{2D_1A_1h_1}}{\sqrt{2D_0A_0h_0}}=\sqrt{\frac{D_1}{D_0}}.\sqrt{\frac{A_1}{A_0}}.\sqrt{\frac{h_1}{h_0}}$$

نکته ۱۲: با افزایش پارامترهای مدل مقدار سفارش بهینه و هزینه متغیر سالیانه به‌صورت زیر تغییر می‌کند:

	Q^*	$K(Q^*)$
افزایش A	افزایش	افزایش
افزایش D	افزایش	افزایش
افزایش h	کاهش	افزایش
افزایش i	کاهش	افزایش
افزایش c	کاهش	افزایش
افزایش w	کاهش	افزایش
افزایش L	تغییر نمی‌کند	تغییر نمی‌کند

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

نکته ۱۳: اگر h_1، هزینه نگهداری هر واحد موجودی در سال بر اساس متوسط موجودی و h_2 هزینه نگهداری هر واحد در سال بر اساس ماکزیمم موجودی باشد. در محاسبهٔ فرمول‌های مدل EOQ به جای مقدار h، مقدار h_1+2h_2 جایگزین می‌گردد، در واقع هزینه نگهداری که بر اساس ماکزیمم موجودی باشد در 2 ضرب شده و با هزینه نگهداری متوسط موجودی جمع می‌گردد و جایگزین h می‌شود.

نکته ۱۴: هزینه نگهداری در سال که بر اساس واحد موجودی بیان نشود، تاثیری در مقدار بهینه سفارش ندارد.

نکته ۱۵: فقط در حالت بهینه هزینه نگهداری سالیانه با هزینه سفارش‌دهی سالیانه برابر است.

هزینه سفارش‌دهی سالیانه بهینه = هزینه نگهداری سالیانه بهینه

نکته ۱۶: در مدل EOQ چون هزینه سفارش دهی سالیانه در حالت بهینه با کل هزینه نگهداری سالیانه برابر است .بنابراین اگر کل هزینه‌های سفارشدهی سالیانه بهینه کاهش یابد، کل هزینه‌ی نگهداری سالیانه نیز به همن میزان کاهش خواهد یافت.

مثال: کدام عبارت زیر در مورد مدل ساده قطعی صادق است؟ (کنکور ۸۸)

۱) هزینه هر بار سفارش دهی بستگی به مقدار دارد.
۲) هزینه خرید واحد موجودی بستگی به محدوده‌ی خرید دارد.
۳) هزینه نگهداری سالیانه موجودی مستقل از مقدار سفارش است.
۴) هزینه سالیانه سیستم موجودی بدون در نظر گرفتن محدودیت‌ها تعیین می‌شود.

حل : گزینه ۴ درست است.

مثال: یک کارخانه تولید بتن آماده جهت نگهداری سیمان، از سیلوئی با ظرفیت 200 تن استفاده می‌کند. این شرکت با هدف مینیمم کردن مجموع هزینه‌های نگهداری و سفارش دهی سالیانه، مقدار سفارش هر بار سیمان را 150 تن در نظر گرفته است که در برابر این تصمیم کل هزینه‌های نگهداری سالیانه (اجاره سیلو، هزینه‌های راکد سرمایه گذاری و ...) برابر 7500 تومان و کل هزینه‌های سفارش دهی سالیانه نیز برابر 7500 برآورد شده است. به نظر شما مقدار سفارش این کالا باید: (کنکور ۸۷)

۱) افزایش یابد.
۲) کاهش یابد.
۳) ثابت باقی بماند.
۴) اطلاعات مسئله کافی نیست.

حل : گزینه ۱ درست است.

با توجه به هزینه‌هایی که در هزینه نگهداری سالیانه محاسبه شده‌اند در می‌یابیم که هزینه ثابت اجاره سیلو نیز در هزینه نگهداری گنجانده شده است. در صورتی که این هزینه ثابت را از کل هزینه نگهداری سالیانه کسر نماییم عدد به دست آمده که مبنای مقایسه با هزینه سفارشدهی سالیانه است از مقدار این هزینه سفارشدهی کمتر خواهد بود پس $Q<Q_{\omega}$ است.

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

مثال: اگر برآورد پارامترها در مدل EOQ همراه با خط باشد .... (کنکور ۸۶)

۱)اگر کل هزینه‌های واقعی کمتر از کل هزینه‌های تخمینی باشد، سیستم به حالت بهینه اجرا شده است.

۲) ممکن است کل هزینه‌های واقعی کمتر از کل هزینه‌های تخمینی باشد.

۳) حتماً کل هزینه‌های واقعی بیشتر از کل هزینه‌های تخمینی خواهد بود.

۴) حتماً کمینه کل هزینه‌های واقعی کمتر از کل هزینه‌های تخمینی خواهد بود.

حل : گزینه ۲ درست است.

مثال: در یک کارخانه که از مدل سفارش اقتصادی (EOQ) پیروی می‌کند، بر اثر تمهیدات مسئولین کارخانه کل هزینه‌های سفارش دهی از c به $\frac{3c}{4}$ کاهش می‌یابد. در این حالت هزینه‌های نگهداری: (کنکور ۸۷)

۱) به همان میزان کاهش می‌یابد.
۲) تغییری نمی‌کند.

۳) به همان میزان افزایش می‌یابد.
۴) کاهش می‌یابد ولی میزان آن بستگی به سایر عوامل دارد.

حل : گزینه ۱ درست است.

مثال: در یک موسسه همواره مقدار سفارش محصول براساس فرمول‌های اقتصادی E.O.Q تعیین می‌شود. براساس تغییرات در شرایط تدارک در بازار هزینه ثابت سفارش دهی در حال حاضر به سه برابر افزایش یافته است. با توجه به این شرایط کدام عبارت صحیح است؟ (کنکور ۸۸)

۱) هزینه سالیانه سیستم موجودی تغییر نمی‌کند.

۲) هزینه سالیانه سیستم موجودی افزایش می‌یابد.

۳) هزینه سالیانه سیستم موجودی تعدیل شده و کاهش می‌یابد.

۴) هزینه سالیانه سفارش دهی افزایش یافته ولی هزینه نگهداری موجودی کاهش می‌یابد.

حل : گزینه ۴ درست است.

مثال: سفارش محصولی تنها در بسته‌های 200 تایی قابل انجام است، چنانچه تقاضای سالانه این محصول 2000، هزینه هر بار سفارش 100 و هزینه نگهداری هر واحد محصول در سال 20 واحد پولی باشد مقدار اقتصادی هر بار سفارش چقدر است؟ (کنکور ۸۵)

400(۱   300 (۲   200(۳   100 (۴

حل : گزینه ۳ درست است.

سفارش باید مضرب صحیحی از 200 باشد پس می‌تواند 200 یا 400 باشد.

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

بزرگترین عددی که در نامساوی

$$Q(Q-n)\le\frac{2AD}{h}$$

$$200 \ \rightarrow \ 200(200-0)\le\frac{2\times200\times100}{20}=20000$$

$$400 \ \rightarrow \ 80,000 \qquad 400(400-200)\not\le\frac{2\times2000\times100}{20}=20000$$

مثال: در یک سیستم کنترل موجودی از انبارهایی با حجم ثابت 45 واحد و هزینه اجاره سالیانه هر انبار 75 واحد پول استفاده می‌شود. اگر مصرف سالیانه 10000 واحد، هزینه ثابت هر بار سفارش دهی دو واحد پول و هزینه نگهداری یک واحد پول برای هر واحد موجودی در سال باشد برای تعیین مقدار اقتصادی هر بار سفارش چند بار باید تابع هزینه را محاسبه نمود؟
(کنکور ۸۶)

۱) سه بار ۲) چهار بار ۳) پنج بار ۴) شش بار

حل : گزینه ۳ درست است.

هر چه مقدارسفارش بیشتر باشد هزینه‌ی اجاره انبار بیشتر می‌شود پس باید از محدوده‌ی اول شروع می‌کنیم.

$$Q=\sqrt{\frac{2AD}{h}}=\sqrt{\frac{2\times10000\times2}{1}}=200$$

چون محدوده ها 45 تایی است بنابراین بازه‌های مورد نظر به صورت زیر است:

$$[0-45],[46-90],[91-135],[136-180],\ldots$$

در محدوده $[181-225]$ Q_ω قرار می‌گیرد و تابع هزینه در نقاط 45 , 90 , 135 , 200,180 (یعنی 5 بار) محاسبه گردد.

مثال: در یک سیستم موجودی از نوع EOQ می‌دانیم هزینه بهینه سالانه نگهداری و سفارش برابر با 10,000 واحد پولی و مقدار اقتصادی هر بار سفارش 150 عدد است. اگر تقاضای محصول سالانه 3000 عدد باشد، هزینه هر بار سفارش چقدر است؟
(کنکور ۸۵)

۱) 200 ۲) 250 ۳) 300 ۴) 350

حل : گزینه ۲ درست است.

$$K^*=\frac{2AD}{Q}=\frac{2\times3000\times A}{150}=40A=10,000 \ \Rightarrow \ A=250$$

مثال: در یک سیستم موجودی با مدل EOQ اگر هزینه هر بار سفارش 100 واحد پولی و نرخ هزینه نگهداری و تقاضای سالانه به ترتیب 20 درصد و 2000 عدد در سال باشند و در هر بار سفارش 100 عدد سفارش داده شود، با فرض این که قیمت هر واحد کالا 20 واحد پولی باشد کل هزینه سیستم موجودی به طور متوسط در سال چقدر است؟ (کنکور ۸۵)

۱) 2200 ۲) 4000 ۳) 40400 ۴) 42200

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

حل : گزینه ۴ درست است.

$$h = ic = 0.2 \times 20 = 4$$

$$K(Q) = \frac{DA}{Q} + \frac{hQ}{2} = \frac{200 \times 100}{100} + \frac{4 \times 100}{2} = 2200$$

کل هزینه سیستم موجودی $= K(Q) + CD = 2200 + 20 \times 2000 = 42200$

مثال: در انباری که 100 تن ذخیره اطمینان داریم، هزینه نگهداری هر تن کالا در سال 1000 ریال است. کل هزینه‌های سالیانه تدارکاتی (سفارشات) در این انبار 180,000 ریال و کل هزینه‌های نگهداری کالا در انبار در سال 200,000 ریال است. در این شرایط کدام یک از گزاره‌های زیر صحیح است؟ (کنکور ۸۷)

۱) ممکن است کالا به مقدار اقتصادی سفارش شود.
۲) مقدار هر بار سفارش کالا از مقدار EOQ کمتر است.
۳) مقدار سفارش کالا 1/9 برابر مقدار EOQ است.
۴) مقدار اقتصادی سفارش کالا از مقدار EOQ بیشتر است.

حل : گزینه ۲ درست است.

$$SS = 100 \quad , \quad C = 1000$$

ابتدا باید مقدار ثابت سالیانه (در اینجا هزینه موجودی اطمینان) را از هزینه نگهداری کم کنیم:

هزینه متغیر نگهداری $= 200000 - 100 \times 1000 = 100000$

حال با مقایسه‌ی هزینه نگهداری سالیانه و سفارشدهی در می‌یابیم که $Q < EOQ$ می‌باشد.

مثال: در مؤسسه‌ای با تخمین انجام شده برای پارامترهای مدل E.O.Q دو خطا صورت گرفته است یکی تقاضای سالیانه محصول 1.5 برابر مقدار واقعی و هزینه ثابت سفارش دهی برابر نصف مقدار واقعی تعیین شده است. در این حالت 'x' نسبت مقدار سفارش قطعه Q ، به مقدار بهینه واقعی Q^* ، تقریباً چقدر است؟ $x = \frac{Q}{Q^*}$ (کنکور ۸۸)

۱) $x = 0.87$
۲) $x = 0.75$
۳) $x = 0.25$
۴) $x = 1$

حل : گزینه ۱ درست است.

$$D' = 1.5D$$

$$A' = \frac{A}{2}$$

$$Q = \sqrt{\frac{2A'D'}{h}} = \sqrt{\frac{2 \times 1.5 \times D \times \frac{A}{2}}{h}} = \sqrt{\frac{3}{4}}\, Q^*$$

$$X = \frac{Q}{Q^*} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1.73}{4} = 0/87$$

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

مثال: در مدل EOQ با مدل کلاسیک کنترل موجودی درست در یک لحظه قبل و بعد از صدور سفارش موقعیت موجودی به ترتیب چقدر است؟ $\left(m=\left[\frac{LT}{T}\right]\right)$ (کنکور ۸۹)

۱) $r \;,\; r+mQ$

۲) $r+(m+1)Q \;,\; r+mQ$

۳) $r+mQ \;,\; r+(m+1)Q$

۴) $r+(m+1)Q \;,\; r+(m+1)Q$

حل : گزینه ۳ درست است.

در لحظه ی قبل از سفارش موقعیت موجودی $r+mQ$ می باشد که با سفارش به اندازه ی Q این مقدار به موقعیت موجـودی اضـافه می گردد.

۳ـ مدل‌های کمبود

۳ـ۱ـ مدل کمبود پس افت

فرضیات این مدل مانند مدل EOQ است با این تفاوت که کمبود به‌صورت سفارشات عقب افتاده جایز است هدف مدل تعیین مقدار سفارش بهینه (Q^*)، مقدار کمبود بهینه در هر دوره (b^*) و همین‌طور r^*, r_h^* همراه با کمینه کردن هزینه‌ها می‌باشد.

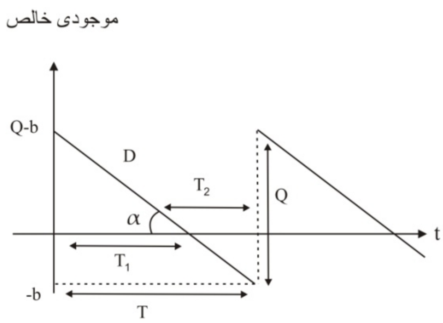
۳ـ۱ـ۱ـ نحوه محاسبه روابط مقدار سفارش اقتصادی

در این مدل $\pi, \hat{\pi}$ برابر مقدار ثابتی می‌باشند و بقیه پارامترها مانند مدل EOQ است.

T_2 : مدت زمانی از یک دوره که کمبود رخ می‌دهد.

T_1 : مدت زمان یک دوره که در حالت کمبود نیستیم.

b : مقدار هر بار کمبود



$$D=tg\alpha=\frac{Q-b}{T_1} \quad \Rightarrow \quad T_1=\frac{Q-b}{D}$$

$$T_2=\frac{b}{D}$$

$$\Rightarrow \quad T=T_1+T_2=\frac{Q}{D} \quad \text{متوسط تعداد دوره‌ها در سال}=n=\frac{D}{Q}=\frac{1}{T}$$

یادداشت:
....
....
....
....

www.ieun.ir

برای به‌دست آوردن b^*, Q^* باید از تابع هزینه متغیر $K(Q,b)$ نسبت به Q و b مشتق گرفته و برابر صفر قرار دهیم و معادلات مربوطه را حل کنیم.

$$K(Q,b)=\frac{DA}{Q}+\frac{h(Q-b)^2}{2Q}+\frac{\hat{\pi}b^2}{2Q}+\pi\frac{D}{Q}b$$

از تابع هزینه به سادگی می‌توان روابط زیر را به دست آورد:

متوسط موجودی در یکسال $=\dfrac{(Q-b)^2}{2Q}$

متوسط کمبود در سال $=\dfrac{b^2}{2Q}$

تعداد کمبود در سال $=\dfrac{D}{Q}b$

۳ـ۱ـ۲ـ الگوریتم حل مدل

الگوریم حل مسایل کمبود پس افت با توجه به مقایسه دو هزینه $\sqrt{2DAh}$ (که معادل $\left(k\left(Q_W\right)\right)$ است) و πD به‌صورت زیر می‌باشد:

اگر $\pi D \geq \sqrt{2DAh}$ باشد به مدل EOQ بر می‌گردیم یعنی به سیستم موجودی بدون کمبود که در آن:

$$Q = Q\omega \quad , \quad K(Q^*)=K(Q\omega) \quad , \quad b^* = 0$$

اگر $\pi D < \sqrt{2DAh}$ باشد دو حالت زیر وجود دارد:

ـ اگر $\hat{\pi}=0$ باشد در این حالت سیستم موجودی وجود نخواهد داشت.

$$Q^* = 0 \quad , \quad K\left(Q^*\right) = \pi D \quad , \quad b^* = \infty$$

ـ اگر $\hat{\pi} > 0$ باشد به روابطی خواهیم رسید که در قسمت قبل به‌دست آوردیم یعنی:

$$Q^*=\sqrt{\frac{2DA}{h}-\frac{(\pi D)^2}{h(\hat{\pi}+h)}}\cdot\sqrt{\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}} \qquad b^*=\frac{hQ^*-\pi D}{\hat{\pi}+h}$$

۳ـ۱ـ۳ـ حالت خاص مدل کمبود پس افت

مدل کمبود پس افت حالت خاصی دارد که مسایل موجودی عموماً بر اساس این حالت مورد بررسی و مقایسه قرار می‌گیرند. در این حالت $\pi=0 \quad , \quad \hat{\pi}>0$ است و بنابراین حالت خاصی از قسمت دوم $\pi D < \sqrt{2DAh}$ است. روابط زیر در این حالت برقرار است.

$$Q^*=\sqrt{\frac{2DA}{h}}\cdot\sqrt{\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}}=Q_\omega\sqrt{\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}}$$

$$b^* = \frac{hQ^*}{\hat{\pi}+h}=\sqrt{\frac{2DAh}{\hat{\pi}(\hat{\pi}+h)}}=\frac{hQ_\omega}{\sqrt{\hat{\pi}(\hat{\pi}+h)}}$$

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

$$I^*_{max}=Q^*-b^*=\sqrt{\frac{2DA}{h}}\cdot\sqrt{\frac{\hat{\pi}}{\hat{\pi}+h}}=Q_\omega\sqrt{\frac{\hat{\pi}}{\hat{\pi}+h}}$$

$$K(Q^*)=\sqrt{2DAh}\sqrt{\frac{\hat{\pi}}{\hat{\pi}+h}}=hI^*_{max}=\hat{\pi}b^*$$

روابط r^* و r^*_h مانند مدل EOQ است تنها مقدار b^* از آن کسر می‌شود.

$$r^*=DL-b^* \qquad r^*_h=DL-mQ^*-b^* \quad , \quad m=\left[\frac{L}{T}\right]$$

نکته: مقایسه مدل کمبود پس افت (حالت خاص) با مدل EOQ در حالت یکسان بودن کلیه پارامترها.

- مقدار سفارش بهینه در مدل پس‌افت بیشتر از مدل EOQ است.
- حداکثر موجودی در مدل EOQ بیشتر از مدل پس‌افت است.
- کل هزینه‌های متغیر سالیانه در مدل EOQ بیشتر از مدل پس‌افت است.

مثال: در مدل تقاضای پس افت که مقدار کمبود با تأخیر برآورده می‌شود، در صورتی که هزینه‌های کمبود افزایش پیدا کند، کدام مورد در ارتباط با حجم مورد نیاز برای نگهداری کالا در انبار صحیح است؟

۱) کاهش می‌یابد.
۲) تغییر پیدا نمی‌کند.
۳) افزایش می‌یابد.
۴) بسته به سایر پارامترهای مسئله قابل تغییر است.

حل : گزینه ۲ درست است.

نکته : با افزایش هزینه کمبود گویی از مدل کمبود به سمت EOQ می‌رویم.

مثال: در مدل ساده موجود که کمبود مجاز بوده و مقدار کمبود پس افت می‌شود، اطلاعات زیر در دسترس است. هزینه کمبود هر واحد موجودی در سال برابر 100تومان و هزینه کمبود هر واحد موجودی برابر π تومان است. اگر تقاضای سالیانه D واحد باشد و Kw هزینه بهینه سالیانه در صورت مجاز نبودن کمبود باشد و رابطه $\pi D=0.75K_W$ را داشته باشیم به نظر شما کدام عبارت صحیح است؟ (کنکور ۸۸)

۱) در جواب بهینه مقدار سفارش اقتصادی در هر دور از $E.O.Q$ بیشتر است.
۲) در جواب بهینه مقدار کمبود در یک دور برابر تقاضای سالیانه است.
۳) در جواب بهینه مقدار کمبود در یک دور برابر مقدار سفارش است.
۴) در جواب بهینه مقدار کمبود نامتناهی است.

حل : گزینه ۱ درست است.

$$\pi D=0.7K_\omega \;\rightarrow\; \pi D<k_\omega$$
$$\hat{\pi}=100>0$$

در مدل کمبود پس افت در صورتی که $\pi D<k_\omega$ و $\hat{\pi}>0$ باشد مقدار سفارش اقتصادی از روابط کمبود محاسبه می‌شود که از EOQ بیشتر است.

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

۳ـ۲ـ مدل کمبود در حالت فروش از دست رفته

فرضیات این مدل مانند مدل EOQ است با این تفاوت که کمبود جایز است و جبران نمی‌شود.

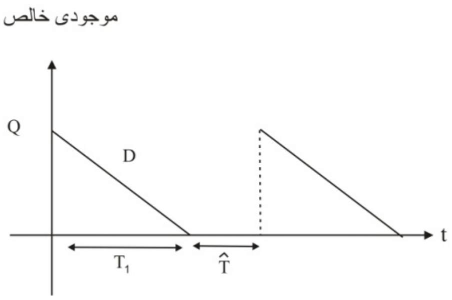
هدف مدل تعیین مقدار اقتصادی سفارش (Q^*)، مدت زمان بهینه کمبود در هر دوره $(\hat{T}^*)$ و نقطه سفارش مجدد $\left(r_h^*, r^*\right)$ با کمینه کردن هزینه‌هاست.

۳ـ۲ـ۱ـ نحوه محاسبه روابط مقدار سفارش اقتصادی

در این مدل π برابر مقدار ثابتی می‌باشند و سایر پارامترها مانند مدل EOQ است.

$\hat{T}$: مدت زمانی از یک دوره که دارای کمبود هستیم.

T_1 : مدت زمانی از یک دوره که دارای کمبود نیستیم.



$$\left.\begin{aligned} T &= T_1 + \hat{T} \\ T_1 &= \frac{Q}{D} \end{aligned}\right\} \rightarrow T = \frac{Q}{D} + \hat{T} = \frac{Q + D\hat{T}}{D}$$

$$\text{متوسط مقدار دوره‌ها در سال} = \frac{1}{T} = \frac{D}{Q + D\hat{T}}$$

$$\text{(کل هزینه متغیر سالیانه)} \quad K\left(Q, \hat{T}\right) = \frac{DA}{Q + D\hat{T}} + \frac{hQ^2}{2\left(Q + D\hat{T}\right)} + \frac{\pi D^2 \hat{T}}{Q + D\hat{T}} + CQ\frac{D}{Q + D\hat{T}}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، در این مدل هزینه خرید هم جزو هزینه‌های متغیر است، زیرا به برخی از تقاضاها اصلاً جواب نخواهیم داد.

۳ـ۲ـ۲ـ الگوریتم حل مدل

الگوریتم حل مسایل در حالت فروش از دسته رفته مانند الگوریتم حل مسایل کمبود پس افت با مقایسه $\sqrt{2DAh}$ و πD با هم شکل می‌گیرد و به‌صورت زیر است:

اگر $\pi D \geq \sqrt{2DAh}$ باشد به مدل EOQ بر می‌گردیم یعنی به سیستم موجودی بدون کمبود و بنابراین داریم:

$$Q^* = Q_\omega \quad , \quad K(Q^*) = K\left(Q_\omega\right) \quad , \quad \hat{T}^* = 0$$

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

اگر $\pi D<\sqrt{2DAh}$ باشد سیستم موجودی وجود نخواهد داشت یعنی: $\hat{T}^*=\infty$

نکته کلی در مدل فروش از دست رفته

$\pi D\geq\sqrt{2ADh}$ از مدل ویسلون استفاده خواهیم کرد. $Q=\sqrt{\frac{2AD}{h}}$ که اگر A کم شود Q نیز کم می‌شود.

$\pi D<\sqrt{2ADh}$ سیستم موجودی نداریم و Q را برابر صفر در نظر می‌گیریم حال اگر A کم شود ممکن است $\pi D\geq\sqrt{2ADh}$ شود و Q عددی مثبت گردد.

مثال: مدل مقدار سفارش اقتصادی (EOQ) را در نظر بگیرید. فرض کنید کمبود کالا مجاز ولی قابل جبران نباشد، در این صورت به ترتیب مقدار بهینه (سفارش اقتصادی، حداکثر فضای انبار، متوسط هزینه کل سالانه) نسبت به زمانی که کمبود مجاز نباشد:

۱) به ترتیب (بیشتر، کمتر، کمتر) است.

۲) به‌ترتیب (کمتر، بیشتر، بیشتر) است.

۳) به‌ترتیب (بیشتر، کمتر، بیشتر) است.

۴) در صورت داشتن سیستم موجودی، برابر زمانی خواهد بود که کمبود مجاز نباشد.

حل: گزینه ۴ درست است.

مثال: کدام یک از عبارت‌های زیر غلط است؟ (کنکور ۸۵)

۱)اگر در سیستمی کسری مجاز شوند هزینهٔ نگهداری سالانه افزایش پیدا نخواهد کرد.

۲) اگر در سیستمی کسری به صورت تقاضای عقب افتاده مجاز شود هزینهٔ کل سیستم ممکن است کاهش پیدا کند.

۳) اگر در سیستمی کسری به صورت فروش از دست رفته مجاز شود هزینهٔ کل سیستم کاهش پیدا خواهد کرد.

۴) اگر در سیستمی کسری به صورت تقاضای عقب افتاده مجاز شود و هزینه‌های کسری مستقل از زمان، صفر و هزینه‌های کسری وابسته به زمان مخالف ∞ باشد هزینهٔ کل سیستم حتماً کاهش پیدا خواهد کرد.

حل : گزینه ۳درست است.

مثال: در یک مدل ساده قطعی که در آن کسری به صورت فروش از دست رفته مجاز شده است: (کنکور ۸۶)

۱)با کاهش هزینه هر بار سفارش دهی ممکن است مقدار سفارش بهینه کمتر شود.

۲) با کاهش هزینهٔ هر بار سفارش دهی ممکن است مقدار سفارش بهینه بیشتر شود.

۳) با کاهش هزینه هر بار سفارش دهی حتماً مقدار سفارش کاهش پیدا خواهد کرد.

۴) موارد ۱ و ۲

حل : گزینه ۴ درست است.

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

مثال: در یک سیستم موجودی با نرخ تقاضای ثابت، در حالتی که کمبود موجودی مجاز نیست، میزان سفارش اقتصادی برابر 4000 تن و نقطه سفارش مجدد (بر مبنای موجودی در دست و سفارش در راه) برابر 13000 تن محاسبه شده است. چنانچه کمبود مجاز باشد میزان اقتصادی سفارش 8000 تن محاسبه شده است. در این حالت نقطه سفارش مجدد (بر مبنای موجودی در دست و سفارش در راه) چقدر است؟ (کنکور ۸۹)

۱) 5000 ۲) 8000 ۳) 7000 ۴) 12000

حل : گزینه ۳ درست است.

$$Q^* = 40000t \Rightarrow Q'^* = 8000 \qquad 4000\sqrt{\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}} = 8000$$

$$r^* = 13000 \qquad r'^* = ? \qquad \sqrt{\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}} = 2 \Rightarrow 4\hat{\pi} = \hat{\pi}+h$$

$$3\hat{\pi} = h$$

$$\frac{h}{\hat{\pi}} = 3$$

$$b^* = \frac{h}{\hat{\pi}} \times \frac{Q_\omega}{\sqrt{\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}}} = 3 \times \frac{4000}{\sqrt{1+3}} = 6000$$

$$r'^* = r^*_{EOQ} - b^* = 13000 - 6000 = 7000$$

مثال: در مدل سفارش وقتی کمبود کالا جایز است، اگر هزینه کمبود وابسته به زمان $(\hat{\pi})$ به ازای کمبود هر واحد کالا بسیار ناچیز (تقریباً برابر صفر) باشد، مقدار کمبود در حالت بهینه چقدر خواهد بود؟ (کنکور ۸۹)

۱) بستگی به موجودی در راه دارد. ۲) نامعین

۳) برابر مقدار ذخیره ایمنی ۴) برابر با مقدار سفارش

حل : گزینه ۴ درست است.

در حالتی که هزینه‌ی کمبود به ازای هر واحد ناچیز باشد پس $b^* = \infty$ می‌شود. یعنی هر چقدر تقاضا داشته باشیم با کمبود مواجه می‌شویم.

۴ـ مدل تولیدی ساده یا مدل مقدار تولید اقتصادی یا مدل EPQ

فرضیات مدل مانند مدل EOQ است با این تفاوت که سفارش یک‌جا دریافت نمی‌شود بلکه با نرخ ثابت P و به تدریج دریافت می‌شود.

هدف مدل تعیین مقدار هر بار تولید اقتصادی (Q^*) و نقطه سفارش مجدد (r^*, r_h^*) با کمینه کردن هزینه‌ها است.

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

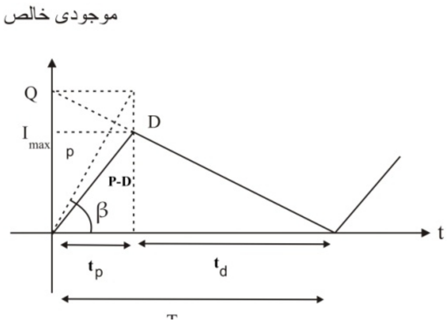
۴ـ۱ـ نحوه محاسبه روابط مدل

پارامترهای این مدل مانند مدل EOQ است با تغییرات زیر:

A : هزینه هر بار آماده‌سازی

C : هزینه متغیر یا قیمت تمام شده هر واحد

P : نرخ دریافت سفارش یا نرخ تولید



نکته: همواره $P \geq D$ است زیرا همان‌طور که از شکل مشخص است اگر $P < D$ باشد به کمبود بر می‌خوریم.

$$\left.\begin{array}{l} tg\beta = P = \dfrac{Q}{t_p} \quad \Rightarrow \quad t_p = \dfrac{Q}{P} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad T = \dfrac{Q}{D} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad t_d = T - t_p = \frac{Q}{P} - \frac{Q}{D} = \frac{Q}{D}\left(1 - \frac{D}{P}\right) = T\left(1 - \frac{D}{P}\right)$$

$$I_{max} = (P - D)t_p = Dt_d = Q\left(1 - \frac{D}{P}\right)$$

$$\bar{I} = \frac{I_{max}}{2} = \frac{Q}{2}\left(1 - \frac{D}{P}\right)$$

متوسط تعداد دوره‌ها در سال $= \dfrac{D}{Q} = \dfrac{1}{T}$

کل هزینه سالیانه $= \underbrace{\dfrac{DA}{Q} + h\dfrac{Q}{2}\left(1 - \dfrac{D}{P}\right)}_{K(Q)} + CD$

$$\frac{dK(Q)}{dQ} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q^* = \sqrt{\frac{2DA}{h\left(1 - \frac{D}{P}\right)}} = \frac{Q_\omega}{\sqrt{1 - \frac{D}{P}}}$$

$$I_{max} = Q^*\left(1 - \frac{D}{P}\right) = Q_\omega\sqrt{1 - \frac{D}{P}}$$

$$\bar{I} = \frac{Q^*}{2}\left(1 - \frac{D}{P}\right) = \frac{Q_\omega}{2}\sqrt{1 - \frac{D}{P}}$$

$$K(Q^*) = \sqrt{2DAh\left(1 - \frac{D}{P}\right)}$$

کل هزینه بهینه سالیانه $= K(Q^*) + CD = \sqrt{2DAh\left(1 - \dfrac{D}{P}\right)} + CD$

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

نقطه سفارش مجدد بر حسب موجودی در دست در مدل EPQ با توجه به این‌که لحظه صدور سفارش در قسمت صعودی نمودار یا نزولی آن بیافتد دو حالت مختلف دارد و این دو حالت از مقایسه بین $L'=L-mT$ و t_d (مدت زمانی که فقط در حال مصرف هستیم) به‌دست می‌آید.

$$r^*=D.L$$

$$\begin{cases} r_h^*=DL'=D(L-mT)=DL-mQ^* & \text{اگر } L'=L-mT<t_d \\ r_h^*=(P-D)(T-L')=DL-PL+(m+1)\left(\frac{P}{D}-1\right)Q^* & \text{اگر } L'=L-mT\geq t_d \end{cases}$$

۴ـ۲ـ نکات مدل EPQ

نکته ۱: مقایسه مدل EPQ و مدل EOQ در حالت یکسان بودن پارامترها.

ـ مقدار سفارش بهینه در مدل EPQ بیشتر از مدل EOQ است.

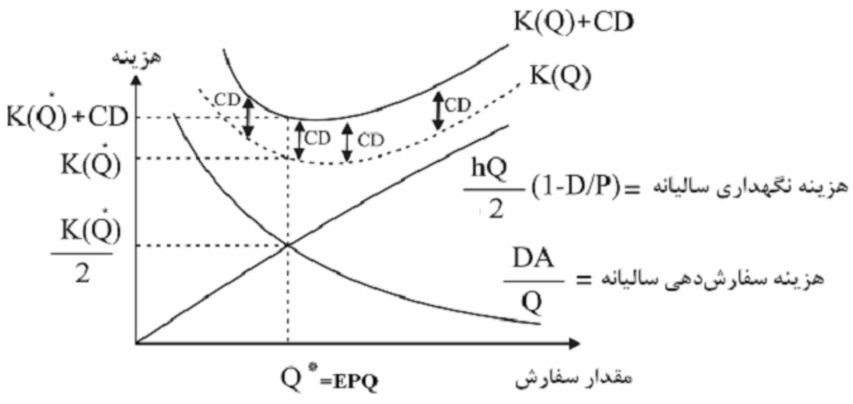
ـ حداکثر موجودی در مدل EOQ بیشتر از مدل EPQ است.

ـ هزینه بهینه سالیانه در مدل EOQ بیشتر از مدل EPQ است.

نکته ۲: نمودار موقعیت موجودی مدل EPQ کاملاً مشابه مدل EOQ و به همان شکل است.

$$D.L\leq y(t)\leq DL+Q^*$$

نکته ۳: نمودار هزینه‌ها بر حسب مقدار سفارش در مدل EPQ مانند مدل EOQ و به شکل زیر است:



نکته ۴: محل تلاقی منحنی هزینه نگهداری و هزینه سفارش‌دهی سالیانه نقطه بهینه است.

$$K(Q^*)=\frac{2DA}{Q^*}=hQ^*\left(1-\frac{D}{P}\right)=2nA=\frac{2A}{T^*}=\sqrt{2DAh\left(1-\frac{D}{P}\right)}=hI_{max}^*$$

نکته ۵:

اگر $Q>EPQ$ باشد آن‌گاه هزینه نگهداری سالیانه > هزینه سفارش‌دهی سالیانه

اگر $Q=EPQ$ باشد آن‌گاه هزینه نگهداری سالیانه = هزینه سفارش‌دهی سالیانه

اگر $Q<EPQ$ باشد آن‌گاه هزینه نگهداری سالیانه < هزینه سفارش‌دهی سالیانه

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

نکته ۶: شیب منحنی هزینه‌ها در نقطه بهینه برای هزینه نگهداری سالیانه و هزینه سفارش‌دهی سالیانه به ترتیب برابر $\frac{h}{2}\left(1-\frac{D}{P}\right)$ و $-\frac{h}{2}\left(1-\frac{D}{P}\right)$ است.

نکته ۷: در صورتی که به جای مقدار Q^* مقدار نابهینه Q سفارش دهیم، نسبت افزایش هزینه متغیر سالیانه از رابطه زیر به‌دست می‌آید.

$$\frac{K(Q)}{K(Q^*)}=\frac{1}{2}\left(\frac{Q}{Q^*}+\frac{Q^*}{Q}\right)$$

نکته ۸: مانند مدل EOQ شیب منحنی هزینه‌ها در سمت راست نقطه بهینه نسبت به سمت چپ آن ملایم‌تر است یعنی:

$$K(Q^*-a)>K(Q^*+a)$$

نکته ۹: در صورتی که یکی از پارامترهای مدل تغییر کند، برای مقایسه و یافتن مقدار سفارش بهینه و هزینه بهینه متغیر سالیانه باید از روابط زیر استفاده کرد:

$$\frac{Q_1^*}{Q_0^*}=\frac{\sqrt{\dfrac{2D_1A_1}{h_1\left(1-\dfrac{D_1}{P_1}\right)}}}{\sqrt{\dfrac{2D_0A_0}{h_0\left(1-\dfrac{D_0}{P_0}\right)}}}=\sqrt{\frac{A_1}{A_0}}\cdot\sqrt{\frac{h_0}{h_1}}\cdot\sqrt{\frac{D_1\cdot\left(1-\dfrac{D_0}{P_0}\right)}{D_0\cdot\left(1-\dfrac{D_1}{P_1}\right)}}$$

$$\frac{K\left(Q_1^*\right)}{K\left(Q_0^*\right)}=\sqrt{\frac{2D_1A_1h_1\left(1-\dfrac{D_1}{P_1}\right)}{2D_0A_0h_0\left(1-\dfrac{D_0}{P_0}\right)}}=\sqrt{\frac{h_1}{h_0}}\cdot\sqrt{\frac{A_1}{A_0}}\cdot\sqrt{\frac{D_1\left(1-\dfrac{D_1}{P_1}\right)}{D_0\left(1-\dfrac{D_0}{P_0}\right)}}$$

نکته ۱۰: با افزایش پارامترهای مدل مقدار سفارش بهینه و هزینه بهینه سالیانه به‌صورت زیر تغییر می‌کند.

	Q^*	$K(Q^*)$
افزایش A	افزایش	افزایش
افزایش D	افزایش	تغییرات مشخص نیست
افزایش h	کاهش	افزایش
افزایش i	کاهش	افزایش
افزایش c	کاهش	افزایش
افزایش w	کاهش	افزایش
افزایش p	کاهش	افزایش
افزایش L	تغییری نمی‌کند	تغییری نمی‌کند

یادداشت:

....

....

....

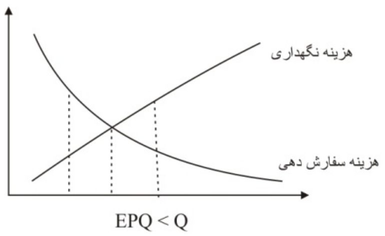
....

www.ieun.ir

نکته ۱۱: مقایسه بین مدل EOQ، EPQ و مدل EOQ در حالت کمبود پس افت (حالت خاص)

	مدل EOQ در حالت کمبود پس افت		مدل EOQ		مدل EPQ
مقدار سفارش بهینه (Q^*)	$Q_\omega\sqrt{\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}}$	$<$	Q_ω	$>$	$\frac{Q_\omega}{\sqrt{1-\frac{D}{P}}}$
حداکثر موجودی بهینه (I_{max})	$Q_\omega\sqrt{\frac{\hat{\pi}}{\hat{\pi}+h}}$	$>$	Q_ω	$<$	$Q_\omega\sqrt{1-\frac{D}{P}}$
متوسط موجودی بهینه $(\bar{I})$	$\frac{(Q^*-b^*)^2}{2Q^*}$	$>$	$\frac{Q_\omega}{2}$	$<$	$\frac{Q_\omega\sqrt{1-\frac{D}{P}}}{2}$
هزینه نگهداری سالیانه	$h\bar{I}$	$>$	$h\bar{I}$	$<$	$h\bar{I}$
کل هزینه متغیر سالیانه $K(Q^*)$	$\sqrt{2DAh}\sqrt{\frac{\hat{\pi}}{\hat{\pi}+h}}$	$>$	$\sqrt{2DAh}$	$<$	$\sqrt{2DAh}\sqrt{\left(1-\frac{D}{P}\right)}$

نکته۱۲: با توجه به منحنی هزینه‌ها بر حسب مقدار سفارش مشخص است که هنگامی که $EPQ<Q$ باشد. هزینه نگهداری THC از هزینه سفارش‌دهی TOC بیشتر خواهد بود .



مثال: موقعیت موجودی بر حسب مجموع موجودی در دست و در راه در یک مدل کنترل موجودی قطعی در مقایسه با مدل با دریافت تدریجی به چه صورتی است؟ ($y(t)$: موقعیت موجودی در لحظه t)

۱) $DL\le y(t)\le DL+Q\left(1-\frac{D}{P}\right)$

۲) $DL+Q\left(1-\frac{D}{P}\right)\le y(t)\le DL+Q\left(1-\frac{D}{P}\right)$

۳) $DL+Q\left(1-\frac{D}{P}\right)\le y(t)\le DL+Q$

۴) مانند موقعیت موجودی در مدل ساده قطعی است.

حل: گزینه ۴ درست است.

همان‌طور که در نکات مدل EPQ ذکر شد نمودار موقعیت موجودی مدل EPQ مشابه نمودار موقعیت موجودی مدل EOQ است و محدوده تغییرات آن به‌صورت زیر است:

$$DL\le y(t)\le DL+Q$$

یادداشت:

....

....

....

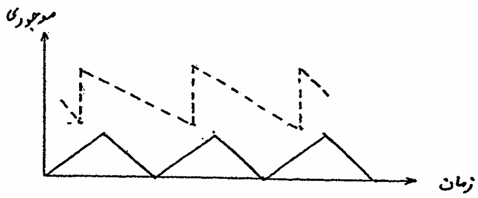
....

www.ieun.ir

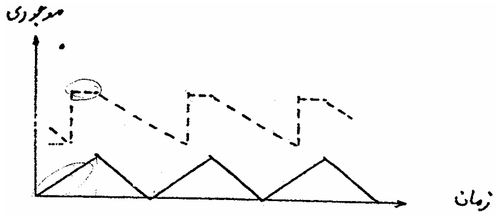
مثال: وقتی که مدت تحویل (L) از T کوچکتر ولی از T_d بزرگتر است (T مدت یک دور و T_d مدت زمانی از یک دور که محصول تولید نمی‌شود) کدام یک از شکل‌های زیر در مورد موقعیت موجودی صحیح است؟ (کنکور ۸۶)

.... موقعیت موجودی   **———— موجودی در دست**

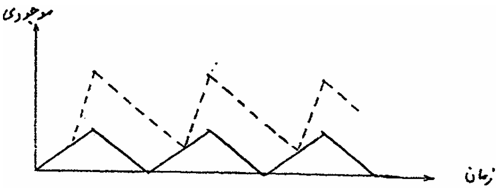
۱)



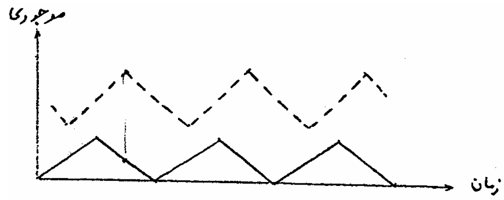
۲)



۳)



۴)



حل : گزینه ۱ درست است.

شکل موقعیت موجودی مدل EPQ کاملاً مشابه موقعیت موجودی EOQ است.

مثال: تقاضا برای محصولی 4000 واحد در سال است و این محصول در موسسه با نرخ تولید 1600 واحد د سال تولید می‌شود. اگر مدیریت، مقدار سفارش مناسب را برابر 2000 واحد تعیین کرده باشد آنگاه حداکثر موجودی در دست در این حالت چقدر است؟ (کنکور ۸۵)

۱) 1500 واحد   ۲) 2500 واحد   ۳) 4000 واحد   ۴) 500 واحد

حل : گزینه ۱ درست است.

$$I_{max} = Q\left(1-\frac{D}{P}\right) = 2000\left(1-\frac{1}{4}\right) = 1500$$

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

www.ieun.ir

مثال: کالای A به صورت تدریجی و با سرعت P عدد در واحد زمان به انبار وارد می‌شود. کالای B به صورت آنی (یک باره) وارد انبار می‌شود برای کالای A نسبت سرعت ورود به انبار به سرعت مصرف برابر $\frac{10}{3}$ است. سایر پارامترهای دو کالا با هم برابرند. و برای هیچ یک ذخیرهٔ اطمینان منظور نشده است. اگر هر دو کالا به مقدار اقتصادی سفارش داده شوند. متوسط موجودی کالای B چند برابر متوسط موجودی کالای A خواهد بود؟ (کنکور ۸۷)

۱)تقریباً 1.2　　۲) تقریباً 1.4　　۳) تقریباً 2.3　　۴) تقریباً برابر هستند.

حل : گزینه ۱ درست است.

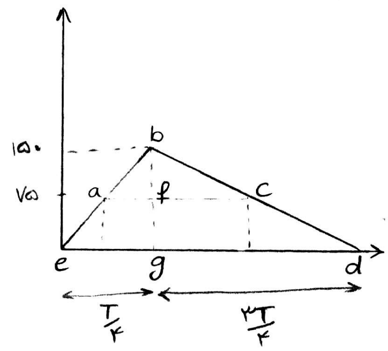
$$\frac{D_A}{P_A}=\frac{3}{10}$$

$$\frac{\bar{I}_B}{\bar{I}_A}=\frac{\frac{Q_\omega}{2}}{\frac{Q_\omega}{2}\sqrt{1-\frac{D_A}{P_A}}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{7}{10}}}=\sqrt{\frac{10}{7}}=1.2$$

مثال: در مدل تولید اقتصادی، مقدار تولید بهینه 200 واحد است. اگر در این حالت در یک دوره T (فاصله‌ی زمانی بین دو سفارش تولید متوالی)، به مدت $\frac{T}{4}$ تولید داشته باشیم آنگاه فاصله‌ی بین دو زمانی که موجودی به سطح 75 واحد می‌رسد چقدر است؟(کنکور ۸۹)

۱) $\frac{T}{4}$　　۲) $\frac{T}{2}$　　۳) $\frac{T}{3}$　　۴) $\frac{2T}{3}$

حل : گزینه ۲ درست است.



$$t_p=\frac{T}{4}$$

$$t_p=\frac{Q}{P}=\frac{T}{4}$$

$$\frac{DV}{P}=\frac{T}{4}$$

$$\frac{D}{P}=\frac{1}{4}$$

تولید پهنه $Q^*=200$

$$I_{max}=200\times\left(1-\frac{D}{P}\right)=\overset{50}{\cancel{200}}\times\frac{3}{\cancel{4}}=150$$

$\frac{bf}{bg}=\frac{ac}{ed}=$ طبق قوانین تشابه $\Rightarrow \frac{75}{150}=\frac{aT}{T}$

$$a=\frac{1}{2}$$

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

مثال: در یک مدل دریافت تدریجی که براساس مقدار اقتصادی تولید عمل می‌کند. در صورتی که تقاضای سالیانه افزایش یابد ولی همواره کوچکتر از نرخ تولید سالیانه باشد، کدام یک از گزینه‌های زیر در رابطه با سیکل زمانی بین دو بار سفارش تولید صحیح است؟ (کنکور ۸۹)

۱)با افزایش تقاضای سالیانه مدت زمان دوره افزایش می‌یابد.

۲) با افزایش تقاضای سالیانه مدت زمان دوره ممکن است افزایش و یا کاهش یابد.

۳) با افزایش تقاضای سالیانه مدت زمان دوره کاهش می‌یابد.

۴) تغییر در تقاضای سالیانه هیچ تأثیری در مدت زمان دوره ندارد.

حل : گزینه ۲ درست است.

$$\text{EPQ} \quad T=\sqrt{\frac{2A}{Dh\left(1-\frac{D}{P}\right)}}$$

با افزایش تقاضای سالیانه (D) در مخرج کسر D افزایش یافته است ولی $1-\frac{D}{P}$ کاهش یافته است پس بسته به نسبت $\frac{D}{P}$ می‌تواند در نهایت افزایش یا کاهش داشته باشیم.

مثال: شرکتی دارای یک دستگاه تولیدی برای تولید دو نوع محصول است که تولید همزمان آن‌ها توسط این دستگاه ممکن نیست. اگر T_{pi} زمان تولید و مصرف محصول $i\,(i=1,2)$ و T_{di} زمان مصرف محصول $i\,(i=1,2)$ باشند و P_i, D_i به ترتیب نرخ تقاضا و نرخ تولید محصول i باشند و داشته باشیم $\frac{D_1}{P_1}=\frac{P_2-D_2}{P_2}$ ، کدام گزینه زیر همواره صحیح است؟ (کنکور ۸۹)

۱) $\frac{T_{p_1}}{T_{d_1}}=\frac{T_{p_2}}{T_{d_2}} \quad , \quad T_{p_1}+T_{d_1}=T_{p_2}+T_{d_2}$

۲) $\frac{T_{p_1}}{T_{d_1}}=\frac{T_{p_2}}{T_{d_2}} \quad , \quad T_{p_1}+T_{p_2}=T_{d_1}+T_{d_2}$

۳) $\frac{T_{p_1}}{T_{p_2}}=\frac{T_{d_2}}{T_{d_1}} \quad , \quad T_{p_1}+T_{p_2}=T_{d_1}+T_{d_2}$

۴) $T_{p_1}+T_{d_1}=T_{p_2}+T_{d_2} \quad , \quad T_{p_1}+T_{p_2}=T_{d_1}+T_{d_2}$

حل : گزینه ۳ درست است.

$$\begin{array}{l}\frac{D_1}{P_1}=1-\frac{D_2}{P_2}\\ T_d=T\left(1-\frac{D}{P}\right)\end{array} \Rightarrow \begin{array}{l}T_{d_1}=T_{p_2}\\ T_{d_2}=T_{p_1}\end{array} \Rightarrow \frac{T_{d_1}}{T_{d_2}}=\frac{T_{p_2}}{T_{p_1}}$$

$$T_{p_1}T_{d_1}=T_{d_2}T_{p_2}$$

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

پس :

$$\frac{T_{p_1}}{T_{p_2}}=\frac{T_{d_2}}{T_{d_1}}$$

و

$$T_{p_1}+T_{d_1}=T_{p_2}+T_{d_2}=T$$

و چون داریم

$$T_{d_1}=T_{p_2}$$

$$T_{d_2}=T_{p_1}$$

پس :

$$T_{p_1}+T_{p_2}=T_{d_1}+T_{d_2}$$

مثال: در مدل مقدار تولید اقتصادی $(E.P.Q)$ اگر $P<D$ باشد کمبود رخ می‌دهد. در شرکتی که $P<D$ است، برای جبران کمبود، هر T واحد زمانی یکبار به مقدار Q واحد سفارش داده می‌شود. اگر D: نرخ تقاضا، P: نرخ تولید، A: هزینه سفارش دهی و h: هزینه نگهداری واحد موجودی در واحد زمان باشند، مقدار بهینه Q کدام است؟ (کنکور ۸۹)

۱) $\sqrt{\dfrac{2DA}{h\left(1-\dfrac{D}{P}\right)}}$ ۲) $\sqrt{\dfrac{2A}{h(D-P)}}$

۳) $\sqrt{\dfrac{2(D-P)A}{h}}$ ۴) $\sqrt{\dfrac{2\left(\dfrac{1}{D}-\dfrac{1}{P}\right)A}{h}}$

حل : گزینه ۳ درست است.

مقدار تقاضایی که در مدل تولید برآورد نمی‌شود و سبب کمبود می‌شود که برای جلوگیری از آن سفارش می‌دهیم $D-P$ می‌باشد.

پس:

$$Q=\sqrt{\frac{2A(D-P)}{h}}$$

۴ـ۳ـ مدل EPQ در حالت کمبود پس افت

فرضیات مدل مانند مدل EPQ است با این تفاوت که کمبود به‌صورت سفارشات عقب افتاده مجاز می‌باشد.

هدف مدل تعیین مقدار سفارش اقتصادی بهینه (Q^*)، مقدار کمبود بهینه در هر دوره (b^*) و همین‌طور r^*, r_h^* با کمینه کردن هزینه‌ها است.

پارامترهای هزینه کمبود $(\pi,\hat{\pi})$ و نرخ تولید (P) مقدار ثابتی را دارا می‌باشند.

یادداشت:

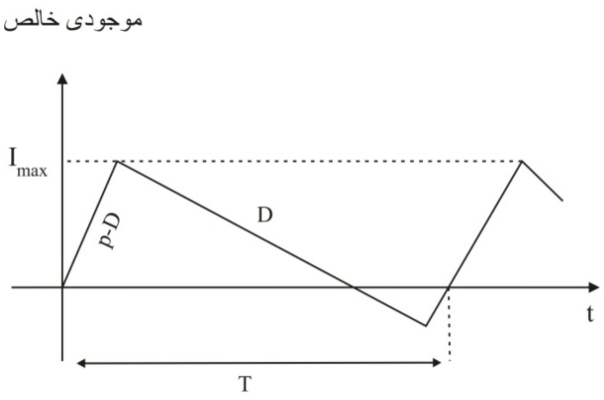
....

....

....

....

www.ieun.ir



الگوریتم حل مدل:

اگر $\pi D \geq \sqrt{2DAh\left(1-\frac{D}{P}\right)}$ باشد به مدل EPQ بر می‌گردیم: $Q^* = EPQ \quad , \quad K(Q^*) = \sqrt{2DAh\left(1-\frac{D}{P}\right)} \quad , \quad b^* = 0$

اگر $\pi D < \sqrt{2DAh\left(1-\frac{D}{P}\right)}$ باشد، دو حالت می‌تواند رخ دهد.

ـ اگر $\hat{\pi}=0$ باشد سیستم موجودی وجود ندارد. $Q^* = 0 \quad , \quad K\left(Q^*\right) = \pi D \quad , \quad b^* = \infty$

ـ اگر $\hat{\pi} > 0$ باشد، مقدار بهینه از مدل EPQ کمبود به‌دست می‌آید که صرفاً حالت خاص آن در متن ذیل بیان می‌گردد.

مانند مدل EOQ با کمبود پس‌افت، مدل EPQ با کمبود پس افت نیز حالت خاصی دارد که از این حالت برای مقایسه حل مسایل این مدل استفاده می‌گردد. در این حالت $\pi=0 \quad , \quad \hat{\pi}>0$ است. روابط بهینه این حالت به‌صورت زیر است:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2DA}{h\left(1-\frac{D}{P}\right)}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}}$$

حداکثر موجودی بهینه $I^*_{max} = \sqrt{\frac{2DA}{h}} \cdot \sqrt{1-\frac{D}{P}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{\pi}}{\hat{\pi}+h}}$

کل هزینه متغیر سالیانه $K(Q^*) = \sqrt{2DAh}\sqrt{1-\frac{D}{P}}\sqrt{\frac{\hat{\pi}}{\hat{\pi}+h}}$

برای نقطه سفارش مجدد بر حسب موجودی درست در این مدل مانند مدل EPQ دو حالت وجود دارد. در ادامه روابط نقطه سفارش مجدد ذکر می‌گردد.

$$r^* = D.L - b^*$$

$$\begin{cases} r_h^* = D.L' - b^* = DL - mQ^* - b^* & \text{اگر } L' = L - mT \leq t_d \\ r_h^* = (P-D)(T-L') - b^* & \\ \quad = DL - PL + (m+1)\left(\frac{P}{D}-1\right)Q^* - b^* & \text{اگر } L' = L - mT > t_d \end{cases}$$

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

مثال: در یک سیستم کنترل موجودی به مقدار تولید اقتصادی (EOQ) اگر $L-mT=\left(\frac{1}{D}-\frac{1}{P}\right)Q$ باشد نقطهٔ سفارش مجدد چقدر خواهد بود؟ D : نرخ تقاضا، L : مدت زمان تحویل، m : یک عدد صحیح $=\left[\frac{L}{T}\right]$ ، T: طول یک دوره سفارش و Q: مقدار هر بار سفارش. (کنکور ۸۵)

۱) $DL-mQ$

۲) $\left(1-\frac{D}{P}\right)Q$

۳) $(D-P)L+(m+1)Q$

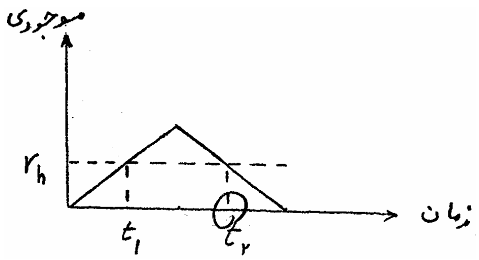
۴) موارد ۱ و ۲

حل : گزینه ۲ درست است.

$$L'=L-mT=\left(\frac{1}{D}-\frac{1}{P}\right)Q=\left(\frac{P-D}{PD}\right)\times Q=\left(1-\frac{D}{P}\right)\times\frac{Q}{D}=t_d$$
$$\to\ r_h^*=D.L'=\left(1-\frac{D}{P}\right)\times\frac{Q}{\cancel{D}}\times\cancel{D}=Q\left(1-\frac{D}{P}\right)$$

مثال: در یک مدل کنترل موجودی ساده با دریافت تدریجی نرخ دریافت 2000 و نرخ مصرف 1000 واحد در سال است. همچنین مدت زمان تحویل ۴ ماه و مقدار هر بار سفارش 100 واحد تعیین شده است. کدام یک از نقاط زیر می‌تواند یک نقطه سفارش مجدد باشد؟ (کنکور ۸۶)

r_h : موجودی در دست در زمان سفارش است



۱) t_1 یک نقطه سفارش مجدد است.

۲) t_2 یک نقطه سفارش مجدد است.

۳) t_1 , t_2 هر کدام یک نقطه سفارش مجدد هستند.

۴) هیچ کدام از این نقاط ممکن است نقطه سفارش مجدد نباشند.

حل : گزینه ۲ درست است.

$$T=\frac{Q}{D}=\frac{100}{1000}=0.1$$
$$m=\left[\frac{L}{T}\right]=\left[\frac{0.33}{0.1}\right]=3$$
$$\left.\begin{array}{l} t_d=T\left(1-\frac{D}{P}\right)=0.05 \\ L'=0.33-3\times0.1=0.03 \end{array}\right\}\ L'<t_d$$

بنابراین t_2 نقطه سفارش مجدد است

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

مثال: نرخ تقاضای محصولی $\frac{3}{4}$ نرخ تولید آن می‌باشد. اگر سایت آن باشد که پریود زمانی تولید و مصرف (طول یک سیکل) برابر 30 روز نرخ تولید 100 عدد در روز باشد مقدار تولید اقتصادی چقدر خواهد بود؟ (کنکور ۸۷)

۱) 1250 ۲) 1650 ۳) 2250 ۴) 2500

حل : گزینه ۳ درست است.

$$D=\frac{3}{4}P \qquad P=100 \ \rightarrow \ D=75$$

$$T=\frac{Q}{D} \ \rightarrow \ Q=75\times 30=2250$$

۵ـ مدل‌های چند محصولی و محدودیت‌دار

۵ـ۱ـ مدل چندمحصولی ساده

فرضیات این مدل مانند مدل EOQ است با این تفاوت که برنامه‌ریزی برای چند محصول انجام می‌پذیرد.

هدف مدل تعیین مقدار سفارش بهینه برای هر محصول $\left(Q_j^*\right)$ و نقطه سفارش بهینه $\left(r_{h_j}^*, r_j^*\right)$ با کمینه کردن هزینه‌هاست. این هدف به‌صورت زیر قابل بیان است.

$$\min Z=\sum_j \left(\frac{D_j A_j}{Q_j}+\frac{h_j Q_j}{2}+C_j D_j\right)$$

برای یافتن می‌نیمم Z از تابع فوق بر حسب Q_j مشتق گرفته و Q_j^* را می‌یابیم.

$$\frac{\delta Z}{\delta Q_j}=0 \ \Rightarrow \ Q_j^*=Q_{\omega j}=\sqrt{\frac{2D_j A_j}{h_j}}$$

با توجه به Q_j^*های به‌دست آمده کل هزینه متغیر سالیانه برابر جمع هزینه‌های متغیر سالیانه هر کدام از محصولات است.

$$\text{کل هزینه متغیر سالیانه} = \sum_j \sqrt{2D_j A_j h_j}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، در این مدل چون هیچ‌گونه محدودیتی وجود ندارد و مانند این است که چند محصول را جداگانه برنامه‌ریزی کنیم.

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

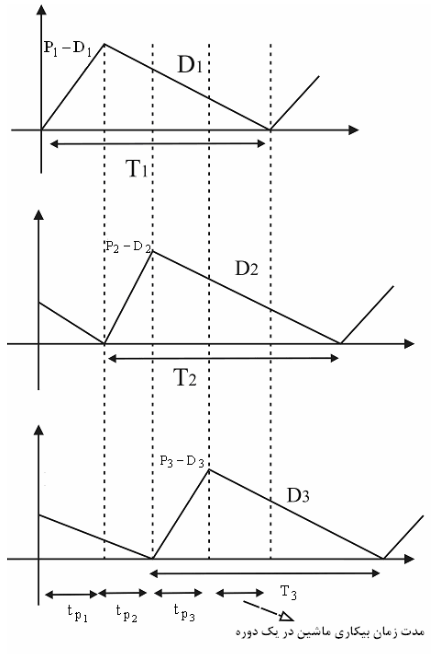
۵ـ۲ـ مدل چندمحصولی تولیدی

فرضیات این مدل مانند مدل چند محصولی ساده است با این تفاوت که:

۱ـ سفارش به تدریج به انبار تحویل می‌شود. $P = cte$

۲ـ کلیه محصولات توسط یک ماشین یا یک خط تولید، تولید می‌شوند.

هدف مدل تعیین مقدار تولید بهینه برای هر محصول $\left(Q_j^*\right)$ و نقطه سفارش بهینه $\left(r_{h_j}^*, r_j^*\right)$ با کمینه کردن هزینه‌هاست.



برای سادگی این مدل طوری برنامه‌ریزی می‌شود که مدت زمان دوره هر محصول برابر با یکدیگر باشد. یعنی فرض می‌کنیم، $\forall_j : T_j = T$

T_j : سیکل تولیدی محصول jام (مجموع زمان تولید و زمان مصرف در یک دوره)

$$T_j = \frac{Q_j}{D_j}$$

$$K(T) = \sum_j \left(\frac{D_j A_j}{Q_j} + \frac{h_j Q_j}{2}\left(1 - \frac{D_j}{P_j}\right) \right) \Rightarrow K(T) = \frac{\Sigma A_j}{T} + \frac{T}{2}\sum h_j D_j \left(1 - \frac{D_j}{P_j}\right)$$ کل هزینه متغیر سالیانه

در این مدل ابتدا باید T^* را محاسبه کرده و سپس از طریق آن Q_j^* را محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{dK(T)}{dT} = 0 \Rightarrow T^* = \sqrt{\frac{2\sum A_j}{\sum h_j D_j \left(1 - \frac{D_j}{P_j}\right)}}$$

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

Q_j^* توسط رابطه زیر محاسبه می‌گردد:

$$Q_j^* = T^* D_j$$

هزینه متغیر سالیانه بهینه را نیز می‌توان از روابط زیر به‌دست آورد:

$$K(T^*) = \sqrt{2\sum A_j \sum h_j D_j \left(1-\frac{D_j}{P_j}\right)} = \frac{2\sum A_j}{T^*} = T^* \sum h_j D_j \left(1-\frac{D_j}{P_j}\right)$$

نکته: از آنجا که دوره سفارش اقلام برای سفارش همزمان یکسان است بنابراین $T = \frac{Q_j}{D_j}$ برای تمام اقلام با هم برابر خواهد بود

بنابراین نسبت مقدار سفارش اقتصادی به مصرف سالیانه باید یکسان باشد.

۵ـ۲ـ۱ـ شرط لازم برای جواب‌دار بودن

$\frac{D_j}{P_j}$: درصد زمانی از سال که ماشین مشغول تولید محصول jام است.

$\frac{t_{p_j}}{T_j}$: درصد زمانی از یک دوره که ماشین مشغول تولید محصول jام است.

کسرهای فوق چون از جنس درصد هستند بنابراین واحد نداشته و در دوره یا سال بودن آن‌ها تفاوتی نمی‌کند و با هم برابرند.

$$\frac{t_{p_j}}{T_j} = \frac{\frac{Q_j}{P_j}}{\frac{Q_j}{D_j}} = \frac{D_j}{P_j}$$

درصد زمان کار ماشین (در سال یا دوره) = $\sum_j \frac{D_j}{P_j}$

درصد زمان بیکاری ماشین (در سال یا دوره) = $1-\sum_j \frac{D_j}{P_j}$

شرط جواب‌دار بودن مسئله این است که درصد زمان کار ماشین از یک کمتر باشد و یا به عبارتی درصد زمانی بیکاری ماشین از صفر بیشتر باشد.

$$1-\sum \frac{D_j}{P_j} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \sum \frac{D_j}{P_j} \leq 1$$

مدت زمان بیکاری ماشین در سال = $1-\sum_j \frac{D_j}{P_j}$

مدت زمان بیکاری در دوره= $\left(1-\sum_j \frac{D_j}{P_j}\right)T$ =

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

۵ـ۲ـ ۲ـ الگوریتم حل مدل

ابتدا شرط جواب‌دار بودن مدل را چک می‌کنیم:

$$\sum \frac{D_j}{P_j} \leq 1$$

اگر شرط فوق برقرار نباشد مدل جواب ندارد بنابراین امکان تولید این محصولات با یک ماشین وجود ندارد.

در صورتی که شرط فوق برقرار باشد، T^* از روابط ذکر شده محاسبه شده و سپس Q_j^* را به‌دست می‌آوریم.

مثال: در مدل چند محصولی با محدودیت منبع تولیدی وقتی که سه قلم کالا تولید می‌شود و از سیکل ثابت گردش استفاده می‌شود اگر A_1 (هزینه راه اندازه‌ی برای تولید محصول یک) کاهش پیدا کند. کدام حالت زیر رخ نمی‌دهد؟ (کنکور ۸۷)

۱)هزینه کل سیستم کاهش پیدا می‌کند.

۲) مقدار سفارش کالای اول کاهش پیدا می‌کند.

۳) هزینه‌های نگهداری سالیانه سیستم کاهش پیدا می‌کند.

۴) مقدار سفارش کالای دوم و سوم ممکن است افزایش پیدا کند.

حل : گزینه ۴ درست است.

در مدل چند محصولی با محدودیت منبع تولیدی مدت زمان یک دوره به صورت :

$$T^* = \sqrt{\frac{2\Sigma A_j}{\sum h_j D_j \left(1 - \frac{D_j}{P_j}\right)}}$$

$$Q_j^* = T_j^* . D_j$$

حال اگر A_1 کاهش یابد $\sum A_j$ کاهش یافته و Q_j^* , T^* هماهنگی کاهش می‌یابند.

مثال: در یک مدل دریافت تدریجی مصرف سالیانه 1000 واحد و نرخ دریافت در زمان‌های دریافت کالا 2000 واحد در سال است اگر EPQ برابر 200 واحد تعیین شده باشد و مدت زمان تحویل 0.1 سال باشد پس از گذشت 20 روز ($\frac{2}{3}$ ماه) از صدور سفارش موقعیت موجودی حدوداً چند واحد خواهد بود؟(کنکور ۸۶)

۱) 80 ۲) 100 ۳) 245 ۴) 280

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

حل : گزینه درست است.

موجودی در راه + موجودی در دست = موقعیت موجودی

$$T=\frac{Q}{D}=\frac{200}{1000}=0.2$$

0.055 سال $=20$ روز

$$m=\left[\frac{L}{T}\right]=\left[\frac{0.1}{0.2}\right]=0$$

$$L=0.1$$

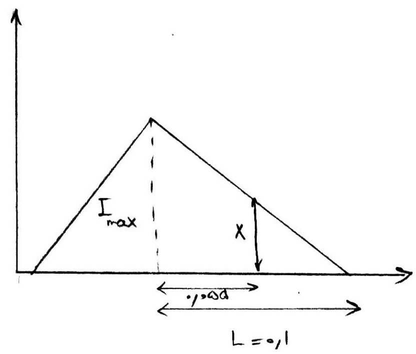
$$I_{max}=Q\left(1-\frac{D}{P}\right)=100$$

$X=$ موجودی در دست پس از گذشت 20 روز از صدور سفارش

$$45=\frac{0.045\times I_{max}}{0.1}=$$

$=(m+1)Q=200$ موجودی در راه پس از گذشت 20 روز از صدور سفارش

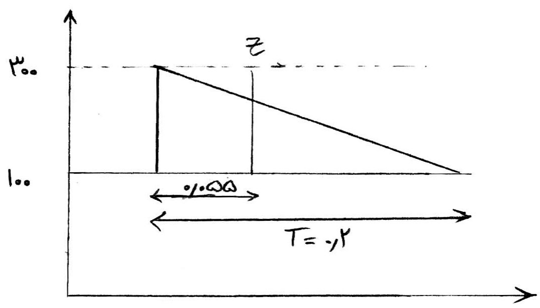
$=200+45=245$ موقعیت موجودی



راه دوم :

$$z=D\times0.055=1000\times0.055=55$$

$=300-Z=300-55=345$ موقعیت موجودی پس از گذشت 20 روز از صدور سفارش



یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

مثال: در یک سیستم موجودی سه قلم کالا تحت شرایط مدل ساده‌ی قطعی کنترل می‌شود که هزینه‌های نگهداری آن ناچیز است ولی محدودیت حداکثر سرمایه درگیر در موجودی به اندازه‌ی 10000 واحد پول مطرح است اگر مصرف سالیانه به ترتیب 100 , 130 , 150 و هزینه تهیه یک واحد کالا به ترتیب 62,50,42 واحد پول و هزینه‌های سفارش‌دهی به ترتیب 10,5,5 واحد پول برای کالاهای اول دوم و سوم باشد و دوره سفارش همه اقلام یکسان در نظر گرفته شود مقدار سفارش اقتصادی هر قلم چقدر خواهد بود؟ (کنکور ۸۷)

۱) $Q_1 \approx 64.9$, $Q_2 \approx 64.9$, $Q_3 \approx 64.9$
۲) $Q_1 \approx 59.5$, $Q_2 \approx 50$, $Q_3 \approx 80.65$
۳) $Q_1 \approx 62.6$, $Q_2 \approx 68.4$, $Q_3 \approx 63.7$
۴) $Q_1 \approx 50$, $Q_2 \approx 65$, $Q_3 \approx 75$

حل : گزینه ۴ درست است.

با توجه به نکته عنوان شده یعنی ثابت بودن نسبت ها داریم:

$$\frac{500}{100}=\frac{65}{130}=\frac{75}{150}=\frac{1}{2}=T$$

مثال: تقاضا برای محصولی 10,000 کیلو در سال است. این محصول را می‌توان در خود مؤسسه با نرخ تولید 30,000 کیلو در سال تولید و یا محصول را از بازار تهیه کرد. مقدار سفارش اقتصادی چه در حالت تولید و چه در حالت خرید برای محصول برابر 1000 کیلو است. اگر قیمت خرید یک محصول از بازار و هزینه تولید یک واحد محصول در موسسه یکسان باشد، به نظر شما کدام عبارت، صحیح است؟ (کنکور 88)

۱)تولید محصول اقتصادی‌تر است.

۲) ترکیبی از تولید و خرید بهتر است.

۳) برای تعیین اقتصادی بودن خرید یا تولید نیاز به عوامل (پارامترهای) بیشتر است.

۴) خرید محصول اقتصادی‌تر است به علاوه در دردسرهای تولید را نیز ندارد.

حل : گزینه ۱ درست است.

$$D=10,000 \qquad P=30,000$$

$$C_{\text{تولید}}=C_{\text{خرید}} \rightarrow h_{\text{تولید}}=h_{\text{خرید}}$$

$$Q_{\text{تولید}}=Q_{\text{خرید}}=1000 \rightarrow \sqrt{\frac{2AD}{h\left(1-\frac{D}{P}\right)}}=\sqrt{\frac{2AD}{h}}$$

$$A_{\text{تولید}}=A_{\text{خرید}}\left(1-\frac{D}{P}\right)$$

$$\frac{K_{\text{تولید}}}{K_{\text{خرید}}}=\frac{\sqrt{2ADh\left(1-\frac{D}{P}\right)}}{\sqrt{2ADh}}=\sqrt{\frac{A_{\text{خرید}}\left(1-\frac{D}{P}\right)^2}{A_{\text{خرید}}}}=1-\frac{D}{P}<1$$

تولید مناسب‌تر است.

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

۳ـ۵ـ مدل چندمحصولی تولیدی با زمان آماده‌سازی

در این حالت مدل چندمحصولی تولیدی را در حالتی که هر محصول برای هر بار تولید خود نیاز به زمان آماده‌سازی برابر با S_j دارد مورد بررسی قرار می‌دهیم.

S_j: زمان هر بار آماده‌سازی محصول jام

این زمان‌های آماده‌سازی در مدت زمان بیکاری ماشین در هر دوره جای می‌گیرد و در صورتی که از این زمان بیشتر گردد باید T^* را طوری تغییر داد که این زمان را در بر گیرد.

الگوریتم حل مدل:

T_0, T_{min} از روابط مربوطه به‌دست آورده ، T^* ماکزیمم این دو مقدار خواهد بود.

$$T^* = \max\{T_0, T_{min}\}$$

$$T_0 = \sqrt{\frac{2\sum A_j}{\sum h_j D_j\left(1-\frac{D_j}{P_j}\right)}}$$

$$T_{min} = \frac{\sum S_j}{1-\sum \frac{D_j}{P_j}}$$

مقدار سفارش بهینه برای هر محصول از فرمول روبرو محاسبه می‌گردد:

$$Q_j^* = T^* D_j$$

کل هزینه سالیانه مدل از رابطه زیر به‌دست خواهد آمد:

اگر $T^* = T_0$ باشد $$K = \sqrt{2\sum A_j \sum h_j D_j\left(1-\frac{D_j}{P_j}\right)}$$

اگر $T^* = T_{min}$ باشد $$K = \frac{\sum A_j}{T} + \frac{T}{2}\sum h_j D_j\left(1-\frac{D_j}{P_j}\right)$$

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

مثال: در یک سیستم سفارش تولید چند کالا، محدودیت منبع تولیدی مطرح است. با توجه به روابط زیر فرض کنید $2T_{min} = T^*$ باشد. (کنکور ۸۵)

$$T^* = \sqrt{\frac{2\sum A_j}{\sum h_j D_j\left(1-\frac{D_j}{P_j}\right)}} \quad , \quad T_{min} = \frac{\sum S_j}{1-\sum \frac{D_j}{P_j}}$$

S_j : زمان آماده سازی برای تولید کالای j ام

A_j : هزینه آماده سازی برای تولید کالای j ام

D_j : نرخ مصرف کالای j ام

P_j : نرخ تولید کالای j ام

h_j : هزینه نگهداری یک واحد کالای j ام در سال

کدام یک از عبارت‌های زیر صحیح است؟

۱)مقدار سفارش کالای j ام برابر $D_j \times T_{min}$ خواهد بود.

۲) با کاهش زمان‌های آماده سازی مقدار سفارش کالاها تغییر نمی‌کند.

۳) مقدار سفارش کالای j ام کمتر از $D_j \times T_{min}$ است.

۴) اگر زمان‌های آماده سازی بیش از دو برابر شوند مقدار سفارش کالای j ام برابر $D_j \times T^*$ خواهد بود.

حل : گزینه ۲ درست است.

$$2T_{min} = T^* = T_0 \quad \Rightarrow \quad T_0 > T_{min}$$

$T^* = Max\{T_{min}, T_0\} = T_0 \quad \Rightarrow \quad Q_j = D_j \times T_0 = D_j \times T^*$ گزینه ۱ غلط است

$T^* > T_{min} \quad \Rightarrow \quad D_j.T^* > D_j.T_{min} \quad \rightarrow$ گزینه ۳ غلط است

اگر زمان آماده سازی بیش از 2 برابر شود، T_{min} بیش از 2 برابر می‌شود. بنابراین T^* از T_0 بزرگتر خواهد شد و $Max\{T_{min}, T_0\}$ برابر T_{min} خواهد شد و $Q_j = D_j \times T_{min}$ گزینه ۴ غلط است.

گزینه ۲ : کاهش زمان آماده سازی موجب کاهش T_{min} خواهد شد و بنابراین $Max\{T_0, T_{min}\}$ برابر T_0 می‌شود، یعنی مقدار سفارش کالاها تغییر نمی‌کند.

w w w . i e u n . i r

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

۴ـ۵ـ مدل چندمحصولی با محدودیت فضا

فرضیات مدل مانند مدل چندمحصولی ساده است با این تفاوت که حداکثر فضای موجود در انبار برابر با F می‌باشد.

F: حداکثر فضای موجود در انبار

f_j : فضای اشغالی هر واحد محصول jام

در این صورت حداکثر فضای اشغالی محصول jام از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

حداکثر فضای اشغالی محصول jام = (حداکثر موجودی محصول jام) f_j

و محدودیت فضای انبار به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\sum_j f_j \text{(حداکثر موجودی محصول jام)} \le F \quad \Rightarrow \quad \sum_j f_j I_{\max_j} \le F$$

باید توجه کرد که برای هر مدل باید $I_{\max}$ مربوطه را قرار داد، به عنوان مثال برای مدل تولیدی $I_{\max} = Q\left(1-\frac{D}{P}\right)$ و برای مدل ساده قطعی، $I_{\max} = Q$ است.

در ادامه مدل را برای مدل چندمحصولی ساده با $I_{\max} = Q$ بررسی می‌کنیم و بنابراین مدل به دنبال یافتن جواب مسئله زیر است

$$\operatorname{Min} Z=\sum_j\left(\frac{D_j A_j}{Q_j}+\frac{h_j Q_j}{2}\right)$$

$$\sum f_j Q_j \le F$$

برای ارضای محدودیت فضا تابع هدف را با استفاده از ضریب لاگرانژ و تکنیک مربوط به آن به‌صورت زیر تغییر می‌دهیم.

$$\operatorname{Min} J = Z+\theta\left(F-\sum f_j Q_j\right)$$

و به روش زیر جواب‌های منحصر به فرد مسئله را به‌دست خواهیم آورد:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial J}{\partial \theta}=0 \\[2mm] \dfrac{\partial \delta}{\partial Q_j}=0\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases}\sum f_j \sqrt{\dfrac{2 D_j A_j}{h_j+2\theta^* f_j}}=F & (\mathrm{I}) \\[4mm] Q_j^*=\sqrt{\dfrac{2 D_j A_j}{h_j+2\theta^* f_i}} & (\mathrm{II})\end{cases}$$

بنابراین الگوریتم حل مدل به‌صورت زیر است:

ابتدا از محدودیت فضا صرف‌نظر می‌کنیم، و جواب مسئله $Q_{\omega j}=\sqrt{\dfrac{2 D_j A_j}{h_j}}$ خواهد بود. در صورتی که این جواب محدودیت فضا $\left(\sum f_j Q_j \le F\right)$ را راضی کند، جواب‌های به‌دست آمده جواب‌های مدل هستند و در غیر این صورت مقدار θ^* را با استفاده از روش لاگرانژ از معادله (I) به‌دست آورده و در معادله (II) جایگزین می‌کنیم و جواب مسئله را به‌دست می‌آوریم.

تذکر: از آن‌جا که به‌دست آوردن θ^* از روابط فوق به‌صورت سعی و خطاست روش فوق زمان حل زیادی را می‌طلبد بنابراین روش حل این‌گونه مسائل به‌صورت تستی، این است که در صورتی که بعد از محاسبات متوجه می‌شویم که $Q_{\omega j}$ محدودیت را رعایت نمی‌کنند، گزینه‌ای جواب مسئله است که محدودیت فضا را مساوی می‌کند.

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

نکته: در صورتی که $Q_{\omega j}$ محدودیت را ارضا نکند، جواب‌های بهینه به‌دست آمده الزاماً از $Q_{\omega j}$ها کمتر خواهد بود $\left(Q_j^* < Q_{\omega j}\right)$

مثال: تقاضا برای محصول 15000 واحد در سال و این محصول با نرخ 20000 واحد در سال تولید می‌شود. اگر به علت محدودیت فضا نتوان بیشتر از 1000 واحد از محصول را در انبار نگهداری نمود، آنگاه به نظر شما حداکثر مقدار سفارش اقتصادی از چه حد بیشتر نمی‌تواند باشد؟ (کنکور ۸۸)

۱) $Q^* \le 1000$ ۲) $Q^* \le 1500$ ۳) $Q^* \le 4000$ ۴) $Q^* \le 5000$

حل : گزینه ۳ درست است.

$$D = 15000 \quad P = 20000$$

$$I_{max} \le 1000 \ \rightarrow \ Q\left(1-\frac{D}{P}\right) \le 1000 \ \rightarrow \ Q \le 4000$$

۵ـ۵ـ مدل چندمحصولی با محدودیت سرمایه درگیر موجودی

فرضیات مدل مانند مدل چندمحصولی ساده است با این تفاوت که حداکثر سرمایه موجود برای موجودی برابر با X می‌باشد.

X : حداکثر سرمایه درگیر موجودی

محدودیت سرمایه درگیر موجودی به‌صورت زیر است:

$$\sum C_j \ (\text{حداکثر موجودی محصول j ام}) \le X \ \Rightarrow \ \sum_j C_j I_{max\,j} \le X$$

برای مدل قطعی ساده $I_{max} = Q$ است و محدودیت به‌صورت $\sum_j C_j Q_j \le X$ است. حل مدل مانند مدل محدودیت فضا است با این تفاوت که مقدار β^* از رابطه (I) در زیر محاسبه شده و در رابطه‌های (II) جایگزین می‌گردد.

$$\sum C_j \sqrt{\frac{2A_j D_j}{h_j + 2\beta^* C_j}} = X \qquad (I)$$

$$Q_j^* = \sqrt{\frac{2A_j D_j}{h_j + 2\beta^* C_j}} \qquad (II)$$

تذکر : مانند مدل محدودیت فضا در صورتی که بعد از محاسبات متوجه شویم که $Q_{\omega j}$ها محدودیت را ارضا نمی‌کنند، گزینه‌ای جواب مسئله است که محدودیت سرمایه درگیر موجودی را مساوی کند.

نکته: در صورتی که $Q_{\omega j}$ها محدودیت را ارضا نکنند، جواب‌های بهینه به‌دست آمده مانند مدل محدودیت فضا، الزاماً از $Q_{\omega j}$ها کمتر خواهند بود. $\left(Q_j^* < Q_{\omega j}\right)$

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

نکته: اگر ضریب لاگرانژ موجود باشد یعنی محدودیت مساوی شده است:

w w w . i e u n . i r

$$\sum C_j \sqrt{\frac{2AD}{\left(i+2\beta^*\right)C_j}} = X \qquad \sum \sqrt{\frac{2AD\,C_j}{\left(i+2\beta^*\right)}} = X$$

$$\sum \sqrt{\frac{2AD_i\,h_j}{i\left(i+2\beta^*\right)}} = X \qquad \sum \sqrt{2ADh} = X\sqrt{i\left(i+2\beta^*\right)}$$

مثال: در یک سیستم کنترل موجودی با دریافت تدریجی P و D به ترتیب نرخ دریافت و نرخ مصرف هستند. اگر A و h هزینه‌های هر بار سفارش و نگهداری یک واحد کالا در سال و C قیمت هر واحد کالا باشد با فرض حداکثر سرمایهٔ درگیر در موجودی برابر M واحد پول، مقدار اقتصادی هر بار سفارش از چه رابطه‌ای به دست می‌آید؟ (کنکور ۸۵)

$$EPQ = \sqrt{\frac{2DA}{h\left(1-\frac{D}{P}\right)}} \quad \left(Q^* = ?\right)$$

۱) $Q^* = \dfrac{M}{c\left(\frac{1}{D}-\frac{1}{P}\right)}$

۲) اگر $C \times EPQ > M$ باشد آنگاه $Q^* = EPQ$

۳) اگر $C \times EPQ \times \left(1-\frac{D}{P}\right) < M$ باشد آنگاه $Q^* = EPQ$

۴) اگر $C \times EPQ < M$ باشد $Q^* = \dfrac{M}{C\left(\frac{1}{D}-\frac{1}{P}\right)}$

حل : گزینه ۳ درست است.

$$CI_{max} \le M \;\rightarrow\; CQ\left(1-\frac{D}{P}\right) \le M$$

اگر مقدار $Q = EPQ$ محدودیت بالا را ارضا کند، جواب مسأله است.

مثال: در یک مدل موجودی با دریافت آنی کنترل سه قلم کالا مطرح است و هزینهٔ نگهداری هر واحد کالا با نرخ هزینهٔ نگهداری 20% محاسبه می‌شود اگر محدودیت حداکثر سرمایهٔ درگیر در موجودی به صورت $20Q_1 + 10Q_2 + 60Q_3 \le 20000$ مطرح باشد و ضریب لاگرانژ 0.025 به دست آمده باشد کمترین هزینهٔ ممکن در صورتی که بتوان بودجهٔ کافی (به هر مقدار لازم) تهیه کرد چقدر خواهد بود؟ (کنکور ۸۶)

۱) حدوداً 4500 واحد پول
۲) حدوداً 8000 واحد پول
۳) حدوداً 10000 واحد پول
۴) حدوداً 20000 واحد پول

حل : گزینه ۱ درست است.

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

با توجه به نکته بالا مقدار بهینه‌ی هزینه متغیر سالیانه برابراست با :

$$K^*=\sum\sqrt{2ADh}=20000\times\sqrt{0.2\left(0.2+2\times0.025\right)}=4472.1\simeq4500$$

۵ـ۶ـ مدل چندمحصولی با محدودیت تعداد دفعات سفارش در سال

فرضیات مدل مانند مدل چندمحصولی ساده است با این تفاوت که تعداد دفعات سفارش در سال حداکثر می‌تواند برابر ℓ باشد.

ℓ : حداکثر تعداد دفعات سفارش در سال برای کلیه محصولات

$\frac{D_j}{Q_j}$: تعداد دفعات سفارش در سال برای محصول jام.

محدودیت تعداد دفعات سفارش در سال به‌صورت زیر است:

$$\sum\frac{D_j}{Q_j}\leq\ell$$

روش حل مدل مانند مدل محدودیت فضا است، با این تفاوت که از رابطه (I) مقدار α^* را به‌دست آورده و در رابطه‌های (II) جایگزین می‌کنیم.

$$\sum\sqrt{\frac{h_i D_j}{2\left(A_j+\alpha^*\right)}}=\ell \qquad \text{(I)}$$

$$Q_j^*=\sqrt{\frac{2D_j\left(A_j+\alpha^*\right)}{h_j}} \qquad \text{(II)}$$

تذکر: مانند مدل‌های محدودیت‌دار ذکر شده، در صورتی که بعد ازمحاسبات متوجه شویم که $Q_{\omega j}$ ها محدودیت را ارضا نمی‌کنند، گزینه‌ای جواب مسئله است که محدودیت را مساوی می‌کند.

نکته: برخلاف دو مدل گذشته در صورتی که $Q_{\omega j}$ها محدودیت را ارضا نکنند، جواب‌های بهینه به‌دست آمده الزاماً از $Q_{\omega j}$ ها بزرگتر خواهند بود $\left(Q_j^*>Q_{\omega j}\right)$

۵ـ۷ـ مدل چند محصولی در حالت الزام سفارش همزمان محصولات

فرضیات مدل مانند مدل چندمحصولی ساده است با این تفاوت که محصولات باید با هم سفارش داده شوند. در این صورت شرط یکسان بودن سیکل بهینه تمامی محصولات به مساله تحمیل خواهد شد.

$$\forall_j \quad T_j=T=\frac{Q_j}{D_j}$$

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

بنابراین تابع هدف مدل به‌صورت زیر است:

$$\min Z=\sum\left(\frac{D_j A_j}{Q_j}+\frac{h_j Q_j}{2}\right) \Rightarrow K(T)=\frac{\sum A_j}{T}+\frac{T}{2}\sum h_j D_j$$

و T^* از رابطه زیر به‌دست می‌آید.

$$\frac{dK(t)}{dT}=0 \Rightarrow T^*=\sqrt{\frac{2\sum A_j}{\sum h_j D_j}}$$

و Q_j^* از رابطه زیر محاسبه می‌گردد.

$$Q_j^*=T^*D_j$$

و در انتها کل هزینه‌های سالیانه را محاسبه می‌نماییم.

$$k(T^*)=\sqrt{2\sum A_j \sum h_j D_j}$$

مثال: در مدل تولید چندمحصولی توسط یک منبع تولید همراه با زمان آماده‌سازی برای هر بار تولید محصول، مسئله وقتی جواب دارد که:

۱) کسر بیکاری ماشین بزرگتر یا مساوی صفر باشد.

۲) زمان بیکاری ماشین بزرگتر از مجموع زمان‌های آماده‌سازی می‌باشد.

۳) نسبت مجموع زمان‌های آماده‌سازی به کسر بیکاری ماشین بزرگتر از یک باشد.

۴) نسبت مجموع زمان‌های آماده‌سازی به کسر بیکاری ماشین کوچکتر از یک باشد.

حل: گزینه ۱ درست است.

همان‌طور که در مدل چندمحصولی تولیدی ذکر گردید تنها شرط جواب‌دار بودن مسئله این است که $\sum \frac{D_j}{P_j}\le 1$ باشد یا $1-\sum \frac{D_j}{P_j}\ge 0$ باشد که همان کسر بیکاری ماشین است.

نکته: در صورتی که در یک مدل چند محصولی بیش از یک محدودیت ارایه گردد بـرای حـل مـدل بایـد یـک محـدودیت را در نظر بگیریم و جواب‌های مدل را به‌دست آوریم، چنان‌چه جواب حاصل محدودیت حذف شده را ارضا کند جواب مدل است. در غیر این صورت گزینه‌ای جواب مدل است که محدودیت‌های در نظر گرفته شده را مساوی کند.

نکته: در صورتی که در مدلی محدودیت‌دار، محدودیتی غیر از مدل‌های عنوان شده برای مدلی تک‌محصولی ارایه گردد، ابتدا محدودیت را بر اساس متغیر خواسته شده توسط مسئله می‌نویسیم و بدون در نظر گرفتن محدودیت مقدار بهینه متغیر را به‌دست می‌آوریم. در صورتی که محدودیت را رعایت کرد، جواب مسئله است. در غیر این صورت مقداری که محدودیت را مساوی کند جواب مساله می‌باشد.

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

مثال: در یک مدل کنترل موجودی چند کالایی، وجود کدام محدودیت ممکن است موجب افزایش مقدار سفارش اقتصادی گردد؟ (کنکور ۸۹)

۱)تعداد دوره‌های سفارش
۲) فضای انبار
۳) سرمایه درگیر در موجودی
۴) تعداد واحد در محصول

حل : گزینه ۱ درست است.

در صورتی که محدودیت تعداد دوره‌های سفارش داشته باشیم ممکن است مجبور شویم مقدار سفارش را افزایش دهیم تا با دفعات کم سفارش تقاضا پوشش داده شود.

یادداشت:

....
....
....
....

www.ieun.ir

۶ـ مدل‌های تخفیف

تخفیف یعنی قیمت هر واحد کالا (C) با افزایش مقدار سفارش کاهش می‌یابد.

تخفیف دو نوع کلی و نموی (افزایشی) دارد:

- **تخفیف کلی:** در این حالت تخفیف بر کل کالاها به‌صورت یکسان اعمال می‌شود. به عبارت دیگر در این حالت تمام واحدهای خریداری شده با یک قیمت واحد محصول خریداری می‌شوند.
- **تخفیف نموی یا افزایشی:** در این حالت تخفیف بر هر محدوده به‌صورت جداگانه اعمال می‌شود به عبارت دیگر در این حالت تمامی واحدهای خریداری شده با یک قیمت واحد محصول خریداری نمی‌شوند و تخفیف بر اساس مقادیر داخل محدوده تخفیف برای هر واحد محصول تعریف می‌شود.

کل هزینه خرید دو نوع تخفیف به‌صورت جدول زیر می‌باشد:

شماره محدوده	محدوده تخفیف	قیمت واحد کالا	کل هزینه خرید (تخفیف کلی)	کل هزینه خرید (تخفیف نموی)
0	$q_0 \le Q < q_1$	C_0	C_0Q	CoQ
1	$q_1 \le Q \le q_2$	C_1	C_1Q	$Co(q_1 - q_0) + C_1(Q - q_1)$
2	$q_2 \le Q < q_3$	C_2	C_2Q	$Co(q_1 - q_0) + C_1(q_2 - q_1) + C_2(Q - q_2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
j	$q_j \le Q < q_{j+1}$	C_j	C_jQ	$\sum_{i=1}^{j} C_{i-1}(q_i - q_{i-1}) + C_j(Q - q_j)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$q_n \le Q$	C_n	C_nQ	$\sum_{i=1}^{n} C_{i-1}(q_i - q_{i-1}) + C_n(Q - q_n)$

w w w . i e u n . i r

همان‌طور که ذکر شد در تخفیف با افزایش مقدار سفارش، قیمت هر واحد کالا کاهش می‌یابد یعنی:

$C_0 > C_1 > \ldots > C_n$

کل هزینه خریدارا با $R(Q)$ نشان می‌دهند. و به q_j ها نقاط تخفیف یا نقاط شکست یا نقاط تغییر قیمت می‌گویند.

نمودار هزینه خرید برابر تخفیف کلی به شکل زیر است. این نمودار به‌صورت گسسته می‌باشد و امتداد تمام خطوط از مبدأ مختصات می‌گذرد. شیب خطوط نیز برابر قیمت خرید است.

یادداشت:

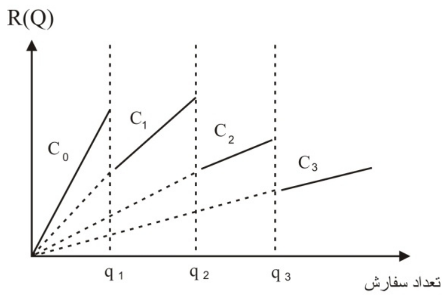
....

....

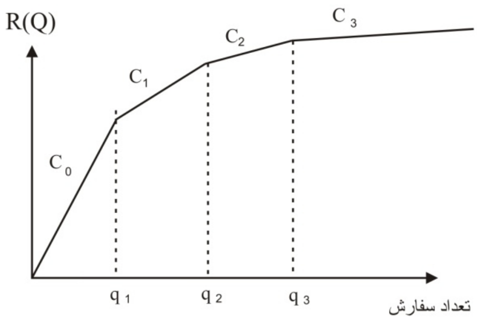
....

....

www.ieun.ir



نمودار هزینه خرید تخفیف نموی به‌صورت پیوسته است. این نمودار در شکل زیر مشخص گشته است. شیب خطوط برابر قیمت خرید است.



نکته: اگر قیمت‌ها یکسان باشد، به ازای یک Q مشخص، هزینه خرید در تخفیف نموی بیشتر از تخفیف کلی است.

۶ـ ۱ـ مدل تخفیف کلی

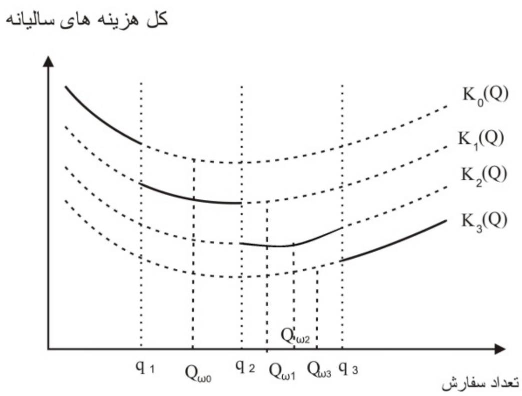
فرضیات مدل مانند مدل EOQ است، با این تفاوت که تخفیف از نوع کلی وجود دارد.

هدف مدل تعیین مقدار سفارش بهینه (Q^*) و نقطه سفارش بهینه با کمینه کردن هزینه‌هاست.

همان‌طور که هزینه خرید در هر محدوده متفاوت است، تابع کل هزینه‌ی سالیانه نیز برای هر محدوده متفاوت و به‌صورت زیر است:

$$k_j(Q) = \frac{DA}{Q} + \frac{h_j Q}{2} + C_j D \, , \, h_j = iC_j + \omega \quad , \quad q_j \le Q \le q_{j+1}$$

بنابراین مانند هزینه خرید نمودار کل هزینه‌ی سالیانه سیستم برای مدل تخفیف کلی نیز گسسته می‌باشد.



یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

بهترین نقطه تابع محدوده j ام با مشتق‌گیری از $k_j(Q)$ به دست می‌آید و به‌صورت زیر است:

$$Q_{\omega j}=\sqrt{\frac{2DA}{h_j}}$$

اما ممکن است این نقطه داخل محدوده خود نباشد بنابراین بهترین نقطه قابل قبول محدوده j ام به‌صورت زیر تعیین می‌گردد.

ـ اگر $Q_{\omega j}$ از نقطه تخفیف انتهایی محدوده $\left(q_{j+1}\right)$ بیشتر باشد، بهترین نقطه قابل قبول محدودهٔ j ام $\left(Q_j^*\right)$ برابر q_{j+1} می‌باشد.

$$q_{j+1}<Q_{\omega j} \quad \Rightarrow \quad Q_j^*=q_{j+1}$$

ـ اگر $Q_{\omega j}$ بین نقاط تخفیف ابتدایی و انتهایی محدوده خود باشد، بهترین نقطه قابل قبول محدوده برابر $Q_{\omega j}$ می‌باشد.

$$q_j \le Q_{\omega j}<q_{j+1} \quad \Rightarrow \quad Q_j^*=Q_{\omega j}$$

ـ اگر $Q_{\omega j}$ از نقطه تخفیف ابتدایی محدوده $\left(q_j\right)$ کمتر باشد، بهترین نقطه قابل قبول محدوده j ام $\left(Q_j^*\right)$ برابر q_j می‌باشد.

$$Q_{\omega j}<q_j \quad \Rightarrow \quad Q_j^*=q_j$$

بنابراین الگوریتم حل مدل به‌صورت زیر خواهد بود.

از محدوده n ام (محدوده آخر) ابتدا $Q_{\omega j}$ و سپس Q_j^* را برای محدوده محاسبه می‌کنیم. این کار را تا زمانی ادامه می‌دهیم که برای اولین بار $Q_{\omega j}$ داخل محدوده قابل قبول تخفیف بیافتد $\left(Q_j^*=Q_{\omega j}\right)$ در این جا متوقف می‌شویم و برای نقاط قابل قبول بهینه به‌دست آمده، $k_j\left(Q_j^*\right)$ را محاسبه می‌کنیم، کمترین هزینه، هزینه بهینه سالیانه و نقطه متناظر با آن نقطه بهینه مدل است.

$$K\left(Q^*\right)=\min K_j\left(Q_j^*\right)$$

تذکر : علت متوقف شدن زمانی‌که برای اولین بار $Q_{\omega j}$ داخل محدوده قابل قبول تخفیف می‌افتد این است که کل هزینه سالیانه برای $Q_{\omega j}$ از تمام هزینه‌های $Q_{\omega j}$های سمت چپ خود کمتر است و نیازی به محاسبه هزینه آنها نمی‌باشد.

بنابراین نقطه بهینه در مدل تخفیف کلی تنها می‌تواند نقطه ویلسون و نقاط تغییر قیمت در سمت راست نقطه ویلسون باشد.

نکته: روابط زیر برای $Q_{\omega j}$ و $K\left(Q_{\omega j}\right)$ های تمام محدوده‌ها برقرار است.

$$Q_{\omega_0} \le Q_{\omega_1} \le Q_{\omega_2} \le \ldots \le Q_{\omega_n}$$

$$K_0\left(Q_{\omega_0}\right)>K_1\left(Q_{\omega_1}\right)>K_2\left(Q_{\omega_2}\right)>\ldots>K_n\left(Q_{\omega_n}\right)$$

نکته: همان‌طور که ذکر گردید. مجموعه قابل بررسی نقاط بهینه برای به دست آوردن Q^*، نقطه ویلسون و نقاط تغییر قیمت بعد از آن است یعنی:

$$Q^*=\left\{Q_{\omega_2}, q_3, q_4 \ldots\right\}$$

یادداشت:

....

....

....

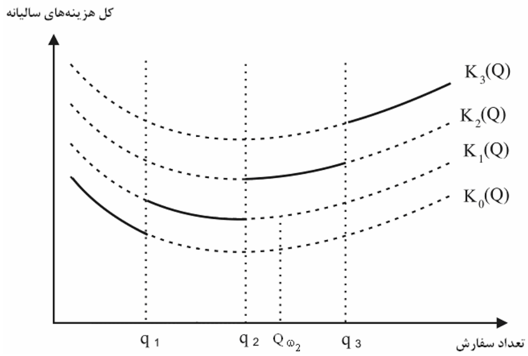
....

www.ieun.ir

نکته: اگر کل هزینه نگهداری سالیانه را TCH و کل هزینه سفارش‌دهی سالیانه را TCS بنامیم. در نقطه Q_{ω_2}، $TCS = TCH$ و در نقاط ... , q_3 , q_2 از آنجا که بزرگتر از $Q_{\omega j}$ مربوط به خود هستند $TCH > TCS$ است پس می‌توان گفت در نقطه بهینه مدل تخفیف رابطه بین هزینه نگهداری و هزینه سفارش‌دهی سالیانه به‌صورت زیر است:

$TCH \geq TCS$

نکته: در یک مدل خلاف تخفیف کلی اگر به ازای افزایش مقدار سفارش، قیمت واحد کالا نیز افزایش یابد یعنی $C_0 < C_1 < C_2 < ... < C_n$ روش حل مدل مشابه تخفیف کلی است، با این تفاوت که از محدوده اول شروع می‌کنیم و Q_j^*را تا آنجا که $Q_j^* = Q_{\omega j}$ شود ادامه می‌دهیم و.... در این حالت ترتیب نمودارها برعکس می‌گردد یعنی نمودار هزینه کل به‌صورت زیر خواهد بود:



در این حالت مجموعه نقاط بهینه قابل بررسی، نقطه ویلسون و نقاط تغیر قیمت در سمت چپ نقطه ویلسون است یعنی:

$Q^* = \{Q_{\omega_2}, q_2, q_1\}$

همچنین رابطه بین هزینه نگهداری و هزینه سفارش‌دهی سالیانه به‌صورت زیر است:

$TCH \leq TCS$

نکته: در صورتی که تخفیف کلی برای سایر پارامترهای مدل مثل ... , h , A باشد، دقیقاً مانند روش حل مدل تخفیف کلی عمل می‌کنیم با این تفاوت که k_j , Q_{ω_j} را بر اساس پارامتر تغییر یافته محاسبه می‌کنیم.

مثال: در مدل تخفیف کلی (تخفیف برای کلیه واحدهای خریداری شده) اطلاعات زیر در دسترس است.

$$Q_w^j = \sqrt{\frac{2DA}{h_j}}$$

تابع هزینه سالیانه	Q_w^j	مقدار سفارش
$K_0(Q)$	۱۳۵۰	$0 < Q < 1000$
$K_1(Q)$	۱۸۱۰	$1000 \leq Q < 2000$
$K_2(Q)$	۲۲۱۰	$2000 \leq Q < 3000$
$K_3(Q)$	۳۴۸۰	$3000 \leq Q < 4000$
$K_4(Q)$	۳۹۵۰	$4000 \leq Q < \infty$

w w w . i e u n . i r

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

مثال: کدام عبارت، صحیح است؟ (کنکور ۸۸)

۱) مقدار سفارش اقتصادی با مقایسه $K_4(3950)$, $K_3(3000)$, $K_2(2210)$ حاصل می‌شود.

۲) مقدار سفارش اقتصادی با مقایسه $K_4(4000)$, $K_3(3480)$ حاصل می‌شود.

۳) مقدار سفارش اقتصادی با مقایسه $K_3(3950)$, $K_3(3480)$ حاصل می‌شود.

۴) مقدار سفارش اقتصادی با مقایسه اطلاعات فوق قابل حصول نیست.

حل : گزینه ۲ درست است.

$$Q_{\omega_j}=\sqrt{\frac{2AD}{h_j}}$$

افزایش Q_{ω_j} با افزایش مقدار سفارش نشاندهنده این نکته است h_j با افزایش مقدار سفارش کاهش یافته. بنابراین مقدار سفارش اقتصادی با مقایسه هزینه نقطه ویلسونی که در محدوده است. و نقاط شکست بعد از آن یعنی 3480 و 4000 .

مثال: در مدل تخفیف کلی (تخفیف برای کلیه داده‌های خریداری شده) در صورتی که مقدار سفارش اقتصادی ناحیه‌ای منطبق بر نقطه بهینه تابع هزینه آن ناحیه در فاصله صفر و بی نهایت باشد، آن گاه کدام عبارت، صحیح است؟ (کنکور ۸۸)

۱) تعیین محدوده مقدار سفارش اقتصادی بستگی به پارامترهای دیگر مسئله دارد.

۲) مقدار سفارش اقتصادی هرگز نمی‌تواند از این مقدار کمتر باشد.

۳) مقدار سفارش اقتصادی صد در صد از این مقدار بیش‌تر است.

۴) نتیجه خاصی از اطلاعات فوق حاصل نمی‌شود.

حل : گزینه ۲ درست است.

نکته : مقدار سفارش اقتصادی در تخفیف کلی (قیمت با افزایش مقدار سفارش کالا می‌یابد) از مقایسه‌ی هزینه نقطه ویلسونی و نقاط شکست سمت راست آن به دست می‌آید پس از نقطه‌ی ویلسون نمی‌توان کمتر باشد.

۶ـ ۲ ـ مدل تخفیف نموی یا افزایشی

فرضیات مدل مانند مدل EOQ است با این تفاوت که تخفیف از نوع نموی وجود دارد.

هدف مدل تعیین مقدار سفارش بهینه (Q^*) و نقطه سفارش بهینه با کمینه کردن هزینه‌هاست.

همان‌طور که ذکر شد تابع کل هزینه سالیانه در مدل‌های تخفیف برای هر محدوده متفاوت است و در مدل تخفیف نموی به‌صورت زیر است.

$$k_j(Q)=\frac{DA}{Q}+h_j\frac{Q}{2}+\bar{C}D\,,\,h_j=i\bar{C}\qquad q_j\le Q<q_{j+1}$$

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

که در آن $\bar{C} = \frac{R(Q)}{Q}$ متوسط قیمت خرید است و

$$R(Q) = \sum_{i=1}^{j} C_{i-1}(q_i - q_{i-1}) + C_j(Q - q_j)$$

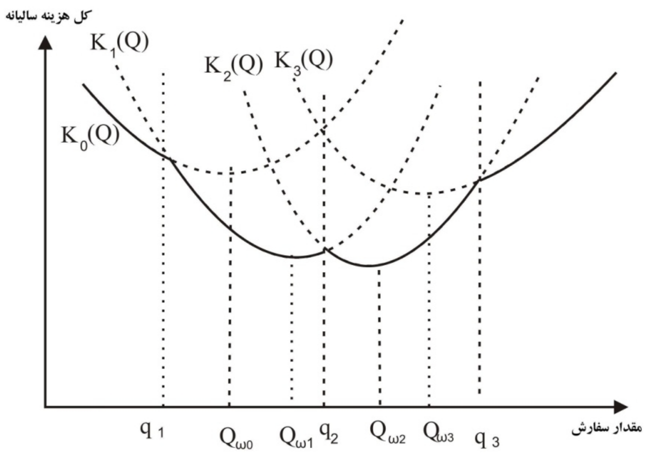
برابر کل هزینه خرید Q کالاست. به همین صورت می‌توان کل هزینه خرید تا نقطهٔ شکست q_j را به‌صورت $R(q_j)$ را به‌صورت $R(q_j)$ و با استفاده از رابطه بالا محاسبه کرد. بنابراین رابطه کل هزینه سالیانه برای محدوده j ام به‌صورت زیر به‌دست خواهد آمد:

$$K_j(Q) = \frac{D}{Q}\left(A + R(q_j) - C_j q_j\right) + iC_j\frac{Q}{2} + C_j D + \frac{iR(q_j)}{2} - \frac{iC_j q_j}{2}$$

بر اساس این تابع و با مشتق‌گیری از آن مقدار بهینه هر محدوده به‌صورت زیر خواهد بود:

$$Q_{\omega j} = \sqrt{\frac{2D\left(A + R(q_j) - C_j q_j\right)}{iC_j}}$$

نمودار هزینه کل سالیانه مدل تخفیف نموی مانند نمودار هزینه خرید آن پیوسته است و به‌صورت شکل زیر خواهد بود.



نکته: ثابت می‌گردد که نقاط تخفیف هیچ‌گاه نمی‌توانند نقطه بهینه باشند بنابراین نقطه بهینه از بین $Q_{\omega j}$ هایی خواهد بود که در محدوده خود قرار گیرند.

بر این اساس الگوریتم حل مدل به‌صورت زیر خواهد بود:

برای تمامی محدوده‌ها Q_{ω_j} را به‌دست می‌آوریم. هر محدوده‌ای که Q_{ω_j} آن داخل محدوده تخفیف افتد، $Q_j^* = Q_{\omega_j}$ می‌گردد. سایر محدوده‌ها نقاط بهینه قابل قبول ندارند. نقاط بهینه قابل قبول به‌دست آمده را در تابع هزینه مرتبط گذاشته و $k_j(Q_j^*)$ را به‌دست می‌آوریم. کمترین هزینه، هزینه بهینه سالیانه و Q_j^* متناظر با آن، نقطه بهینه است.

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

مثال: در یک مدل تخفیف نموی (Incerementai Discount) اگر مقدار خرید مساوی و یا کمتر از q_1 باشد هزینه هر واحد C_0 و اگر مقدار خرید بیشتر از q_1 باشد، هزینه هر واحد برای واحدهای اضافه بر q_1 برابر C_1 $(C_1 < C_0)$ است. مقدار بهینه سفارش را با Q_0 نشان دهید. در این صورت به نظر شما کدام‌یک از عبارات زیر صحیح است؟

۱) Q_0 همیشه کوچک‌تر از q_1است.

۲) Q_0 بزرگتر از q_1 است.

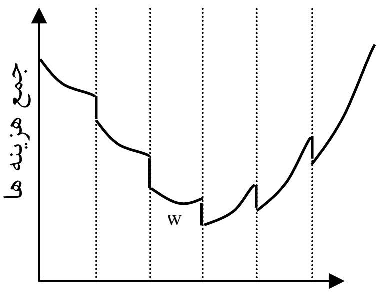
۳) Q_0 نمی‌تواند برابر q_1 باشد.

۴) برای تعیین Q_0 باید هزینه سیستم در نقطه q_1 محاسبه شود.

حل : گزینه ۳ درست است.

همان‌طور که ذکر شد نقطه بهینه تخفیف نموی (Q_0) نمی‌تواند برابر نقاط تخفیف (مانند q_1) گردد.

مثال: در صورتی‌که فروشنده حاضر باشد با زیاد شدن مقدار هر بار سفارش، تخفیفی در قیمت واحد کالا قائل شود، آنگاه منحنی جمع هزینه موجودی‌ها در سال (شامل هزینه سفارشات + هزینه نگهداری + هزینه خرید) مطابق نمودار خواهد بود. نقطه W را نقطه ویلسون می‌نماییم. برای یافتن مقدار اقتصادی هر بار سفارش (EOQ) باید مقدار جمع هزینه موجودی‌ها را در نقاط زیر حساب نموده و با یکدیگر مقایسه نمود:



مثال:

۱) فقط نقطه ویلسون

۲) نقطه ویلسون و نقاط تغییر قیمت در سمت چپ نقطه ویلسون

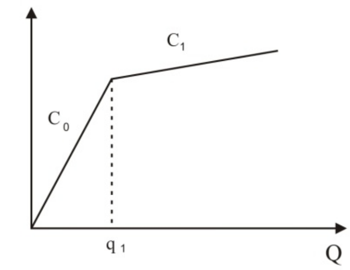
۳) نقطه ویلسون و نقاط تغییر قیمت در سمت راست نقطه ویلسون

۴) نقطه ویلسون و نقاط تغییر قیمت در سمت راست و چپ نقطه ویلسون

حل : گزینه ۳ درست است.

از نمودار مشخص است که تخفیف به‌صورت کلی می‌باشد. بنابراین همان‌طور که ذکر شد نقطه بهینه یکی از نقاط ویلسون و یا نقاط تغییر قیمت در سمت راست نقطه ویلسون است.

مثال: در یک مسأله تخفیف اگر مقدار هر بار خرید برابر Q باشد، آنگاه مقدار هزینه مواد در هر بار $C(Q)$ در شکل رسم شده است. اگر قیمت هر واحد مواد را با C نمایش دهیم، و مقدار EOQ را به ازای $C = C_0$ با $Q_\omega(0)$و به ازای $C = C_1$ با $Q_\omega(1)$ نشان دهیم. فرض کنید $q_1 < Q_\omega(0)$ و نیز $q_1 < Q_\omega(1)$ است. با توجه به این اطلاعات کدام عبارت صحیح است؟



یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

۱) برای پیدا کردن مقدار سفارش بهینه به هیچ‌گونه محاسبه هزینه سالیانه نیاز نیست.

۲) برای پیدا کردن مقدار سفارش بهینه باید هزینه سالیانه سیستم در نقطه q_1 محاسبه شود.

۳) برای پیدا کردن مقدار سفارش بهینه باید هزینه سالیانه سیستم در نقطه $Q_\omega(1)$ محاسبه شود.

۴) برای پیدا کردن مقدار سفارش بهینه باید هزینه سالیانه سیستم در نقطه $Q_\omega(0)$ محاسبه شود.

حل : گزینه ۱ درست است.

شکل نمودار هزینه خرید بیان‌گر این مطلب است که تخفیف از نوع نموی است. بنابراین نقاط بهینه، نقاط ویلسونی هستند که در محدوده تخفیف خود قرار گیرند. $q_1 < Q_\omega(0)$ است بنابراین در محدوده تخفیف خود $\left(Q < q_1\right)$ قرار ندارد. $q_1 < Q_\omega(1)$ است یعنی در محدوده تخفیف خود $\left(Q > q_1\right)$ قرار دارد و از آنجا که تنها $Q_\omega(1)$ در محدوده تخفیف خود قرار دارد نیازی به محاسبه هزینه سالیانه‌ای نیست و $Q_\omega(1)$ نقطه بهینه مدل است.

مثال: شرط لازم برای این که مقدار اقتصادی سفارش در روش تخفیف افزایشی و تخفیف کلی با نقاط تخفیف و قیمت‌های مشابه و هزینه‌های سفارش دهی و نگهداری یکسان، برابر باشد با ؟ (با فرض این که هزینه نگهداری مستقل از قیمت است.) (کنکور ۸۷)

۱) $\sqrt{\frac{2DA}{h}} > q_n$

۲) $\sqrt{\frac{2D\left(A+R\left(q_n\right)-c_n q_n\right)}{h}} > q_n$

۳) $\sqrt{\frac{2DA}{h}} < q_1$

۴) $\sqrt{\frac{2DA}{h}} > \sqrt{\frac{2D\left(A+R\left(q_n\right)-c_n q_n\right)}{h}}$

حل : گزینه ۳ درست است

نکته: نقطه بهینه مدل تخفیف نموی نمی‌تواند برابر نقاط تخفیف باشد بنابراین در صورتی که بخواهیم در شرایط یکسان نقطه بهینه تخفیف نموی و کلی برابر باشند باید نقاط ویلسون دو تخفیف باهم برابر باشند.

با توجه به نکته

$$\sqrt{\frac{2D\left(A+R\left(q_j\right)-C_j q_j\right)}{h}} = \sqrt{\frac{2AD}{h}}$$

این حالت در صورتی امکان پذیر است که : $R\left(q_j\right)=C_j\, q_j$

این تساوی فقط در محدوده‌ی اول برقرار است. $R\left(q_0\right)=C_0\, q_0=0$ بنابراین نقطه‌ی ویلسون باید دل محدوده‌ی اول قرار گیرد.

$$\sqrt{\frac{2AD}{h}} < q_1$$

یادداشت:

....

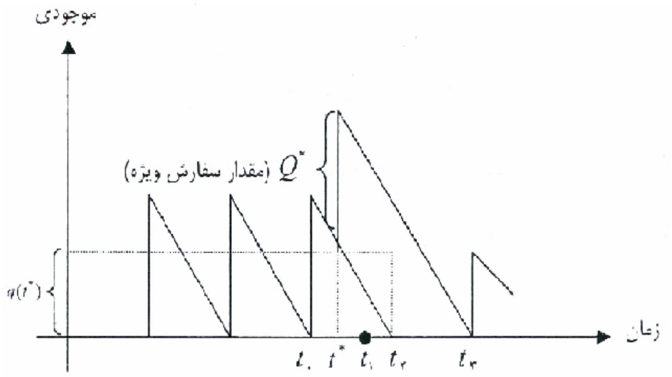
....

....

....

www.ieun.ir

۶ـ ۳ ـ مدل افزایش یا کاهش قیمت:



در این مدل به بررسی صرفه ی اقتصادی در شرایطی که افزایش یا کاهش قیمت ناگهانی داریم می پردازیم:

اگر در زمان t_1 کاهش قیمت داشتیم:

۱- اگر قبل از t_0 متوجه این کاهش شویم به اندازه‌ای سفارش می‌دهیم تا در t_1 موجودی برابر صفر گردد.

۲- اگر بعد از t_0 می‌فهمیدیم هیچ‌کار خاصی انجام نمی‌گیرد.

نکته: اگر هزینه نگهداری وابسته به قیمت باشد مقادیر سفارشات بعدی طبق رابطه‌ی $Q=\sqrt{\dfrac{2AD}{ic}}$ افزایش می‌یابد ولی اگر هزینه‌ی نگهداری وابسته به قیمت نباشد مقدار سفارشات بعدی تغییری نمی‌کند.

اگر در زمان t_1 افزایش قیمت داشتیم:

اگر قبل از t_0 متوجه افزایش قیمت شویم با توجه به هزینه‌ی نگهداری و سفارشدهی تصمیم به سفارش می‌گیریم.

اگر بعد از t_0 متوجه افزایش شویم بعد از t_0 لحظه‌ای قبل از t_1 سفارش می‌دهیم که همان سفارش ویژه نامیده می شود (البته اگر صرفه اقتصادی دارد یعنی اگر اختلاف هزینه در اثر خرید بیشتر از هزینه سفارشدهی باشد)

مثال: دریک مدل سفارش اقتصادی (EOQ) بلافاصله پس از آن که آخرین سفارش را داده‌ایم مطلع می‌شویم که قیمت کالا قرار است تا قبل از سفارش بعدی افزایش یابد در این صورت: (کنکور ۸۷)

۱)مقدار سفارش اقتصادی لزوماً تغییر خواهد کرد اما در مورد سفارش ویژه باید تصمیم‌گیری نمود.

۲) مقدار سفارش اقتصادی لزوماً تغییر خواهد کرد و حتماً قبل از صدور سفارش بعدی در مورد انجام سفارش ویژه اقدام شود.

۳) اگر هزینه‌های نگهداری مستقل از قیمت کالا باشد، مقدار سفارش اقتصادی تغییر نمی‌کند ولی در مورد صدور سفارش ویژه باید تصمیم گیری شود.

۴) اگر هزینه‌های نگهداری وابسته به قسمت کالا باشد مقدار سفارش اقتصادی تغییر خواهد کرد و حتماً قبل از سفارش بعدی باید در مورد سفارش ویژه اقدام نمود.

حل : گزینه ۳ درست است.

یادداشت:

نکته: در مدل افزایش قیمت در صورتی که هزینه‌های نگهداری مستقل از قیمت باشد، با تغییر قیمت هزینه نگهداری تغییر نخواهد کرد و مقدار سفارش بهینه پس از افزایش قیمت با این مقدار قبل از آن تفاوتی نخواهد داشت. ولی در مورد سفارش ویژه پس از محاسبه‌ی رابطه هزینه‌ای باید تصمیم گیری شود.

www.ieun.ir

مثال: در مؤسسه‌ای هزینه‌های نگهداری کالا مستقل از قیمت خرید واحد محصول است. لحظه‌ای قبل از انجام سفارش متوجه می‌شویم که قیمت کالا به میزان ده درصد تا 2 ساعت دیگر افزایش می‌یابد، به نظر شما برای اطلاع از افزایش قیمت برای این سفارش تصمیم خاصی (سفارش خاصی داده شود) باید گرفته شود؟ (کنکور ۸۸)

۱)با تجزیه و تحلیل هزینه‌های سیستم موجودی در خصوص دادن سفارش خاص یا عدم انجام سفارش خاص تصمیم گرفته می‌شود.

۲) با توجه به ناچیز بودن افزایش نسبت و عدم وابستگی هزینه نگهداری به قیمت تصمیم خاص نباید گرفته شود.

۳) حتماً قبل از افزایش قیمت‌ها سفارش خاصی در حجم بالا داده می‌شود.

۴) سفارش خاص انجام می‌گیرد و مقدار سفارش ده درصد بیش‌تر از مقدار فعلی است.

حل : گزینه ۱ درست است.

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

۷ـ مدل احتمالی یک دوره‌ای

این مدل تنها برای یک دوره بوده و به مدل درخت کریسمس یا پسرک روزنامه فروش نیز معروف است.

فرضیات مدل:

۱ـ تقاضا احتمالی و ساکن است.

۲ـ سفارش صرفاً یکبار در ابتدای دوره به موجودی اضافه می‌گردد.

۳ـ برنامه‌ریزی صرفاً برای یک دوره انجام می‌پذیرد و موجودی باقیمانده در انتهای دوره حراج شده یا از بین می‌رود.

۴ـ کمبود جایز است.

۵ـ هزینه نگهداری صرفاً برای واحدهای باقی‌مانده در انتهای دوره (که حراج می‌شوند یا از بین می‌روند) محاسبه می‌گردد.

۶ـ در ابتدای دوره موجودی برابر با I به عنوان موجودی ابتدای دوره وجود دارد.

پارامترهای مدل:

D: متغیر تصادفی تقاضا در یک دوره

$f_D(x)$: تابع چگالی تقاضا در مدت زمان یک دوره

$F_D(x)$: تابع توزیع تجمعی تقاضا در مدت زمان یک دوره

C: قیمت خرید هر واحد

V: قیمت فروش هر واحد

π: هزینه کمبود هر واحد

L: قیمت حراج هر واحد

A: هزینه هر بار سفارش

h: هزینه نگهداری هر واحد در مدت زمان یک دوره

H: مجموع هزینه‌های هر واحد باقیمانده در انتهای دوره

$H = h +$ هزینه انتقال جهت حراج یا فروش برحسب هر واحد $-L$

I: موجودی ابتدای دوره (یک لحظه قبل از سفارش)

متغیرهای مدل:

R^*:موجودی بهینه ابتدای دوره (یک لحظه بعد از سفارش)

Q^*: مقدار سفارش بهینه

$$Q^* = R^* - I$$

همان‌طور که در فرضیات مدل ذکر شد موجودی به دوره‌ی بعد منتقل نمی‌گردد و در آخر دوره باید تصمیم بگیریم که آن را از بین ببریم یا با قیمتی کمتر از C آن را حراج کنیم.

مدل‌های احتمالی تک دوره‌ای می‌توانند با تقاضای پیوسته و یا گسسته باشند و همین‌طور هزینه هر بار سفارش دهی (A) ممکن است صفر باشد بنابراین مدل‌های احتمالی تک دوره‌ای به 4 نوع تقسیم می‌گردند:

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

ـ تقاضا پیوسته و $A = 0$

ـ تقاضا پیوسته و $A \neq 0$

ـ تقاضا گسسته و $A = 0$

ـ تقاضا گسسته و $A \neq 0$

در اینجا مدل‌هایی که در آن $A = 0$ را بررسی خواهیم کرد، روش حل مدل‌هایی که در آن $A \neq 0$ است به‌صورت سعی و خطاست الگوریتم حل مدل در حالتی که تقاضا پیوسته و $A = 0$ باشد به‌صورت زیر است:

مقدار R را از فرمول زیر محاسبه می‌کنیم:

$$F_D(R^*) = \frac{V + \pi - C}{V + \pi + H}$$

بدین معنی که به دنبال نقطه‌ای می‌گردیم که تابع توزیع تجمعی در آن نقطه برابر $\frac{V + \pi - C}{V + \pi + H}$ شود، آن نقطه برابر R^* می‌باشد.

ـ اگر $R^* \leq I$ باشد نیازی به سفارش نمی‌باشد.

ـ اگر $R^* > I$ باشد باید به میزان $Q^* = R^* - I$ سفارش دهیم.

در حالت گسسته ممکن است تابع توزیع تجمعی در هیچ نقطه‌ای دقیقاً برابر $\frac{V + \pi - C}{V + \pi + H}$ نشود بنابراین برای حالاتی که تقاضا گسسته و $A = 0$ است به‌صورت زیر عمل می‌کنیم.

در حالت گسسته، کوچک‌ترین مقداری از تقاضا در مدت زمان یک دوره که تابع توزیع تجمعی تقاضا را مساوی و یا بزرگتر می‌کند را به عنوان R^* انتخاب می‌کنیم، یعنی کوچک‌ترین مقداری که به ازای آن

$$F_D(R^*) \geq \frac{V + \pi - C}{V + \pi + H}$$

ـ اگر $R^* \leq I$ باشد نیازی به سفارش نمی‌باشد.

ـ اگر $R^* > I$ باشد به میزان $Q^* = R^* - I$ سفارش می‌دهیم.

تذکر : متوسط هزینه نگهداری در دوره، متوسط هزینه کمبود در دوره، متوسط موجودی باقیمانده و متوسط مقدار کمبود از روابط زیر به‌دست می‌آید:

تقاضا پیوسته: $\int_0^R (R - x) f_D(x)\,dx =$ متوسط موجودی باقیمانده در انتهای دوره

تقاضا گسسته: $\sum_{x=0}^{R} (R - x)\, p\{D = x\} =$ متوسط موجودی باقیمانده در انتهای دوره

(متوسط موجودی باقیمانده در انتهای دوره) $h =$ متوسط هزینه نگهداری برای واحدهای باقیمانده در انتهای دوره

تقاضا پیوسته: $\int_R^{\infty} (x - R) f_D(x)\,dx =$ متوسط تعداد کمبود در یک دوره

تقاضا گسسته: $\sum_{x=R}^{\infty} (x - R)\, p\{D = x\} =$ متوسط تعداد کمبود در یک دوره

(متوسط تعداد کمبود در یک دوره) $\pi =$ متوسط هزینه کمبود در یک دوره

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

نکته: میانگین کمبود در طی دوره به صورت $\int_R^{\infty}(X-R)f_D(X)dX$ خواهدبود، در صورتی که تقاضا دارای توزیع نرمال باشد، میانگین کمبود را می‌توان از رابطه‌ی $\sigma.G_U(K)$ محاسبه کرد. $G_u(K)=\int\frac{(u-K)}{\sqrt{2\pi}}\times e^{-\frac{u^2}{2}}du$ انتگرال ضرر نرمال می‌گویند و از جداول استخراج می‌شود $K=\frac{R-\mu}{\sigma}$, $U=\frac{M-\mu}{\sigma}$

مثال: در مدل یک دوره‌ای احتمالی. (کنکور ۸۷)

۱)اگر قیمت فروش کالا کاهش پیدا کند مقدار اقتصادی تهیه‌ی کالا در ابتدای دوره کاهش پیدا می‌کند.

۲) اگر قیمت خرید کالا افزایش پیدا کند مقدار اقتصادی تهیه‌ی کالا در ابتدای دوره افزایش پیدا می‌کند.

۳) اگر هزینه مواجهه با کسری افزایش پیدا کند مقدار اقتصادی تهیه‌ی کالا در ابتدای دوره کاهش پیدا می‌کند.

۴) اگر هزینه کالای باقیمانده در انتهای دوره کاهش پیدا کند مقدار اقتصادی تهیه کالا در ابتدای دوره کاهش پیدا می‌کند.

حل : گزینه ۱ درست است.

نکته: در مدل تک دوره‌ای احتمالی نقطه بهینه R نقطه‌ای است که در رابطه $F_D\left(R^*\right)=\frac{V+\pi-C}{V+\pi+H}$ روبرو صدق کند.

مثال: در مدل یک دوره‌ای تصادفی که هزینه سفارش دهی قابل ملاحظه است اگر R_0 مقدار بهینه کالا پس از سفارش بدون در نظر گرفتن هزینهٔ سفارش دهی حالت مرسوم باشد. مقدار بهینهٔ سفارش با در نظر گرفته هزینهٔ سفارش دهی؛ ....

(کنکور ۸۶)

۱)اگر R_0 بیشتر از موجود در دست باشد نسبت به حالت مرسوم تغییر نخواهد کرد.

۲) اگر R_0 کمتر از موجودی در دست باشد بیشتر از حالت مرسوم نخواهد بود.

۳) در هر صورت احتمال مواجه شدن با کسری وقتی هزینه سفارش دهی قابل ملاحظه است بزرگتر یا مساوی حالتی است که این هزینه لحاظ نمی‌شود.

۴) موارد ۲ و ۳ صحیح است.

حل : گزینه ۴ درست است.

نکته : در صورتی که R_0 کمتر از موجودی در دست باشد، در هر دو صورت سفارشی صورت نمی‌گیرد. ولی اگر R_0 از موجودی در دست بیشتر باشد، مقدار بهینه سفارش با در نظر گرفتن هزینه شفارش دهی و بدون درنظر گرفتن آن ممکن است متفاوت باشد، از طرفی با توجه به هزینه سفارشدهی ممکن است مقداری کمتر از حالت موسوم سفارش دهیم و در نتیجه احتمال مواجه شدن با کسری بیشتر از حالت موسوم خواهد بود.

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

مثال: در یک مدل کنترل موجودی یک دوره‌ای احتمالی، پارامترهای زیر برآورد شده‌اند. مقدار بهینهٔ تهیهٔ کالا در اول دوره و کسری مورد انتظار در یک دوره چقدر خواهد بود؟ (کنکور ۸۵)

قیمت خرید : ده واحد پول برای هر واحد کالا

قیمت فروش: پانزده واحد پول برای هر واحد کالا

هزینه مواجهه با کسری: 5 واحد پول برای هر واحد کسری

هزینهٔ هر واحد کالایی که فروش نرود : 5 واحد پول

تقاضا دارای توزیع یکنواخت در بازهٔ صفر تا 100 واحد کالا

۱)مقدار تهیه کالا 20 کسری مورد انتظار 90 واحد کالا

۲) مقدار تیه کالا 70 و کسری مورد انتظار 30 واحد کالا

۳) مقدار تهیه کالا 20 و کسی مورد انتظار 18 واحد کالا

۴) مقدار تهیه کالا 35 و کسری مورد انتظار 50 واحد کالا

حل : گزینه ۳ درست است.

$$D \sim V(0\,,100)$$

$$F_D(R)=\frac{V+\pi-V}{V+\pi+H}=\frac{15+5-10}{15+5+5}=\frac{10}{25}=0.4 \;\Rightarrow\; R=40$$

$$\bar{b}(r)=\int_R^{100}(X-R)f_P(X)dX=\int_{40}^{100}(X-40)\times\frac{1}{100}dX=\left(\frac{X^2}{200}-\frac{40X}{100}\right)\Bigg|_{40}^{100}$$

$$=18$$

مثال: مصرف محصولی در یک مدل یک دوره‌ای متغیر تصادفی با تابع چگالی $f_D(x)$ است. اگر سطح موجودی بلافاصله پس از انجام سفارش برابر R تعیین شده باشد و چنانچه درطی دوره کمبود رخ دهد مجبور به تأمین هزینه بیشتری نسبت به اول دوره باشیم آنگاه میانگین تعداد واحدهایی که برای هر دوره مصرف می‌شود چقدر است؟ (کنکور ۸۵)

۱) $E(D)$

۲) $\int_R^{\infty}(R-x)f_D(x)dx$

۳) $\int_R^{\infty}(x-R)f_D(x)dx$

۴) $E(D)-\int_R^{\infty}(x-R)f_D(x)dx$

حل : گزینه ۱ درست است.

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

مثال: در مدل یک دوره‌ای وقتی که تقاضا در طی دوره دارای توزیع نرمال با میانگین μ و انحراف معیار σ است ، اگر سطح موجودی یک لحظه پس از انجام سفارش (R) را برابر میانگین (μ) انتخاب کنیم آنگاه (کنکور ۸۶)

۱)میانگین کمبود در طی دوره برابر است با μ

۲) میانگین کمبود در طی دوره به انحراف معیار و انتگرال ضرر نرمال دارد.

۳) میانگین کمبود در طی دوره برابر است با صفر

۴) در مورد میانگین کمبود هیچ اظهارنظر مشخصی نمی‌توان ارائه کرد.

حل : گزینه ۲ درست است.

مثال: در یک مدل یک دوره‌ای تقاضا متغیری تصادفی با توزیع احتمال طبق جدول زیر است مدیریت سطح موجودی پس از انجام سفارش را برابر 30 واحد در نظر گرفته است. اگر هزینه نگهداری هر واحد باقیمانده در انتهای دوره به شرح زیر باشد.

هزینه نگهداری =
- **مقدار باقیمانده بیشتر یا مساوی 10 واحد باشد** **تومان** 50
- **مقدار باقیمانده کمتر یا مساوی 10 واحد باشد** **تومان** 100

.مقدار باقیمانده کمتر یا مساوی 10 واحد باشد

میانگین هزینه نگهداری در یک دوره چقدر است؟ (کنکور ۸۶)

X تقاضا	10	20	30	40	50
$P(x)$ احتمال تقاضا	0.05	0.3	0.3	0.3	0.05

۱) 200 تومان ۲) 300 تومان ۳) 350 تومان ۴) 400 تومان

حل : گزینه ۳ درست است.

میانگین هزینه نگهداری در یک دوره $= 0.05\times50\times(30-10)\times0.3\times100\times(30-20)=350$

مثال: تقاضا باری محصولی در فصل پاییز (یک دوره سه ماهه) متغیری تصادفی است که توزیع آن یکنواخت در فاصله $(0,100)$ است یعنی، $0\le x\le100$ و $f(x)=\frac{1}{100}$. این محصول قرار است فقط برای یک دوره (فصل پاییز) و در ابتدای همان دوره تولید شود. قیمت فروش هر واحد این محصول 100 تومان است و واحدهای باقیمانده در انتهای دوره با قیمت هر واحد 13 تومان حراج می‌شوند، مقدار تولیدی در ابتدای دوره 80 واحد انتخاب شده است در این صورت میانگین درآمد حاصل از حراج واحدهای باقیمانده در انتهای دوره برابر کدام یک از مقادیر زیر است؟ (کنکور ۸۷)

۱) 286 تومان ۲) 416 تومان ۳) 446 تومان ۴) 526 تومان

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

حل : گزینه ۲ درست است.

$D \sim U(0,100)$

$V = 100 \quad , \quad L = 13 \quad , \quad Q = 80 \quad , \quad I = 0$

$R = 80$

میانگین درآمد حاصل از حراج واحدهای باقیمانده $= L \times \int_0^R (R - X) f(x)\, dx$

$$= 13 \int_0^{80} (80 - X) \frac{1}{100} dx = 13 \times 32 = 416$$

مثال: در مدل یک دوره‌ی تقاضا برای محصول از یک تابع توزیع در محدوده‌ی $(8000 \ , \ 1000)$ با میانگین 2000 واحد و انحراف معیار 100 واحد می‌باشد. قیمت خرید هر واحد محصول در ابتدای دوره 200 تومان و هزینه نگهداری هر واحد موجودی (سرمایه و شرایط خاص و ...) در طی دوره 250 تومان است. هزینه کمبود هر واحد موجودی 3 تومان و قیمت حراج هر واحد محصول 500 تومان و قیمت فروش هر واحد محصول در طی دوره 900 تومان است. به نظر شما سطح بهینه موجودی یک لحظه پس از انجام سفارش، R^* ، چقدر است؟ (کنکور ۸۸)

۱) $R^* = 1000$ ۲) $R^* = 2000$

۳) $R^* = 2000 + 4(100) = 2400$ ۴) $R^* = 8000$

حل : گزینه ۴ درست است.

$C = 200$

$h = 250$

$\pi = 3$

$L = 500$

$V = 900$

$H = h - L = 250 - 500 = -250$

$$F_D\left(R^*\right) = \frac{V + \pi + C}{V + \pi + H} = \frac{900 + 3 - 200}{900 + 3 - 250} > 1$$

$R^* = 8000$

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

مثال: فروشنده‌ای کالایی را به قیمت 5 واحد پول می‌خرد و چنانچه با کمبود مواجه می‌شود، هزینه‌ای معادل 8 واحد برای خودش منظور می‌دارد. و چنانچه جنس اضافه آید، هزینه نگهداری 1 واحد برای هر واحد کالا منظور می دارد. تقاضا برای کالا به صورت یکنواخت بین صفر و سی توزیع شده است، اگر در ابتدای دوره 3 واحد کالا موجود باشد، چند واحد کالا باید خریداری شود؟ (کنکور ۸۹)

۱) 3 ۲) 10 ۳) 7 ۴) 13

حل : گزینه ۳ درست است.

$C=5$

$\pi=8$

$h=1$

$I_0=3$

$D \sim U(0,30)$

$$F_D\left(R^*\right) \geq \frac{V+\pi-C}{V+\pi+H}$$

$$\frac{R-0}{30}=\frac{1}{3}$$

$$F_D\left(R^*\right) \geq \frac{8-5}{8+1}=\frac{1}{3}$$

$R=10$

$Q^*=R^*-I_0=10-3=7$

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

۸ـ خط‌مشی‌های مرور سیستم موجودی/ خط‌مشی‌های سفارش دهی

در خط مشی‌های سیستم موجودی چگونگی کسب اطلاع در موجودی و هم چنین نوع و نحوه سفارش‌دهی مشخص می‌گردد.

دو نوع خط‌مشی اصلی وجود دارد:

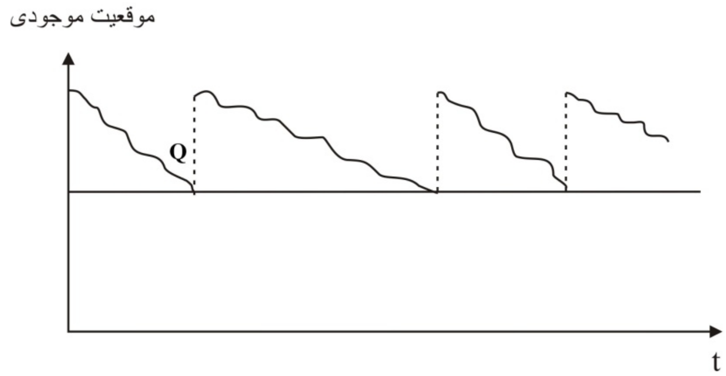
- خط مشی مرور دائم
- خط مشی مرور دوره‌ای

۸ـ ۱ ـ خط‌مشی مرور دائم

در این خط‌مشی وضعیت موجودی در هر لحظه از زمان بررسی می‌گردد. به محض آنکه مقدار موجودی برابر یا کمتر از نقطه سفارش (r) شود، به اندازه ثابت Q سفارش می‌دهیم.

حالت معروف این خط مشی FOS، (r , Q)، نقطه سفارش، کنترل موجودی مقداری و مقدار سفارش ثابت نامیده می‌شود. در این حالت وضعیت موقعیت موجودی در هر لحظه مرور می‌شود، به محض اینکه به مقدار نقطه سفارش (r) رسید به اندازه ثابت Q سفارش می‌دهیم و این کار به طور مرتب تکرار می‌شود، در این خط‌مشی فاصله بین دو سفارش متوالی لزوماً یکسان نیست.

نمودار موقعیت موجودی این خط مشی می‌تواند به‌صورت زیر باشد:



۸ـ ۲ـ خط‌مشی مرور دوره‌ای

در این خط مشی در فواصل زمانی مشخص و یکسان موقعیت موجودی مرور می‌گردد.

حالت معروف این خط مشی FOI، (R , T)، سقف موجودی و فاصله سفارش ثابت نامیده می‌شود. در این حالت در زمان‌های t_1 و t_2 و t_3 و ... که فاصله‌ای برابر T دارند، موقعیت موجودی مرور می‌گردد و تا سقف موجودی (R) سفارش داده می‌شود. در این خط مشی مقدار سفارش لزوماً یکسان نیست.

یادداشت:

....

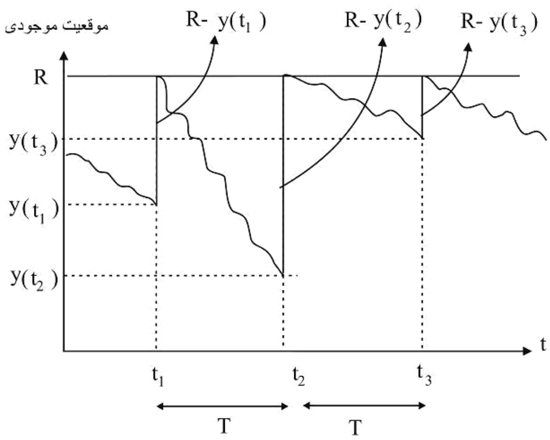
....

....

....

www.ieun.ir

نمودار موقعیت موجودی این خط مشی می‌تواند به‌صورت زیر باشد:



۸-۳- مقایسه بین FOS و FOI

۱ـ احتمال مواجهه با کمبود به علت مرور دائم از FOS از FOI کمتر است بنابراین ذخیره اطمینان (SS) کمتری دارد.

۲ـ هم گروه کردن اقلام سفارش (سفارش هم زمان) در FOI امکان‌پذیر است اما در FOS امکان‌پذیر نیست.

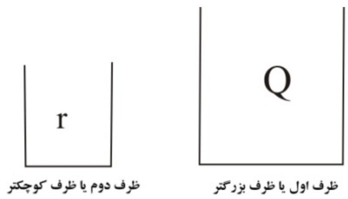
۳ـ هزینه‌های حمل و نقل سفارش در FOI به علت هم‌گروه کردن اقلام سفارش کمتر از FOS است. لذا فروشنده بیشتر تمایل به خط مشی FOI برای خریدار دارد.

۴ـ هزینه‌های مرور سیستم موجودی که جزو هزینه‌های سفارش‌دهی است در FOI نسبت به FOS کمتر است.

۸ـ ۴ ـ خط مشی سفارش‌دهی دو ظرفی، دو قفسه‌ای، مینیمم ماکزیمم، Two - Bin

این خط مشی که حالت کاربردی از خط مشی FOS است (مرور دائم) انبار را به دو قسمت ظرف بزرگتر یا ظرف اول (Q) و ظرف کوچک‌تر یا ظرف دوم (r) تقسیم می‌کند.

ابتدا از ظرف بزرگتر مصرف می‌کنیم و به محض اینکه بخواهیم از ظرف کوچک‌تر (r) مصرف کنیم سفارش می‌دهیم و تا زمان رسیدن سفارش از ظرف کوچک‌تر مصرف می‌کنیم. بعد از رسیدن سفارش ابتدا ظرف کوچک‌تر را تکمیل کرده و هر چه باقی بماند در ظرف بزرگ‌تر خواهیم ریخت و دوباره مصرف را شروع می‌کنیم.



یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

مثال: سیستم معروف موجودی دو قفسه‌ای Two Bin System

۱) حالت خاصی از سیستم موجودی مقدار سفارش ثابت محسوب می‌شود.

۲) جزو سیستم دوره ثابت محسوب می‌شود.

۳) ترکیبی از دو سیستم فوق است.

۴) جزء هیچ‌کدام از دو سیستم فوق نیست.

حل : گزینه ۱ درست است.

همان‌طور که ذکر گردیده سیستم Two Bin حالت خاصی از خط مشی FOS یا همان مقدار سفارش ثابت است.

مثال: در مورد سیستم در ظرفی (Two bin system) کدام عبارت درست است؟(کنکور ۸۸)

۱) در این سیستم مقدار سفارش کمتر از نقطه سفارش است.

۲) این سیستم حالت خاصی از سیستم‌های مرور دائم است.

۳) این سیستم جزء یکی از سیستم‌های مرور دوره‌ای است.

۴) در این سیستم مقدار موجودی در دست همیشه برابر صفر است.

حل : گزینه ۲ درست است.

نکته : سیستم دو ظرفی حالت خاصی از سیستم‌های موجود دائم موجودی است

۸ـ ۵ ـ سیستم پارامتریک (T, r, R)

در هر زمان مرور (T) اگر موجودی در دست و در راه بنام (I) در فاصله مابین $r < I \leq R$ باشد اقدام به سفارش نمی‌کنیم و اگر $I \leq r$ باشد به اندازه $(S-1)$ سفارش می‌دهیم تا مقدار موجودی به سطح S برسد.

- ✓ در این سیستم ممکن است چند پریود بگذرد و سفارش ندهیم.
- ✓ این سیستم برای کالاهای نوع B,C مناسب است.
- ✓ در این سیستم مقدار هر بار سفارش ممکن است تغییر کند و تقریباً برابر $Q=S-r$ یا $Q=S-I$ می‌باشد.
- ✓ این سیستم از نوع مرور موقت یا دوره‌ای است.
- ✓ اگر تقاضا تکی‌تکی باشد این سیستم به (S,Q) تبدیل می‌شود، زیرا می‌توان $S=r+Q$ قرار داد. (در حالت $Q=I$ می‌باشد.)
- ✓ معمولاً اگر هزینه‌های ثبت و سفارش ناچیز باشد سیستم (r,Q) در غیر اینصورت (T,r,R) مناسب است.
- ✓ اگر $T=0$ باشد سیستم (Q,S) حاصل می شود.
- ✓ مشکل این سیستم محاسبه سه پارامتر فوق می‌باشد.

مثال: در یک سیستم انبار محض روش کنترل $(\text{Periodic Review } (r,R,T))$ اعمال می‌گردد. اگر y_k سطح خالص انبار در بازنگری kام باشد، آنگاه مقدار سفارش در این بازنگری چقدر است؟ (کنکور ۸۹)

یادداشت:

۱) $Q_k = \begin{cases} 0 & y_k \geq r \\ R-y_k & y_k < 1 \end{cases}$

۲) $Q_k = \begin{cases} 0 & y_k \geq r \\ R-r & y_k < r \end{cases}$

....

....

www.ieun.ir

۳) $Q_k = \begin{cases} 0 & y_k > 0 \\ R & y_k \le 0 \end{cases}$

۴) $Q_k = \begin{cases} 0 & y_k \ge 0 \\ R - y_k & y_k < 0 \end{cases}$

حل : گزینه ۱ درست است.

اگر سطح خالص انبار از مقدار r کمتر باشد به اندازه‌ای سفارش می‌دهیم که به سقف موجودی یعنی R برسیم.

یعنی به اندازه‌ی $R - y_K$ سفارش می‌دهیم پس :

$$Q_k = \begin{cases} 0 & y_k \ge r \\ R - y_k & y_k < r \end{cases}$$

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

۹ـ مدل‌های احتمالی

۹ ـ ۱ـ مدل احتمالی ساده با خط مشی سفارش دهی FOS و (r , Q)

فرضیات مدل مانند مدل EOQ است با تفاوت‌های زیر:

۱ـ تقاضا احتمالی و ساکن است.

۲ـ کمبود جایز است.

۳ـ خط مشی سفارش‌دهی FOS است.

هدف مدل تعیین مقدار سفارش بهینه (Q) و نقطه سفارش (r) با کمینه کردن هزینه‌هاست.

پارامترهای مدل:

D : متغیر تصادفی تقاضا در سال

μ_D: میانگین تقاضا در سال

σ_D : انحراف معیار تقاضا در سال

D_L : متغیر تصادفی تقاضا در مدت زمان تحویل

σ_{D_L}: انحراف معیار تقاضا در مدت زمان تحویل

p: سطح خدمت، سطح اطمینان

متغیرهای مدل:

Q : مقدار سفارش

r: نقطه سفارش، حداقل موقعیت موجودی

SS: موجودی اطمینان (ذخیره ایمنی): موجودی اطمینان در مدل‌های احتمالی جهت جواب‌گویی به تغییرات تقاضا در مدت زمان تحویل تعریف می‌گردد و مقدار آن در تعاملی بین کل هزینه‌های کمبود و نگهداری سالیانه تعیین می‌شود.

نکته: در صورتی که SS افزایش یابد، کل هزینه‌های نگهداری سالیانه افزایش و کل هزینه‌های کمبود سالیانه کاهش می‌یابد.

بدین اساس نقطه سفارش مجدد از رابطه زیر محاسبه می‌گردد:

$$r = \mu_{D_L} + SS$$

تعریف سطح خدمت

سطح خدمت برابر است با احتمال اینکه در یک دوره با کمبود مواجه نشویم یعنی احتمال اینکه تقاضا در مدت زمان تحویل کوچک‌تر یا مساوی موجودی در زمان سفارش (r) باشد.

$$p\{D_L \le r\} = \text{سطح خدمت} \quad \Rightarrow \quad F_{D_L}(r) = p$$

سطح ریسک یا سطح خطر برابر است با احتمال اینکه در یک دوره با کمبود مواجه شویم: $(1 - p)$

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

نحوه محاسبه سطح خدمت (p)

الف) توسط مدیر سیستم موجودی مشخص گردد.

ب) از روی مقادیر N_b , T_b توسط رابطه زیر مشخص گردد.

N_b: متوسط تعداد دوره‌های دارای کمبود در سال

T_b: متوسط فاصله زمانی بین دو دوره کمبود متوالی یا فاصله انتظاری مواجه شدن با یک دوره دارای کمبود

$$1-p=\frac{\text{متوسط تعداد دوره‌های دارای کمبود در سال}}{\text{متوسط تعداد دوره‌ها در سال}}=\frac{N_b}{\frac{\mu_D}{Q}}=N_b\times\frac{Q}{D}$$

در مدل‌های احتمالی گاها به جای μ_D از D استفاده می‌کنند.

$$T_b=\frac{1}{N_b}$$

الگوریتم حل مدل احتمالی ساده FOS

برای حل مدل احتمالی ساده FOS دو روش وجود دارد:

۱) با استفاده از مقادیر π و $\hat{\pi}$: در این روش تابع هزینه‌ها را نوشته و نسبت به Q و r مشتق می‌گیریم و روابط محاسبه Q و r به‌دست می‌آید.

۲) با استفاده از مفهوم سطح خدمت که جایگزین پارامترهای π و $\hat{\pi}$ می‌گردد. الگوریتم این روش به شرح ذیل است.

الف) Q^* از رابطه روبرو محاسبه می‌گردد. در این رابطه منظور از D، میانگین توزیع تقاضا در سال یعنی μ_D است.

$$Q^*=\sqrt{\frac{2DA}{h}}$$

ب) مقدار سطح خدمت (p) از روش‌های عنوان شده به‌دست می‌آید.

$$1-p=N_b\times\frac{Q}{D}$$

ج) مقدار نقطه سفارش (r) از رابطه زیر محاسبه می‌گردد.

اگر تقاضا پیوسته باشد مقداری از تقاضا در مدت زمان تحویل برابر با r می‌باشد که به ازای آن تابع توزیع تجمعی برابر با سطح خدمت (p) شود.

$$F_{D_L}(r)=p$$

اگر تقاضا گسسته باشد کوچک‌ترین مقداری از تقاضا در مدت زمان تحویل که رابطه زیر را برقرار می‌کند برابر r می‌باشد.

$$F_{D_L}(r)\geq p$$

د) مقدار ذخیره اطمینان از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$r=\mu_{D_L}+SS\quad\Rightarrow\quad SS=r-\mu_{D_L}$$

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

هـ) متوسط مقدار کمبود در دوره $(\bar{b}(r))$، متوسط مقدار کمبود در سال $(B(r))$ و درصد تقاضاهایی (مشتریانی) که با کمبود مواجه می‌شوند (در دوره یا سال) از روابط زیر محاسبه می‌گردد.

تقاضا پیوسته
$$\bar{b}(r) = \int_r^{\infty} (x-r) f_{D_L}(x)dx$$

تقاضا گسسته
$$\bar{b}(r) = \sum_{x=r}^{\infty} (x-r) p\{D_L = x\}$$

$$B(r) = \frac{D}{Q}\bar{b}(r)$$

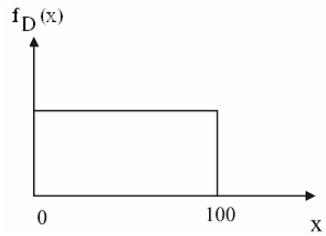
$$\frac{\bar{b}(r)}{Q} = \frac{B(r)}{D} =$$ درصد تقاضاهایی که با کمبود مواجه می‌شود

و) متوسط موجودی در دست از رابطه زیر محاسبه می‌گردد:

$$\bar{I} = \frac{Q}{2} + SS$$ متوسط موجودی در دست

نکته: سطح خدمت بدین صورت نیز محاسبه می شود $\Rightarrow \quad 1-P = \frac{hQ}{\pi D} = \frac{h}{\pi} \times T$

مثال: توزیع احتمالی تقاضای محصولی در طی مدت زمان تحویل یکنواخت بوده و چگالی آن به شکل زیر است



مثال: روش سفارش‌دهی این محصول روش مقدار سفارش ثابت بوده، مقدار سفارش در هر بار 40 واحد و متوسط مصرف سالیانه این محصول 400 واحد است. اگر قرار باشد در هر دور سفارش احتمال کمبود (کسری) محصول برابر 10 درصد باشد به سوال‌های زیر پاسخ دهید.

ـ مقدار موجودی اطمینان برابر است با:

۱) 90 واحد ۲) 50 واحد ۳) 40 واحد ۴) 30 واحد

حل : گزینه ۳ درست است.

$$f(x) = \frac{1}{100}$$

$$Q = 40 , D = 400 \quad , \quad 1-p = 0.1 \quad \Rightarrow \quad p = 0.9$$

$$F_{D_L}(r) = p \quad \Rightarrow \quad \int_0^r f(x)dx = 0.9 \quad \Rightarrow \quad \frac{r-0}{100-0} = 0.9 \quad \Rightarrow \quad r = 90$$

$$\mu_{D_L} = \frac{100+0}{2} = 50 \quad \Rightarrow \quad SS = r - \mu_{D_L} = 90 - 50 = 40$$

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

مثال: حداقل موقعیت موجودی (Inventory Position) این محصول برابر است با:

۱) 40 واحد ۲) 50 واحد

۳) 90 واحد ۴) مقداری بین 50 تا 90 واحد

حل: گزینه ۳ درست است.

$r=90=$ حداقل موقعیت موجودی

مثال: درصد مشتریانی که با کمبود روبرو می‌شوند برابر است با:

۱) 10 درصد ۲) 5 درصد ۳) 2.5 درصد ۴) 1.25 درصد

حل : گزینه ۴ درست است.

$$\bar{b}(r)=\int_r^{100}(x-90)\frac{1}{100}dx=\left(\frac{x^2}{200}-\frac{90x}{100}\right)\Big]_{90}^{100}=0.5$$

$$\text{درصد مشتریانی که با کمبود روبرو می‌شوند}=\frac{\bar{b}(r)}{Q}=\frac{0.5}{40}=0.0125\quad\Rightarrow\quad \%1.25$$

ـ میانگین تعداد دوره‌های سفارش در یک سال که در آنها کمبود رخ می‌دهد برابر است با:

۱) عددی بین 0 تا 0.5 ۲) عددی بین 0.5 تا 1.5 ۳) عددی بین 1.5 تا 2.5 ۴) عددی بین 2.5 تا 10

حل : گزینه ۲ درست است.

$$1-p=\frac{N_b}{\frac{D}{Q}}\quad\Rightarrow\quad N_b=\frac{D}{Q}(1-p)=\frac{400}{40}\times 0.1=1$$

که عددی است بین 0.5 تا 1.5

مثال: در خط مشی (r,Q) یا FOS اگر مدت تحویل برای محصول طولانی‌تر شود آنگاه: (کنکور ۸۶)

۱)میانگین موجودی در دست برای محصول کمتر می‌شود.

۲) میانگین موجودی در دست برای محصول فرقی نمی‌کند.

۳) میانگین موجودی در دست برای محصول بستگی به مقدار سفارش دارد.

۴) میانگین موجودی در دست برای محصول بیشتر می‌شود.

حل : گزینه ۴ درست است.

اگر L افزایش یابد $SS=K_P\,\delta_{D_L}$ افزایش خواهد داشت $\bar{I}=\frac{Q}{2}+SS$ افزایش خواهد یافت.

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

مثال: تقاضا برای محصولی در طی مدت تحویل دارای توزیع یکنواخت در فاصله $(100,200)$ است. برای این محصول از خط مشی مقدار سفارش ثابت $(F.O.S)$ استفاده می‌شود. اگر سطح خدمت را برای محصول برابر 85% در نظر گرفته باشند. آن گاه حداقل موقعیت موجودی (مجموع موجودی در دست و در راه) چقدر است؟ (کنکور ۸۵)

۱) 100 واحد ۲) منفی است ۳) صفر واحد ۴) 185 واحد

حل : گزینه ۴ درست است.

حداقل موقعیت موجودی در FOS برابر با r است.

$$D_L \sim U(100,200)$$

$$P=\int_{100}^{r} f_D(X)dX=\int_{100}^{r}\frac{1}{100}dX=\frac{r-100}{200-100}=0.85 \;\Rightarrow\; r=185$$

مثال: در یک موسسه تقاضا برای محصول ثابت و برابر 100 کیلو در روز می‌باشد. اگر مدت زمان تحویل برای هر سفارش متغیری تصادفی از توزیع نرمال با میانگین 10 و انحراف معیار 4 روز باشد، به نظر شما با سطح خدمت 90 درصد مقدار نقطه سفارش و موجودی اطمینان چقدر است؟ $P\{u\le 1/28\}=0.9$ (کنکور ۸۸)

۱) 90 , 1090 ۲) 128 , 1128 ۳) 400 , 1400 ۴) 512 , 1512

حل : گزینه ۴ درست است.

$$D=100 \quad \mu_L=10 \quad \sigma_L=4 \quad P=0.9 \quad K_P=1.28$$

$$SS=K_P\delta_{D_L}=K_P D\sigma_L=1.28\times100\times4=512$$

$$r=\mu_{D_L}+SS=D.\mu_L+SS=100\times10+512=1512$$

مثال: در یک مؤسسه مقدار سفارش محصول در هر بار ثابت برابر 800 کیلو می‌باشد متوسط تقاضا در طی مدت تحویل برابر 200 کیلو است. اگر نقطه سفارش مجدد این محصول 350 کیلو باشد و هزینه نگهداری هر کیلوی محصول در سال 10 تومان باشد، آن گاه هزینه سالیانه نگهداری موجودی این محصول بر حسب تومان چقدر است؟ (کنکور ۸۸)

۱) 2000 ۲) 3500 ۳) 5500 ۴) 7500

حل : گزینه ۳ درست است.

$$Q=800 \quad \mu_{D_L}=200 \quad r=350 \quad h=10$$

چون نقطه سفارش مجدد داریم پس خط مشی FOS داریم:

$$SS=r-\mu_{D_L}=350-200=150$$

هزینه نگهداری سالیانه $=h\left(\frac{Q}{2}+SS\right)=10\left(\frac{800}{2}+150\right)=5500$

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

مثال: تقاضا در فاصله زمانی تحویل (Lead time) برای کالایی دارای توزیع یکنواخت در فاصله $(10,30)$ است اگر سطح خدمت 0.95 مورد نظر باشد در سیستم مقدار ثابت سفارش، نقطه سفارش موجودی اطمینان چقدر باید باشد؟ (کنکور ۸۶)

۱) نقطه سفارش 22 و موجودی اطمینان 7 واحد کالا
۲) نقطه سفارش 25 و موجودی اطمینان 10 واحد کالا
۳) نقطه سفارش 28.5 و موجودی اطمینان 8.5 واحد کالا
۴) نقطه سفارش 29 و موجودی اطمینان 9 واحد کالا

حل : گزینه ۴ درست است.

$$F_{D_L}(r)=P \;\Rightarrow\; \frac{r-10}{30-10}=0.95 \;\Rightarrow\; r=29$$

$$\mu_{D_L}=\frac{10+30}{2}=20$$

$$SS=r-\mu_{D_L}=29-20=9$$

مثال: در یک سیستم نقطهٔ سفارش اطلاعات زیر برای 5 دورهٔ سفارش جمع آوری شده است:

دورهٔ سفارش	1	2	3	4	5
متوسط مصرف روزانه	12	20	18	15	25
فاصلهٔزمانی تحویل (روز)	5	6	9	3	7

موجودی اطمینان بر حسب حداکثر مصرف قابل پیش‌بینی برابر چقدر است؟ (کنکور ۸۵)

۱)42 واحد
۲) 54 واحد
۳) 67 واحد
۴) 113 واحد

حل : گزینه ۴ درست است.

دوره سفارش	1	2	3	4	5	Max	متوسط
D	12	20	18	15	25	25	18
L	5	6	9	3	7	9	6
DL	60	120	162	45	175		

$$r=\mathrm{Max}\{D\}\times \mathrm{Max}\{L\}=225$$

$$\mu_{D_L}=\frac{60+120+162+45+175}{5}=112.4$$

$$SS=r-\mu_{D_L}=225-112.4\simeq 113$$

مثال: مصرف یک کالا در هر روز از پیش زمان (LT) دارای توزیع پواسان با متوسط 5 واحد و طول پیش زمان برابر 3 روز می‌باشد. برای سفارش دهی این کالا از سیستم دو ظرفی استفاده می‌شود. حداقل ظرفیت ظرف کوچکتر برابر است با : (کنکور ۸۷)

۱) 5 واحد
۲) 9 واحد
۳) 15 واحد
۴) 22 واحد

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

حل : گزینه ۳ درست است.

$D_t \sim P(5)$ به روز

$L=3$ روز

حداقل ظرفیت ظرف کوچکتر در سیستم دو ظرفی زمانی است که $SS=0$ باشد و در این صورت این حداقل ظرفیت برابر μ_{D_L} خواهد شد.

$$\mu_{D_L} = \mu_D \times L = 5 \times 3 = 15$$

مثال: تقاضای سالیانه برای محصولی 1000 واحد و مقدار سفارش این محصول ثابت و برابر 100 واحد است. اگر مدیریت، متوسط تعداد دفعات کمبود در سال را برابر 2 انتخاب کرده باشد و تقاضا در طی مدت تحویل متغیری تصادفی با توزیع احتمال به شرح زیر باشد، آنگاه میانگین کمبود سالیانه محصول چقدر است؟ (کنکور ۸۹)

تقاضا	70	80	100	130
احتمال تقاضا	0.3	0.3	0.2	0.2

۱) 4
۲) 40
۳) 6
۴) 60

حل : گزینه ۴ درست است.

X	70	80	100	130
F(x)	0.3	0.6	0.8	1

$D=1000$

FOS $Q=100$

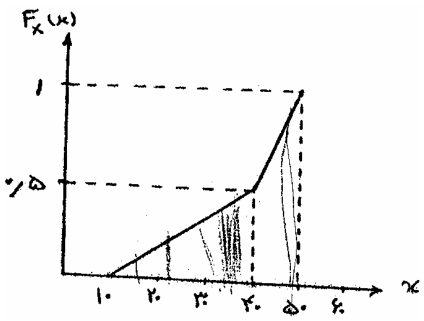
$$\text{متوسط دفعات کمبود} = 2 = N_b = \frac{1}{T_b} = 2$$

$$T_b = 0.5$$

$$1-P = N_b T = 2 \times \frac{100}{1000} = 0.2 \Rightarrow r = 100$$

$$B(r) = \frac{D}{Q}\bar{b}(r) = 10 \times (30 \times 0.2) = 10 \times 6 = 60$$

مثال: تابع توزیع تجمعی احتمال تقاضا در مدت زمان تحویل در شکل زیر داده شده است. اگر احتمال کمبود برابر 0.1 باشد مقدار ذخیره ایمنی چقدر خواهد بود؟ (کنکور ۸۹)



۱) 13
۲) 35
۳) 21
۴) 48

یادداشت:

....

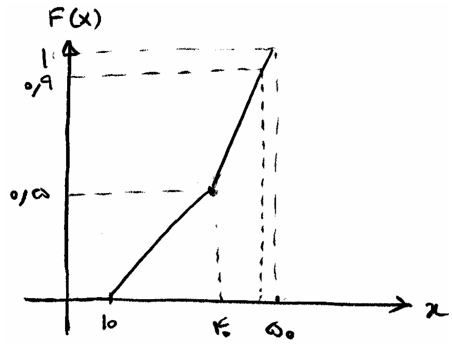
....

....

....

www.ieun.ir

حل : گزینه ۱ درست است.



تابع مربوط به D_L می‌باشد.

دو نقطه از خط هستند $(40\ ,\ 0.5)(50,1)$

$$y-1=\frac{1-0.5}{50-40}(X-50)$$

$$y=\frac{1}{20}(X-50)+1$$

$$(a,0.9)\ \Rightarrow\ 0.9=\frac{1}{20}(X-50)+1$$

$$-0.1=0.05(X-50)$$

$$-2=X-50 \qquad X=48$$

$$r=\mu_{D_L}+SS\ \Rightarrow\ 48=35+SS$$

$$\Rightarrow\ SS=13$$

۹-۲ـ مدل احتمالی ساده با خط‌مشی FOS در حالتی که تقاضا در مدت زمان تحویل دارای توزیع نرمال باشد.

در این مدل تقاضا در مدت زمان تحویل دارای توزیع نرمال با میانگین μ_{D_L} و واریانس $\sigma^2_{D_L}$ است. توزیع نرمال از این جهت با دیگر توزیع‌ها متمایز است که می‌توان به راحتی با استانداردسازی احتمال‌های مورد نظر را محاسبه و رابطه سریعی برای r پیدا نمود.

k_p: ضریب اطمینان

$$D_L \sim N\left(\mu_{D_L}\ ,\sigma^2_{D_L}\right)$$

$$p=p\{D_L\le r\}=p\left\{\overbrace{\frac{D_L-\mu_{D_L}}{\sigma_{D_L}}}^{Z\sim N(0.1)}\le\overbrace{\frac{r-\mu_{D_L}}{\sigma_{D_L}}}^{K_p}\right\}$$

$$\frac{r-\mu_{D_L}}{\sigma_{D_L}}=K_p\ \Rightarrow\ r=\mu_{D_L}+k_p\sigma_{D_L}$$

$$SS=k_p\,\sigma_{D_L}$$

در صورتی که مدت زمان تحویل نیز احتمالی باشد روابط زیر برای تبدیل میانگین و واریانس به کار می‌رود.

D: متغیر تصادفی تقاضا در سال با میانگین μ_D و واریانس σ^2_D

L: متغیر تصادفی مدت زمان تحویل با میانگین μ_L و واریانس σ^2_L

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

D_L: متغیر تصادفی تقاضا در مدت زمان تحویل با میانگین μ_{D_L} و واریانس $\sigma^2_{D_L}$

$$\mu_{D_L} = \mu_D \times \mu_L$$
$$\sigma_{D_L} = \sqrt{\mu_D^2 \times \sigma_L^2 + \mu_L \sigma_D^2}$$

بدین اساس حالت‌های زیر برای مدل قابل تصور است:

حالت ۱: D متغیر تصادفی با توزیع نرمال با میانگین μ_D و واریانس σ_D^2 و L ثابت و قطعی باشد.

$$\mu_{D_L} = L\mu_D$$
$$\sigma_{D_L} = \sqrt{L}\,\sigma_D \quad \Rightarrow \quad r = L\mu_D + k_p\sqrt{L}\,\sigma_D$$
$$SS = k_p\sqrt{L}\,\sigma_D$$

حالت ۲: D ثابت و قطعی و L متغیر تصادفی با توزیع نرمال به میانگین μ_L و وایانس σ_L^2 باشد.

$$\mu_{D_L} = D\mu_L$$
$$\sigma_{D_L} = D\sigma_L \quad \Rightarrow \quad r = D\mu_L + k_p D\sigma_L$$
$$SS = k_p D\sigma_L$$

حالت ۳: D متغیر تصادفی با توزیع نرمال به میانگین μ_D و واریانس σ_L^2 و L متغیر تصادفی با توزیع نرمال به میانگین μ_L و واریانس σ_L^2 باشد.

$$\mu_{D_L} = \mu_D \times \mu_L$$
$$\sigma_{D_L} = \sqrt{\mu_D^2 \times \sigma_L^2 + \mu_L \times \sigma_D^2} \quad \Rightarrow \quad r = \mu_D \times \mu_L + kp\sqrt{\mu_D^2 \times \sigma_L^2 + \mu_L \times \sigma_D^2}$$
$$SS = k_p\sqrt{\mu_D^2 \times \sigma_L^2 + \mu_L \times \sigma_D^2}$$

مثال: مصرف کالایی در یک سستم نگهداری موجود که به صورت FOS اجرا می‌شود نرمال با میانگین 100 و انحراف معیار 5 واحد در روز است اگر مدت زمان تحویل 16 روز و سطح خدمت 90% مورد نظر باشد موجودی اطمینان حدود چند واحد خواهد بود. $k0.9=1.28$ (کنکور ۸۶)

۱) 25 ۲) 80 ۳) 100 ۴) 130

حل : گزینه ۱ درست است.

$$M_D = 100 \quad L = 16 \quad K_p = 1.28$$
$$\sigma_D = 5 \quad P = 0.9$$
$$SS = 1.28 \times 5 \times \sqrt{16} = 25.6$$

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

مثال: برای محصولی از سیستم سفارش مقدار سفارش ثابت استفاده می‌شود. اگر مقدار سفارش برابر 100 واحد باشد و مدت تحویل محصول برابر 6 روز و تقاضا نرمال با میانگین $5t$ و انحراف معیار $3\sqrt{t}$ باشد (t به روز) و مدیریت، موجودی اطمینان را برابر 30 انتخاب کرده باشد آنگاه حداکثر موجودی در دست این قلم با توجه به تغییرات تصادفی تقاضا چقدر است؟ (کنکور ۸۵)

۱)کوچکتر یا مساوی 160 واحد است.
۲) برابر 80 واحد است.
۳) کوچکتر یا مساوی 60 واحد است.
۴) برابر 30 واحد است.

حل : گزینه ۱ درست است.

FOS حداکثر موقعیت موجودی در $\le r+Q$

در صورتی حداکثر موقعیت موجودی که $LT=0$ باشد. $=r+Q$

$$I_{max} \le Q+r$$

$$I_{max} \le Q+\mu_{D_L}+SS=100+5\times6+30$$

مثال: تقاضای کالایی در فاصلهٔ زمانی تحویل دارای توزیع یکنواخت در بازهٔ $(10\ ,\ 30)$ است. اگر هزینه نگهداری هر واحد کالا در سال 2 واحد پول، هزینهٔ هر واحد کسری 4 واحد پول و سیستم موجودی به صورت مقداری ثابت سفارش اجرا شود و به طور متوسط 10 سفارش در سال صادر شود مقدار بهینهٔ موجودی اطمینان چقدر خواهد بود؟(کنکور ۸۵)

۱)6.6 واحد کالا
۲) 9 واحد کالا
۳) 10 واحد کالا
۴) بدون مشخص بودن سطح خدمت نمی‌توان موجودی اطمینان را تعیین کرد.

حل : گزینه ۲ درست است.

$$D_L \sim U(10\ ,\ 30)$$

$$1-P=\frac{hQ}{\pi D}=\frac{h}{\pi}\times T \ \Rightarrow\ 1-F_D(r)=\frac{2}{4}\times\frac{1}{10}=0.05$$

$$\frac{r-10}{30-10}=0.95 \ \Rightarrow\ r=29$$

$$SS=r-\mu_{D_L}=29-20=9$$

مثال: برای محصولی از خط مشی مقدار سفارش ثابت $(F.O.S)$ استفاده می‌شود. تقاضا برای محصول دارای توزیع نرمال با میانگین $1000t$ و انحراف معیار $120\sqrt{t}$ (t به ماه) می‌باشد. اگر برای این محصول موجودی اطمینان در نظر نگرفته باشیم و مقدار سفارش در هر بار برابر 1000 واحد باشد. به نظر شما متوسط تعداد دفعات کمبود در سال چقدر است؟ (کنکور ۸۵)

۱)4 بار
۲) 6 بار
۳) 9 بار
۴) 12 بار

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

حل : گزینه ۲ درست است.

$$D_t \sim N\left(1000t\ ,\ \left(120\sqrt{t}\right)^2\right)$$

$$\mu_D = D = 1000 \times 12 = 12000$$

$$SS = 0 \ \Rightarrow \ P = 0.5$$

$$N_b = (1-P) \times \frac{D}{Q} = (1-0.5) \times \frac{12000}{1000} = 6$$

مثال: تقاضا برای محصولی در طی مدت تحویل متغیری تصادفی با توزیع احتمالی به شرح جدول زیر است. مقدار سفارش در هر بار ثابت و برابر Q است. اگر مدیریت موجودی اطمینان را برابر 10 واحد در نظر گرفته باشد میانگین کمبود در یک دور چقدر است؟ (کنکور ۸۵)

تقاضا X	100	110	120	130	140	150	160
احتمال تقاضا $P(x)$	0.1	0.1	0.2	0.2	0.2	0.1	0.1

$$E(X) = E(D) = 130$$

۱) 3 واحد   ۲) 7 واحد   ۳) 20 واحد   ۴) 31 واحد

حل : گزینه ۱ درست است.

$$\left.\begin{array}{l}\mu_{D_L} = E(D) = 130 \\ SS = 10\end{array}\right. \rightarrow \ r = 130 + 10 = 140$$

$$\bar{b}(r) = \sum_{X>140}^{160} (X-r)P(X=x) = (160-140)\times 0.1 + (150-140)\times 0.1 = 3$$

مثال: تقاضا برای محصولی در طی مدت تحویل دارای توزیع یکنواخت در فاصله $(100, 200)$ است. برای این محصول از خط مشی مقدار سفارش ثابت F.O.S استفاده می‌شود. اگر تعداد دفعات سفارش در سال برابر 10 بار باشد و متوسط تعداد دفعات کمبود در سال برابر 2 بار باشد آنگاه موجودی اطمینان این محصول چقدر است؟ (کنکور ۸۵)

۱)صفر است   ۲) 20 واحد   ۳) 30 واحد   ۴) 50 واحد

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

حل : گزینه ۳ درست است.

$$D_L \sim U(100,200)$$

$$1-P = N_b.T = \frac{N_b}{n} = \frac{2}{10} \Rightarrow P = 0.8$$

$$0.8 = \frac{r-100}{200-100}$$

$$r = 180$$

$$SS = r - \mu_{D_L} = 180 - 150 = 30$$

مثال: توزیع تقاضای محصول در طی مدت تحویل آن یکنواخت بین 100 و 300 واحد است. متوسط تقاضای سالیانه این محصول 1200 واحد، مقدار هر بار سفارش آن برابر 60 واحد و موجودی اطمینان این محصول برابر 80 واحد می‌باشد، سطح خدمت این محصول برابر است با : (کنکور ۸۷)

۱) 80 درصد ۲) 95 درصد ۳) 85 درصد ۴) 90 درصد

حل : گزینه ۴ درست است.

$$D_L \sim U(100,300) \rightarrow \mu_{D_l} = 200$$

$$D = 1200 \;,\; Q = 60 \;,\; SS = 80$$

$$r = \mu_{D_L} + SS = 200 + 80 = 280$$

$$P = P(D_L \le r) = F_{D_L}(r) = \frac{r-100}{300-100} = \frac{280-100}{200} = 0.9 \rightarrow \%90$$

مثال: موجودی اطمینان محصولی 128 واحد و سطح خدمت این محصول 90% است. مدیریت مایل است سطح خدمت را به 95% افزایش دهد. تقاضا برای محصول در طی مدت تحویل نرمال با میانگین μ_L و انحراف معیار σ_L است. در این صورت مقدار تغییر در موجودی اطمینان چقدر خواهد بود؟ $u \sim N(0,1)$ (کنکور ۸۸)

۱) 37 واحد افزایش می‌یابد.

۲) 27 واحد افزایش می‌یابد.

۳) 20 واحد کاهش می‌یابد.

۴) تغییری پیدا نمی‌کند.

k	1.04	1.28	1.65
$P\{u \le k\}$	0.85	0.90	0.95

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

حل : گزینه ۱ درست است.

$$SS=128$$
$$P_1=0.9$$
$$K_{P_1}=1.28$$
$$P_2=0.95$$
$$K_{P_2}=1.65$$
$$SS_1=K_{P_1}\sigma_{D_L} \rightarrow 128=1.28\times\sigma_{D_L} \rightarrow \sigma_{D_L}=100$$
$$SS_2=K_{P_2}\sigma_{D_L} \rightarrow 1.65\times100=165$$
$$SS_2-SS_1=37$$

37 واحد افزایش می‌یابد.

مثال: تقاضای روزانه کالایی ثابت و برابر 50 کیلوگرم است. مدت تحویل متغیری تصادفی با توزیع نرمال با میانگین شش روز و انحراف معیار دو روز است. اگر سطح خدمت (میزان اطمینان از موجودی) برابر 90 درصد باشد، نقطه سفارش مجدد این کالا چند کیلوگرم خواهد بود؟ $(Z_{0.9}=1.28)$ (کنکور ۸۹)

۱) 428 ۲) 328 ۳) $328\sqrt{2}$ ۴) $428\sqrt{2}$

حل : گزینه ۱ درست است.

$$D=50\,kg$$
$$L\sim N\left(6,2^2\right)$$
$$r=\mu_{D_L}+K_P\,\sigma_{D_L}$$
$$\sigma_{D_L}=D\sigma_L=50\times2=100$$
$$\mu_{D_L}=D\times\mu_L=50\times6=300$$
$$K_p=1.28$$
$$r=300+1.28\times100=428$$

۹ـ۳ـ مدل احتمالی ساده با خط‌مشی سفارش‌دهی FOI (R , T)

فرضیات مدل مانند EOQ است با تفاوت‌های زیر :

۱ـ تقاضا احتمالی و ساکن است.

۲ـ کمبود جایز است.

۳ـ خط مشی سفارش‌دهی FOI می‌باشد.

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

هدف مدل تعیین مقدار سقف موجودی بهینه $\left(R^*\right)$ و فاصله زمانی بهینه بین دو سفارش متوالی $\left(T^*\right)$ با کمینه کردن هزینه‌هاست.

پارامترهای مدل:

D : متغیر تصادفی تقاضا در سال

μ_D: میانگین تقاضا در سال

σ_D: انحراف معیار تقاضا در سال

D_{L+T}: متغیر تصادفی تقاضا در مدت زمان تحویل به‌علاوه زمان یک دوره

$\mu_{D_{L+T}}$: میانگین تقاضا در مدت زمان تحویل به علاوه زمان یک دوره

$\sigma_{D_{L+T}}$: انحراف معیار تقاضا در مدت زمان تحویل به علاوه زمان یک دوره

p: سطح خدمت، سطح اطمینان

متغیرهای مدل:

R : سقف موجودی، حداکثر موقعیت موجودی

T: فاصله زمانی بین دو سفارش متوالی

SS: موجودی اطمینان (ذخیره ایمنی):

موجودی اطمینان در مدل احتمالی ساده با خط‌مشی FOI برابر است با مقداری از موجودی که جهت جواب‌گویی به تغییرات تقاضا در مدت زمان تحویل بعلاوه زمان یک دوره سفارش تعریف می‌شود و مقدار آن در تعاملی بین هزینه‌های کمبود و هزینه نگهداری به‌دست می‌آید.

تعریف سطح خدمت

سطح خدمت برابر است با احتمال اینکه در یک دوره سفارش، با کمبود مواجه نشویم و برابر است با احتمال اینکه تقاضا در مدت زمان تحویل به علاوه زمان یک دوره سفارش از حداکثر موقعیت موجودی $\left(R^*\right)$ کوچک‌تر یا مساوی باشد.

$$p = p\left\{D_{L+T} \le R\right\} = F_{D_{L+T}}(R)$$

$1-p$: سطح ریسک یا سطح خطر برابر است با احتمال اینکه در یک دوره با کمبود مواجه شویم.

$$1-p = p\left\{D_{L+T} > R\right\} = 1 - F_{D_{L+T}}(R)$$

نحوه محاسبه سطح خدمت (p)

الف) توسط مدیر سیستم موجودی مشخص گردد.

ب) از روی مقادیر N_b و T_b توسط روابط زیر مشخص گردد.

$$1-p = \frac{N_b}{\frac{1}{T}} = N_b . T$$

$$T_b = \frac{1}{N_b}$$

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

الگوریتم حل مدل احتمال ساده FOI

مدل احتمالی FOI از دو روش زیر قابل حل است.

۱) با استفاده از پارامترهای π و $\hat{\pi}$: در این روش تابع هزینه‌ها را بر اساس متغیرها و پارامترها نوشته و نسبت به دو متغیر T و R مشتق می‌گیریم و روابط محاسبه T و R به‌دست می‌آید.

۲) با استفاده از مفهوم جایگزین سطح خدمت. الگوریتم این روش به شرح ذیل است.

الف) مقدار T^* از رابطه زیر محاسبه می‌گردد:

$$T^* = \sqrt{\frac{2A}{Dh}}$$

ب) مقدار سطح خدمت از روش‌های عنوان شده محاسبه می‌گردد.

$$1 - p = TN_b$$

ج) مقدار سقف موجودی (R) از رابطه زیر محاسبه می‌گردد.

اگر تقاضا پیوسته باشد، مقداری از تقاضا در مدت زمان تحویل به علاوه یک دوره سفارش برابر با R می‌باشد که به ازای آن تابع توزیع تجمعی برابر با سطح خدمت (p) گردد.

$$F_{D_{L+T}}(R) = p$$

اگر تقاضا گسسته باشد کوچک‌ترین مقداری از تقاضا در مدت زمان تحویل بعلاوه یک دوره سفارش که رابطه زیر را برقرار کند برابر R می‌گردد.

$$F_{D_{L+T}}(R) \geq p$$

د) مقدار ذخیره اطمینان از رابطه زیر محاسبه می‌گردد.

$$R = \mu_{D_{L+T}} + SS \quad \Rightarrow \quad SS = R - \mu_{D_{L+T}}$$

هـ) متوسط مقدار کمبود در یک دوره $(\bar{b}(R))$، متوسط مقدار کمبود در یک سال $(B(R))$ و درصد نقاضاهایی (مشتریانی) که با کمبود مواجه می‌شوند (در دوره یا سال) از فرمول‌های زیر محاسبه می‌گردد:

تقاضا گسسته: $\bar{b}(R) = \sum_{x=R}^{\infty} (x - R)p\{D_{L+T} = x\}$ تقاضا پیوسته: $\bar{b}(R) = \int_R^{\infty} (x - R)f_{D_{L+T}}(x)dx$

$$B(R) = \frac{\bar{b}(R)}{T}$$

درصد تقاضاهایی که با کمبود مواجه می‌شود. $= \frac{B(R)}{D} = \frac{\bar{b}(R)}{D.T}$

و) متوسط موجودی در دست از رابطه زیر محاسبه می‌گردد:

متوسط موجودی در دست $(\bar{I}) = \frac{D.T}{2} + SS$

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

مثال: در سیستم مرور دوره‌ای (دوره ثابت سفارش) میزان حداکثر موجودی در شرایطی که موجودی ذخیره صفر باشد برابر است با:

۱) میزان تقاضا در زمان دوره سفارش منهای تقاضا در طی زمان تحویل

۲) میزان تقاضا در طول زمان تحویل

۳) میزان تقاضا در طول زمان تحویل + تقاضا در طول دوره سفارش

۴) میزان تقاضا در طول دوره سفارش

حل : گزینه ۳ درست است.

همان‌طور که ذکر گردید در سیستم FOI، میزان حداکثر موجودی (R) برابر است با میزان تقاضا در طول زمان تحویل بعلاوه یک دوره سفارش + ذخیره اطمینان. از آن‌جا که ذخیره اطمینان برابر صفر فرض گردیده است بنابراین گزینه ۳ درست است.

مثال: از کالایی هر Tماه به اندازه‌ای سفارش می‌دهیم که به حداکثر سطح موجودی خود (E) برسد، اگر نرخ تقاضای، ماهیانه این کالا (D) به‌صورت یک متغیر تصادفی و زمان انتظار تحویل آن L به‌صورت ثابت باشد در این صورت میانگین موجودی در طول دوره برابر است با:

۱) $E-\frac{D.T}{2}-D..L$ ۲) $E-\frac{D.T+D.L}{2}$ ۳) $\frac{D.T+D.L}{2}$ ۴) $E-\frac{D.L}{2}+D.L$

حل : گزینه ۱ درست است.

$$SS = E-\mu_{D_{L+T}} = E-D.(L+T)$$

$$\bar{I} = \frac{D.T}{2}+SS = \frac{D.T}{2}+E-D.L-D.T = E-D.L-\frac{D.T}{2}$$

مثال: در سیستم دوره سفارش اقتصادی اگر R تقاضای سالیانه کالا، L مدت زمان تحویل و T دوره سفارش اقتصادی باشد در صورتی که مدت زمان تحویل محصول افزایش یابد به شرط آن که سایر عوامل ثابت بمانند کدام گزینه صحیح است؟ (کنکور ۸۷)

۱)حداکثر موجودی تغییری نمی‌کند. ۲) حداکثر موجودی افزایش می‌یابد.

۳) هزینه خرید سالیانه کالا کاهش می‌یابد. ۴) حداکثر موجودی کاهش می‌یابد.

حل : گزینه ۲ درست است.

مثال: دوره ثابت بازنگری موجودی سه کالا در انبار برابر 3 ماه تعیین شده است. مدت تحویل یکی از این کالاها ثابت و برابر یک ماه است. اگر تقاضای سالیانه این کالا ثابت و برابر 12000 واحد باشد، حداکثر موجودی این کالا در انبار چند واحد خواهد بود؟ (کنکور ۸۹)

۱)8000 ۲) 4000 ۳) 12000 ۴) 36000

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

حل : گزینه ۲ درست است.

حداکثر موجودی این کالا در انبار برابر است با تقاضا در دوره‌ی تحویل + تقاضا در طول دوره سفارش.

Q+r=D.L+D.T=D. (L+T)

3 کالا $\rightarrow$ $T=3$ ماه

1 کالا $\rightarrow$ $L=1$ ماه

$D=12000$

$12000\left(\frac{4}{12}\right)=4000$

مثال: در مدل‌های احتمالی با سیاست‌های FOS یا FOI اگر سطح خدمت را برابر 0.9 در نظر گرفته باشیم، با فرض این که میانگین تقاضای سالانه برابر 1500 واحد و 200 دوره در سال داشته باشیم، کدام گزینه صحیح است؟ (کنکور ۸۹)

۱)به طور متوسط 150 واحد کمبود در سال خواهیم داشت.

۲) به طور متوسط در 3 دوره با کمبود مواجه می‌شویم.

۳) نمی‌توان در مورد کل تقاضای برآورده نشده اظهار نظر کرد.

۴) نمی‌توان در مورد متوسط تعداد دوره‌های کمبود اظهار نظر کرد.

حل : گزینه ۳ درست است.

$N_b=(\text{تعداد کل دوره})\times(1-P)=200\times0.1=20$ در 20 دوره با کمبود مواجه می‌شویم

$T=\frac{Q}{D}=\frac{1}{200}=\frac{Q}{1500}$

$Q=7.5$

می‌توان متوسط دوره‌های کمبود را به دست آورد ولی برای کل تقاضای برآورده نشده باید $\overline{b}(r)$ محاسبه گردد که احتیاج به تابع آن داریم.

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

۹ـ ۴ـ مدل احتمالی ساده با خط‌مشی FOI در حالتی که تقاضا در مدت زمان تحویل بعلاوه یک دوره سفارش دارای توزیع نرمال باشد.

در این مدل تقاضا در مدت زمان تحویل بعلاوه یک دوره سفارش دارای توزیع نرمال با میانگین $\mu_{D_{L+T}}$ و واریانس $\sigma^2_{D_{L+T}}$ است.

$$D_{L+T} \sim N\left(\mu_{D_{L+T}} \ , \ \sigma^2_{D_{L+T}}\right)$$

رابطه سقف موجودی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$p = p\left\{D_{L+T} \le R\right\} = p\left\{\frac{D_{L+T} - \mu_{D_{L+T}}}{\sigma_{D_{L+T}}} \le \frac{R - \mu_{D_{L+T}}}{\sigma_{D_{L+T}}}\right\} \Rightarrow R = \mu_{D_{L+T}} + k_p \sigma_{D_{L+T}}$$

$$SS = k_p \sigma_{L+T}$$

در صورتی که مدت زمان تحویل نیز احتمالی باشد، روابط زیر برای تبدیل میانگین و واریانس به کار می‌رود:

D: متغیر تصادفی تقاضا در سال با میانگین μ_D و واریانس σ^2_D

L: متغیر تصادفی مدت زمان تحویل با میانگین μ_L و واریانس σ^2_L

D_{L+T}: متغیر تصادفی تقاضا در مدت زمان تحویل به علاوه زمان یک دوره سفارش با میانگین $\mu_{D_{L+T}}$ واریانس $\sigma^2_{D_{L+T}}$

$$\mu_{D_{L+T}} = \mu_D \times \mu_{L+T}$$

$$\sigma_{D_{L+T}} = \sqrt{\mu^2_D \sigma^2_{L+T} + \mu_{L+T} \sigma^2_D}$$

قابل ذکر است که از آنجایی‌که T ثابت است، داریم:

$$\mu_{L+T} = \mu_L + T$$

$$\sigma_{L+T} = \sigma_L$$

بنابراین حالت‌های زیر برای مدل قابل ذکر است.

حالت ۱: D متغیر تصادفی با توزیع نرمال $\left(\mu_D \ , \sigma^2_D\right)$ و L ثابت و قطعی است.

$$\mu_{D_{L+T}} = (L+T)\mu_D$$

$$\sigma_{D_{L+T}} = \sqrt{L+T}\ \sigma_D \Rightarrow R = (L+T)\mu_D + k_p \sqrt{L+T}\ \sigma_D$$

$$SS = k_p \sqrt{L+T}\ \sigma_D$$

حالت۲: D ثابت و قطعی و L متغیر تصادفی با توزیع نرمال $\left(\mu_L \ , \sigma^2_L\right)$ باشد.

$$\mu_{D_{L+T}} = D\mu_{L+T} = D\left(\mu_L + T\right)$$

$$\sigma_{D_{L+T}} = D\sigma_{L+T} = D\sigma_L \Rightarrow R = D\left(\mu_L + T\right) + k_p D\sigma_L$$

$$SS = k_p\ D\sigma_L$$

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

حالت ۳: D و L هر دو متغیر تصادفی با توزیع نرمال باشند.

$$\mu_{D_{L+T}} = \mu_D \times \mu_{L+T} = \mu_D\left(\mu_L + T\right)$$
$$\sigma_{D_{L+T}} = \sqrt{\mu_D^2\,\sigma_{L+T}^2 + \mu_{L+T}\sigma_D^2} = \sqrt{\mu_D^2\,\sigma_L^2 + \left(\mu_L + T\right)\sigma_D^2}$$

مثال: در خط مشی (R, T) و یا FOI وقتی که تقاضا دارای توزیع نرمال است،فرض کنید که انحراف معیار برابر 3 واحد و مقدار R برابر 100 و مقدار T_b (میانگین فاصله زمانی بین دو بار کمبود متوالی) برابر 5 سال تخمین زده شده است. حال اگر مقدار واقعی انحراف معیار برابر 3.5 باشد آنگاه: (کنکور ۸۶)

۱)مقدار واقعی T_b افزایش می‌یابد.

۲) مقدار واقعی T_b بستگی به $T+L$ دارد و در آن تغییری ایجاد نمی‌شود.

۳) مقدار واقعی T_b کاهش می‌یابد.

۴) مقدار واقعی T_b بستگی به سطح خطر دارد و در آن تغییری ایجاد نمی‌شود.

حل : گزینه ۳ درست است.

طبق نکات قبلی اگر انحراف زیاد شود باید برای آن که R ثابت بماند در $K_P\sigma_{D_{L+T}}$, K_P کاهش پیدا کند. پس $1-P$ افزایش می‌یابد و $T_b = \dfrac{T}{1-P}$ کاهش خواهد یافت.

مثال: برای محصولی از خط مشی دور ثابت $(F.O.I)$ د ر سفارش دهی استفاده می‌شود. مدت تحویل این محصول 8 ماه و فاصله زمانی بین دو سفارش متوالی برابر 8 ماه است. تفاضا در طی مدت t نرمال با میانگین 1000t و انحراف معیار $100\sqrt{t}$ است (t به ماه). اگر حداکثر موقعیت موجودی (مجموع موجودی در دست و در راه) این محصول باربر 16800 واحد باشد به نظر شما متوسط موجودی محصول چقدر است؟ (کنکور ۸۵)

۱)4800 واحد ۲) 6000 واحد ۳) 8400 واحد ۴) 8800 واحد

حل : گزینه ۱ درست است.

$$D_t \sim N\left(1000t, \left(100\sqrt{t}\right)^2\right)$$
$$\bar{I} = \frac{DT}{2} + SS$$
$$SS = R - \mu_{D_{L+T}} = 16800 - 1000(8+8) = 800$$
$$\bar{I} = \frac{1000\times 8}{2} + 800 = 4800$$

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

مثال: خط مشی سفارش دهی برای محصولی بدین طریق است که در هر دوره ثابت T (T=3 ماه) آن قدر سفارش داده می‌شود تا سطح موقعیت موجودی این محول برابر 600 واحد شود. متوسط و انحراف معیار تقاضای این محصول در مدت (t به ماه) به ترتیب $\mu_t = 100t$ و $\sigma = 10\sqrt{t}$ می‌باشد . با توجه به اطلاعات فوق، متوسط موجودی این محصول برابر است با : (کنکور ۸۷)

۱) 250 واحد ۲) 300 واحد ۳) 350 واحد ۴) 500 واحد

حل : هیچ کدام.

$$T=3 \quad \mu_t=100t \quad \sigma_t=10\sqrt{t} \quad R=600$$
$$R=\mu_{D_{L+T}}+SS \Rightarrow SS=600-\mu_{D_{L+T}}=600-100(3+L)=300-100L$$
$$\bar{I}=\frac{D.T}{2}+SS=\frac{100\times 3}{2}+300-100L=450-100L$$

از آن جا که مدت تحویل (L) مشخص نمی‌باشد نمی‌توان سئوال را پاسخ داد.

مثال: در خط مشی (R,T) (خط مشی F.O.I) مقدار $R=600$ و $T=3$ ماه است. تقاضا برای این محصول متغیری تصادفی با میانگین $\mu_t = 1003$ و انحراف معیار $\sigma_t = 10\sqrt{\tau}$ است (t به ماه). کدام یک از گزاره‌های زیر اگر مدت تحویل برابر یک ماه باشد در مورد موجودی اطمینان این محصول صحیح است؟ (کنکور ۸۸)

۱) 500 واحد ۲) 200 واحد ۳) 300 واحد ۴) 400 واحد

حل : گزینه ۲ درست است.

$$R=600$$
$$T=3$$
$$L=1$$
$$\mu_t=100t$$
$$\sigma_t=10\sqrt{t}$$
$$SS=R-\mu_{D_{L+T}}=R-\mu_{D_{3+1}}=600-100\times 4=200$$

مثال: طول دوره سفارش T (فاصله زمانی بین دو سفارش متوالی) برای محصولی ثابت و برابر 2 ماه انتخاب شده است و مدت تحویل این محصول نیز 2 ماه است. توزیع تقاضای این محصول در طی هر ماه متغیر تصادفی نرمال با میانگین 100 واحد و انحراف معیار 20 واحد است. سطح خدمت این محصول 0.95 است، متوسط موجودی محصول چقدر است؟ (کنکور ۸۹)

www.ieun.ir

$$\left(p\left(z<1.65\right)=0.95\right)$$

۱) 200 ۲) 433 ۳) 266 ۴) 466

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

حل : هیچ کدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

$$\text{FOI} \quad T=2 \quad D\sim N\left(100,20^2\right)$$
$$L=2 \quad P=0.95 \qquad K_p=1.65$$
$$\bar{I}=? \quad SS=K_p\sigma_{D_{L+T}}=K_p\sqrt{(L+T)}\,\sigma_D=1.65\times\sqrt{4}\times 20=66$$
$$\bar{I}=\frac{DT}{2}+SS=\frac{100\times 2}{2}+66=166$$

۹ـ ۵ـ مقایسه بین مدل احتمالی FOS و مدل احتمالی FOI

	FOS		FOI
حداکثر موقعیت موجودی	$r+Q$		R
حداقل موقعیت موجودی	r		معلوم نمی‌باشد
متوسط موجودی در دست	$\frac{Q}{2}+SS_{FOS}$	$<$	$\frac{D.T}{2}+SS_{FOI}$
موجودی اطمینان	SS_{FOS}	$<$	SS_{FOI}
موجودی اطمینان در حالت نرمال	$k_p\,\sigma_{D_L}$	$<$	$k_p\,\sigma_{D_{L+T}}$
کل هزینه نگهداری سالیانه	$h\left(\frac{Q}{2}+SS_{FOS}\right)$	$<$	$h\left(\frac{DT}{2}+SS_{FOI}\right)$
کل هزینه کمبود سالیانه	$\pi\,B(r)$	$<$	$\pi\,B(R)$

شرط مقایسه موارد فوق برابر بودن تمامی پارامتر ها من جمله سطح خدمت (p) است (شرایط یکسان است).

مثال: دو سیستم سفارش دهی $(r\,,Q)$ یا FOS و (R,T) یا FOI را در نظر بگیرید.

۱) برای یک سطح خدمت مشخص در دو سیستم موجودی اطمینان یکسان است.

۲) برای یک سطح خدمت مشخص، متوسط مقدار کسری سالیانه دو سیستم برابر است.

۳) برای یک سطح خدمت مشخص، کل هزینه نگهداری سیستم $(r\,,Q)$ بیشتر از سیستم $(R\,,T)$ است.

۴) برای یک سطح خدمت مشخص، متوسط کسری در یک دوره سفارش برای سیستم $(r\,,Q)$ کمتر از سیستم $(R\,,T)$ است.

حل : گزینه ۴ درست است.

همان‌طور که در مقایسه دو سیستم ذکر گردید، برای یک سطح خدمت مشخص موجودی اطمینان سیستم FOI بیشتر از FOS است $\left(SS_{FOS}<SS_{FOI}\right)$، متوسط کمبود سالیانه سیستم FOI نیز از سیستم FOS بیشتر است $\left(B(r)<B(R)\right)$، کل هزینه نگهداری سیستم FOS کمتر از سیستم FOI است و نیز متوسط کمبود در یک دور سفارش سیستم FOS کمتر از سیستم FOI است $\left(\bar{b}(r)<\bar{b}(R)\right)$بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

نکته :

$$FOS \rightarrow \quad \text{هزینه نگهداری} = h\bar{I} = h\left(\frac{Q}{2} + SS_{FOS}\right)$$

$$FOI \rightarrow \quad \text{هزینه نگهداری} \ h\bar{I} = h\left(\frac{DT}{2} + SS_{FOI}\right)$$

$$SS_{FOS} = K_P \sigma_{D_L} = K_P\sqrt{D^2\sigma_L^2 + L\,\sigma_D^2}$$

$$SS_{FOI} = K_P\,\sigma_{D_{L+T}} = K_P\sqrt{D^2\sigma_L^2 + (L+T)\ \sigma_D^2}$$

نکته: در حالت احتمالی اگر L کاهش یابد SS کاهش می‌یابد. بنابراین هزینه‌ی نگهداری نیز کاهش خواهد یافت و بنابراین هزینه‌های سیستم موجودی کاهش می‌یابد ولی مقدار آن بستگی به سایر پارامترها خواهد داشت.

نکته : اگر $\sigma = 0$ باشد (حالت قطعی) با کاهش L هزینه‌ها یکسان باقی می‌ماند.

نکته : موجودی اطمینان در FOS به دلیل مرور دائمی که روی سطح موجودی وجود دارد از سیستم FOI کمتر است.

مثال: به طور کلی در صورت کاهش زمان تدارک (lead time) به میزان 40 درصد کدام یک از جملات زیر صحیح است؟ (کنکور ۸۵)

۱)هزینه سیستم موجودی تغییری نمی‌کند.

۲) هزینه سیستم موجودی افزایش خواهد یافت.

۳) هزینه سیستم موجودی دقیقاً 40 درصد کاهش می‌یابد.

۴) در مجموع هزینه سیستم موجودی کاهش خواهد یافت ولی مقدار آن بستگی به سایر پارامترها دارد.

حل : با توجه به نکته گزینه ۴ درست است.

مثال: کدام یک از عبارت‌های زیر صحیح است؟ (کنکور ۸۶)

۱)در یک سیستم FOS همیشه متوسط موجودی بیشتر از سیستم FOI است.

۲) در یک سیستم FOS با دریافت تدریجی، موجودی اطمینان بیشتری برای یک سطح خدمت مشخص لازم خواهد بود.

۳) در سیستم FOI همیشه حداکثر موقعیت موجودی کمتر از سیستم FOS با شرایط مشابه است.

۴) برای سطح خدمت مشخص در سیستم FOS با دریافت تدریجی، موجودی اطمینان کمتری نسبت به سیستم FOI با شرایط مشابه لازم خواهد بود.

حل : گزینه ۴ درست است.

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

مثال: کدام یک از گزاره‌های زیر برای N_b میانگین تعداد دفعات کمبود در سال صحیح است؟ (کنکور ۸۶)

۱) N_b تنها بستگی به توزیع تقاضا در سال دارد.

۲) N_b برای محصولات مختلف تنها بستگی به سطح خطر دارد.

۳) N_b برای محصولات علاوه بر سطح خدمت بستگی به سایر پارامترها دارد.

۴) N_b برای محصولات مختلف تنها بستگی به تعداد دفعات سفارش در سال دارد.

حل : گزینه ۳ درست است.

$$N_b = (1-P) \times \frac{D}{Q}$$

$$N_b = \frac{1-P}{T}$$

بنابراین علاوه بر سطح خدمت به تعداد دفعات سفارش ($\frac{D}{Q}$ یا $\frac{1}{T}$) در سال نیز بستگی دارد.

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

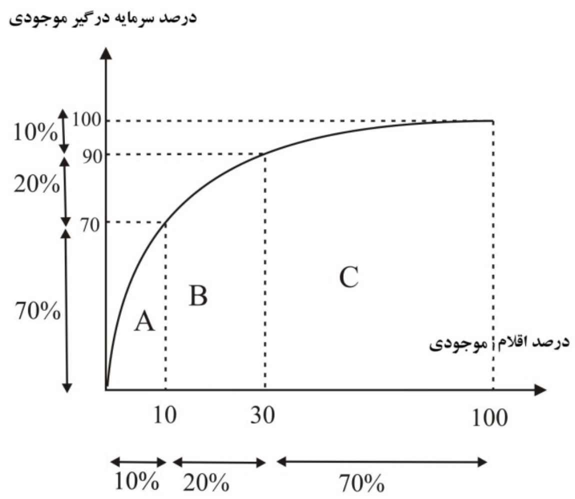
۱۰ـ آنالیز ABC

آنالیز ABC که حالتی از نمودارهای پارتو است، اقلام موجودی را به سه طبقه A و B و C به شرح ذیل تقسیم می‌کند:

طبقه	درصد اقلام موجودی	درصد سرمایه درگیر موجودی
A	کمترین (حدود 10%)	بیشترین (حدود 70%)
B	متوسط (حدود 20%)	متوسط (حدود 20%)
C	بیشترین (حدود 70%)	کمترین (حدود 10%)

www.ieun.ir

نمودار درصد سرمایه دیگر موجودی به‌صورت زیر است.



در این روش حجم سرمایه در گیر موجودی هر کالا به‌صورت زیر محاسبه می‌گردد.

حجم سرمایه درگیر موجودی محصول i ام $= C_i \times D_i$

سپس اقلام را بر اساس حجم سرمایه درگیر موجودی به‌صورت نزولی مرتب می‌کنیم و سپس درصد حجم سرمایه درگیر موجودی برای هر محصول را محاسبه می‌کنیم که برابر است با حجم سرمایه درگیر موجودی محصول i ام تقسیم بر مجموع حجم سرمایه درگیر موجودی کلیه محصولات. حدود 10% کالاهای اول که 70% حجم سرمایه درگیر موجودی را دارا می‌باشند گروه A، 20% دوم که حدود 20% حجم سرمایه درگیر موجودی را دارا می‌باشند گروه B و 70% باقی مانده که 10% حجم سرمایه درگیر موجودی را دارا می‌باشند گروه C را در برخواهند داشت.

نکته : یکی از اهداف آنالیز ABC تعیین خط مشی موجودی مناسب برای کالاهاست.

نکته : در آنالیز ABC سرمایه‌ی درگیر موجودی مطرح است نه ارزش (قیمت) آن.

مثال: کدام‌یک از اقلام زیر جزو گروه A در آنالیز ABC قرار می‌گیرد.

۱) قلم کالایی که بیشترین تقاضای سالیانه را دارد.
۲) قلم کالایی که کمترین سرمایه درگیر موجودی را دارد.
۳) قلم کالایی که بیشترین تقاضا برحسب ریال را دارد.
۴) قلم کالایی که بیشترین قیمت واحد را دارد.

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

حل : گزینه ۳ درست است.

همان‌طور که ذکر گردید. آنالیز ABC براساس حجم سرمایه درگیر موجودی، کالاها را گروه‌بندی می‌نماید و تنها قیمت ملاک طبقه‌بندی نسبت بلکه قیمت در تقاضا یا همان تقاضا برحسب ریال ملاک طبقه‌بندی است بنابراین گروه A بیشترین حجم سرمایه درگیر موجودی یا تقاضا برحسب ریال را دارد.

مثال: در آنالیز ABC اقلام موجودی، گروه اقلامی که شامل بیشترین درصد اقلام بوده ولی کمترین درصد حجم پولی را دارا هستند عبارت است از:

۱) گروه Z ۲) گروه A ۳) گروه C ۴) گروه B

حل : گزینه ۳ درست است.

مثال: هدف از روش تحلیل و طبقه بندی ABC اقلام چیست؟ (کنکور ۸۵)

۱)اقلام موجودی که می‌بایست کنترل شوند. ۲) تفکیک اقلام با ارزش بالا از اقلام با ارزش پایین

۳) تعیین سیاست و سیستم مناسب برای کنترل موجودی اقلام ۴) تمامی موارد صحیح است.

حل : گزینه ۳ درست است.

مثال: در مورد تجزیه و تحلیل ABC کدام عبارت زیر غلط است؟ (کنکور ۸۷)

۱)آنالیز ABC را می‌توان بدون توجه به ارزش مصرف سالیانه نیز انجام داد.

۲) در تحلیل ABC تحت هر شرایطی تعداد اقلام دسته B کمتر از تعداد اقلام دسته C به دست می‌آید.

۳) آنالیز ABC به منظور سیاستگذاری مناسب برای کنترل موجودی اقلام در یک مؤسسه استفاده می‌شود.

۴) در تحلیل ABC چنانچه تعداد اقلام دسته A زیاد باشد باید تحلیل را با درصد کمتر A مجدداً انجام داد.

حل : گزینه ۲ درست است.

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

۱۱ـ پیش‌بینی

یکی از قدم‌های ابتدایی در کنترل موجودی، پیش‌بینی تقاضا در آینده است. پیش‌بینی یک تخمین از میزان تقاضا برای یک یا چند محصول در یک پریود زمانی در آینده است.

روش‌های متنوعی برای پیش‌بینی موجود است که با توجه به حساسیت و دقت مورد نیاز جهت کالای مصرفی باید تکنیک مورد نظر را انتخاب نمود. برخی از این روش‌ها به‌صورت زیر است.

در این روش‌ها X_i معرف تقاضای واقعی سال i ام و $\hat{X}_i$ معرف پیش‌بینی سال i ام می‌باشد.

۱ـ روش معدل (میانگین) ساده

در این روش کلیه داده‌های سال‌های گذشته با هم جمع شده و بر تعداد آن‌ها تقسیم می‌گردد. مقدار به دست آمده برای پیش‌بینی سال آینده و سال‌های آینده مورد استفاده قرار می‌گیرد.

$$\hat{X}_{t+\ell} = \hat{X}_{t+1} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_t}{t}$$

$$\ell = 1,2,3$$

این روش صرفا برای داده‌هایی مناسب است که دارای میانگین ثابتی بوده و پیرامون آن میانگین نوسان دارند.

مثال: تقاضا محصولی در 4 ماه اخیر به‌صورت زیر بوده است. با استفاده از روش میانگین ساده مقدار پیش‌بینی تقاضا برای ماه 9 ام برابر است با:

ماه	1	2	3	4
تقاضا	10	30	20	50

www.ieun.ir

$$\hat{X}_9 = \hat{X}_5 = \frac{10+30+20+50}{4} = \frac{110}{4} = 27.5$$

۲ـ روش معدل متحرک ساده

در این روش N داده آخر با هم جمع شده و بر تعداد آن تقسیم می‌گردد. این روش برای پیش‌بینی سال بعد و سال‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرد. اگر در سال جدید داده‌ای اضافه گردد، قدیمی‌ترین داده مورد استفاده حذف می‌گردد. این روش تمام خصوصیات روش قبلی را داراست، یعنی برای داده‌هایی که نوسانات زیاد دارند مناسب نمی‌باشد.

مثال: در مثال فوق در صورتی که $N = 3$ باشد، پیش‌بینی تقاضای ماه 9 ام برابر است با:

$$\hat{X}_9 = \hat{X}_5 = \frac{50+20+30}{3} = \frac{100}{3} = 33.3$$

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

۳ـ روش معدل متحرک تصحیح شده

این روش مانند روش قبل است تنها با برخی اصلاحات در آن روند صعودی و نزولی بودن تقاضا را در نظر می‌گیرد و مقدار عقب افتادگی از روند را به پیش‌بینی اضافه می‌کند.

نکته : در روش میانگین متحرک دوبل، از میانگین‌های متحرک ساده به دست آماده نیز میانگین گرفته و پیش‌بینی دورهٔ بعدی را محاسبه می‌کند (در صورتی که بخواهیم روش را به طور کامل بکار ببریم باید حداقل 2N-1 داده داشته باشیم)

نکته : در روش میانگین متحرک اگر شدت تغییرات مصرف زیاد باشد، N باید کوچکتر انتخاب شود.

نکته : در روش میانگین متحرک اثر شوک به مصرف بعد از N دوره به طور کامل از بین می‌رود ولی در روش هموار سازی نمایی این اثر تا انتهامی ماند و فقط ضریب آن کاسته می‌شود.

نکته: جواب میانگین متحرک دوبل با معدل متحرک تصحیح شده یکی است و اساس آنها چندان تفاوتی ندارند.

مثال: کدام یک از عبارت‌های زیر صحیح است؟ (کنکور ۸۵)

۱)در روش میانگین متحرک تصحیح شده اگر روند مصرف مثبت باشد همیشه میانگین متحرک از تقاضا (مصرف) کمتر است.

۲) در روش میانگین متحرک دوبل (دوگانه) با پارامتر N حداقل 2N داده برای انجام پیش بینی لازم است.

۳) در روش میانگین متحرک اگر شدت تغییرات مصرف زیاد باشد N (پارامتر روش) باید بزرگتر انتخاب شود.

۴) اگر یک شوک به مصرف (تقاضا) وارد شود اثر آن در روش هموار سازی نمائیی نسبت به روش میانگین متحرک در تعداد دورهٔ کمتری باقی می‌باشد.

حل : گزینه ۱ درست است.

مثال: در روش میانگین متحرک دوبل کدام گزینه نادرست است؟ (کنکور ۸۹)

۱)رویکرد این روش با میانگین متحرک تصحیح شده یکسان است.

۲) میانگین متحرک دوبل برای حالت‌هایی که داده‌ها دارای روند باشد کارایی کمی دارند.

۳) تنها تفاوت این روش میانگین متحرک تصحیح شده روش تخمین روند است.

۴) تخمین روند در این روش از طریق میانگین متحرک میانگین‌های متحرک دوره‌های گذشته قابل محاسبه است.

حل : گزینه ۳ درست است.

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

۴ـ روش هموار سازی نمایی

در این روش تخمین جدید برابر است با تخمین قدیم به علاوه درصدی از اختلاف بین تخمین قدیم و مقدار واقعی همان سال

$$\hat{X}_{t+1} = \hat{X}_t + \alpha\left(X_t - \hat{X}_t\right) \qquad 0 \le \alpha \le 1$$

رابطه فوق را می‌توان به‌صورت زیر نیز نوشت:

$$\hat{X}_{t+1} = \alpha X_t + (1-\alpha)\hat{X}_t$$

به ضریب α در این روابط ضریب هموارسازی یا ضریب در نظر گرفتن خطا می‌گویند.

ممکن است که پیش‌بینی سال‌های گذشته نیز بر اساس هموارسازی نمایی باشد یعنی:

$$\hat{X}_{t+1} = \alpha X_t + (1-\alpha)\hat{X}_t$$

$$\hat{X}_t = \alpha X_{t-1} + (1-\alpha)\hat{X}_{t-1}$$

$$\hat{X}_{t+1} = \alpha X_{t-2} + (1-\alpha)\hat{x}_{t-2}$$

در این صورت رابطه پیش‌بینی تقاضای سال آینده بر اساس تقاضای سال‌های گذشته به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\hat{X}_{t+1} = \alpha X_t + \alpha(1-\alpha)X_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2 X_{t-2} + \ldots + \alpha(1-\alpha)^{t-1} X_1 + (1-\alpha)^t \hat{X}_1$$

مجموع ضریب‌های رابطه فوق برابر 1 می‌باشد یعنی:

$$\alpha + \alpha(1-\alpha) + \ldots + \alpha(1-\alpha)^{t-1} + (1-\alpha)^t = 1$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود در این روش هر پیش‌بینی بر اساس پیش‌بینی دوره قبل آن انجام می‌گردد. ممکن است پیش‌بینی دوره قبل نیز بر اساس پیش‌بینی دوره‌های قبل انجام شده باشد. اگر بخواهیم از روش هموار سازی نمایی ساده استفاده کنیم باید یک پیش‌بینی اولیه داشته باشیم که بر اساس روشی غیر از روش هموارسازی نمایی محاسبه شده باشد $\left(\hat{X}_1\right)$ این پیش‌بینی ممکن است بر اساس N داده قبلی محاسبه شده باشد. هر چه N بیشتر باشد، ضریب هموارسازی (α) کمتر است. برای محاسبه α می‌توان از رابطه زیر استفاده کرد:

$$\alpha = \frac{2}{N+1}$$

در نظر گرفتن خطا یا هموارسازی از پیش‌بینی پایه شروع شده و تا پیش‌بینی سال $t+1$ $\left(\hat{X}_{t+1}\right)$ ادامه می‌یابد.

لازم به ذکر است که این روش روند صعودی یا نزولی تقاضا را به خوبی در نظر نمی‌گیرد یعنی در صورتی که تقاضا روند صعودی داشته باشد پیش‌بینی انجام شده از این روش همیشه از مقدار واقعی کمتر است و در صورتی که تقاضا روند نزولی داشته باشد این پیش‌بینی بزرگ‌تر از مقدار واقعی خواهد بود.

نکته: هر چه α بیشتر باشد به داده‌های نزدیک (سال‌های اخیر) اهمیت بیشتری داده می‌شود و بالعکس، به عنوان مثال اگر $\alpha = 0.9$ باشد جمع ضریب سه سال اخیر $\alpha + \alpha(1-\alpha) + \alpha(1-\alpha)^2 = 0.999$ خواهد بود و بنابراین به تمام داده‌های قبل از آن تنها به میزان 0.001 اهمیت داده خواهد شد.

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

نکته: برای پیش‌بینی دوره tام، (A_t) به پیش بینی دوره $t-1$ (A_{t-1}) و تقاضای واقعی دوره $t-1$ (X_{t-1}) نیاز است.

مثال: با افزایش مقدار ضریب هوار سازی نمایی اهمیت دوره‌های نزدیک‌تر بیشتر و ضریب دوره‌های دورتر کمتر خواهد شد بنابراین اثر شوک تقاضا سریع‌تر از بین خواهد رفت. در روش هموار سازی نمایی بدون روند با $\alpha=0.1$ مقدار $A_{t-1}=100$ و مقدار $x_t=150$ به دست آمده است اگر α به 0.2 تغییر پیدا کند A_t چقدر خواهد بود؟ (ظ $A_t=$ پیش‌بینی دوره tام ، $x_t=$ تقاضای واقعی دوره tام). (کنکور ۸۷)

۱) $A_t=105$ ۲) $A_t=110$ ۳) $110\geq A_t>105$ ۴) هیچ کدام

حل : گزینه ۴ درست است.

با توجه به نکته بالا امکان پیش‌بینی وجود ندارد.

مثال: کدام عبارت در مورد روش پیش بینی هموار سازی نمایی صحیح نیست ؟ (کنکور ۸۸)

۱) یک روش مدل وزنی برای پیش بینی تقاضا است.

۲) تغییرات تصادفی داده‌ها را هموار (smooth) می‌کند.

۳) یک روش مدل وزنی است که به داده‌های گذشته وزن یکسان می‌دهد.

۴) نسبت به روش مدل متحرک ساده به داده‌های کمتری برای پیش‌بینی نیاز دارد.

حل : گزینه ۳ درست است.

نکته : وزن‌های تخصیص یافته به داده‌های گذشته در روش هموار سازی نمایی از تصاعد هندسی با فاکتور $1-\alpha$ پیروی می‌کنند و بنابراین با هم برابر نیستند.

مثال: ضریب هموار سازی نمایی برای پیش‌بینی کالایی 0.5 است. وزنی که به داده‌های سه دوره قبل داده می‌شود، چقدر است؟ (کنکور ۸۹)

۱) $\frac{1}{16}$ ۲) $\frac{1}{32}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) $\frac{1}{4}$

حل : گزینه ۳ درست است.

$$\alpha=0.5$$
$$\alpha(1-\alpha)^3=\frac{1}{2}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{16}$$

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

۵ـ روش هموارسازی نمایی تصحیح شده

این روش مانند روش قبلی است که با تصحیح آن روند صعودی و نزولی تقاضا در نظر گرفته می‌شود.

مثال: در کدام‌یک از حالات زیر روش نمو هموار (هموارسازی نمایی) با تصحیح روند استفاده می‌شود؟

۱) مصرف کالا دارای روند افزایش باشد.
۲) مصرف کالا دارای روند کاهش باشد.
۳) مصرف کالا دارای نوسانات زیاد باشد.
۴) هر سه مورد فوق

حل : گزینه ۴ درست است.

همان‌طور که ذکر گردید، روش همواره سازی نمایی با تصحیح روند برای حالاتی استفاده می‌شود که تقاضا دارای روند افزایشی یا کاهشی یا دارای نوسانات زیاد باشد.

مثال: پیش‌بینی تقاضای کالایی در دوره t با استفاده از روش نمو هموار (هموارسازی نمائی) با ضریب ثابت $\alpha = 0.2$ و $\alpha = 0.3$ برابر است با:

www.ieun.ir

$\alpha = 0.2$		$\alpha = 0.3$	
پیش‌بینی	خطا	پیش‌بینی	خطا
80	5	91	6

پیش‌بینی مصرف دوره $t+1$ عبارتست از:

۱) 81 واحد
۲) 93 واحد
۳) 96 واحد
۴) 87 واحد

حل : گزینه ۱ درست است.

ابتدا باید مقدار واقعی تقاضای دوره t را محاسبه کنیم. با توجه به پیش‌بینی و مقدار خطاهای داده شده می‌توان مقدار تقاضای واقعی دوره t را محاسبه کرد.

$$\alpha = 0.2 \quad \rightarrow \quad \text{مقدار واقعی} \begin{cases} 80 - 5 = 75 \\ 80 + 5 = 85 \end{cases}$$

$$\alpha = 0.3 \quad \rightarrow \quad \text{مقدار واقعی} = \begin{cases} 91 - 6 = 85 \\ 91 + 6 = 97 \end{cases}$$

از اعداد فوق برمی‌آید که $X_t = 85$ است. حال باید $\hat{X}_{t+1}$ را با $\alpha = 0.2$ و $\alpha = 0.3$ محاسبه کنیم.

$$\hat{X}_{t+1} = \hat{X}_t + \alpha\left(X_t - \hat{X}_t\right)$$

$$\alpha = 0.2 \;\Rightarrow\; \hat{X}_{t+1} = 80 + 0.2(85 - 80) = 81 \qquad \alpha = 0.3 \;\Rightarrow\; \hat{x}_{t+1} = 91 + 0.3(85 - 91) = 89.2$$

که تنها 81 در گزینه‌ها موجود است.

یادداشت:

....

....

....

....

www.ieun.ir

مثال: مقدار مصرفی واقعی و پیش‌بینی مصرف بر اساس دو روش معدل متحرک و نمو همواره (هموارسازی نمائی) برای دو دوره گذشته طبق جدول می‌باشد. پیش‌بینی مصرف دوره بعد (دوره سوم) چقدر است؟

دوره	مصرف واقعی	مقدار پیش‌بینی	
		نمو هموار	معدل متحرک
1	30	28	29
2	28	28.4	26

۱) 29.5　　۲) 29　　۳) 28.3　　۴) 27.5

حل : گزینه ۳ درست است.

از آنجا که N مشخص نمی‌باشد نمی‌توان از روش معدل متحرک برای پیش‌بینی استفاده کرد. برای پیش‌بینی از روش نمو هموار نیز باید α را از روش زیر به‌دست آوریم:

$$\hat{X}_{t+1} = X_t + \alpha\left(X_t - \hat{X}_t\right)$$

$$\hat{X}_2 = \hat{X}_1 + \alpha\left(X_1 - \hat{X}_1\right) \Rightarrow 28.4 = 28 + \alpha(30-28) \Rightarrow \alpha = 0.2$$

$$\hat{X}_3 = \hat{X}_2 + \alpha\left(X_2 - \hat{X}_2\right) = 28.4 + 0.2(28-28.4) = 28.32$$

مثال: در پیش‌بینی مصرف قطعات یدکی در یک انبار از روش هموارسازی نمایی (Exponential Smoothing) استفاده شده است. برای کالای B,A مقدار ضریب ثابت هموارسازی نمایی (α) به ترتیب 0.2 و 0.3 منظور شده است. در پیش‌بینی مصرف کدام‌یک از دو کالا به مصارف دوره‌های قبل اهمیت بیشتری داده شده است؟

۱) کالای A　　۲) کالای B

۳) جواب بستگی به تغییرات α ندارد.　　۴) اطلاعات کافی نیست.

حل : گزینه ۱ درست است.

هر چه α کمتر باشد به مصارف دوره‌های قبل اهمیت بیشتری داده می‌شود.

مثال: در روش پیش‌بینی هموار سازی نمایی اگر $\alpha = 0.2$ باشد. (کنکور ۸۶)

۱) با افزایش α به 0.3 اثر شوک تقاضا سریع‌تر از بین خواهد رفت.

۲) با انتخاب A_0 بزرگتر می‌توان اثر کوچک بودن α را کم کرد.

۳) اثر یک شوک وارد شده به تقاضا پس از چهار دوره برابر 0.065 خواهد بود.

۴) اهمیت تقاضای دوره‌های با فاصله زیادتر افزایش خواهد بود.

حل : گزینه ۱ درست است.

یادداشت:

....

....

....

....