مقدمه

موسسه پارسه با هدف حداکثر کردن تعداد قبولی‌ها به حد بالای ۹۰٪ ساختار جزوه‌ای را طراحی کرده که دانشجویان بتوانند در زمانی کوتاه جمع‌بندی نکات مطرح شده در درس را قرار گیرند.

در همین راستا جزوه حاضر مجموعه فشرده شده از نکات مهم و سوالات کلیدی است که لازم است دانشجویان در هفته آخر قبل از برگزاری امتحان مطالعه کنند. در این مجموعه فقط به نکات اشاره شده است و سعی شده تا دانشجو با در نظر گرفتن این نکات بتوانند سریعاً دوره گذرانده شده به‌صورت حضوری یا غیرحضوری را در ذهن خود بازنگری کند.

به‌طور قطع حداقل ۹۵٪ نکات موجود در پس سوالات کنکور خارج از نکات ذکر شده در این مجموعه نمی‌باشد. به‌طوری که می‌توان با ۹۵٪ اطمینان گفت نکات سوالات کنکور در لابلای نکات همین جزوه می‌باشد. این جزوه برای دانشجویان رشته‌های مهندسی صنایع سیستم‌های اقتصادی اجتماعی، مدیریت سیستم‌بهره‌وری و دانشجویان رشته مدیریت بسیار مفید می‌باشد. در خاتمه آرزوی توفیق همه دانشجویان را از خداوند منان خواهانم.

با آرزوی موفقیت

اشجری

دی‌ماه ۸۹

در جدول ذیل دروس به سرفصلهای مهم آن طبقه بندی شده و مشخص شده است که در هر سال از هر مبحث چند تست سوال شده است و دانشجوی محترم می تواند زمان باقیماندۀ خود را با توجه به اهمیت مباحث مدیریت نماید.

رشته: مهندسی صنایع		درس: تحقیق در عملیات						
ردیف	مبحث	۱۳۸۵	۱۳۸۶	۱۳۸۷	۱۳۸۸	۱۳۸۹	مجموع ۵ سال	نسبت از کل
		تعداد تست	تعداد تست	تعداد تست	تعداد تست	تعداد تست		
1	مدل سازی ریاضی و تعریف مساله	1	0	0	0	2	3	3%
2	مدل های غیر خطی و تبدیل به خطی	0	1	0	0	1	2	2%
3	فضای حل	0	0	1	0	1	2	2%
4	روش ترسیمی حل مسائل برنامه ریزی خطی	0	3	0	0	1	4	4%
5	روش جبری حل مسائل برنامه ریزی خطی	2	1	0	1	0	4	4%
6	روش سیمپلکس حل مسائل برنامه ریزی خطی	2	3	1	3	0	9	8%
7	حالات خاص در مسائل برنامه ریزی خطی	3	2	1	2	2	10	9%
8	روش M بزرگ	0	0	0	1	0	1	1%
9	روش دوفاز	2	0	0	0	2	4	4%
10	ریاضیات در جدول سیمپلکس	4	3	4	7	3	21	19%
11	تحلیل حساسیت در جدول سیمپلکس	6	3	5	2	3	19	17%
12	قضایای دوگان	4	1	0	0	0	5	5%
13	تفسیر اقتصادی دوگان	0	0	2	0	2	4	4%
14	ارتباط اولیه و دوگان	3	2	1	2	0	8	7%
15	نتایج دوگان	1	0	0	2	0	3	3%
16	روش دوال سیمپلکس	1	0	1	0	0	2	2%
17	آنالیز حساسیت	0	0	0	0	0	0	0%
18	مدل های حمل و نقل و روش های حل آن و آنالیز حساسیت	0	1	3	0	2	6	5%
19	روش پله ای	0	0	0	0	0	0	0%
20	روش ضرایب MODI	0	0	1	0	0	1	1%
21	مدل های شبکه ای	0	0	0	0	0	0	0%
22	مدل تخصیص	0	0	0	0	0	0	0%
23	سیمپلکس تجدید نظر شده	1	0	0	0	1	2	2%
24	متغیر های کراندار	0	0	0	0	0	0	0%
25	متفرقه	0	0	0	0	0	0	0%
جمع		**30**	**20**	**20**	**20**	**20**	**110**	**100%**

مدل‌سازی

مدل مونتاژ ـ مدل تولید ـ مدل برش

$$\begin{aligned} &\text{Min } Z = 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 \\ &\text{st}: \quad x_1 + 2x_2 + x_3 - 5y_1 = 100 \\ &\qquad 2x_1 + 3x_3 + x_4 - 7y_2 = 150 \\ &\qquad + 2x_2 + x_3 - 9y_3 = 200 \\ &\qquad \geq 0 \\ &\qquad x_{1,2,3,\dot{y}_1, y_2, y_3} \end{aligned}$$

مدل برش

$$\begin{aligned} &\text{Max } Z = \min\{10x_{11} + 15x_{21}, 10x_{12} + 13x_{22}\} \\ &\text{st}: x_{11} + x_{12} \leq 100 \\ &\qquad x_{21} + x_{22} \leq 300 \\ &\qquad x_{ij} \geq 0 \end{aligned}$$

مدل مونتاژ

$$\begin{aligned} &\text{Max} Z = 3x_1 + 2x_2 \\ &\text{st}: \quad x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ &\qquad 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ &\qquad -x_1 + x_2 \leq 1 \\ &\qquad x_2 \leq 2 \\ &\qquad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

مدل تولید

روش‌های حل ترسیمی

روش ترسیمی

رسم محدودیت‌ها و رسم تابع هدف به دو شیوه یکی رسم خط دیگری رسم بردار گرادیان (خط عمود بر بردار گرادیان) تابع هدف Z را نشان می‌دهد)

گرادیان برداری است که جهت افزایش تابع را نشان می‌دهد.

مثال ۱: **محدودیت دوم از مجموعه محدودیت‌های زیر زائد خواهد شد اگر:**

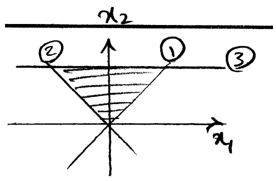
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\leq 0 \\ x_1 + x_2 &\geq 0 \\ x_2 &\leq 2 \end{aligned}$$

۱) $x_1, x_2 \geq 0$ ۲) $x_2 \geq 0$

۳) $x_1 \geq 0$ ۴) هیچ‌کدام

حل : گزینه ۳ درست است.

ابتدا رسم می‌کنیم.



اگر خط $x_1 \geq 0$ را رسم کنیم محدودیت دوم زائد می‌باشد.

یادداشت:

....

....

....

....

مثال۲: **در مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر در چه صورت نقطه $(x_1 \quad x_2)=(1 \quad 1)$ بهینه است؟**

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & Z = C_1x_1 + C_2x_2 \\ \text{st}: \quad & x_1 + x_2 \le 2 \\ & x_2 \le 1 \\ & x_{1,2} \ge 0 \end{aligned}$$

۱) $\frac{C_1}{C_2} \le 1$

۲) $\frac{C_1}{C_2} \le 0$

۳) $\frac{C_1}{C_2} \ge 1$

۴) $0 \le \frac{C_1}{C_2} \le 1$

حل : گزینه ۴ درست است.

نکته این سوال در روش ترسیمی می‌باشد. به‌شرطی نقطه $(1,1)$بهینه است که تابع هدف یا موازی محدودیت اول شود یا موازی محدودیت دوم.

$$\begin{cases} \frac{C_1}{1} = \frac{C_2}{1} \Rightarrow \frac{C_1}{C_2} = 1 \\ \frac{C_1}{0} = \frac{C_2}{1} \Rightarrow \frac{C_1}{C_2} = \frac{0}{1} = 0 \end{cases} \Rightarrow 0 \le \frac{C_1}{C_2} \le 1$$

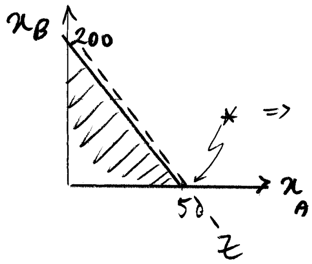
مثال۳: **در یک سیستم تولیدی در طول یک دوره زمانی 200 ساعته دو محصول A و B تولید می‌گردد تولید هر واحد محصول A، 4 برابر وقت تولید هر محصول B است و سود هر واحد B، 0.25 سود هر واحد محصول A است ماکزیمم سود حاصله در این دوره 200 ساعته 10000 واحد پول است سود هر واحد محصول A چقدر است؟**

حل :

$4x_A + x_B \le 200 \qquad C_B = 0.25C_A$

$\text{Max}\, Z = C_A x_A + 0.25C_A x_B$

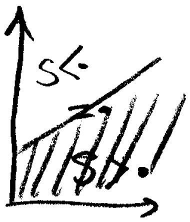
تابع هدف و محدودیت موازی یکدیگرند لذا با رسم متوجه می‌شوید که جواب بهینه چندگانه است و داریم:



$$\Rightarrow Z = 10000 = C_A \times 50 + 0.25C_A \times 0$$
$$C_A = 200$$

مثال۴: **منطقه موجه مسئله زیر چگونه است؟**

$$|2x_1 + x_2| \le 6$$
$$|x_1 - 2x_2| \le 6$$



۱) مثلث

۲) مربع

۳) چهارضلعی غیرمنتظم

۴) منطقه موجه ندارد.

حل : گزینه ۲ درست است.

شکل را رسم کنید. ابتدا محدودیت‌ها را به دو محدودیت تبدیل کرده و رسم کنید.

یادداشت:

....

....

....

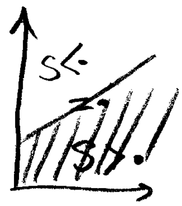
....

روش جبری

نکته : فضای حل مسئله LP محدب است. تعریف محدب‌بودن فضا (هیچ نقطه‌ای از این فضا را نمی‌توان از ترکیب محدب هیچ دو نقطهٔ دیگری از همین فضا نشان داد)

نکته : جواب بهینه مسئله LP حداقل در یکی از گوشه‌ها رخ می‌دهد. تعداد گوشه‌های یک مسئله LP استاندارد $\binom{n}{m}$ و برای مسئله غیراستاندارد $\binom{m+n}{m}$ می‌باشد.

معانی surplus & slack در محدودیت‌ها (منبع بلااستفاده و مازاد منبع) مقادیر این متغیرها در درون و بیرون و لبه‌های یک فضای حل به‌صورت زیر است:



نکته : در هر مسئله LP با n متغیر و m محدودیت $m\le n$ باشد هر گوشه از حل یک سیستم m معادله و m مجهول حاصل می‌گردد.

نکته : در هر مسئله LP با n متغیر و m محدودیت که $m>n$ می‌باشد هر گوشه از حل یک سیستم n معادله و n متغیر حاصل می‌گردد و اگر مسئله دارای فضای حل باشد. مابقی محدودیت‌ها زائد می‌باشند که می‌توانند باعث تباهیدگی شوند.

$\begin{array}{l} \text{Max } Z = CX \\ st: Ax \le b \\ x \ge 0 \end{array}$	$\begin{array}{l} \text{Max } Z = CX \\ st: Ax \le b \\ b, x \ge 0 \end{array}$
ممکن است جواب یا فضا نداشته باشد.	حتماً دارای فضای حل است.

نکته : تعداد گوشه‌های یک مسئله LP محدود ولی تعداد جواب‌های یک مسئله LP می‌تواند نامحدود باشد. فرق است بین FS و BS و BFS (جواب شدنی، جواب گوشه یا پایه و جواب گوشه شدنی) تعداد گوشه‌های شدنی را فقط با شمارش و یا ترسیم می‌توان بدست آورد.

روش سیمپلکس:

نکته : عنصر لولا همواره عنصری مثبت است.

$$Z_{\text{بعدی}} = Z_{\text{قبلی}} - \underbrace{(Z_j - C_j)x_j}_{\text{متغیر وارده به پایه}} \times \min\{\text{نسبت‌ها}\}$$

یادداشت:

....

....

....

....

نکته : اشتباه در انتخاب متغیر وارده به پایه یا باعث می‌شود تا مسیر حل طولانی گردد و یا باعث می‌شود از گوشه‌ای قابل قبول با Z بهتر به گوشه‌ای قابل قبول با Z بدتر منتقل شویم.

نکته : اشتباه در انتخاب متغیر خروج از پایه، RHS را منفی خواهد کرد.

مقادیر متغیرهای پایه در جدول بعدی افزایش (کاهش) می‌یابند هرگاه ضریب متغیر وارده به پایه در جدول قبلی در سطر مربوط به این متغیر پایه منفی (مثبت) باشند.

	x_j		
	>0		α
	<0		β
	0		γ

ستون لولا

با ورود x_j به پایه، در جدول بعدی α کاهش مقدار و β افزایش مقدار و γ بدون تغییر باقی خواهد ماند.

مثال۵: آیا در مسئله LP زیر x_1 و x_2 پایه بهینه‌اند؟

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 2x_1 + 3x_2 \\ \text{st}: \quad & x_1 + 2x_2 \le 6 \\ & 2x_1 + x_2 \le 8 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

جدول سیمپلکس را رسم و پایه را بروز می‌کنیم:

	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
x_1	1	2	1	0	6
x_2	2	1	0	1	8
Z	−2	−3	0	0	0

	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
x_1	1	2	1	0	6
x_2	0	−3	−2	1	−4
Z	0	1	2	0	12

	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
x_1	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{10}{3}$
x_2	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$
Z	0	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{32}{3}$

بلی پایه فوق بهینه است.

یادداشت:

....

....

....

....

مثال۶: **در جدول زیر تعداد گوشه‌های مجاور به گوشه فعلی چه تعدادی است از این تعداد چه تعدادی قابل قبول و چه تعدادی غیرقابل قبولند؟**

x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	RHS
x_1	1	0	2	1	1	2	1
x_2	0	1	1	1	−2	0	0.5
Z	0	0	3	−1	3	1	8

5 گوشه قابل قبول

و دو گوشه غیرقابل قبول

$(x_1,x_3)(x_3,x_2),(x_1,x_4)(s_1,x_2)(s_2,x_2)$ پایه‌های شدنی مجاور

$(x_4,x_2)(x_1,s_1)$ پایه‌های نشدنی مجاور

مثال۷: **در مثال 5 با حرکت از گوشه فعلی در راستای x_3 به اندازه یک واحد به چه جوابی خواهیم رسید؟**

از فضای حل خارج می‌شویم زیرا:

$$x_3=1 \;\Rightarrow\; x_1=1-2=1$$
$$x_2=0.5-1=-.5$$
$$x_4=s_1=s_2=0$$

نکته : سیمپلکس از تکراری به تکرار دیگر فقط بهبود را تضمین می‌کند نه حداکثر بهبود را.

مثال۸: **دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید، نقطه $(0\quad 0\quad 4\quad 12)$ یک گوشه قابل قبول برای دستگاه فوق است. گوشه مجاور در این گوشه کدام گزینه است؟**

$$x_1+x_2+4x_3+12x_4+2x_5=16$$
$$x_2+x_3+3x_4-4x_5=4$$
$$x_1 \text{ تا } x_5\ge 0$$

۱) $(0\quad 0\quad 4\quad 0\quad 0)$

۲) $(0\quad 0\quad 0\quad 1\quad 2)$

۳) $\left(0\quad 0\quad 0\quad \frac{4}{3}\quad 0\right)$

۴) $(0\quad 0\quad 1\quad 1\quad 0)$

حل : گزینه ۱ و ۲ درست است.

گوشه مجاور این گوشه یعنی جدول سیمپلکس بعدی چگونه است؟ جدول سیمپلکس فعلی با پایه (x_1,x_2) به‌صورت زیر است:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_1	1	1	4	12	2	16
x_2	0	1	1	3	−4	4

یادداشت:

....

....

....

....

پایه را در ستون دوم بروزآوری می‌کنیم یعنی به‌صورت $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ لذا داریم. (سطر دوم ضرب در -1 و حاصل با سطر اول جمع می‌کنیم) داریم

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_1	1	0	3	9	6	12
x_2	0	1	1	3	-4	4

این همان پایه‌ای است که صورت مسئله از آن خبر داده بود. در این جدول هم x_3 می‌تواند جایگزین یکی از متغیرهای x_1 یا x_2 گردد و هم متغیر x_4 و جدول بعدی هم تباهیده است لذا هم گزینه یک صحیح است و هم گزینه 3 بنابراین سوال دارای ۲ گزینه صحیح است.

روش M بزرگ و دو فاز

ـ هرگاه پس از استانداردکردن مسئله LP به تعداد محدودیت‌ها بردار واحد مستقل موجود نباشد باید از روش M بزرگ و دوفاز استفاده کرد.

فلسفه این دو روش:

اضافه‌کردن فضای مصنوعی به فضای واقعی مسئله و حرکت از گوشه‌ای در فضای مصنوعی، گوشه به گوشه تا رسیدن به گوشه‌ای در فضای واقعی مسئله بنابراین اضافه‌کردن متغیر مصنوعی فضای حل واقعی را به‌طور مصنوعی بزرگ می‌کند.

نکته : اضافه‌کردن متغیر به مسئله LP مقدار Z را می‌تواند بهتر کند.

نکته : اضافه کردن محدودیت به مسئله LP مقدار Z را نمی‌تواند بهتر کند.

برای صفرکردن مقدار متغیر مصنوعی باید ضریب آن را در تابع هدف ماکزیمم $-M$ و در تابع هدف می‌نیمم مقدار M قرار دهیم.

روش دو فاز از هر نظر شبیه روش M بزرگ بوده و فقط به دلیل احتمال اشتباه در برآورد M توسط ماشین مطرح شده است.

مقدار بهینه ω در انتهای فاز I یا مثبت بوده یا صفر است. درصورتی که مثبت باشد مسئله اصلی فضای حل ندارد و درصورتی که صفر شود مسئله اصلی دارای فضای حل واقعی است و می‌توان فاز 2 را شروع کرد.

بنابراین شرط ورود به فاز II صفرشدن w در انتهای فاز I است.

مثال۹: فرض کنید پایان فاز I حل یک مسئله LP با روش دو فاز به صورت زیر است. در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	R_1	
ω	0	-2	0	-1	-3	0	
x_1	1	1	0	4	1	0	2
x_3	0	0	1	5	0	0	5
R_1	0	0	0	0	0	1	10

۱) دستگاه معادلات همزمان مسئله $AX = b$ ناسازگار است.

۲) سیستم معادلات همزمان مسئله سازگار است لیکن $x \geq 0$

۳) با حذف R_1 از سطر و ستون فاز I را می‌توان شروع کرد.

۴) فاز II را می‌توان با جایگزین کردن R_1 با یکی از متغیرهای اصلی شروع کرد.

یادداشت:

....

....

....

....

حل : گزینه ۱ درست است.

مقدار ω برابر 10 بوده و پایان فاز I است و $R>0$ لذا مسئله فضای حل واقعی ندارد لذا گزینه ۱ درست است.

مثال ۱۰: جدول مسئله مینیمم سازی را در نظر بگیرید. اگر $a=3$ باشد یک جواب شدنی با $Z=-200$ کدام است؟

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_1		-2		1		c
x_3		-1		2		d
x_5		0		3		e
		a		b		-8

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
۱)	$c+64$	64	$d+128$	0	e
۲)	c	0	d	0	e
۳)	$c+128$	64	$d+64$	0	e
۴)	$c+128$	0	$d+64$	0	e

حل : گزینه ۳ صحیح است.

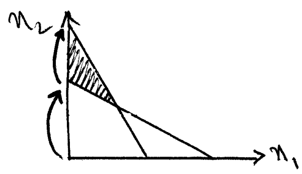
اگر در راستای x_2 به اندازه α حرکت کنیم داریم:

$$\cancel{-\alpha}^{3} a-8=-200 \Rightarrow \alpha=64 \Rightarrow x_2=64 \Rightarrow$$

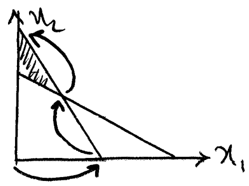
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +2 \\ +1 \\ 0 \end{pmatrix} 64 + \begin{pmatrix} c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c+128 \\ d+64 \\ e \end{pmatrix}$$

مثال ۱۱: آیا اگر در جدول نهایی یک مسئله LP متغیر مصنوعی در پایه باشد مسئله فضای حل دارد؟ درصورتی که مقدار متغیر مصنوعی صفر باشد بلی در غیراین صورت خیر.

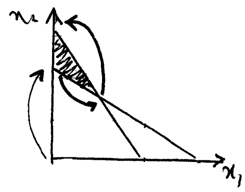
مثال ۱۲: در کدام‌یک از مسائل LP زیر روش متغیر مصنوعی به‌درستی عمل می‌کند؟



(1)



(2)



(3)

مسئله دارای یک محدودیت از نوع بزرگتر یا مساوی بوده و لذا یک متغیر مصنوعی دارد لذا با اولین حرکت وارد فضای واقعی می‌شود (مسائل ۱ و ۳) ولی مقدار Z کمتر و سپس بیشتر نمی‌شود لذا گزینه صحیح ۱ می‌باشد.

مثال۱۳: در مراحل حل یک مسئله LP با تابع هدف ماکزیمم‌سازی تغییرات Z به‌صورت $11 \to 8 \to 10 \to 5 \to 0$ می‌باشد علت این تغییر چیست؟

اشتباهی در انتخاب متغیر وارده به پایه رخ داده است.

مثال۱۴: اگر در مثال 8 تغییرات Z به‌صورت زیر باشد چه حادثه‌ای رخ داده است؟

$9 \to 2 \to 0 \to 8 \to 10$

مسئله را با روش دو فاز حل کرده‌اند که ابتدا در جدول نهایی فاز I مقدار ω صفر شده و سپس وارد فاز II شده و جواب بهینه $Z^*=10$ به‌دست آمده است.

یادداشت:

....

....

....

....

حالات خاص در مسئله LP

حالت اول ـ فضا و جواب بیکران

نکته : شرط کافی برای داشتن فضای بیکران وجود حداقل یک متغیر که با بردن آن به سمت ∞ یا $-\infty$ کلیه محدودیت‌ها برقرارگردند.
هرگاه ضریب متغیری در محدودیت‌ها همگی صفر یا منفی باشد فضای آن مسئله می‌تواند کراندار یا بیکران باشد.
به‌طوری که:

اگر مسئله به‌صورت زیر باشد	اگر مسئله به‌صورت زیر باشد
st : $AX = b$, $x \geq 0$	st : $\geq$ $AX \leq b$, $x \geq 0$
فضا ممکن است بیکران باشد.	فضا بیکران است.

درصورتی که مسئله دارای فضای حل بیکران باشد حتماً بردار جهت دور شونده‌ای موجود است ولی اگر در مسئله بردار جهت دورشونده‌ای موجود باشد دلیلی بر بیکرانی فضا نمی‌باشد زیرا ممکن است مسئله فضای حل نداشته باشد.
بردار جهت رأسی زیرمجموعه بردارهای جهت دورشونده می‌باشد گوشه‌های فضای حاصل از $d \geq 0 \& Ad \leq 0$ را جهت رأسی می‌نامند و در مسئله‌ای که فضا دارد ولی گوشه ندارد مانند مثال زیر حداکثر یک جهت رأسی می‌توان داشت:

$$\text{st}: \quad x_1 + x_2 < 2$$

در مسئله‌ای از نوع ماکزیمم‌سازی با وجود بردارهای جهت رأسی داریم:

$$\begin{cases} cd > 0 & \Rightarrow \text{فضا + Z هر دو بیکران} \\ cd \leq 0 & \text{فضا بیکران ولی Z کراندار است.} \end{cases}$$

در مسئله Min برعکس فوق می‌باشد.
چنانچه در جدول سیمپلکس ورودی موجود بوده ولی خروجی موجود نباشد و یا تست حداقل نسبت مقدار ∞ را نتیجه بدهد فضا و Z بیکران است. الزامی نیست تا نشانه فوق در زیر متغیری با منفی‌ترین ضریب در سطر Z در مسئله ماکزیمم‌سازی رخ دهد کافی است این نشانه زیر یک متغیر کاندید برای ورود به پایه ظاهر شود.
برای پی‌بردن به بیکران فضا، 4 راه وجود دارد:

۱ـ ظاهر مسئله ۲) ترسیم ۳) به‌دست آوردن بردار d ۴) جدول سیمپلکس

یادداشت:

....
....
....
....

حالت دوم ـ تباهیدگی دائم و موقت

هرگاه در یک مسئله n بعدی، بیش از n محدودیت از گوشه‌ای عبور کند گوشه مزبور را تباهیده می‌نامند. محدودیت زائد می‌تواند تباهیدگی ایجاد کند. در تباهیدگی موقت علت تباهیدگی حتماً محدودیت زائد است.

نکته : تباهیدگی تعدد پایه را نتیجه نمی‌دهد ولی تعدد پایه الزاماً تباهیدگی را نتیجه می‌دهد.

مثال۱۵: محدودیت زائد محدودیتی است:

۱) حتماً از ترکیب سایر محدودیت‌ها حاصل شده باشد. ۲) ایجاد تباهیدگی کند.

۳) که با حذف آن مقدار Z تغییر نکند. ✓ ۴) هیچ‌کدام

مثال۱۶: کدام عبارت صحیح نمی‌باشد.

۱) به‌ازاء هر پایه شدنی یک نقطه رأسی منحصر به فرد وجود دارد.

۲) به‌ازاء هر نقطه رأسی تک، پایه وجود دارد.

✓ ۳) به‌ازاء هر نقطه رأسی تباهیده بیش از یک پایه وجود دارد.

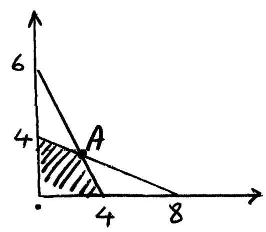
۴) اگر نقطه رأسی بیش از یک پایه داشته باشد یک نقطه رأسی تباهیده است.

حالت سوم ـ جواب بهینه چندگانه

نشانه‌های جدول در این حالت عبارت است از:

۱ـ جدول نهایی باشد. ۲ـ $z_j - c_j$ متغیر غیرپایه صفر باشد. ۳ـ { نسبت‌ها} $\neq \min$.

مثال۱۷: در مسئله LP زیر با فرض آنکه A نقطه‌ای بهینه باشد بازه C_1 را تعیین کنید تا A همواره گوشه بهینه باشد.



$$
\begin{aligned}
\text{Max } Z &= c_1 x_1 + 16 x_2 \\
\text{st}: \ & x_1 + 2x_2 \le 8 \\
& 3x_1 + 2x_2 \le 12 \\
& x_{1,2} \ge 0
\end{aligned}
$$

در صورتی A گوشه بهینه باقی خواهد ماند که تابع هدف موازی یکی از دو محدودیت گردد. لذا نسبت ضرائب را به دو محدودیت برابر یکدیگر قرار می‌دهیم:

$$
\frac{C_1}{1} = \frac{16}{2} \quad \frac{C_1}{3} = \frac{16}{2} \quad \Rightarrow \quad 8 \le C_1 \le 24
$$

$$
C_1 = 8 \quad C_1 = 24
$$

یادداشت:

....

....

....

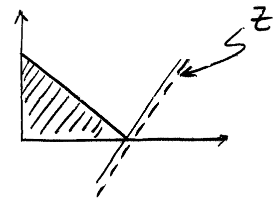
....

مثال۱۸: جدول نهایی یک مسئله LP از نوع ماکزیمم‌سازی به‌صورت زیر است:

	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
x_1	1	0	a	3	2
x_2	0	1	b	2	0
Z	0	0	0	2	10

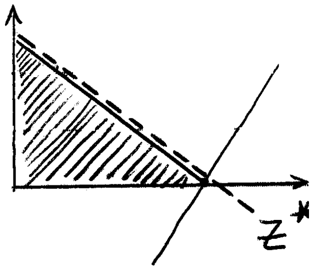
در چه صورت دارای جواب بهینه منحصر به فرد می‌باشیم و در این حالت شکل مسئله به‌چه صورت است؟

$b > 0 \quad \Rightarrow$



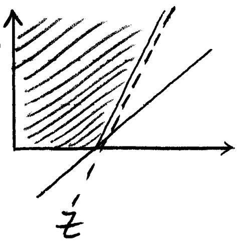
در مثال ۱۳ در چه صورت دارای چندین گوشه بهینه می‌باشیم و شکل مسئله در این حالت چگونه است؟

$b \leq 0\,,\, a > 0$



در مثال ۱۳ در چه صورت مسئله دارای یک گوشه بهینه و بیشمار غیرگوشه بهینه است؟ شکل مسئله را در این حالت رسم کنید.

$a, b \leq 0$



مثال۱۹: در جدول نهایی زیر اگر در راستای x_4، 2 واحد حرکت کنیم به چه جوابی خواهیم رسید:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_1	1	0	0	–3	–1	11
x_2	0	1	0	–1	2	18
x_3	0	0	1	0	–1	15
Z	0	0	0	0	1	48

یادداشت:

....

....

....

....

$$\begin{pmatrix}11\\18\\15\end{pmatrix}+\underset{\downarrow\atop 2}{x_4}\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17\\20\\15\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_4=2\\x_1=17\\x_2=20\\x_3=15\end{cases}\quad Z=48$$

اگر در راستای x_5، 10 واحد به جلو حرکت کنیم داریم:

$$\begin{pmatrix}11\\18\\15\end{pmatrix}+\underset{\downarrow\atop 10}{x_5}\begin{pmatrix}+1\\-2\\+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21\\-2\\25\end{pmatrix}\Rightarrow 7=48-10=38$$ از فضای حل خارج می‌شویم

حالت چهارم: مسئله جواب یا فضا ندارد.

نکته : در روش سیمپلکس:

اگر در روش متغیر مصنوعی، در جواب بهینه R با مقدار مثبت در پایه باشد و یا در روش دو فاز در پایان فاز I $\omega\neq 0$ باشد مسئله فضا ندارد.

نکته : در روش دوال سیمپلکس:

هرگاه خروجی داشته باشیم و ورودی نداشته باشیم مسئله فضا یا جواب ندارد.

مثال ۲۰: مقدار بهینه تابع هدف زیر برابر .... و جواب بهینه .... می‌باشد.

$$\begin{aligned}\text{Min}\quad & Z=x_1+x_2\\ \text{sT}:\quad & x_1+x_2+x_3=2\\ & x_1+x_4=1\\ & x_2+x_5=1\\ & x_1 \text{ تا } x_5\geq 0\end{aligned}$$

۱) 2 منحصر به فرد

۲) 3 و نشدنی

۳) 3 و چندگانه

۴) 2 و نامتناهی

حل : هیچ‌کدام از گزینه‌ها درست نیست.

زیرا جواب $x_1=x_2=0$ و $x_3=2, x_4=1, x_5=1, x_1=x_2=0$ دارای $Z=0$ بوده و جواب بهینه است بنابراین مقدار تابع هدف صفر بوده و منحصر به فرد است.

ریاضیات در جدول سیمپلکس:

جدول زیر را به‌خاطر بسپارید:

	x_B	x_j	RHS
x_B	I	$\underline{B^{-1}a_j}$	$\underline{B^{-1}b}$
Z		$\underline{C_BB^{-1}a_j-C_j}$	$C_BB^{-1}b$

یادداشت:

....

....

....

....

نکته : متغیرهای مثبتی که جانشین متغیر آزاد می‌شوند، هیچگاه هر دو متغیر مثبت با هم را وارد پایه نمی‌گردند. بنابراین $Z = C|x|$ وقتی x آزاد است برابر است با $Z = C(x' + x'')$

نکته : شرط وجود جواب برای $Ax = b$ آن است که $R(A/b) = R(A)$

نکته : شرط وجود جواب برای $x \geq 0 \& Ax = b$، آن است که b باید در درون مخروط حادث از بردارهای ستونی A قرار گیرد.

نکته : با داشتن B^{-1} در هر جدولی همراه با صورت مسئله می‌توان با استفاده از فرمول‌های $B^{-1}a_j$ و $C_B B^{-1} a_j - c_j$ و $B^{-1}.B = I$ کلیه مقادیر مجهول در جدول سیمپلکس را به‌دست آورد.

مثال ۲۱: مسئله LP زیر را در نظر بگیرید. جدول زیر یکی از تکرارهای این مسئله است:

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 3x_1 + 7x_2 + 5x_3 \\ \text{st}: a_1 x_1 + x_2 + a_2 x_3 &\leq 15 \\ a_3 x_1 + 3x_2 + a_4 x_3 &\leq 25 \\ x_{1,2,3} &\geq 0 \end{aligned}$$

x_B	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHs
x_1		a		-1	1	10
x_3		b		2	-1	5
z		c		d	e	55

برای پیداکردن $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_3 \end{pmatrix}$ از $B^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ استفاده می‌شود. برای پیداکردن $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_3 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} a_2 \\ a_4 \end{pmatrix}$ به‌ترتیب از $B^{-1}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ و $B^{-1}\begin{pmatrix} a_2 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ استفاده می‌شود برای پیداکردن d و e از $y = C_B B^{-1}$ و برای پیداکردن مقدار c از $Z_2 - C_2$ استفاده می‌شود.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow a = 2 \quad , \quad b = -1$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_3 - a_1 = 1 \\ 2a_1 = a_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a_1 = 1 \\ a_3 = 2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a_4 = a_2 \\ 2a_2 - a_4 = 1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a_2 = 1 \\ a_4 = 1 \end{matrix}$$

$$y = (3 \quad 5)\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = (7 \quad -2) = (d \quad e)$$

$$c = (3 \quad 5)\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}} - 7 = -6$$

یادداشت:

....

....

....

....

از آنجائی‌که تمام ضرائب a_1 تا a_4 بزرگتر یا مساوی صفر بوده و ضرائب متغیرها در مسئله استاندارد شده در جدول همگی بزرگتر یا مساوی صفر هستند لذا فضای حل مسئله محدود است.

نکته : با داشتن بدنه جدول سیمپلکس و با استفاده از رابطه $d \geq 0$ و $Ad = 0$ و پیداکردن بردار غیرصفر می‌توان به بیکرانی فضا پی برد.

دوال Dual

تعریف دوال:

$$\begin{array}{ll} \operatorname{Max} Z = Cx & \operatorname{Min} \omega = yb \\ st: \quad Ax \leq b & st: yA \geq C \\ \quad x \geq 0 & \quad y \geq 0 \end{array}$$

نکته : نحوه دوال داشتن:

آزاد بودن متغیر $\Leftrightarrow$ تساوی‌بودن محدودیت

متغیر طبق عرف $\Leftrightarrow$ محدودیت طبق عرف

علامت یک متغیر را در هر مسئله در سه محل می‌توان تغییر داد. (هم در متغیرها و هم در محدودیت‌ها و هم در تابع هدف)

نکته : قضیه ضعیف دوال: مقدار تابع هدف در مسئله min به‌ازاء هر جواب شدنی بزرگتر یا مساوی است از مقدار تابع هدف در مسئله Max در ازاء هر جواب شدنی.

قضیه قوی دوال:

اگر x^* و y^* جواب‌های بهینه باشند آنگاه $Z^* = \omega^*$ یا

قضیه فرجه مکمل:

همواره در جواب بهینه دو مسئله اولیه و ثانویه داریم:

$$S'x^* = 0 \quad , \quad y^* s = 0$$

s و s' متغیرهای slack , surplus در محدودیت‌های دو مسئله‌اند و x^* و y^* جواب‌های بهینه دو مسئله‌اند.

نتایج قضایای دوال

I – اگر هر دو مسئله دارای فضای حل (جواب قابل قبول) باشند هردو باید بهینه برسند.

ـ اگر یکی به بهینه برسد دیگری هم باید به بهینه برسد.

ـ مقدار تابع هدف در مسئله $\operatorname{Max}(\operatorname{Min})$ به‌ازاء هر جواب قابل قبول یک حد پایین (بالا) برای مقدار بهینه تابع هدف در مسئله Max یا Min (Min یا Max) می‌باشد.

II– $C_B B^{-1}$ های جدول نهایی یک مسئله = جواب‌های بهینه مسئله دیگر

یادداشت:

....

....

....

....

ـ تا یکی از دو مسئله به بهینه نرسد، دیگری به شدنی بودن نمی‌رسد.

III– فقط Z_jهای زیر ماتریس B^{-1} در جدول نهایی یک مسئله = جواب‌های بهینه مسئله دیگر.

IV– اگر یکی از دو مسئله بیکران بشود دیگری غیرقابل قبول است.

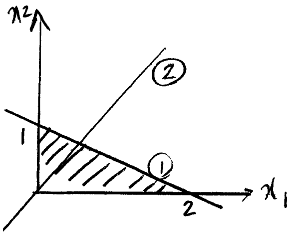
V– اگر یکی از دو مسئله غیرقابل قبول باشد دیگری یا بیکران است یا غیرقابل قبول.

چنانچه نتیجه V مشروط به روش دوال سیمپلکس گردد آنگاه غیرقابل قبول بودن یک مسئله بیکران بودن مسئله دیگر را باعث می‌گردد.

VI– اگر یکی از دو مسئله دارای جواب بهینه تباهیده باشد آنگاه دیگری دارای جواب بهینه چندگانه می‌باشد.

VII– اگر هر دو مسئله اولیه و ثانویه دارای فضای حل باشند حداقل فضای یکی از دو مسئله بیکران است.

مثال۲۲: در مسئله ماکزیمم‌سازی زیر اگر محدودیت سومی به‌صورت $x_1 + x_2 \le 3$ به مسئله اضافه شود تابع هدف مسئله ثانویه در کدام گزینه است؟



۱) $\text{Min } Z = y_1 + 3y_3$

۲) $\text{Min } Z = 2y_1 + 3y_2$

۳) $\text{Min } Z = 3y_1 + 2y_3$

۴) هیچ‌کدام

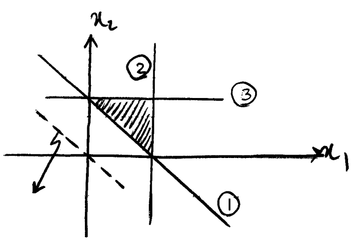
گزینه ۱ صحیح می‌باشد، زیرا مقدار سمت راست محدودیت دوم که مبدأ می‌گذرد صفر است و تنها گزینه ۱ باتوجه به مقدار $b_3 = 3$ صحیح است.

$\omega = y_1 b_1 + y_2 b_2 + y_3 b_3$

(چرا؟) ؟ هر مقداری می‌تواند باشد.

$\omega = ?y_1 + 0y_2 + 3b_3$

مثال۲۳: تابع هدف ثانویه در مثال زیر کدام گزینه است؟



MAX $Z = x_1 + x_2 + 10$

۱) $\text{Min } \omega = y_1 - y_2 + y_3 + 10$

۲) $\text{Min } \omega = -y_1 + y_2 + y_3 + 10$

۳) $\text{Min } \omega = y_1 - y_2 + y_3 - 10$

۴) $\text{Min } \omega = -y_1 + y_2 + y_3 - 10$

گزینه صحیح ۲ می‌باشد،در مسئله Max محدودیت 1 مطابق عرف نمی‌باشد لذا متغیر اول دوگان هم به‌صورت غیرمتعارف $y_1 \le 0$.ر که اگر علامت y_1 را در سه محل (در متغیرها ـ در محدودیت‌ها و در تابع هدف) تعویض کنیم. گزینه ۲ صحیح خواهد بود مقدار 10+ هم در هر دو تابع هدف به‌صورت 10+ قرار می‌گیرد.

یادداشت:

....

....

....

....

مثال۲۴: جواب بهینه مسئله ثانویه زیر چیست؟

ثانویه این مسئله فضای حل ندارد زیرا این مسئله بیکران است چرا؟ زیرا اگر متغیرهای x_1 و x_2 و x_3 هر سه هرچه مقدار بیشتری بگیرند همواره در محدودیت‌ها صدق می‌کنند و Z هم ماکزیمم‌تر خواهد شد.

$$\begin{aligned} &\text{Max } Z = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \\ &\text{st}: x_1 + 2x_3 \geq 10 \\ &\quad x_2 + x_3 \geq 20 \\ &\quad x_1 + x_2 \geq 30 \\ &\quad x_{1,2,3} \geq 0 \end{aligned}$$

مثال۲۵: مسئله LP زیر را در نظر بگیرید. در جواب بهینه این مسئله متغیرهای S_3, S_1, x_1 متغیرهای پایه هستند کدام گزینه نادرست است؟ (فرض کنید $a_{21}, a_{22}, a_{23} > 0$)

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & Z = C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3 \\ \text{st}: \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leq b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \geq b_2 \\ & a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \leq b_3 \\ & x_{1,2,3} \geq 0 \end{aligned}$$

۱) $\frac{b_2}{a_{21}} \geq 0$ ۲) $\frac{c_1}{a_{21}} \leq 0$

۳) $\frac{c_1}{a_{21}} \leq \frac{c_3}{a_{23}}$ ۴) $\frac{c_1}{a_{21}} \geq \frac{c_2}{a_{22}}$

حل : گزینه ۴ درست است.

از آن‌جایی که S_3, S_1 در پایه بهینه‌اند لذا $y_3^* = y_1^* = 0$ است (قضیه سوم) و از آن‌جایی که x_1 در پایه بهینه است لذا متغیر کمکی محدودیت اول دوال صفر است و داریم:

محدودیت اول دوال $\Rightarrow \quad y_2a_{21} = C_1 \quad \Rightarrow \quad y_2 = \frac{C_1}{a_{21}}$

محدودیت دوم خلاف عرف مسئله Max است لذا $y_2 \leq 0$ است و داریم $\frac{C_1}{a_{21}} \leq 0$

بنابراین گزینه ۲ صحیح است اگر $S_2 = x_2 = x_3 = 0$ قرار دهیم در صورت مسئله فوق از محدودیت دوم داریم:

گزینه ۱ صحیح است. $\Rightarrow \quad a_{21}x_1 = b_2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{b_2}{a_{21}} \geq 0$

محدودیت دوم دوال را نوشته و در آن به‌جای $y_2 = \frac{C_1}{a_{21}}$ را قرار داده داریم:

گزینه ۳ غلط است. $\Rightarrow \quad \frac{C_1}{a_{21}} \geq \frac{C_2}{a_{22}} \quad \Rightarrow \quad ya_{22} \geq C_2$

برای محدودیت سوم دوال هم این عمل را تکرار کرده و داریم:

$$\frac{C_1}{a_{21}} \geq \frac{C_3}{a_{23}}$$

بنابراین گزینه ۴ هم صحیح است. بنابراین تنها گزینه نادرست گزینه ۳ است.

یادداشت:

....

....

....

....

مثال۲۶: مسئله LP زیر را در نظر بگیرید فرض کنید این مسئله دارای فضای حل باشد دوگان این مسئله چگونه است؟

$$\begin{aligned} \text{Max}\quad & Z = C_1x_1 + C_2x_2 \\ \text{st}:\quad & ax_1 + bx_2 = b_1 \\ & Cx_1 + dx_2 = b_2 \qquad \frac{a}{b} \neq \frac{c}{d} \neq \frac{k}{m} \\ & Kx_1 + mx_2 = b_3 \\ & b_1, b_2, b_3, x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

۱) حتماً تباهیده است.

۲) ممکن است جواب نداشته باشد.

۳) دارای جواب بیکران است.

۴) جواب بهینه چندگانه دارد.

حل : گزینه ۴ صحیح است.

مسئله فوق دارای سه محدودیت بوده که معادله سه خط می‌باشد، سه خط در دوبعدی به سه حالت قرار دارند، یا در یک نقطه مشترکند یا اشتراکی ندارند یا ∞ نقطه مشترک دارند (بر هم منطبق‌اند) بنابر گفته مسئله که مسئله دارای جواب است $\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d} \neq \frac{k}{m}$ (شیب‌های این سه خط متفاوتند) لذا این مسئله تنها یک گوشه دارد و آن هم تباهیده است لذا دوال آن دارای جواب بهینه چندگانه است و گزینه ۴ صحیح است.

مثال۲۷: ثانویه مسئله زیر در چه حالتی به‌سر می‌برد؟

$$\text{Max}\ Z = y + 3x$$

$$\text{st}: -\frac{1}{2}x + y \leq 3 \quad y \leq 4 \quad y \leq x^2 \quad y, x \geq 0$$

ثانویه این مسئله هم دارای فضای حل نمی‌باشد زیرا اگر در این مسئله x در محدودیت‌ها به ∞ میل کند کلیه محدودیت‌ها برقرارند و Z به ∞ میل خواهد کرد.

مثال۲۸: در مسئله زیر مقدار تابع هدف چقدر است؟

$$\begin{aligned} \text{Max}\ Z &= 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ \text{st}:\quad & x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & 2x_1 - x_3 \leq 2 \\ & -x_2 + x_3 \leq 2 \\ & x_{1,2,3} \geq 0 \end{aligned}$$

دوال این مسئله ضرائبی مشابه این مسئله دارد فقط محدودیت‌های آن از نوع بزرگتر یا مساوی می‌باشد برای آنکه جوابی در محدودیت‌های اولیه و ثانیه صدق کند باید این جواب در حالت = در این محدودیت‌ها صدق کند لذا محدودیت‌ها را به‌صورت تساوی در قالب سه معادله و سه مجهول حل کرده خواهیم داشت:

$$Z^* = 8$$

$$x_1 = x_3 = 2 \quad x_2 = 0$$

یادداشت:

....

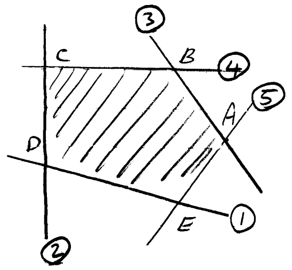
....

....

....

مثال۲۹: در جواب بهینه دوال مسئله‌ای که شکل آن به‌صورت زیر است و جواب بهینه در نقطه A می‌باشد چه متغیرهایی در پایه بهینه می‌باشند؟

این مسئله دارای دو متغیر و 5 محدودیت است بنابراین دوال آن دارای 2 محدودیت و 5 متغیر است لذا دو متغیر پایه دارد. باتوجه به قضیه سوم از آنجائی‌که محل برخورد محدودیت‌های 3 و 5 گوشه بهینه A را حاصل می‌کند بنابراین در دوال مسئله هم متغیرهای y_3 و y_5 در پایه بهینه‌اند.



مثال۳۰: مسئله LP زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}
&\text{Max } Z = 50x_1 + 80x_2 + 30x_3\\
&\text{st}: x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 8\\
&\quad 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 5\\
&\quad -x_1 + x_2 + 4x_3 \le 6
\end{aligned}$$

اگر قیمت‌های سایه محدودیت‌های دوم و سوم به‌ترتیب 23 و -4 باشد و s_1 مقداری مثبت داشته باشد (s_1 متغیر کمبود محدودیت اول است) در جواب بهینه چه متغیرهایی در پایه بهینه نمی‌باشند؟

۱) s_2, s_1, x_1 ۲) s_3, x_3, x_2 ۳) s_3, s_2, x_2 ۴) s_3, s_1, x_3

حل : گزینه ۳ درست است.

زیرا $s_1 > 0 \Leftarrow y_1 = 0 \Leftarrow$ با قراردادن مقادیر دوال $(0 \quad 23 \quad -4)$ در محدودیت‌های دوال (نیاز به نوشتن دوال نمی‌باشد) محدودیت‌های اول و سوم دوال عمل کننده بوده لذا x_1 و x_3 در پایه بوده بنابراین x_2 غیرپایه بوده و s_2 و s_3 هم غیرپایه می‌باشند زیرا $0 < s_1$ است.

مثال۳۱: باتوجه به مسئله زیر و اطلاعات ناقص از جدول بهینه مقدار Z^* چقدر است؟

$$\begin{aligned}
&\text{Max } Z = 3x_1 - 2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4\\
&\text{st}: \quad x_1 + \alpha x_3 + \beta x_4 = b_1\\
&\qquad x_2 + 8x_3 + \theta x_4 = b_2\\
&\qquad x_{1,2,3,4} \ge 0
\end{aligned}$$

از جدول نهایی داریم: $Z_2 - C_2 = 5 \quad Z_1 = C_1 = 4 \quad , \quad B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \theta \end{pmatrix}$

۱) $Z^* = 4b_1 + 5b_2$ ۲) $Z^* = c_3b_1 + c_4b_2$ ۳) $Z^* = 9b_1 + 2b_2$ ۴) $Z^* = 7b_1 + 3b_2$

حل : گزینه ۴ درست است.

یادداشت:

....

....

....

....

زیرا از خاصیت III داریم: شروع کننده x_1 و x_2 بوده لذا B^{-1} در جدول نهایی زیر x_1 و x_2 است حال z_j های زیر B^{-1} یعنی x_1 و x_2 را به دست می‌آوریم.

$$\begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ Z_j - C_j & Z_j - C_j \\ 4 & 5 \\ 3 \leftarrow C_j & 3 \leftarrow C_j \\ \hline y_1 = 7 & y_2 = 3 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \omega^* = Z^* = 7b_1 + 3b_2$$

مثال۳۲: اگر یک مسئله Lp دارای فضای حل بیکران باشد در مورد ثانویه آن چه می‌توان گفت:

۱) یا فضای حل ندارد یا دارای جواب بهینه است.

۲) فضای حل مسئله ثانویه یا وجود ندارد یا ممکن است کراندار نباشد.

۳) فضای حل ندارد.

۴) 1 یا 2

حل : گزینه ۴ درست است.

فضای اولیه بیکران

- بیکران **z** $\longrightarrow$ فضا ندارد **D**
- کراندار **z** $\Longrightarrow$ هم باید به بهینه برسد **D** $\Longrightarrow$ دارای فضای کراندار یا بیکران **D**

آنالیز حساسیت در مدل LP

نکته : با مقادیر $\frac{\partial Z}{\partial x_N}$ یا $\frac{\partial Z}{\partial b}$ و ... آشنا باشید و بدانید که این مقادیر چه معنی دارند و به کجای جدول سیمپلکس اشاره می‌کنند.

نکته : تغییر در مقادیر b بر شدنی‌بودن اثر می‌گذارد. درصورت اثرگذاشتن مقدار تابع هدف بدتر می‌شود.

نکته : تغییر در مقادیر c بر بهینگی اثر می‌گذارد. درصورت اثرگذاشتن مقدار تابع هدف بهتر می‌شود.

نکته : تغییر در ماتریس A می‌تواند بر بهینگی و شدنی‌بودن به‌طور همزمان اثر بگذارد.

نکته : کلیه حالات آنالیز حساسیت با استفاده از فرمول‌های $B^{-1}b$ ، $C_B B^{-1} a_j - c_j$ و $B^{-1} a_j$ پاسخ داده می‌شود.

نکته : تفاوت مقدار سمت چپ از سمت راست محدودیت‌ها در یک مسئله به‌ازاء مقادیر متغیرهای آن مسئله مقادیر $Z_j - C_j$ های مسئله دیگر را نتیجه می‌دهد.

یادداشت:

....

....

....

....

مثال۳۳: اگر در یک مسئله متعارف از نوع ماکزیمم‌سازی ضرائب تابع هدف و ضرائب متغیرها در محدودیت‌ها 100 برابر گردند. آن‌گاه:

مقادیر متغیرها در مسئله اولیه $\frac{1}{100}$ می‌گردد زیرا در

$x_B = B^{-1} b \Leftarrow Ax = b$

$\Leftarrow Ax = \frac{b}{100} \Leftarrow 100\, Ax = b$

x_B جدید $= \frac{1}{100} x_B$ قدیم

ولی Z^* جدید تغییر نمی‌کند. زیرا ضرائب تابع هدف 100 برابر شده‌اند. بنابراین ω^* جدید هم نباید تغییرکند. اما تابع هف دوال به‌صورت زیر است:

$$\omega = \frac{1}{100} b_1 y_1 + \frac{1}{100} b_2 y_2 + \ldots + \frac{1}{100} b_n y_n$$

بنابراین متغیرهای دوال باید 100 برابر گردند تا ω تغییر نکند.

مثال۳۴: مسئله LP زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} &\text{Max } Z = Cx \\ &\text{st}: Ax \le b \\ &\quad x \ge 0 \end{aligned}$$

جواب‌های بهینه دوال این مسئله را $y_1^*, y_2^*, \ldots y_m^*$ می‌نامیم حال کلیه اعضاء بردار B را به‌صورت $b_i + k_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ تغییر می‌دهیم، k_i مقادیری ثابت هستند. اگر مسئله تغییر یافته دارای فضای حل باشد و مقدار Z^{**} جواب بهینه مسئله تغییر یافته باشد داریم:

۱) $Z^* = Z^{**}$ ۲) $Z^{**} < Z^* + \sum_{i=1}^{m} y_i^* k_i$ ۳) $Z^{**} \le Z^* + \sum_{i=1}^{m} y_i^* k_i$ ۴) $Z^{**} \ge Z^* + \sum^{i=1} y_i^* k_i$

حل : گزینه ۳ درست است.

زیرا از قضیه اول دوال داریم:

$$Z^{**} \le \sum_{i=1}^{m} y_i^* (b_i + k_i) = \underbrace{\sum_{i=1}^{m} y_i^* b_i}_{Z^*} + \sum_{i=1}^{m} y_i^* k_i$$

یادداشت:

....

....

....

....

مثال۳۵: گاهی اوقات لازم است تا با بررسی صورت مسئله سریعاً پی به جواب‌های بهینه برد.

در مسئله زیر اگر تابع هدف به‌صورت $Max\ Z=(1+\theta)x_1+(2+2\theta)x_2+4x_3$ تغییر کند بازه θ را به‌گونه‌ای بدست آورید که مسئله بهینه باقی بماند؟

$$\begin{aligned} Max\ Z &= x_1+2x_2+4x_3 \\ st: x_1+x_2+x_3 &\le 100 \\ 2x_1+x_2+x_3 &\le 60 \\ x_{1,2,3} &\ge 0 \end{aligned}$$

۱) $\theta\le 1$

۲) $\theta\le -1$

۳) $\theta\ge 1$

۴) $\theta\le 7$

حل : گزینه ۱ درست است.

زیرا: ابتدا با بررسی دوبدوی متغیرها متوجه می‌شویم که فقط پایه (x_3,s_1) بهینه می‌باشد. پایه (s_2,x_3) و (x_1,x_3) شدنی نبوده و از طرفی x_3 با x_2 هم نمی‌تواند در پایه باشد زیرا دترمینان ماتریس پایه صفر می‌باشد.

$$x_B=\begin{pmatrix}x_3\\s_1\end{pmatrix} \Rightarrow B=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}0&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix}$$

$$Z_j-C_j\Big|_{x_{1,2}}=\underbrace{(4\quad 0)\begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix}}_{(0\quad 4)}\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix}-(1+\theta\quad 2+2\theta)\ge 0$$

$$(8\quad 4)-(1+\theta\quad 2+2\theta)\ge 0$$

$$(7-\theta\quad 2-2\theta)\ge 0 \Rightarrow \begin{matrix}\theta\le 7\\ \theta\le 1\end{matrix} \Rightarrow \theta\le 1$$

نکته : نام دیگر Z_j-C_j ها هزینه‌های تقلیل یافته Reduced cost می‌باشد.

نکته : معنی متغیرهای دوال در مسئله ماکزیمم‌سازی، سهم سود هر واحد از هریک از منابع می‌باشد.

مثال۳۶: جدول نهایی یک مسئله LP به‌صورت زیر است. در چه صورت می‌توان سود بهینه را افزایش داد؟

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS
x_1	1	3	0	1	$-\frac{1}{2}$	15
x_3	0	-1	1	-1	1	10
Z	0	5	0	1	2	140

آیا اگر سود محصول دوم 6 واحد اضافه شود سود بهینه افزایش می‌یابد؟ بلی زیرا

$$Z_2-C_2=5 \Rightarrow Z_2-(C_2+6)=(Z_2-C_2)-6=-1$$

آیا اگر محصول جدیدی با سودآوری 4 و میزان مصرف از منابع 1 و 1 به مسئله اضافه شود سود بهینه افزایش می‌یابد؟ بلی زیرا

محدودیت دوال متناظر متغیر جدید $y_1+y_2-4=(1+2)-4=-1=Z_j-C_j$

یادداشت:

....

....

....

....

مثال۳۷: برای یک مسئله Lp متغیرهای ثانویه به‌ترتیب 1 و 3- و 9 شده‌اند انتخاب کدام گزینه پرهزینه‌تر است؟

۱) برای مسئله‌ای بصورت Max، افزایش یک‌واحد به سمت راست محدودیت دوم

۲) برای مسئله‌ای بصورت Max، کاهش یک‌واحد از سمت راست محدودیت اول

۳) برای مسئله‌ای بصورت Min، افزایش یک‌واحد به سمت راست محدودیت سوم

۴) برای مسئله‌ای بصورت Min و کاهش یک‌واحد از سمت راست محدودیت دوم

حل : گزینه ۳ درست است.

زیرا:

$Z^* = W^* = \alpha$

از سود سه‌واحد کم می‌شود $Z = \alpha - 3$ سود $= Z = \alpha$ $\Rightarrow$ گزینه 1

از سود یک‌واحد کم می‌شود $Z = \alpha - 1$ سود $= Z = \alpha$ $\Rightarrow$ گزینه 2

هزینه 9 واحد اضافه شد $Z = \alpha + 9$ هزینه $= Z = \alpha$ $\Rightarrow$ گزینه 3

هزینه 3 واحد اضافه شد $Z = \alpha + 3$ هزینه $= Z = \alpha$ $\Rightarrow$ گزینه 4

مثال۳۸: در روش دوال سیمپکس چنانچه متغیر خروجی موجود بوده ولی تمام عناصر در این سطر خروجی همگی مثبت باشند می‌توان نتیجه گرفت که:

۱) دوال بیکران است و مسئله اولیه نشدنی می‌باشد.

۲) دوال کراندار است و مسئله اولیه بیکران است.

۳) دوال نشدنی و مسئله اولیه بیکران است.

۴) هیچ کدام.

حل : گزینه ۱ درست است.

مثال۳۹: مسئله LP زیر جدول نهایی آن را در نظر بگیرید بازه b_1, b_2 به‌طور همزمان برای آن‌که جدول بهینه بماند چیست و شبه قیمت منبع دوم چقدر است؟

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & W = 5x_1 + 2x_2 + x_3 \\ \text{st}: \quad & x_1 + 4x_2 + x_3 \le b_1 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 \ge b_2 \\ & x_{1,2,3} \ge 0 \end{aligned}$$

	x_1	x_2	x_3	S_2	S_1	RHS
S_1	−1	3	0	1	1	4
x_3	2	1	1	−1	0	2
ω	−3	−1	0	−1	0	

۱) $y_2^* = 1 \& b_1 \ge b_2 \ge 0$

۲) $y_2^* 1 \& b_2 \ge b_1 \ge 0$

۳) $y_2^* = -1 \& b_1 \ge b_2 \ge 0$

۴) $y_2^* = -1 \& b_2 \ge b_1 \ge 0$

حل : گزینه ۱ درست است.

توجه کنید ماتریس B^1 زیرمتغیرهای ابتدا S_1 و سپس R است علیرغم آن‌که در جدول S_1, S_2 را جابجا داده است و مسئله رابا R در محدودیت دوم شروع به عمل کرده‌ایم.

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & +1 \end{pmatrix}$$

یادداشت:

....

....

....

....

بنابراین $B^{-1}aj$ متغیر R و S_2 قرینه‌اند.

$$B^{-1}b \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & +1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad b_1 - b_2 \geq 0 \,\&\, +b_2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad b_1 \geq b_2 \geq 0$$

و Z_j زیر S_2 و R هم قرینه‌اند لذا $y_2 = Z_j = 1$ بنابراین گزینه ۱ صحیح است.

کاربردهای Lp ـ مدل حمل و نقل و تخصیص

۱ـ مدل حمل و نقل

نکته : شرط وجود جواب شدنی $\sum a_i = \sum b_j$

نکته : مسئله حمل و نقل همواره دارای جواب بهینه محدود است. بنابراین هیچگاه حالت خاص بیکران بودن و غیرقابل قبول بودن در مسئله حمل و نقل صدق نمی‌کند.

نکته : شرط لازم و کافی برای آن‌که جواب‌های پایه مسئله حمل و نقل صحیح باشند آن است که عرضه‌ها و تقاضاها صحیح باشند.

نکته : در صورتی که بخواهیم مقدار X_{ij} را صفر کنیم باید $C_{ij} = M$ قرار دهیم.

نکته : هر مسئله نامتعادلی را می‌توان متعادل کرد (با اضافه‌کردن سطر یا ستون مجازی)

نکته : ساختار خاص در ماتریس ضرائب مدل حمل و نقل وجود دارد در هر ستون دو عدد یک و مابقی صفر می‌باشند.

نکته : مسئله حمل و نقل دارای m متغیر بوده و $m + n$ محدودیت و اگر با روش سیمپلکس حل شود هر گوشه‌شدنی آن حتماً تباهیده خواهد بود.

نکته : همواره یکی از محدودیت‌های مسئله حمل و نقل زائد است.

نکته : تعداد متغیرها با مقدار مثبت در هر جواب پایه مسئله حمل و نقل $= m+n-1$

نکته : صفر نشانه تباهیدگی و محدودیت زائد که در جدول سیمپلکس در گوشه‌شدنی ظاهر می‌شود در جدول حمل و نقل مشاهده نمی‌شود.

نکته : دوال مسئله حمل و نقل همواره دارای جواب بهینه چندگانه می‌باشد و محدودیت‌های دوال مسئله حمل و نقل (هزینه) به‌صورت زیر است:

$U_i + V_j \leq C_{ij}$

U_i , V_j آزاد

یادداشت:

....

....

....

....

نکته : دوال مسئله حمل و نقل همواره دارای یک‌درجه آزادی است.

نکته : تعداد خانه‌هایی که در حلقه بررسی کننده یک‌خانه غیرپایه مورد استفاده قرار می‌گیرند زوج بوده.

نکته : تعداد عناصر با مقدار مثبت در هر جواب‌شدنی مسئله حمل و نقل حداکثر mn تا می‌باشد.

نکته : اگر به C_{ij}های یک سطر جدول حمل و نقل مثل سطر i به اندازه k واحد اضافه می‌شود مقدار Z بهینه آن به اندازه $K\sum a_i$ افزایش می‌یابد.

مثال ۴۰: یک جواب پایه موجه در مسئله حمل و نقل به‌صورت زیر است درجه صورت x_{11} متغیر وارده به پایه است؟

(a)	(7) 100	(9) 50
(6) 200	(b)	(5) 150

۱) $a \ge 10 , a \le b$ ۲) $a \le 10 \ , \ a \ge b$ ۳) $a \le 10 \ , \ a \le b+7$ ۴) $a \ge 10 \ , \ a \ge b+7$

حل : گزینه ۳ درست است.

زیرا: باید $Z_j - C_j$ متغیر x_{11} بزرگتر یا مساوی صفر باشد و درثانی $Z_j - C_j$ متغیر x_{11} از $Z_j - C_j$ متغیر x_{22} مثبت‌تر باشد.

۱) $(a+5)-(6+9) \le 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a \le 10}$

۲) $(a-10) \le (b+9)-(12) \quad \Rightarrow \quad a-10 \le b-3$

$$\boxed{a \le b+7}$$

مثال ۴۱: روش MODI بر چه اساسی طراحی شده است؟

جواب: بر اساس مسئله ثانویه در روش سیمپلکس طراحی شده است.

مثال ۴۲: جدول حمل و نقل زیر را در نظر بگیرید مقدار هزینه کل درصورتی که $30 < \theta < 40$ باشد چقدر است؟

	1	2	
1	(5)	(1)	$20+\theta$
2	(8)	(5)	$80-\theta$
	50	50	

۱) $540-5\theta$ ۲) $540-3\theta$ ۳) $570-3\theta$ ۴) $570-4\theta$

یادداشت:

....

....

....

....

جواب در گزینه ۲ می‌باشد زیرا:

5 $\theta-30$	1 50
8 $80-\theta$	5

$7 = 50+5\theta-150+640-80 = 540-3\theta$

مثال۴۳: در مسئله حمل و نقل زیر C_{12} چقدر باشد تا مسئله در جواب بهینه در حالت خاص قرار گیرد.

	1	2	
1	1	C_{12}	10
2	4	9	5
3	2	7	15
	10	20	

۱) 6 ۲) 7 ۳) 8 ۴) همه موارد درست است.

حل : گزینه ۴ درست است.

زیرا با گزینه 1 یعنی $C_{12}=6$

مسئله را اگر با روش گوشه شمال غربی یا حدقل هزینه یا …… جواب اولیه‌ای به دست آوریم این جواب بهینه و چندگانه و تباهیده است.

با گزینه‌های 2 و 3 هم مسئله دارای جواب تباهیده است.

مثال۴۴: خانه‌های پایه در loop بررسی‌کننده خانه‌های غیرپایه آیا مستقل خطی می‌باشند؟

بلی ولی تمام خانه‌های شرکت کننده در loop (در کنج‌ها) مستقل از یکدیگر نمی‌باشند زیرا یکی از کنج‌ها را در loop خانه غیر پایه تشکیل داده و متغیرهای غیرپایه متغیرهای وابسته‌اند زیرا هر متغیر غیرپایه‌ای را می‌توان از ترکیب متغیرهای پایه نوشت.

یادداشت:

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

مدل تخصیص:

نکته : همان مدل حمل و نقل است وقتی که $a_i = b_j = 1$

نکته : جواب‌های پایه مسئله تخصیص همواره صحیح می‌باشند زیرا $b_j = a_i$ مقادیری صحیح هستند

نکته : تعداد متغیرها با مقدار مثبت در هر جواب پایه مسئله تخصیص n می‌باشد.

نکته : تعداد متغیرهای پایه مسئله تخصیص $2n-1$ که از این تعداد n تا 1 و مابقی صفرند.

نکته : تعداد متغیرهای پایه مسئله تخصیص اگر با روش سیمپلکس حل شود، $2n$ می‌باشد.(به تعداد محدودیت‌ها)

نکته : تعداد پایه‌های شدنی مسئله تخصیص n بعدی، $n!$ است.

نکته : تعداد متغیرها با مقدار مثبت در هر جواب شدنی مسئله تخصیص n بعدی می‌تواند $n^2 =$ کل تعداد متغیرها باشد.

نکته : تعداد متغیرها با مقدار صفر در هر جواب پایه مسئله تخصیص چه تعدادی است؟

$$\underbrace{n^2 - n = n(n-1)}_{\text{کل صفرها}} \begin{cases} n-1 & \text{صفر پایه} \\ n(n-1)-(n-1)=(n-1)^2 & \text{صفر غیر پایه} \end{cases}$$

نکته : هر چه از هزینه‌ها (C_{ij} ها) در مسئله تخصیص کم شود تأثیری در جواب بهینه نخواهد داشت فقط Z بهینه را تغییر می‌دهد.

نکته : جهت جلوگیری از تخصص خاص می‌توان C_{ij} آن خانه را به M تغییر داد.

مثال۴۵: مسئله تخصص زیر چند جواب بهینه دارد؟

	A	B	C
1	8	9	11
2	11	12	14
3	10	11	13

۱) 2

۲) 4

۳) 5

۴) 6

حل : گزینه ۴ درست است.

زیرا با انجام قدم‌های 1 و 2 از روش مجارستانی کلیه اعداد جدول صفر می‌شوند بنابراین هر 6 جواب (3!) مسئله بهینه است.

یادداشت:

....

....

....

....

مثال۴۶: مسئله تخصیص زیر را در نظر بگیرید: اعداد داخل جدول نمره آزمون سه شرکت‌کننده برای سرپرستی سه بخش از 4 بخش می‌باشد چه شخصی سرپرست بخش 4 خواهد شد؟

	1	2	3	4
A	30	78	78	70
B	40	87	80	75
C	20	65	75	65

۱) A

۲) B

۳) C

۴) A و C شرایط برابر دارند.

حل : گزینه ۱ درست است.

زیرا اولاً مقادیر جدول از نوع سود می‌باشد لذا راحت‌تر آن است که اعداد جدول را در -1 ضرب کرده و سپس الگوریتم مجارستانی (هزینه) را اجرا کنیم خواهیم داشت:

	1	2	3	4
A	-30	-78	-78	-70
B	-40	-87	-80	-75
C	-20	-65	-75	-65
D	0	0	0	0

	1	2	3	4
A	48	0	0	8
B	47	0	7	8
C	55	10	0	10
D	0	0	0	0

	1	2	3	4
A	40	0	0	0
B	34	0	7	0
C	47	10	0	2
D	0	1	1	0

B یا $A \to 4,1$ یا $1,4$

$C \to 3$

$D \to 1$

روش سیمپلکس تجدید نظر شده ـ متغیرهای حد دار ـ بحث سیکل

نکته : تنها تفاوت روش سیمپلکس تجدیدنظر شده با روش سنتی در استفاده از حافظه کمتر می‌باشد.

نکته :

$B^{-1}_{\text{بعدی}} = E_{\text{قبلی}} \times B^{-1}_{\text{قبلی}}$ در حالت کلی $B_K^{-1} = E_{K-1} E_{K-2} \dots E_2 E_1$

نکته : تنها تفاوت فقط در قدم پنجم روش سیمپلکس می‌باشد.

یادداشت:

....

....

....

....

نکته : از آنجائیکه ماشین در هر تکرار فقط B^{-1} را در حافظه نگهداری می‌کند لذا هر چه مسئله دارای B^{-1} کوچکتر می‌باشد سرعت حل مسئله بیشتر می‌باشد.

نکته : تغییر متغیر روی حد پایین $X = L + X'$

نکته : تغییر متغیر روی حد بالا $X_j = U_j - X'_j$ یا $X_i = U_i - X'_i$

نکته : در روش متغیرهای کراندار از عناصر مثبت ستون لولا برای تضمین غیر منفی شدن متغیرها در جدول بعدی استفاده می‌شود و از عناصر منفی ستون لولا برای تضمین اینکه متغیرهای پایه در جدول بعدی از حد بالای خود فراتر نرود استفاده می‌شود بنابرانی در این روش عنصر لولا هم می‌تواند مثبت باشد و هم منفی

نکته : تعداد متغیرها با مقدار مثبت در هر جواب پایه مسئله با متغیرهای کراندار می‌تواند از m هم بیشتر باشد.

نکته : مقدار متغیر وارد شونده به پایه از رابطه:

$$xj = \min\left\{U_j\ ,\theta_1 = \min\left\{\frac{\beta_i^o}{\alpha_{ij}} / \alpha_{ij} > 0\right\}\ ,\ \theta_2 = \min\left\{\frac{U_i - \beta_i}{-\alpha_{ij}} / \alpha_{ij} < 0\right\}\right\}$$

پیروی می‌کند.

نکته : کاربرد روش لکزیکو گراف هنگامی است که خروجی منحصر به فرد نباشد.

نکته : پدیده سیکل احتمالی است.

مثال۴۷: برای محاسبه ماتریس‌های مقدماتی از چه اطلاعاتی از جدول سیمپلکس استفاده می‌شود؟ از ستون لولا و سطر لولا یا محل عنصر لولا در ستون لولا

مثال۴۸: اگر یک مسئله Lp که دارای 100 متغیر و 1000 محدودیت است، ثانویه این مسئله را در نظر بگیریم در این صورت ماشین مسئله اولیه را راحت‌تر حل می‌کند یا مسئله ثانویه را؟

مسئله ثانویه را راحت‌تر حل می‌کنند زیرا ابعاد B^{-1} در مسئله ثانویه 100×100 بوده که معادل 10000 خانه از حافظه می‌باشد ولی در مسئله اولیه ابعاد B^{-1} 1000×1000 بوده که یک میلیون خانه از حافظه را شامل می‌گردد.

مثال۴۹: در یک مسئله Lp یکی از متغیرها بصورت $x_2 \geq -7$ تعریف شده برای حل این مسئله با روش سیمپلکس از کدام گزینه برای جایگزین کردن این متغیر استفاده می‌شود:

۱) $-x_2 \leq 7$ ۲) $x'_2 \leq 7$ ۳) $x_2 = x'_2 + 7$, $x'_2 > 0$ ۴) $x'_2 \geq 0\ ,\ x_2 = x'_2 - 7$

حل : گزینه ۴ درست است.

زیرا باید تغییر متغیر روی حد پایین اعمال گردد.

$$x_2 = -7 + x'_2$$
$$x'_2 \geq 0$$

یادداشت:

....

....

....

....