

# خلاصه مباحث و نکات ی تخصصی در عملیات ا

تئیه و تنظیم

این ناجو

[www.ieun.ir](http://www.ieun.ir)

## مفاهیم تحقیق در عملیات و مدل سازی

۱

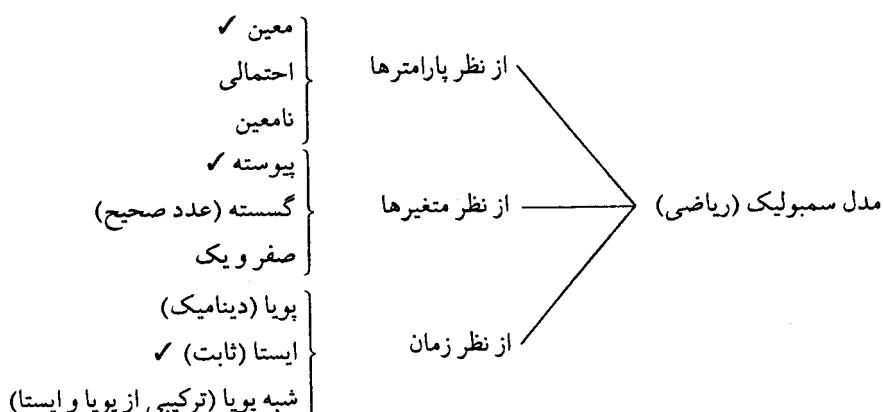
### ۱-۱- مقدمه

بروز انقلاب صنعتی موجب رشد و تعالی حیرت‌انگیز سازمان‌ها گردید. با افزایش تخصص و گسترش پیچیدگی سازمانها و شرکتها امر تصمیم‌گیری و همچنین تخصیص منابع موجود بین فعالیتهای بخش‌های مختلف آن به منظور دستیابی به حداکثر کارایی، مشکل شده و نیاز به سیستماتیک نمودن تصمیمات داشت. از این‌رو به مرور زمان بحث تحقیق در عملیات پایه گذاری گردید. در حین جنگ جهانی دوم متخصصان و دانشمندان انگلیسی و آمریکائی بصورت سازمان یافته استفاده از مباحث علمی تحقیق در عملیات را در ماموریتهای هوایی مورد استفاده قرار دادند.

## ۱-۲- مدلسازی مسائل

مدل، نمایش خاصی از یک واقعیت می‌باشد و انواع مختلفی دارد.

- |               |               |                       |                 |              |
|---------------|---------------|-----------------------|-----------------|--------------|
| ۱- مدل شماتیک | ۲- مدل آنالوگ | ۳- مدل سمبلیک (ریاضی) | ۴- مدل سینماتیک | ۵- مدل ژنتیک |
|---------------|---------------|-----------------------|-----------------|--------------|



مدلهای ریاضی مورد استفاده در این درس از نظر پارامتری معین بوده و شامل متغیرهای پیوسته می‌باشد و همچنین از نظر زمانی حالت ایستادارند.

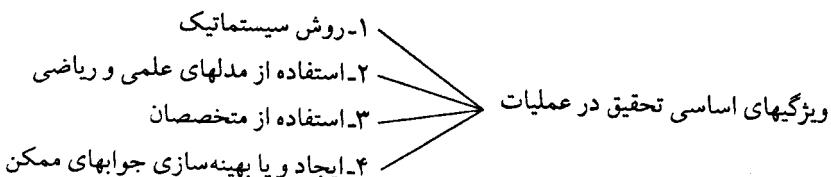
## ۱-۳- تعاریف

### ۱-۳-۱- برنامه‌ریزی خطی (LP)

تخصیص منابع محدود به فعالیتهای تعریف شده جهت افزایش بازدهی و یافتن بهترین راه حل بهینه را برنامه‌ریزی خطی می‌گویند. در واقع برنامه‌ریزی خطی نوع ساده‌ای از مدل برنامه‌ریزی ریاضی می‌باشد که بهترین گزینه را از میان روش‌های ممکن انتخاب می‌کند. در برنامه‌ریزی خطی تابع هدف و محدودیتها همگی بصورت خطی نمایش داده می‌شود.

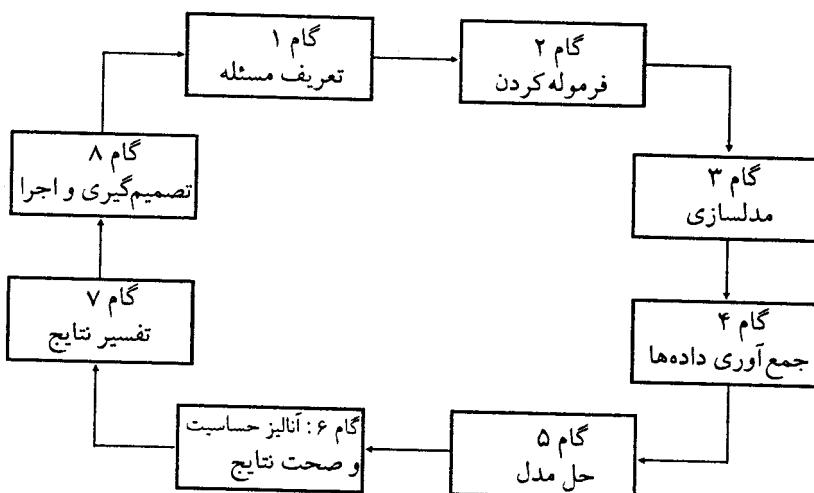
### ۱-۳-۲- تحقیق در عملیات (OR)

مجموعه‌ای از مدلها و تکنیکهای کمی که از طریق روش‌های علمی، مدیران را در امر تصمیم‌گیری در شرایط منابع محدود باری می‌دهد.



#### ۱-۴- فرآیند تصمیم‌گیری و حل مسائل تحقیق در عملیات

مطابق تقسیم‌بندی گرین فرایند حل مسائل *OR* در گام زیر قابل اجرا می‌باشد که گام‌های ۱ و ۲ به فعالیتهای قبل از مدل‌سازی، گام‌های ۳ تا ۶ به فعالیتهای حین مدل‌سازی و گام‌های ۷ و ۸ به فعالیتهای بعد از مرحله مدل‌سازی طبقه‌بندی شده است.



مدل گرین جهت حل مسائل تحقیق در عملیات

#### ۱-۵- بخش‌های اصلی مدل برنامه‌ریزی خطی

- ۱- تابع هدف (Objective Function)
- ۲- محدودیتهای کارکردی (Circuit Constraints)
- ۳- محدودیتهای منابع جهت رسیدن به اهداف مدل می‌باشد که به صورت بزرگتر مساوی ( $\geq$ ) یا بزرگتر کثیر کردن ( $Max$ ) یا حداقل نمودن ( $Min$ ) عملکرد مدل می‌باشد.
- ۴- بخش‌های اصلی مدل برنامه‌ریزی خطی

##### (Functional Constraints)

یک محدودیت کارکردی که محدودیتی برای مدل است.

- ۱- محدودیتهای کارکردی (Circuit Constraints)
- ۲- محدودیتهای منابع جهت رسیدن به اهداف مدل می‌باشد که به صورت بزرگتر مساوی ( $\geq$ ) یا بزرگتر کثیر کردن ( $Max$ ) یا حداقل نمودن ( $Min$ ) عملکرد مدل است.
- ۳- محدودیتهای کارکردی که محدودیتی برای مدل است.
- ۴- محدودیتهای کارکردی که محدودیتی برای مدل است.

**۳- محدودیتهای غیر کارکردی یا متغیرهای تصمیم (Decision Variables)**

نشان دهنده مقدار عملکرد یا سطح یک فعالیت بوده و با  $(X_j)$  نمایش داده می‌شود. این متغیرها می‌توانند به صورت مثبت، به ندرت منفی و یا آزاد در علامت مورد استفاده قرار گیرند.

**نکته:** متغیر آزاد در علامت، متغیری می‌باشد که می‌تواند مقادیر منفی، مثبت و یا صفر را شامل گردد.

**نکته:** به محدودیتهای به شکل  $(X_j \geq 0)$  محدودیتهای غیر منفی Non Negative Constraints گفته می‌شود.

**نکته:** هرچه تعداد محدودیتها کمتر باشد حجم محاسبات جهت حل مسئله کمتر خواهد بود (در مقایسه با تعداد متغیرها)

## ۱-۶- مدل کلی یک برنامه‌ریزی خطی

تابع هدف:  $\text{Max (Min)} Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n (\leq, =, \geq) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n (\leq, =, \geq) b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n (\leq, =, \geq) b_m \end{cases}$$

(آزاد در علامت یا  $x_1, x_2, \dots, x_n (\geq 0)$ : متغیرهای تصمیم)

و یا به شکل خلاصه

$$\text{Max (Min)} Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$s.t. \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j (\leq, =, \geq) b_i & i = 1, 2, \dots, m \\ x_j (\geq 0) & j = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

و یا در حالت نماد ماتریسی:

تابع هدف:  $\text{Max (Min)} Z = cx$

$$s.t : Ax (\leq, =, \geq) b$$

آزاد در علامت  $x$  دیگر نباشد.

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad c = [c_1, c_2, \dots, c_n] \quad \text{که در آن}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود.

### ۱-۷- تعریف پارامترها و متغیرها

$Z$ : نمایشگر ارزش تابع هدف (تابع معیار) می‌باشد که بصورت معادله خطی نوشته می‌شود و پس از حل معادله مقدار آن مشخص می‌شود.

$x^*$  (متغیر تصمیم): نمایشگر مقدار عملکرد یا سطح یک فعالیت (محصول یا خدمات) می‌باشد که مقادیر آن پس از حل معادله مشخص می‌شود.

$c$  (ضرایب بهره‌وری): ارزش هر واحد فعالیت (محصول یا خدمات) در تابع هدف می‌باشد. این ضریب عددی در معادله معلوم می‌باشد.

$a$  (ضرایب فنی یا تکنولوژیکی): مقداری از منبع که برای انجام یک واحد فعالیت زیکار رفته و عددی معلوم در معادله می‌باشد.

$b$ : مقادیر معلوم سمت راست محدودیتها که موجودی منابع یا سقف تقاضا را بیان می‌دارد.

### ۱-۸- فرضیات برنامه‌ریزی خطی

در یک مدل برنامه‌ریزی از نوع خطی ۴ شرط زیر باید صادق باشد.

۱- تناسب: یعنی هر فعالیت به تنها ی و مستقل از سایر فعالیتها عمل نموده و میزان افزایش و یا کاهش متغیرهای تابع هدف و متغیرهای محدودیتها متناسب با تغییرات آن متغیر می‌باشد.

۲- **لطفاً:** نتایج حاصل از فرض تناسب به شرح زیر می‌باشد.

۱- تابع هدف و محدودیتها خطی می‌باشند.

۲- همه متغیرها توان اول می‌باشند.

۳- مقدار مشتق تابع هدف نسبت به هریک از متغیرها همواره مقدار ثابتی بوده و برابر ضرب بهره‌وری آن متغیر خواهد بود.

۴- هر فعالیت از فعالیتهای دیگر مستقل است بدین معنا که کالاها مکمل یا جانشین یکدیگر نبوده و تغییر قیمت یک فعالیت بر فعالیتهای دیگر بی اثر است.

۲- جمع‌پذیری: تابع هدف از مجموع تک تک متغیرها حاصل می‌شود. همچنین محدودیتها نیز از مجموع تک تک مقادیر مصرف شده از منابع حاصل می‌شود.

**نکته:** تابع حاصل از فرض جمع‌پذیری:

۱- همه متغیرها هم واحد هستند و یا آنها را هم واحد می‌نامیم.

۲- عدم وجود روابط متقابل بین متغیرها (مانند  $x_1x_2$ )

۳- راندمان کلی از جمع تک تک راندمانها حاصل می‌شود.

۴- مصرف کلی هریک از منابع برابر حجم تک تک مصارف متغیرها می‌باشد.

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$$

**نکته:** فرض تناسب و جمع‌پذیری به همراه یکدیگر باعث استقلال متغیرها می‌شوند و هیچ‌کدام به تنهایی قادر به این عمل نمی‌باشند.

۳- فرض بخش‌پذیری (قابلیت تقسیم):

هر فعالیت به هر عدد دلخواهی قابل تقسیم بوده، فلذاً متغیرهای تصمیم‌گیری، هر مقدار غیر صحیح را نیز می‌توانند شامل گردند.

**نکته:** تابع حاصل از فرض بخش‌پذیری:

۱- متغیرهای تصمیم، متغیرهای پیوسته می‌باشند.

۲- فرض بخش‌پذیری وجه تمایز برنامه‌ریزی پیوسته و عدد صحیح می‌باشد.

**نکته:** هرسه فرض تناسب، جمع‌پذیری و بخش‌پذیری به همراه یکدیگر باعث محدودیت فضای جواب و خطی بودن مسئله می‌شود.

۴- فرض معین بودن (قطعیت):

همه پارامترهای مسئله  $(c_j, a_{ij}, b_i)$  مقادیری ثابت و معلوم می‌باشند.

**نکته:** تابع حاصل از فرض معین بودن:

۱- مقادیر احتمال یا تصادفی در برنامه‌ریزی خطی نقشی ندارند.

۲- فرض معین بودن وجه تمایز برنامه‌ریزی خطی و برنامه‌ریزی پارامتریک می‌باشد. زیرا در

برنامه ریزی پارامتریک خود پارامترهای نیز متغیر می باشند.

### ۱-۹- تبدیلات مدل برنامه ریزی خطی

یک برنامه ریزی خطی با تبدیلات و تغییرات مناسب می تواند به اشکال متفاوت و معادل تبدیل شود. در حالت کلی دو فرم برای برنامه ریزی خطی وجود دارد.

#### ۱- فرم متعارفی      ۲- فرم استاندارد

در حالت متعارفی مسئله بیشینه سازی، متغیرها غیر منفی و همه محدودیتها از نوع  $\leq$  (ک.م) و در حالت کمینه سازی، متغیرها غیر منفی و همه محدودیتها باید به صورت  $\geq$  (ب.م) باشند. همچنین در حالت استاندارد همه محدودیتها به صورت مساوی و متغیرها نیز غیر منفی می باشند. جدول زیر فرمهای متعارفی و استاندارد را نمایش می دهد.

مسئله کمینه سازی	مسئله بیشینه سازی	
$\begin{aligned} \text{Min } Z = Cx \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{aligned}$	$\begin{aligned} \text{Max } Z = Cx \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{aligned}$	فرم متعارفی
$\begin{aligned} \text{Min } Z = Cx \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{aligned}$	$\begin{aligned} \text{Max } Z = Cx \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{aligned}$	فرم استاندارد

**نکته:** فرمهای استاندارد در روشهای حل به کمک سیمپلکس و فرمهای متعارفی در روشهای حل به کمک دوگان استفاده می شود. بنابراین می توان به کمک تبدیلاتی مسائل برنامه ریزی خطی را به مدلهای استاندارد یا متعارفی معادل نمود.

### ۱-۹-۱- تبدیل Max به Min و بر عکس

با ضرب ضرایب تابع هدف در عدد (-۱) بدست می آید.

$$\text{Max } \sum_{j=1}^n C_j x_j = -\text{Min } \sum_{j=1}^n -C_j x_j$$

و یا

$$\text{Min } \sum_{j=1}^n C_j x_j = -\text{Max } \sum_{j=1}^n -C_j x_j$$

به عبارت دیگر

$$\text{Max } Z = C_1 x_1 + C_2 x_2 + \dots + C_n x_n$$

که معادل است با:

$$\text{Min} (-Z) = -C_1 x_1 - C_2 x_2 - \dots - C_n x_n$$

### ۱-۹-۲- تغییر جهت در محدودیتها

هر نامعادله را می‌توان با ضرب نمودن طرفین در عدد  $(-1)$  تغییر جهت داد.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \xrightarrow{\text{ضرب طرفین در } (-1)} \sum_{j=1}^n -a_{ij} x_j \leq -b_i$$

### ۱-۹-۳- بکار بردن دو نامعادله به جای یک معادله و بر عکس

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \iff \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \end{cases}$$

### ۱-۹-۴- تبدیلات کانونیک

هر نامعادله می‌تواند به یک معادله تبدیل شود. اگر چنانچه نامعادله به شکل  $(\geq)$  باشد با کمک متغیر غیر منفی مازاد (surplus) و اگر نامعادله به شکل  $(\leq)$  باشد با کمک متغیر غیر منفی کمبود (slack) تبدیلات انجام می‌شود.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \quad \approx \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - S_i = b_i \quad : S_i \geq 0 \quad \text{متغیر غیر منفی مازاد}$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad \approx \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + S_i = b_i \quad : S_i \geq 0 \quad \text{متغیر غیر منفی کمبود}$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad \approx \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + R_i = b_i \quad : R_i \geq 0 \quad \text{متغیر مصنوعی}$$

**نکته:**  $R_i$  متغیری می‌باشد که هیچ‌گونه ارزش عددی یا اقتصادی نداشته و جهت انجام محاسبات بکار می‌رود و فضای جواب را به نحوی گسترش می‌دهد که مبدأ مخصوصات جزو فضای جواب گردد چون سیمپلکس از  $(0, 0)$  شروع به حل می‌شود.

### ۵-۶-۱ تبدیل قدر مطلق محدودیتها

محدودیتی که سمت چپ آن قدر مطلق باشد می‌توان به دو نامعادله تبدیل نمود.

$$\left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \leq b_i \iff \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq -b_i \end{cases}$$

$$\left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \geq b_i \iff \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq -b_i \end{cases}$$

### ۶-۱ تبدیل متغیرهای آزاد

از آنجائی که در روش حل مسائل برنامه‌ریزی خطی از طریق سیمپلکس متغیرها همیشه غیرمنفی می‌باشند لذا ضروری می‌باشد تا متغیرهای فاقد علامت رابه متغیرهای غیرمنفی تبدیل نمود یعنی:

$$x_j = x'_j - x''_j \quad \text{که در آن} \quad x'_j \geq 0, \quad x''_j \geq 0$$

**نکته:** حداقل یکی از متغیرهای  $x'_j$  یا  $x''_j$  دارای مقداری مثبت است (هردو با هم می‌توانند صفر باشند)

**نکته:** حاصلضرب  $x'_j$  در  $x''_j$  همیشه صفر است (یکی از این دو همیشه صفراند)

**نکته:** هردو با هم نمی‌توانند مقداری مثبت داشته باشند.

**نکته:** همواره به دلیل وابستگی خطی بین  $x'_j$  و  $x''_j$  (دو ستون موازی ضرایب) هیچگاه این دو متغیر نمی‌توانند با هم در یک پایه باشند.

اگر  $x_1, x_2, \dots, x_n$  متغیرهای آزاد در علامت باشند می‌توان با معرفی یک متغیر اضافی  $x''_j$ ، متغیرهای غیرمنفی ایجاد نمود.

$$x_j = x'_j - x''_j \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$x'_j \geq 0, \quad x''_j \geq 0$$

که در آن (" $x$ ") نقش منفی ترین متغیر را دارد در حالی که سایر متغیرهای  $x_j$  به اندازه  $x'_j$  بیش از آن هستند.

**نکته:** اگر مسئله‌ای دارای  $n$  متغیر آزاد در علامت باشد این مسئله حداقل با  $n+1$  متغیر غیرمنفی قابل حل می‌باشد.

$$\text{اگر: } \begin{cases} x_j \leq 0 \Rightarrow -x_j = x'_j & , \quad x'_j \geq 0 \\ x_j \leq u_j \Rightarrow u_j - x_j = x'_j & , \quad x'_j \geq 0 \\ x_j \geq l_j \Rightarrow x_j - l_j = x'_j & , \quad x'_j \geq 0 \end{cases}$$

#### ۱-۹-۷- تبدیل تابع هدف مرکب

با تغییر متغیر می‌توان تابع هدف مرکب را تبدیل به تابع هدف ساده نمود.

$$\begin{aligned} \text{Max} \left\{ \text{Min} \left[ g_1(x), g_2(x), g_3(x) \right] \right\} \\ Z = \text{Min} \left[ g_1(x), g_2(x), g_3(x) \right] \Rightarrow \text{Max} Z \\ s.t : \begin{cases} g_1(x) \geq Z \\ g_2(x) \geq Z \\ g_3(x) \geq Z \end{cases} \end{aligned}$$

در صورتی که تابع هدف  $\text{Min}(\text{Max})$  باشد جهت محدودیتها بر عکس خواهد شد. (مثلاً  $(g_1(x)) \leq Z$ )

#### ۱-۹-۸- تبدیل قدر مطلق تابع هدف

در این شرایط با تغییر متغیر، عبارت قدر مطلق از تابع هدف حذف می‌گردد.

$$\begin{aligned} \text{Max} |g(x)| \\ Z = |g(x)| \Rightarrow \text{Max} Z \\ s.t : |g(x)| = Z \end{aligned}$$