

کشرل موجودی ا

مهندس پور حیدری

[Www.iepnu.ir](http://www.iepnu.ir)



۱- تعاریف و مفاهیم کنترل موجودی

۱-۱- تعریف موجودی و کنترل موجودی

- موجودی: ذخیره‌ای از مواد و کالاست که برای مدت زمان مشخصی جهت جوابگویی تقاضا تحت کنترل سازمان به صورت ثابت نگهداری می‌شود.

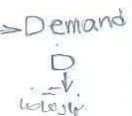
نکته: همان‌طور که در تعریف موجودی نیز ذکر گردیده است موادی که به صورت ثابت نگهداری نمی‌شوند مانند نفت داخل لوله‌های پالایشگاه جزو موجودی به حساب نمی‌آیند ولی موادی مانند نفت داخل مخازن که بر طبق تعریف هستند، جزو موجودی به حساب می‌آیند.

- کنترل موجودی: بررسی و نگاهداری سطحی از موجودی که هزینه‌های سیستم موجودی را کمینه می‌کند.

۲-۱- عوامل موثر در مدل‌های موجودی

عوامل زیر سازنده فرضیات مدل‌های موجودی می‌باشند و با شناخت نوع آن‌ها در هر مدل می‌توان مدل‌های مختلف را از یکدیگر متمایز ساخت.

۱- تقاضا: مهم‌ترین عامل در کنترل موجودی است و به دو دسته (قطعی) و (احتمالی) که آن‌ها نیز به دو دسته ساکن و پویا تقسیم می‌گردند.



- تقاضای قطعی و ساکن: تقاضا قطعی است و مقدار آن در طول مدت برنامه‌ریزی تغییری نمی‌کند.

- تقاضای قطعی و پویا: تقاضا قطعی است و مقدار آن در طول زمان‌های مختلف به صورت مشخص تغییر می‌کند.

- تقاضای احتمالی و ساکن: تقاضا احتمالی است و توزیع آن در طول مدت برنامه‌ریزی تغییری نمی‌کند.

- تقاضای احتمالی و پویا: تقاضا احتمالی است و توزیع آن در زمان‌های مختلف تغییر می‌کند.

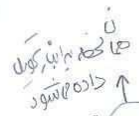
۲- کمبود: تقاضایی است که در زمان مقرر به آن جواب نمی‌دهیم. در مدل‌های موجودی می‌تواند کمبود مجاز باشد و یا مجاز نباشد در صورتی که کمبود مجاز باشد به دو نوع (پس‌افت) و (فروش از دست رفته) تقسیم می‌شوند. در کمبود پس‌افت به تقاضایی که به کمبود می‌خورد پاسخ می‌دهیم ولی در کمبود فروش از دست رفته به تقاضایی که به کمبود تبدیل شده دیگر جواب نمی‌دهیم.

۳- محدودیت: در مدل‌های موجودی ممکن است محدودیت‌های زیر وجود داشته باشد:

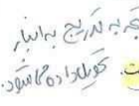
- محدودیت فضا

- محدودیت تعداد دفعات سفارش

- محدودیت سرمایه درگیر موجودی

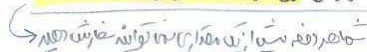


۴- سفارش: مدل‌های موجودی با توجه به نرخ و چگونگی دریافت سفارش به دو نوع مدل‌های (تولیدی) و مدل‌های (خریدی) تقسیم می‌شوند.



- مدل خرید: در مدل خرید کل سفارش در یک لحظه به انبار تحویل داده می‌شود بنابراین نرخ دریافت سفارش بی‌نهایت است.

- مدل تولید: در مدل تولید سفارش به تدریج به انبار تحویل می‌گردد و در واقع نرخ دریافت سفارش یک عدد است.



۵- مدت زمان تحویل سفارش (L): مدت زمان بین لحظه سفارش تا لحظه دریافت اولین قطعه سفارش است و می‌تواند قطعی و یا احتمالی باشد.

۶- قیمت کالا در طول مدت برنامه‌ریزی: قیمت کالا در طول مدت برنامه‌ریزی می‌تواند ثابت باشد و یا این که متغیر باشد مانند مدل‌های تورمی، خراج، تخفیف و ...

۷- برنامه‌ریزی: در مدل‌های موجودی می‌توان برای (یک) محصول و یا (چند) محصول به‌طور هم‌زمان برنامه‌ریزی کرد.

۱-۳ متغیرهای حالت در یک سیستم موجودی

در یک سیستم موجودی، متغیرهای حالت، متغیرهایی هستند که در هر لحظه وضعیت یا حالت سیستم موجودی را مشخص می‌کنند. این متغیرها به شرح ذیل می‌باشند:

- $I(t)$: موجودی در دست در زمان t
- $b(t)$: مقدار کمبود در زمان t
- $O(t)$: مقدار مواد در سفارش در زمان t یا مقدار سفارش در راه در زمان t

نکته: (۳) متغیر فوق همگی غیرمنفی و مستقل می‌باشند در حالی که (۲) متغیری که در ادامه می‌آید وابسته به ۳ متغیر فوق هستند و می‌توانند منفی یا مثبت باشند.

میان استر و یا هم صفر باشد
 if $I(t) > 0 \rightarrow b(t) = 0$
 if $b(t) > 0 \rightarrow I(t) = 0$
 نکته: در هر لحظه از زمان داریم:

از دو صورت امکان دارد یا هم صفر باشد
 $I(t) \cdot b(t) = 0 \rightarrow$
 $I(t) = 0$ و $b(t) = 0$
 NS(t): موجودی خالی در زمان t

$NS(t) = I(t) - b(t) \rightarrow$
 $NS(t) > 0 \rightarrow I(t) > 0$ و $b(t) = 0$
 $NS(t) < 0 \rightarrow I(t) = 0$ و $b(t) > 0$
 $NS(t) = 0 \rightarrow I(t) = 0$ و $b(t) = 0$
 Y(t): موقعیت موجودی در زمان t

$$Y(t) = NS(t) + O(t) = O(t) + I(t) - b(t)$$

۱-۴ هزینه‌های سیستم موجودی

۱-۴-۱ هزینه تدارک مواد

هزینه‌ای است که از زمان سفارش دادن مواد تا رسیدن به درب انبار به سیستم شارژ می‌شود. هزینه تدارک مواد برای دو مدل (خرید) و تولید تعاریف جداگانه‌ای به شرح ذیل دارد.

هزینه تدارک مواد در مدل (خرید) به دو هزینه ثابت سفارش‌دهی و هزینه (خرید مواد) تقسیم می‌شود:

الف) هزینه ثابت سفارش‌دهی: $(A = \text{هزینه هر بار سفارش})$

هزینه‌ای است که جهت سفارش مواد به سیستم موجودی شارژ می‌شود. این هزینه به مقدار سفارش بستگی ندارد. یعنی قابل بیان به ازای واحد محصول نیست. مانند: فکس، تلفن، پیگیری و ...



(ب) هزینه خرید مواد: $(CQ = \text{کل هزینه هر بار خرید})$

هزینه‌ای است که جهت خرید مواد به سیستم موجودی شارژ می‌شود و به مقدار هر بار سفارش (Q) و قیمت واحد محصول (C) بستگی دارد.

هزینه تدارک مواد در مدل تولیدی به دو هزینه آماده‌سازی و هزینه تولید محصول تقسیم می‌شود:

(الف) هزینه آماده‌سازی: $(A = \text{هزینه هر بار آماده‌سازی})$

هزینه‌ای است که جهت آماده‌سازی برای تولید تعدادی محصول بر سیستم شارژ می‌شود. این هزینه به مقدار سفارش تولید بستگی ندارد. مانند هزینه تعویض قالب‌ها، هزینه آموزش کارکنان و ...

(ب) هزینه تولید محصول $(CQ = \text{کل هزینه هر بار تولید})$

هزینه‌ای است که جهت تولید تعدادی محصول به سیستم شارژ می‌شود و به مقدار هر بار سفارش تولید (Q) و قیمت تمام شده (متغیر) محصول (C) بستگی دارد.

مثال: کدامیک از هزینه‌های زیر جزو هزینه‌های آماده‌سازی نیست.

۱) هزینه بازآموزی پرسنل جدید

۲) هزینه ضایعات ابتدای تولید

۳) هزینه کارآیی پایین ابتدایی تولید

۴) هزینه ضایعات مواد

۵) هزینه حمل و نقل مواد سفارش داده شده

۶) هزینه خرید مواد

۷) هزینه حمل و نقل مواد سفارش داده شده

حل: گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

هزینه ضایعات مواد به ازای واحد محصول قابل بیان است، بنابراین جزو هزینه‌های آماده‌سازی نیست.

نکته: هزینه‌های حمل و نقل مواد سفارش داده شده و بازرسی جزو هزینه‌های تدارک مواد محسوب می‌شوند. این هزینه‌ها اگر قابل بیان به ازای واحد محصول باشند در قیمت محصول محاسبه شده و جزو هزینه‌های خرید مواد و یا هزینه‌های تولید محصول قرار می‌گیرند. در غیر این صورت در هزینه‌های سفارش‌دهی و یا هزینه‌های آماده‌سازی محاسبه می‌گردند.

مثال: کدامیک از عبارتهای زیر در هزینه‌های سفارش‌دهی هر بار (A) مورد استفاده قرار نمی‌گیرد:

۱) هزینه بازرسی وقتی که برای کلیه واحدها انجام می‌شود.

۲) هزینه بازرسی وقتی که برای تعدادی از واحدها انجام می‌شود.

۳) هزینه حمل وقتی که به ازای واحد محصول پرداخت نمی‌شود.

۴) هزینه‌های تلکس و پیگیری

حل: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

همان‌طور که در نکته فوق ذکر شد هزینه بازرسی وقتی که برای کلیه واحدها انجام می‌شود در هزینه خرید محاسبه می‌گردد.

۱-۴-۲- هزینه نگهداری موجودی

هزینه‌ای است که به علت نگهداری موجودی به سیستم موجودی شارژ می‌شود. این هزینه‌ها در دسته‌بندی زیر قرار می‌گیرند:

(الف) هزینه تسهیلات انبار شامل اجاره سالیانه انبار، هزینه آب، برق، گاز و ...

(ب) هزینه انتقال و جابه‌جایی مانند هزینه حمل و نقل داخل انبار

(ج) هزینه افت و یا از بین رفتن مانند فاسد شدن، شکستن چینی‌آلات

(د) هزینه متروک شدن یا از مد افتادن مانند تغییر مد لباس و یا قدیمی شدن Chipset های کامپیوتری

(ه) هزینه‌های بیمه و مالیات

(و) هزینه سرمایه درگیر موجودی (هزینه خواب سرمایه) بدین معنی که چقدر فرصت سود از دست داده‌ایم

برای محاسبه هزینه نگهداری پارامتر h به صورت زیر تعریف می‌گردد:

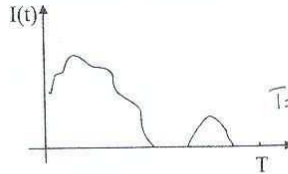
$h = ic + \omega$

h : متوسط هزینه نگهداری هر واحد موجودی در واحد زمان

که در آن i نرخ هزینه نگهداری (C) قیمت هر واحد محصول و ω هزینه نگهداری است که به قیمت کالا بستگی ندارد اما بر اساس واحد محصول بیان می‌شود.

نحوه محاسبه هزینه نگهداری از 0 تا T

هزینه نگهداری بر اساس منحنی موجودی در دست به صورت زیر محاسبه می‌گردد.



$T = \frac{1}{\delta} \dots$
 $T = 1$

$T \text{ تا } 0$ کل هزینه نگهداری از $h \times$ (مساحت زیرمنحنی موجودی در دست) $= h \int_0^T I(t) dt = h \bar{I} T \rightarrow h \int_0^T I(t) dt = h \frac{\int_0^T I(t) dt}{T} \times T$

\bar{I} (متوسط موجودی) = $\frac{\text{مساحت زیرمنحنی در دست}}{T} = \frac{\int_0^T I(t) dt}{T}$

با استفاده از رابطه هزینه نگهداری، کل هزینه نگهداری سالیانه با قرار دادن $T = 1$ به دست می‌آید.

کل هزینه نگهداری سالیانه $= h \bar{I}$

نکته: تمامی هزینه‌های نگهداری موجودی عموماً به قیمت محصول بستگی دارد به جز هزینه تسهیلات انبار که از دو جهت با بقیه متفاوت است:

- ۱- به قیمت واحد محصول (C) بستگی ندارد.
- ۲- تسهیلات انبار معمولاً بر اساس ماکزیمم موجودی در مدت زمان بررسی می‌شود، اما سایر هزینه‌های نگهداری بر اساس متوسط موجودی بیان می‌شود.

کل هزینه‌های سالیانه برای این حالت به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

h_1 : هزینه‌هایی از نگهداری که به متوسط موجودی بستگی دارد.

h_2 : هزینه‌هایی از نگهداری که به ماکزیمم موجودی بستگی دارد.

سوال کمبود $h_1 \bar{I} + h_2 I_{max}$ کل هزینه نگهداری سالیانه

$h_1 \bar{I} + h_2 I_{max}$ هزینه‌ها

۳-۴-۱- هزینه کمبود

هزینه‌ای است که به صورت جریمه باعث عدم تامین به موقع تقاضا به سیستم شارژ می‌شود. این هزینه به دو دسته تقسیم می‌شود.

$\hat{\pi}$ \rightarrow π

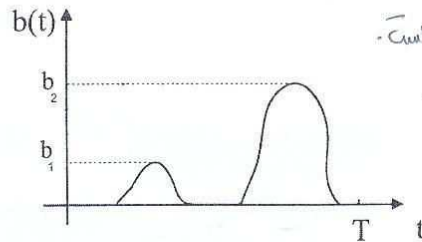
- هزینه کمبود وابسته به زمان ($\hat{\pi}$)

π \rightarrow π

- هزینه کمبود مستقل از زمان (π)

نحوه محاسبه کل هزینه کمبود از $T \leq 0$

هزینه کمبود بر اساس منحنی میزان کمبود بر حسب زمان محاسبه می‌گردد.



این هزینه‌ها را کمبود بر اساس حالت زیر می‌تواند است.

(مقدار کمبود از $T \leq 0$) $+ \pi$ (مساحت زیر منحنی کمبود) $= \hat{\pi}$ کل هزینه کمبود از $T \leq 0$

$$= \hat{\pi} \int_0^T b(t) dt + \pi(b_1 + b_2) = \hat{\pi} \bar{b} T + \pi(b_1 + b_2)$$

$$\bar{b} = \frac{\int_0^T b(t) dt}{T}$$

(متوسط کمبود)

مثال: منحنی موجودی خالص یک محصول در طی 10 ماه به صورت شکل زیر است. در صورتی که هزینه کمبود هر واحد تقاضا در سال 60 تومان باشد و همچنین هزینه کمبود هر واحد نیز برابر با 10 تومان باشد هزینه نگهداری هر واحد موجودی در ماه

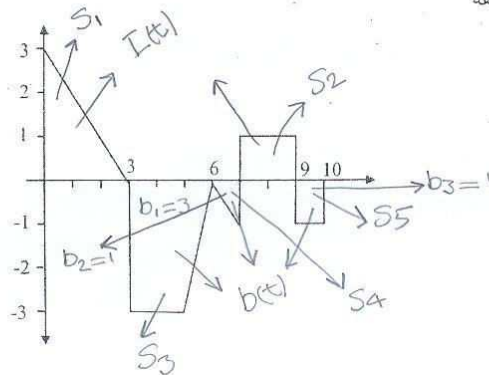
20 تومان باشد موارد زیر را محاسبه کنید:

- (الف) کل هزینه نگهداری 10 ماهه
- (ب) کل هزینه کمبود 10 ماهه
- (ج) متوسط موجودی طی 10 ماه
- (د) متوسط کمبود 10 ماهه

$$\hat{\pi} = 60 \frac{\text{تومان}}{\text{واحد موجودی}} = 5 \frac{\text{تومان}}{\text{ماه}}$$

$$\pi = 10 \frac{\text{تومان}}{\text{واحد موجودی}}$$

$$h = 20 \frac{\text{تومان}}{\text{واحد موجودی}}$$



حل:

$$h = 20 \frac{\text{تومان}}{\text{عدد ماه}} \quad \pi = 10 \frac{\text{تومان}}{\text{عدد}} \quad \hat{\pi} = 60 \frac{\text{تومان}}{\text{عدد سال}} = 5 \frac{\text{تومان}}{\text{عدد ماه}}$$

$$\text{تومان } 130 = 20(S_1 + S_2) = 20 \left(\frac{3 \times 3}{2} + 1 \times 2 \right) = 130 \text{ تومان} = 20 \times \text{کل هزینه نگهداری 10 ماهه}$$

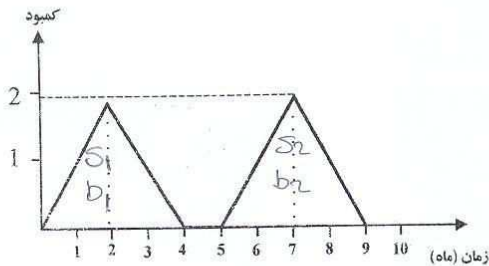
$$5(S_3 + S_4 + S_5) + 10(b_1 + b_2 + b_3) = 95$$

تومان: $5\left(3 \times 2 + \frac{3 \times 1}{2} + \frac{1 \times 1}{2} + 1 \times 1\right) + 10(3 + 1 + 1) = 150 + 50 = 95$ کل هزینه کمبود 10 ماهه

$$\text{متوسط موجودی} = \frac{\text{مساحت زیر منحنی موجودی در دست}}{T} = \frac{\frac{S_1}{2} + \frac{S_2}{2}}{10} = \frac{\frac{3 \times 3}{2} + \frac{1 \times 2}{2}}{10} = 0.65$$

$$\text{متوسط کمبود} = \frac{\text{مساحت زیر منحنی کمبود}}{T} = \frac{\frac{S_3}{2} + \frac{S_4}{2} + \frac{S_5}{2}}{10} = \frac{\frac{3 \times 2}{2} + \frac{3 \times 1}{2} + \frac{1 \times 1}{2} + 1 \times 1}{10} = \frac{9}{10} = 0.9$$

مثال: اگر هزینه کمبود یک واحد موجودی در ماه برابر 2 تومان باشد ($\hat{\pi} = 2$) و هزینه کمبود هر واحد موجودی یک تومان ($\pi = 1$) باشد. آن گاه هزینه کمبود در 9 ماه گذشته با توجه به منحنی کمبود زیر چقدر است؟



(۱) 16 تومان

(۲) 18 تومان

(۳) 20 تومان

(۴) 24 تومان

حل: گزینه ۳ صحیح می باشد.

هزینه کمبود وابسته به زمان + هزینه کمبود مستقل از زمان = کل هزینه کمبود

$$= 1 \left(\frac{2}{2} + \frac{2}{2} \right) + 2 \left(\frac{2 \times 4}{2} + \frac{2 \times 4}{2} \right) = 4 + 16 = 20$$

مثال: هزینه های حمل و نقل موجودی جزو کدام یک از هزینه های سیستم موجودی است؟

(۲) هزینه سفارش

(۱) هزینه خرید

(۴) می تواند جزو هر یک از هزینه های نگهداری، خرید یا سفارش باشد.

(۳) هزینه نگهداری

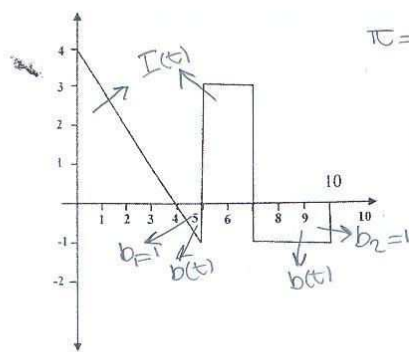
حل: گزینه ۴ صحیح می باشد.

هزینه های حمل و نقل در صورتی که در داخل انبار باشد و بر اساس واحد محصول قابل بیان باشد جزو هزینه های نگهداری است. در

صورتی که خارج از انبار و از زمان سفارش تا درب انبار باشد، اگر به ازای واحد محصول قابل بیان باشد جزو هزینه های خرید و اگر قابل

بیان به ازای واحد محصول نباشد جزو هزینه های سفارش است.

مثال: موجودی خالص محصولی در طی 10 ماه گذشته در شکل زیر داده شده است. اگر هزینه کمبود هر تن 100 تومان باشد، آن گاه کل هزینه کمبود در طی 10 ماه گذشته برابر است با:



$$\pi = 100 \frac{\text{تومان}}{\text{تن}}$$

150 (۱)

200 (۲)

350 (۳)

400 (۴)

حل: گزینه ۲ صحیح می باشد.

در این مثال تنها هزینه کمبود مستقل از زمان موجود است.

$$\pi = 100$$

$$\text{هزینه کمبود مستقل از زمان} = \text{هزینه کمبود} = 100(1+1) = 200$$

میانگین موجودی خالص

$$\overline{NS} = \overline{I} - \overline{b}$$

۲- مدل قطعی ساده یا ویلسون یا مقدار سفارش اقتصادی یا EOQ

فرضیات مدل به شرح ذیل است. این فرضیات همان طور که ذکر گردید بر اساس عوامل موثر در مدل های موجودی تعیین می گردند.

این مدل به شرح سفارش دهی
نرخ تقاضا ثابت است

۱- تقاضا قطعی و ساکن است.

۲- کمبود جایز نیست.

۳- محدودیت وجود ندارد.

۴- سفارش یکجا دریافت می شود.

۵- مدت زمان تحویل سفارش قطعی و عددی است.

۶- قیمت کالا در طول مدت برنامه ریزی ثابت است.

۷- مدل تک محصولی است.

پارامترهای مدل:

(A) هزینه هر بار سفارش (هزینه سفارش دهی)

(D) نرخ تقاضا

(h) هزینه نگهداری هر واحد کالا در واحد زمان

(i) نرخ هزینه نگهداری در کالا

(c) قیمت واحد کالا

(w) هزینه نگهداری که به قیمت کالا بستگی ندارد

($\pi, \bar{\pi}$) هزینه های کسری واحد کالا هزینه های کسری در مدل EOQ بسیار زیاد (∞) می باشد

(P) نرخ تولید، دریافت سفارش در مدل EOQ آتی و بنابراین نرخ تولید بسیار زیاد (∞) می باشد

(L) مدت زمان تحویل سفارش

متغیرهای مدل:

(Q) مقدار هر بار سفارش

(r) نقطه سفارش بر حسب موقعیت موجودی. بدین معنی که هر وقت در نمودار موقعیت موجودی، موجودی محصول برابر مقدار r شود زمان سفارش است.

$$r = \frac{D \cdot L}{2}$$

(r_H) نقطه سفارش بر حسب موجودی خالص یا موجودی در دست. بدین معنی که هر وقت در نمودار موجودی خالص موجودی محصول برابر مقدار r_H شود، زمان سفارش است.

$$r_H = r + c_1$$

متغیر دیگری که می توان آن را از طریق بقیه متغیرها به دست آورد T است.

(T) فاصله بین دو سفارش متوالی یا فاصله بین رسیدن در سفارش متوالی یا مدت زمانی یک دوره

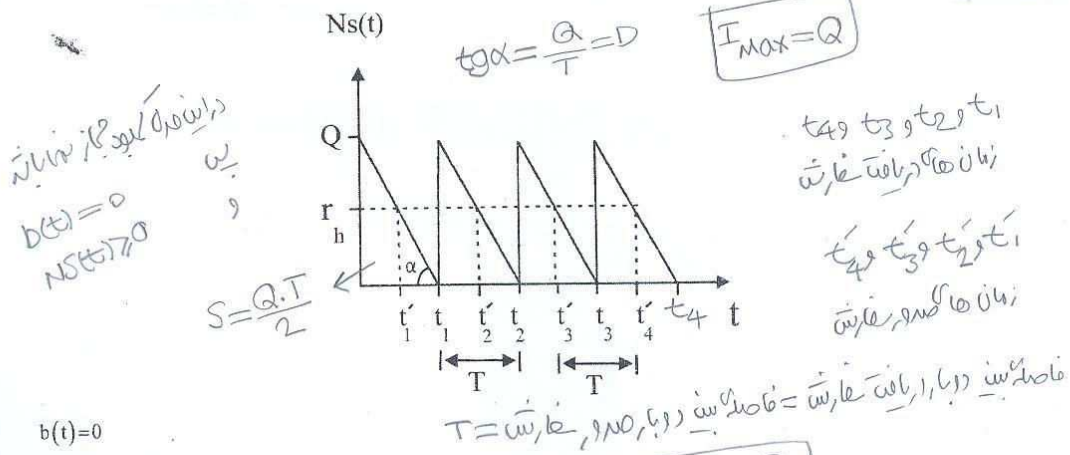
هدف مدل EOQ تعیین مقدار سفارش اقتصادی (Q^*) و تعیین r_H^* ، r^* با کمینه کردن هزینهها (هزینه نگهداری + هزینه

سفارش دهی) است.

در این مدل Q^* را با Q_H یا EOQ نیز نشان می دهند.

۲-۱. نحوه محاسبه مقدار سفارش اقتصادی (Q*)

نمودار موجودی خالص در مدل EOQ مانند شکل زیر می باشد. در این نمودار زمان های (t) زمان دریافت سفارش و زمان های (t') زمان صدور سفارش است که فاصله زمانی بین هر دو t و t' متوالی برابر زمان یک دوره T است.



$b(t) = 0$

$Ns(t) = I(t) - b(t)$

D = tg α نرخ کاهش یا مصرف کالا

$D = \frac{Q}{T} \rightarrow T = \frac{Q}{D}$

هزینه یک سیستم موجودی برابر است با جمع هزینه های نگهداری کمبود و تدارک مواد. از آن جا که در مدل EOQ کمبود جایز نیست هزینه های کسری برابر صفر می باشد. هزینه تدارک مواد نیز به دو قسمت هزینه سفارش دهی و هزینه خرید تقسیم می گردد بنابراین:

هزینه خرید + هزینه نگهداری + هزینه سفارش دهی = هزینه یک دوره

بر اساس آن چه در نمودار موجودی خالص مشاهده گردید، هزینه یک دوره به صورت زیر محاسبه می گردد.

هزینه یک دوره = $A + \frac{hQT}{2} + CQ$

n : متوسط تعداد دوره های در سال یا متوسط تعداد دفعات سفارش

$n = \frac{1}{T} = \frac{D}{Q}$

در صورتی که هزینه یک دوره در تعداد دوره ها در سال ضرب گردد، متوسط کل هزینه سالیانه سیستم موجودی به دست می آید.

هزینه یک دوره (هزینه یک دوره) = n متوسط کل هزینه سالیانه سیستم موجودی = $\frac{D}{Q}A + \frac{h}{2}Q + CD$

$\frac{D}{Q}A$ ← کل هزینه سفارشی طی سالیانه
 $\frac{h}{2}Q$ ← هزینه نگهداری سالیانه
 CD ← کل هزینه خرید سالیانه

$TC = \frac{D}{Q}A + \frac{h}{2}Q + CD$

از رابطه صفر به صفر بهینه مقدار سفارش را می‌توانیم بدست آوریم

برای یافتن Q^* باید از رابطه فوق بر حسب Q مشتق گرفته شود. از آن جا که CD به مقدار Q بستگی ندارد بنابراین در مشتق گیری مقدارش برابر صفر قرار می‌گیرد. از این رو $k(Q)$ را به صورت زیر تعریف کرده و هزینه متغیر سالیانه می‌نامند.

$$TRC = K(Q) = \frac{DA}{Q} + \frac{hQ}{2}$$

در صورتی که مشتق تابع فوق بر حسب Q برابر صفر قرار دهیم، مقدار Q^* به دست می‌آید.

$$\frac{d}{dQ} = \frac{dK(Q)}{dQ} = 0 \Rightarrow Q^* = Q_0 = EOQ = \sqrt{\frac{2DA}{h}}$$

همچنین هزینه متغیر سالیانه بهینه $(K(Q^*))$ و زمان دوره بهینه (T^*) از روابط زیر محاسبه می‌گردد:

$$K(Q^*) = \frac{DA}{Q^*} + \frac{hQ^*}{2} = \sqrt{2DAh}$$

$$T^* = \frac{Q^*}{D} = \sqrt{\frac{2A}{Dh}}$$

$$\frac{DA}{Q^*} = \frac{hQ^*}{2} \leftarrow \text{مساوی قرار دهیم}$$

$$\Downarrow$$

$$= \sqrt{\frac{2DAh}{2}}$$

$$TRC^* = \frac{hQ^*}{2} + \frac{DA}{Q^*}$$

$$= hQ^* = 2 \frac{DA}{Q^*}$$

$$= \sqrt{2DAh}$$

۲-۲ نحوه محاسبه نقطه سفارش بهینه r_h^*, r_h^*

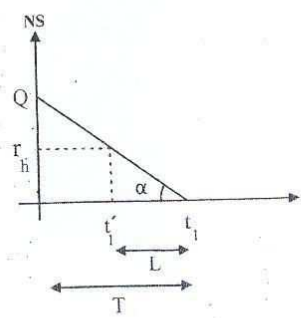
برای یافتن r_h^*, r_h^* دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

حالت اول: $L < T$

$$\bar{I}^* = \frac{Q_0}{2} = \sqrt{\frac{DA}{2h}}$$

$$\bar{I}^* = \frac{\int_0^T I(t) dt}{T} = \frac{Q \cdot T}{2T} = \frac{Q}{2}$$

سقف موجودی سفارش T و میانگین موجودی سفارش L (برای $L < T$)



$$D = \frac{Q}{T} \rightarrow D = \frac{r_h}{L}$$

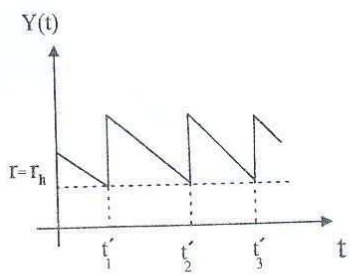
$$\rightarrow r_h^* = DL$$

$$\tan \alpha = D = \frac{r_h}{L} \Rightarrow r_h^* = D.L$$

در این حالت تعداد سفارش در راه یک لحظه قبل از t_1^* (زمان سفارش) برابر صفر و لحظه‌ای بعد از آن برابر است. بنابراین نمودار موقعیت موجودی آن به صورت زیر خواهد بود.

مستطیر Q \leftarrow سفارش Q

$$r^* = r_h^* + \frac{Q}{2} = r_h^*$$



حالت دوم: $L \geq T$

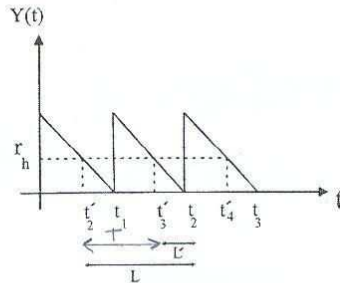
در این حالت نمی توان مانند حالت قبل عمل کرد بنابراین L' را به صورت زیر تعریف می کنیم.

L' : فاصله زمانی بین انجام سفارش تا رسیدن اولین (نزدیک ترین) سفارش که از رابطه زیر به دست می آید:

$$L' = L - mT, \quad m = \left\lfloor \frac{L}{T} \right\rfloor$$

سفارش صبیح سفارش عصر

$L < T \rightarrow m = 0$
 $L > T \rightarrow m = \left\lfloor \frac{L}{T} \right\rfloor$
 $r^* = D.L$



$$r_h^* = DL - mQ^*$$

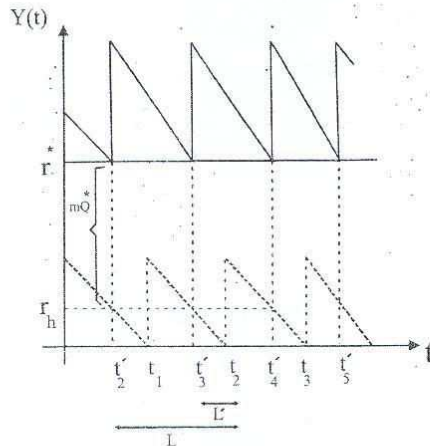
if $L < T : m = 0 \rightarrow r_h^* = DL$
 if $L > T : m = \left\lfloor \frac{L}{T} \right\rfloor \rightarrow r_h^* = DL - mQ^*$

$$T = \frac{Q}{D} \rightarrow Q = DT$$

$$tg\alpha = D = \frac{r_h}{L'} \Rightarrow r_h^* = D.L' = D(L - mT) = D.L - mDT = DL - mQ^*$$

$$\Rightarrow r_h^* = D.L - mQ^*$$

در این حالت مقدار سفارش در راه لحظه ای قبل از t' برابر m و لحظه ای بعد از آن $(m+1)$ است. بنابراین نمودار موقعیت موجودی آن به صورت زیر خواهد بود.



$$r^* = r_h^* + mQ^* = D.L - mQ^* + mQ^* = D.L$$

بنابراین نقطه سفارش مجدد در مدل EOQ از رابطه های زیر محاسبه می گردد.

$$\begin{cases} r^* = D.L \\ r_h^* = D.L - mQ^* \\ m = \left\lfloor \frac{L}{T} \right\rfloor \end{cases}$$

۳-۲ نکات مدل EOQ

نکته ۱، روابط زیر برای موقعیت موجودی $y(t)$ برقرار است.

$$r^* \leq y(t) \leq r^* + Q^*$$

$$DL \leq y(t) \leq DL + DT^*$$

همچنین برای موجودی خالص $I(t)$ داریم:

$$0 \leq I(t) \leq Q^* = DT^*$$

نکته ۲، در مدل‌های EOQ، r_h^* می‌تواند برابر صفر گردد ولی نمی‌تواند برابر Q^* شود.

$$0 \leq r_h^* < Q^* = DT^*$$

اگر مدت زمان تحویل سفارش مضرب صحیحی از T باشد ($L = mT$ ، $L' = 0$) آن‌گاه r_h^* برابر با صفر است ($r_h^* = DL' = 0$)

نکته ۳، در مدل EOQ در زمان‌های قبل از زمان سفارش مقدار سفارش در راه معادل mQ^* و زمان‌های پس از سفارش، مقدار آن $(m+1)Q^*$ است. به‌طور متوسط مقدار سفارش در راه معادل $(D.L)$ است. همچنین متوسط تعداد محموله‌های در سفارش یا

متوسط تعداد دفعات سفارشی که به دست ما نرسیده برابر با $\frac{L}{T^*} = \frac{DL}{Q^*}$ است.

مثال: در مدل ساده موجودی (که نرخ تقاضا ثابت معلوم و کمبود موجودی جایز نیست) فرض کنید مدت تحویل برابر ۲.۵ ماه، مقدار

سفارش اقتصادی برابر ۱۰۰ واحد و تقاضای سالیانه ۱۲۰۰ واحد است.

مقدار موجودی در دست در موقع سفارش در حالت سفارش اقتصادی: ←

- (۱) ۱۵۰ واحد (۲) ۱۰۰ واحد (۳) ۵۰ واحد (۴) ۲۵ واحد

حل: گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$L = 2.5 \text{ سال} = \frac{2.5}{12} \text{ ماه}$$

$$Q^* = 100 \rightarrow T^* = \frac{Q^*}{D} = \frac{100}{1200} = \frac{1}{12}$$

$$r_h = \left[\frac{L}{T^*} \right] = \left[\frac{2.5}{\frac{100}{1200 \times 12}} \right] = [2.5] = 2$$

$$\Rightarrow r_h^* = D.L - mQ^* = 1200 \times \frac{2.5}{12} - 2 \times 100 = 50$$

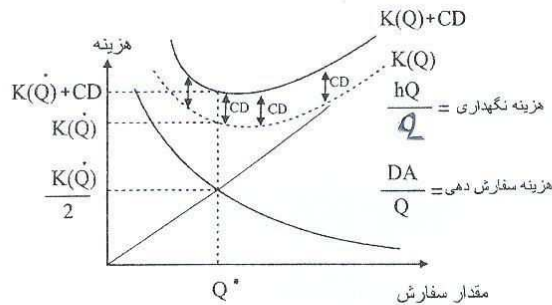
ناله: در مثال فوق مقدار متوسط مقدار مواد در سفارش (موادی که سفارش داده شده و هنوز دریافت نشده‌اند) برابر است با:

- (۱) ۱۵۰ واحد (۲) ۲۰۰ واحد (۳) ۲۵۰ واحد (۴) ۳۰۰ واحد

حل: گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$\text{مقدار متوسط مواد در سفارش} = D.L = 1200 \times \frac{2.5}{12} = 250$$

نکته ۴: بررسی هزینه‌های سفارش‌دهی و نگهداری سالیانه با افزایش مقدار سفارش



همان‌طور که مشاهده می‌شود منحنی $k(Q)$ از جمع دو منحنی هزینه سفارش‌دهی و هزینه نگهداری به‌دست می‌آید. منحنی هزینه نگهداری روند صعودی و منحنی هزینه سفارش‌دهی روند نزولی دارد. منحنی کل هزینه‌های سالیانه $(k(Q)+CD)$ نیز با اضافه شدن مقدار ثابت CD به منحنی $K(Q)$ به‌دست آمده است.

نکته ۵: در نقطه بهینه هزینه سفارش‌دهی سالیانه با هزینه نگهداری سالیانه برابر است یعنی محل تلاقی منحنی‌های هزینه نگهداری سالیانه و هزینه سفارش‌دهی سالیانه نقطه بهینه است.

$$\frac{DA}{Q^*} = \frac{hQ^*}{2} = \frac{\sqrt{2DAh}}{2} = \frac{K(Q^*)}{2}$$

$$\Rightarrow K(Q^*) = \sqrt{2DAh} = hQ^* = \frac{2DA}{Q^*} = \frac{2A}{T} = 2nA$$

نکته ۶: شیب منحنی هزینه‌ها در نقطه بهینه به‌ترتیب برای هزینه نگهداری و هزینه سفارش‌دهی سالیانه معادل $\frac{-h}{2}$ و $\frac{h}{2}$ است.

نکته ۷: رابطه بین هزینه سفارش‌دهی سالیانه و هزینه نگهداری سالیانه در صورتی که بیشتر یا کمتر از سفارش اقتصادی سفارش دهیم به صورت زیر است.

- اگر $Q > Q^*$ ← هزینه نگهداری < هزینه سفارش‌دهی
- اگر $Q = Q^*$ ← هزینه نگهداری = هزینه سفارش‌دهی
- اگر $Q < Q^*$ ← هزینه نگهداری > هزینه سفارش‌دهی

نکته ۸: شیب منحنی هزینه‌ها در سمت راست نقطه بهینه نسبت به سمت چپ آن ملایم‌تر است.

$$K(Q^*-a) > K(Q^*+a)$$

نکته ۹: در صورتی که در محاسبه مقدار سفارش بهینه به اشتباه یا از روی تخمین به جای یکی از پارامترها مقداری را جایگزین کنیم، مقدار سفارش انجام شده با این پارامتر نابینه خواهد بود و کل هزینه‌ها افزایش خواهد یافت. به طور کلی هنگامی که به جای Q^* ، Q نابینه سفارش دهیم، درصد این افزایش از رابطه زیر محاسبه می‌گردد.

$$\frac{K(Q)}{K(Q^*)} = \frac{1}{2} \left(\frac{Q^*}{Q} + \frac{Q}{Q^*} \right)$$

نکته ۱۰: برای مقایسه تغییرات کل هزینه سالیانه $(K(Q)+CD)$ نمی‌توان مانند هزینه متغیر سالیانه $K(Q)$ رابطه‌ای یافت، تنها می‌توان حدود تغییر آن را از نامساوی زیر به‌دست آورد.

$$1 \leq \frac{K(Q)+CD}{K(Q^*)+CD} < \frac{K(Q)}{K(Q^*)}$$

$$\frac{TRC}{TRC^*} = \frac{1}{2} \left(\frac{Q}{Q^*} + \frac{Q^*}{Q} \right)$$

$$TRC = TRC^*$$

مثال: چنانچه بدانیم مقدار سفارش بهینه 500 واحد است و در سال بعد 2 برابر این مقدار و در سال دوم نصف این مقدار را سفارش دهیم، هزینه‌های نگهداری + سفارش‌دهی چند درصد افزایش می‌یابد.

حل:

$$Q_1 = 2Q^* \Rightarrow \frac{K_1}{K^*} = \frac{1}{2} \left(\frac{1000}{500} + \frac{500}{1000} \right) = 1.25 \Rightarrow \text{25\% افزایش هزینه‌ها}$$

$$Q_2 = \frac{Q^*}{2} \Rightarrow \frac{K_2}{K^*} = \frac{1}{2} \left(\frac{250}{500} + \frac{500}{250} \right) = 1.25 \Rightarrow \text{25\% افزایش هزینه‌ها}$$

در هر دو صورت 25% مجموع هزینه نگهداری و سفارش‌دهی افزایش پیدا خواهد کرد.

نکته ۱۱: در صورتی که یکی از پارامترهای مدل تغییر کند، آن‌گاه مطمئناً مقدار سفارش بهینه (Q^*) و هزینه بهینه متغیرسالیانه ($K(Q^*)$) تغییر می‌کند و نسبت این تغییرات به صورت زیر است.

$$\frac{Q_1^*}{Q_0^*} = \frac{\sqrt{\frac{2D_1 A_1}{h_1}}}{\sqrt{\frac{2D_0 A_0}{h_0}}} = \sqrt{\frac{D_1}{D_0}} \cdot \sqrt{\frac{A_1}{A_0}} \cdot \sqrt{\frac{h_0}{h_1}}$$

$$\frac{K(Q_1^*)}{K(Q_0^*)} = \frac{\sqrt{2D_1 A_1 h_1}}{\sqrt{2D_0 A_0 h_0}} = \sqrt{\frac{D_1}{D_0}} \cdot \sqrt{\frac{A_1}{A_0}} \cdot \sqrt{\frac{h_1}{h_0}}$$

نکته ۱۲: با افزایش پارامترهای مدل مقدار سفارش بهینه و هزینه متغیر سالیانه به صورت زیر تغییر می‌کند.

$K(Q^*)$	Q^*	
افزایش	افزایش	افزایش A
افزایش	افزایش	افزایش D
افزایش	کاهش	افزایش h
افزایش	تغییر نمی‌کند	افزایش i
افزایش	تغییر نمی‌کند	افزایش c
افزایش	تغییر نمی‌کند	افزایش w
تغییر نمی‌کند	تغییر نمی‌کند	افزایش L

نکته ۱۳: اگر h_1 ، هزینه نگهداری هر واحد موجودی در سال بر اساس متوسط موجودی و h_2 هزینه نگهداری هر واحد در سال بر اساس ماکزیمم موجودی باشد. در محاسبه فرمول‌های مدل EOQ به جای مقدار h مقدار $h_1 + 2h_2$ جایگزین می‌گردد، در واقع هزینه نگهداری که بر اساس ماکزیمم موجودی باشد در 2 ضرب شده و با هزینه نگهداری متوسط موجودی جمع می‌گردد و جایگزین h می‌شود.

نکته ۱۴: هزینه نگهداری در سال که بر اساس واحد موجودی بیان نشود، تاثیری در مقدار بهینه سفارش ندارد.

مثال: شرکتی جهت نگهداری مواد اولیه اقدام به اجاره انبار با اجاره بهای ثابتی در سال نموده است، از سال آینده قرار است اجاره

بهای این انبار افزایش یابد. مقدار سفارش اقتصادی این کالا در سال آینده نسبت به شرایط حاضر ...

(۱) کاهش خواهد یافت.

(۲) افزایش خواهد یافت.

(۳) اطلاعات کافی نیست.

(۴) ثابت باقی خواهد ماند.

حل: گزینه ۴ صحیح می باشد.

همان طور که در نکات بالا ذکر گردید، اجاره بهای ثابت سالیانه که بر اساس واحد موجودی بیان نمی شود، تاثیری در مقدار سفارش اقتصادی ندارد.

مثال: در یک مدل مقدار سفارش اقتصادی بدون کمیبود موجودی، کالایی هر ۲ ماه یک بار سفارش داده می شود و هزینه ثابت هر بار سفارش

50 000 تومان است. هزینه نگهداری سالیانه در حالت بهینه چند تومان است؟

- (۱) 100000 (۲) 200000 (۳) 300000 (۴) 600000

حل: گزینه ۳ صحیح می باشد.

$$NQ^* = \frac{DA}{Q^*} \quad NA = \frac{1}{T}A$$

$$T = \text{سال} = \frac{1}{6} = 2 \text{ ماه}$$

$$A = 50000$$

در حالت بهینه هزینه نگهداری با هزینه سفارش دهی برابر است.

$$\text{هزینه سفارش دهی بهینه} = \text{هزینه نگهداری بهینه} = \frac{A}{T} = \frac{50000}{\frac{1}{6}} = 300000$$

مثال: در یک مدل ساده قطعی اگر مقدار هر بار سفارش 50 درصد بیشتر یا 50 درصد کمتر از مقدار اقتصادی سفارش باشد به ترتیب هزینه متغیر چقدر افزایش خواهد کرد؟

- (۱) 50% و 50% (۲) 25% و 50% (۳) 250% و 25% (۴) 8% و 25%

حل: گزینه ۴ صحیح می باشد.

$$Q_1 = Q^* + \frac{Q^*}{2} = \frac{3Q^*}{2} \Rightarrow \frac{K_1}{K^*} = \frac{1}{2} \left(\frac{Q_1}{Q^*} + \frac{Q^*}{Q_1} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} + \frac{2}{3} \right) = 1.08 \rightarrow \text{افزایش } 8\%$$

$$Q_2 = Q^* - \frac{Q^*}{2} = \frac{Q^*}{2} \Rightarrow \frac{K_2}{K^*} = \frac{1}{2} \left(\frac{Q_2}{Q^*} + \frac{Q^*}{Q_2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 2 \right) = 1.25 \rightarrow \text{افزایش } 25\%$$

مثال: مصرف سالیانه مواد اولیه در شرکت تولیدی 2000 تن و هزینه سفارش دهی آن برابر 2000 تومان قیمت هر تن از این مواد 100 تومان و هزینه نگهداری هر تن 0.5 تومان در ماه و هزینه بیمه آتش سوزی و ... برابر 2 درصد متوسط ارزش موجودی ها در سال می باشد کل هزینه های سفارش دهی این کالا در حالت اقتصادی برابر است با:

- (۱) 2236 (۲) 4000 تومان (۳) 8000 تومان (۴) 3464 تومان

حل: گزینه ۲ صحیح می باشد.

$$D = 2000, A = 2000, C = 100, i = 0.02$$

$$\left. \begin{array}{l} h_1 = 0.5 \quad \frac{\text{زمان}}{\text{ماه.تن}} = 0.5 \times 12 \\ \frac{\text{تومان}}{\text{سال تن}} = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow h = h_1 + h_2 = 8$$

$$h_2 = ic = 0.02 \times 100 = 2$$

$$\text{هزینه سفارش دهی بهینه} = \frac{K(Q^*)}{2} = \frac{\sqrt{2DAh}}{2} = \frac{\sqrt{2 \times 2000 \times 2000 \times 8}}{2} = 4000$$

مثال: برای مدل ساده موجودی (تقاضا ثابت و کمبود موجودی مجاز نیست) اگر هزینه نگهداری محصول چهار برابر شود آن‌گاه مقدار سفارش اقتصادی EOQ:

- (۱) نصف خواهد شد. (۲) دوبرابر خواهد شد. (۳) تغییر نخواهد کرد. (۴) هیچ‌کدام

حل: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$h_2 = 4h_1$$

$$\frac{Q_2^*}{Q_1^*} = \frac{\sqrt{\frac{2DA}{h_2}}}{\sqrt{\frac{2DA}{h_1}}} = \sqrt{\frac{h_1}{h_2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

مثال: شرکتی برای یک نوع محصول هر بار 1500 واحد سفارش می‌دهد که این مقدار سفارش شرکت را برای شش ماه کفایت می‌نماید. هزینه خرید هر واحد این محصول 10 تومان و هزینه هر بار سفارش 25 تومان می‌باشد. اگر درصد هزینه نگهداری سالیانه این محصول 25 درصد در سال و زمان انتظار تحویل کالا (Lead Time) برابر 14 هفته باشد. هزینه سیستم کنترل موجودی جاری شرکت بدون توجه به هزینه خرید برابر است با:

- (۱) 1235 (۲) 433 (۳) 1925 (۴) 613

حل: گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$Q = 1500, T = 6 = \frac{1}{2} \text{ سال} \Rightarrow D = \frac{Q}{T} = 3000$$

$$C = 10, A = 25, i = 0.25, L = 14 \text{ هفته}$$

$$h = i \cdot cs = 0.25 \times 10 = 2.5$$

$$K(Q) = \frac{DA}{Q} + \frac{hQ}{2} = \frac{3000 \times 25}{1500} + 2.5 \times \frac{1500}{2} = 50 + 1875 = 1925$$

مثال: در مثال فوق اگر سفارش این محصول به صورت بهینه انجام گیرد مقدار صرفه‌جویی هزینه‌ها در سال برابر است با:

- (۱) 1925 (۲) 1313 (۳) 613 (۴) 547

حل: گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$K(Q^*) = \sqrt{2DAh} = \sqrt{2 \times 3000 \times 25 \times 2.5} = 612$$

$$\Rightarrow K - K^* = 1925 - 612 = 1313$$

مثال: در مثال فوق نقطه سفارش مجدد بر حسب موجودی در دست برابر است با (سال 52 هفته در نظر بگیرید):

- (۱) 43 واحد (۲) 67 واحد (۳) 73 واحد (۴) 47 واحد

حل: گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$Q = \sqrt{\frac{2DA}{h}} = \sqrt{\frac{2 \times 3000 \times 25}{2.5}} = 245$$

$$T = \frac{Q}{D} = \frac{245}{3000} = 0.082$$

$$\Rightarrow r_h^* = D \cdot L - mQ^* = 3000 \times \frac{14}{52} - \left[\frac{14}{0.082} \right] \cdot 245 = 73$$

۳- مدل های کمبود

۳-۱- مدل کمبود پس افت

فرضیات این مدل مانند مدل EOQ است با این تفاوت که کمبود به صورت سفارشات عقب افتاده جایز است هدف مدل تعیین مقدار سفارش بهینه (Q^*) و مقدار کمبود بهینه در هر دوره (b^*) همین طور r_1^*, r_2^* همراه با کمینه کردن هزینه ها می باشد.

۳-۱-۱- نحوه محاسبه روابط مقدار سفارش اقتصادی

در این مدل $\pi, \hat{\pi}$ برابر مقدار ثابتی می باشند و بقیه پارامترها مانند مدل EOQ است.

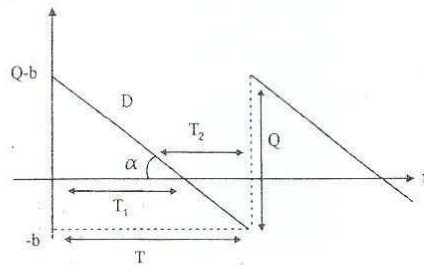
T_2 : مدت زمانی از یک دوره که کمبود رخ می دهد.

T_1 : مدت زمان یک دوره که در حالت کمبود نیستیم.

b : مقدار هر بار کمبود (مقدار سفارش ناقص)

T_1 و T_2 از یک دوره کمبود داریم
 T_2 و T_1 از یک دوره کمبود داریم
 $T = T_1 + T_2$

موجودی خالص



π هزینه ثابت کمبود هر واحد

$\hat{\pi}$ هزینه کمبود هر واحد در سال

$$D = \tan \alpha = \frac{Q-b}{T_1} \Rightarrow T_1 = \frac{Q-b}{D}$$

$$T_2 = \frac{b}{D}$$

$$\Rightarrow T = T_1 + T_2 = \frac{Q}{D}$$

وابسته به زمان
 مستقل از زمان

هزینه خرید + هزینه کمبود + هزینه نگهداری + هزینه سفارش دهی = هزینه یک دوره

$$= A + h \frac{(Q-b)T_1}{2} + \hat{\pi} \frac{bT_2}{2} + \pi b + cD$$

$$A + h \frac{Q-b}{2} T_1 + \hat{\pi} \frac{b}{2} T_2 + \pi b + cD$$

$$\text{متوسط مقدار دوره ها در سال } n = \frac{D}{Q} = \frac{1}{T}$$

$$K(Q, b) = n \text{ (هزینه یک دوره)} = \frac{DA}{Q} + \frac{h(Q-b)^2}{2Q} + \frac{\hat{\pi} b^2}{2Q} + \pi \frac{D}{Q} b + cD \xrightarrow{b=0} TRC_{Q_w}$$

برای به دست آوردن Q^*, b^* باید از تابع هزینه متغیر $K(Q, b)$ نسبت به Q و b مشتق گرفته و برابر صفر قرار دهیم و معادلات مربوطه را حل کنیم.

$$K(Q, b) = \frac{DA}{Q} + \frac{h(Q-b)^2}{2Q} + \frac{\hat{\pi}b^2}{2Q} + \pi \frac{D}{Q}b$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\delta K(Q, b)}{\delta b} = 0 \\ \frac{\delta K(Q, b)}{\delta Q} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} Q^* = \sqrt{\frac{2DA}{h} \frac{(\pi D)^2}{h(\hat{\pi}+h)}} \sqrt{\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}} \\ b^* = \frac{\sqrt{2DAh \left(1 + \frac{h}{\hat{\pi}}\right) - \frac{h}{\hat{\pi}} (\pi D)^2 - \pi D}}{\hat{\pi}+h} = \frac{hQ^* - \pi D}{\hat{\pi}+h} \end{cases}$$

از تابع هزینه به سادگی می توان روابط زیر را به دست آورد:

متوسط موجودی در یکسال $= \frac{(Q-b)^2}{2Q}$ $\rightarrow N \frac{(a-b)}{2} T_1$

$$\frac{dL}{dQ} \rightarrow N \frac{(a-b)}{2} T_1 = \frac{D}{Q} \frac{(a-b)}{2} \frac{(a-b)}{D} = \frac{(a-b)^2}{2Q}$$

متوسط کمبود در سال $= \frac{b^2}{2Q}$ $\rightarrow N \frac{b}{2} T_2$

$$\frac{dL}{dQ} \rightarrow N \frac{b}{2} T_2 = \frac{D}{Q} \frac{b}{2} \frac{b}{D} = \frac{b^2}{2Q}$$

تعداد کمبود در سال $= \frac{D}{Q}b$ $\rightarrow Nb$

$$\frac{dL}{dQ} \rightarrow Nb = \frac{D}{Q}b$$

۳-۱-۲- الگوریتم حل مدل

الگوریتم حل مسائل کمبود پس افت با توجه به مقایسه دو هزینه $\sqrt{2DAh}$ ، πD و به صورت زیر می باشد:

اگر $\pi D \geq \sqrt{2DAh}$ باشد به مدل EOQ بر می گردیم یعنی به سیستم موجودی بدون کمبود که در آن

$$Q = Q_0, K(Q^*) = K(Q_0), b^* = 0$$

اگر $\pi D < \sqrt{2DAh}$ باشد دو حالت زیر وجود دارد:

- اگر $\hat{\pi} = 0$ باشد در این حالت سیستم موجودی وجود نخواهد داشت.

- اگر $\hat{\pi} > 0$ باشد به روابطی خواهیم رسید که در قسمت قبل به دست آوردیم یعنی:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2DA}{h} \frac{(\pi D)^2}{h(\hat{\pi}+h)}} \sqrt{\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}}$$

$$b^* = \frac{hQ^* - \pi D}{\hat{\pi}+h}$$

۳-۱-۳- حالت خاص مدل کمبود پس افت

مدل کمبود پس افت حالت خاصی دارد که مسایل موجودی عموماً بر اساس این حالت مورد بررسی و مقایسه قرار می گیرند. در این

حالت $\pi = 0$ ، $\hat{\pi} > 0$ است و بنابراین حالت خاصی از قسمت دوم $\pi D < \sqrt{2DAh}$ است. روابط زیر در این حالت برقرار است.

$$* Q^* = \sqrt{\frac{2DA}{h} \frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}} = Q_0 \sqrt{\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}}$$

$$* b^* = \frac{hQ^*}{\hat{\pi}+h} = \frac{\sqrt{2DAh}}{\sqrt{\hat{\pi}(\hat{\pi}+h)}} = \frac{hQ_0}{\sqrt{\hat{\pi}(\hat{\pi}+h)}}$$

$$* I_{max}^* = Q^* - b^* = \sqrt{\frac{2DA}{h} \frac{\hat{\pi}}{\hat{\pi}+h}} = Q_0 \sqrt{\frac{\hat{\pi}}{\hat{\pi}+h}}$$

$$* K(Q^*) = \sqrt{2DAh} \sqrt{\frac{\hat{\pi}}{\hat{\pi}+h}} = h I_{max}^* = \hat{\pi} b^*$$

$$* I_{max}^* = Q_0 \sqrt{\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}} - \frac{hQ_0}{\sqrt{\hat{\pi}(\hat{\pi}+h)}}$$

$$= Q_0 \left(\sqrt{\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}} - \frac{h}{\sqrt{\hat{\pi}(\hat{\pi}+h)}} \right)$$

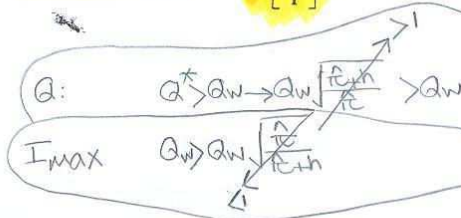
$$= Q_0 \sqrt{\frac{\hat{\pi}}{\hat{\pi}+h}}$$

$$Q^* = I_{max}^* \left[\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}} \right]$$

روابط r^* و r_h^* مانند مدل EOQ است تنها مقدار b^* از آن کسر می‌شود.

$$r^* = DL - b^*$$

$$r_h^* = DL - mQ^* - b^* , \quad m = \left[\frac{L}{T} \right]$$



نکته: مقایسه مدل کمبود پس‌افت (حالت خاص) با مدل EOQ

- مقدار سفارش بهینه در مدل پس‌افت بیشتر از مدل EOQ است.

- حداکثر موجودی در مدل EOQ بیشتر از مدل پس‌افت است.

- هزینه‌های متغیر در مدل EOQ بیشتر از مدل پس‌افت است.

مثال: تقاضای سالانه قطعه‌ای 8000 واحد، هزینه سفارش 30 واحد پولی، هزینه نگهداری سالانه هر قطعه برابر 3 واحد پولی می‌باشد.

اگر کمبود مجاز باشد و هزینه هر قطعه‌ای که با تاخیر تحویل می‌شود برابر 1 واحد پولی در سال محاسبه شود، معین کنید

هزینه متغیر سالانه این قطعه (هزینه نگهداری + هزینه سفارش‌دهی + هزینه کمبود) به کدام مقدار زیر نزدیک‌تر است؟

- (۱) 600 واحد پولی (۲) 800 واحد پولی (۳) 900 واحد پولی (۴) 700 واحد پولی

حل: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$D=8000 , \quad A=30 , \quad h=3 , \quad \pi=1$$

$$K(Q^*) = \sqrt{2DAh} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{\pi+h}} = \sqrt{2 \times 8000 \times 30 \times 3} \cdot \sqrt{\frac{1}{1+3}} = 600$$

مثال: مدل مقدار سفارش اقتصادی (EOQ) را در نظر بگیرید. حال فرض کنید کمبود کالا مجاز و قابل‌تجزیه باشد و هزینه کمبود

تنها به صورت متغیر (وابسته به زمان) محاسبه شود. در این صورت به ترتیب مقدار بهینه (سفارش اقتصادی)، حداکثر فضای

انبار موردنیاز، متوسط هزینه کل سالانه) نسبت به زمانی که کمبود مجاز نباشد:

- (۱) به ترتیب (بیشتر، کمتر، کمتر) است. (۲) به ترتیب (کمتر، بیشتر، بیشتر) است.
 (۳) به ترتیب (بیشتر، بیشتر، کمتر) است. (۴) به ترتیب (بیشتر، کمتر، بیشتر) است.

حل: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

مثال: مصرف سالیانه مواد اولیه در شرکت تولیدی 2000 تن و هزینه سفارش‌دهی آن برابر 2000 تومان و قیمت هر تن از این مواد

100 تومان و هزینه نگهداری هر تن 0.5 تومان در ماه و هزینه بیمه و آتش‌سوزی و ... برابر 2 درصد متوسط موجودی‌ها در سال

می‌باشد، اگر هزینه کمبود هر تن از این مواد 4 تومان باشد مقدار سفارش اقتصادی این کالا برابر است با:

- (۱) 1000 تن (۲) 2000 تن (۳) $1000\sqrt{3}$ تن (۴) $2000\sqrt{3}$ تن

حل: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$D=2000 , \quad A=2000 , \quad C=100 , \quad i=0.02 , \quad \pi=4$$

$$h_1 = 0.5 \frac{\text{تومان}}{\text{تن.ماه}} = 0.5 \times 12 \frac{\text{تومان}}{\text{سال.ماه}} = 6 \frac{\text{تومان}}{\text{سال.ماه}}$$

$$h_2 = ic = 0.02 \times 100 = 2$$

$$\Rightarrow h = h_1 + h_2 = 8$$

$$\sqrt{2DAh} = \sqrt{2 \times 2000 \times 2000 \times 8} = 8000 \Rightarrow \pi D = \sqrt{2DAh} \Rightarrow \text{مدل EOQ}$$

$$\pi D = 8000$$

$$\Rightarrow Q^* = Q_0 = \sqrt{\frac{2DA}{h}} = \sqrt{\frac{2 \times 2000 \times 200}{8}} = 1000$$



۳-۲. مدل کمبود در حالت فروش از دست رفته

فرضیات این مدل مانند مدل EOQ است با این تفاوت که کمبود جایز است و جبران نمی‌شود.

هدف مدل تعیین مقدار اقتصادی سفارش (Q^*) و فاصله زمانی بهینه کمبود در هر دوره (\hat{T}^*) و نقطه سفارش مجدد (r^*, r_h^*) با

کمینه کردن هزینه‌هاست.

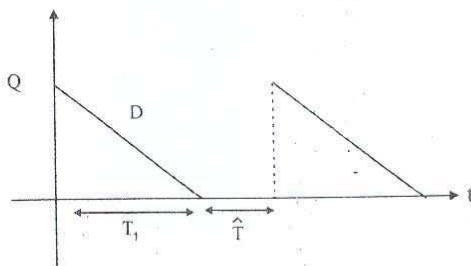
۳-۲-۱. نحوه محاسبه روابط مقدار سفارش اقتصادی

در این مدل π برابر مقدار ثابتی می‌باشند و سایر پارامترها مانند مدل EOQ است.

\hat{T} : مدت زمانی از یک دوره که دارای کمبود هستیم.

T_1 : مدت زمانی از یک دوره که دارای کمبود نیستیم.

موجودی خالص



$$\left. \begin{aligned} T &= T_1 + \hat{T} \\ T_1 &= \frac{Q}{D} \end{aligned} \right\} \rightarrow T = \frac{Q}{D} + \hat{T} = \frac{Q + D\hat{T}}{D}$$

$$\text{متوسط مقدار دوره‌ها در سال} = \frac{1}{T} = \frac{D}{Q + D\hat{T}}$$

$$K(Q, \hat{T}) = \frac{DA}{Q + D\hat{T}} + \frac{hQ^2}{2(Q + D\hat{T})} + \frac{\pi D^2 \hat{T}}{Q + D\hat{T}} + CQ \frac{D}{Q + D\hat{T}}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، در این مدل هزینه خرید هم جزو هزینه‌های متغیر است، زیرا به برخی از تقاضاها اصلاً جواب نخواهیم داد.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\delta K(Q, \hat{T})}{\delta Q} &= 0 \\ \frac{\delta K(Q, \hat{T})}{\delta \hat{T}} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow Q = \frac{\pi D}{h} \pm \sqrt{\left(\frac{\pi D}{h}\right)^2 - \frac{2DA}{h}}$$

۳-۲-۲. الگوریتم حل مدل

الگوریتم حل مسایل در حالت فروش از دسته رفته مانند الگوریتم حل مسایل کمبود پس افت با مقایسه $\sqrt{2DAh}$ و πD با هم

شکل می‌گیرد و به صورت زیر است:

اگر $\pi D \geq \sqrt{2DAh}$ باشد به مدل EOQ بر می‌گردیم یعنی به سیستم موجودی بدون کمبود و بنابراین داریم:

$$Q^* = Q_0, \quad K(Q^*) = K(Q_0), \quad \hat{T}^* = 0$$

$$\hat{T}^* = \infty$$

اگر $\pi D < \sqrt{2DAh}$ باشد سیستم موجودی وجود نخواهد داشت یعنی:

مثال: مدل مقدار سفارش اقتصادی (EOQ) را در نظر بگیرید. فرض کنید کمبود کالا مجاز اولی قابل جبران نباشد در این صورت به

ترتیب مقدار بهینه (سفارش اقتصادی، حداکثر فضای انبار، متوسط هزینه کل سالانه) نسبت به زمانی که کمبود مجاز نباشد:

(۱) به ترتیب (بیشتر، کمتر، کمتر) است.

(۲) به ترتیب (کمتر، بیشتر، بیشتر) است.

(۳) به ترتیب (بیشتر، کمتر، بیشتر) است.

(۴) در صورت داشتن سیستم موجودی، برابر زمانی خواهد بود که کمبود مجاز نباشد.

حل: گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

مثال: کمبود کالایی مجاز و قابل جبران است، با افزایش هزینه‌های کمبود، مقدار سفارش اقتصادی این کالا:

(۱) افزایش می‌یابد.

(۲) ثابت باقی می‌ماند.

(۳) کاهش می‌یابد.

(۴) قابل پیش بینی نیست.

حل: گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$Q^* = \sqrt{\frac{2DA}{h}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{\pi} + h}{\hat{\pi}}} = \sqrt{\frac{2DA}{h}} \cdot \sqrt{1 + \frac{h}{\hat{\pi}}}$$

در صورتی که هزینه کمبود کاسته شود مقدار $\sqrt{1 + \frac{h}{\hat{\pi}}}$ کاهش یافته و بنابراین Q^* کاهش خواهد یافت.

مثال: یک قطعه خریداری شده دارای نرخ تقاضای سالیانه 4000 واحد است. هزینه ثابت سفارش 60 تومان بوده و هزینه هر واحد 4

تومان است. نرخ هزینه نگهداری موجودی سالیانه 0.15 است. کمبود موجودی مجاز بوده و به صورت سفارشات تاخیر شده در

می‌آیند. هزینه سالیانه هر واحدی که به تاخیر می‌افتد 1 تومان است، اندازه انباشته اقتصادی چند واحد است؟

(۱) 1081

(۲) 1131

(۳) 1252

(۴) 1304

حل: گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$D = 4000, \quad A = 60, \quad C = 4, \quad i = 0.15, \quad \hat{\pi} = 1$$

$$h = i \cdot c = 0.15 \times 4 = 0.6$$

$$Q^* = \sqrt{\frac{2DA}{h}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{\pi} + h}{\hat{\pi}}} = \sqrt{\frac{2 \times 4000 \times 60}{0.6}} \times \frac{1.6}{1} = 1131$$

مثال: اگر تقاضای سالیانه محصولی R، هزینه نگهداری سالیانه هر واحد H هزینه هر بار سفارش دهی C باشد و ضمناً کمبود مجاز و هزینه سالیانه هر واحد کمبود برابر K باشد، اگر بخواهیم مقدار سفارش اقتصادی 2 برابر حداکثر موجودی باشد، چه رابطه‌ای باید بین هزینه نگهداری سالیانه (H) و هزینه کمبود سالیانه (K) برقرار باشد؟

H=2K (۴) H=3/2 K (۳) H=K (۲) H=1/2 K (۱)

حل: گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$\left. \begin{aligned} Q &= Q_{\omega} \times \sqrt{\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}} \\ I_{\max} &= Q_{\omega} \times \sqrt{\frac{\hat{\pi}}{\hat{\pi}+h}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow Q = \left(\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}} \right) \cdot I_{\max}$$

می‌خواهیم $Q = 2I_{\max}$ باشد بنابراین

$$\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}} = 2 \Rightarrow \hat{\pi}+h = 2\hat{\pi} \Rightarrow h = \hat{\pi}$$

یا با توجه به صورت سوال $H=K$

مثال: در یک سیستم موجودی با نرخ ثابت، و در حالتی که کمبود موجودی مجاز نمی‌باشد، میزان سفارش اقتصادی کالایی برابر 2814.2 تن و نقطه سفارش مجدد (بر مبنای موجودی در دست و سفارش در راه) برابر 6346.15 تن محاسبه شده است. چنانچه کمبود مجاز باشد و هزینه مربوط بر مبنای هزینه کمبود واحد کالا در سال در محاسبات منظور شود، میزان سفارش اقتصادی 3476.8 تن محاسبه می‌شود. برای این حالت نقطه سفارش مجدد (بر مبنای موجودی در دست و سفارش در راه) را محاسبه و مشخص کنید کدام پاسخ به جواب نزدیک‌تر است؟

6346 (۴) 6150 (۳) 5650 (۲) 5150 (۱)

حل: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

برای حالت EOQ:

$$Q_{\omega}^* = 2814.2, \quad r^* = 6346.15$$

برای حالت کمبود:

$$Q^*_{\text{کمبود}} = 3476.8, \quad r^* = ?$$

برای به دست آوردن مقدار b^* دو راه وجود دارد:

راه اول:

$$Q^*_{\text{کمبود}} = Q^*_{\text{EOQ}} \sqrt{\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}} \Rightarrow \sqrt{\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}} = \frac{3476.8}{2814.2} \Rightarrow 1 + \frac{h}{\hat{\pi}} = 1.526$$

$$\Rightarrow \frac{h}{\hat{\pi}} = 0.526$$

$$b^* = \frac{h Q_{\omega}}{\sqrt{\hat{\pi}(\hat{\pi}+h)}} = \frac{h}{\hat{\pi}} \cdot \frac{Q_{\omega}}{\sqrt{\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}}} = 0.526 \times \frac{2814.2}{1.235} = 1198$$

راه دوم:

$$Q^*_{\text{کمبود}} = Q^*_{\text{EOQ}} \sqrt{\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}} \Rightarrow \sqrt{\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}} = \frac{3476.8}{2814.2} = 1.235$$

$$I_{\max}^{\text{کمبود}} = Q_{\omega} \sqrt{\frac{\hat{\pi}}{\hat{\pi} + h}} = \frac{2814.2}{1.235} = 2278.7$$

$$b^* = Q^* - I_{\max}^{\text{کمبود}} = 3476.8 - 2278.7 = 1198.1$$

مقدار کمبود r^* به صورت زیر به دست می آید.

$$r^* = r_{\text{EOQ}}^* - b^* = 6346.15 - 1198 = 5148.15$$

که به گزینه ۱ یعنی 5150 نزدیکتر است.

$b^* = Q_{\omega}^* - I_{\max}^{\text{کمبود}}$
رابطه $r^* = r_{\text{EOQ}}^* - b^*$ را در نظر بگیرید

۴- مدل تولیدی ساده یا مدل مقدار تولید اقتصادی یا مدل EOQ

فرضیات مدل مانند مدل EOQ است با این تفاوت که سفارش یکجا دریافت نمی‌شود بلکه با نرخ ثابت P و به تدریج دریافت می‌شود.

هدف مدل تعیین مقدار هر بار تولید اقتصادی (Q*) و نقطه سفارش مجدد (r*, r**) با کمینه کردن هزینه‌ها است.

موجودی در مدل EOQ به نقطه وار (P) شود و در مدل EPQ به نقطه وار (P) شود.

۴-۱- نحوه محاسبه روابط مدل

پارامترهای مدل EOQ است با تغییرات زیر:

A: هزینه هر بار آماده‌سازی

C: هزینه متغیر با قیمت تمام شده هر واحد

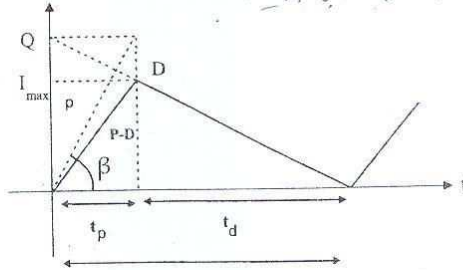
P: نرخ دریافت سفارش یا نرخ تولید

بسته از هم نیستند
در حالت تولیدی است
بسته از هم نیستند
در حالت تولیدی است

$$T = T_p + T_d$$

موجودی خالص

$P \geq D \rightarrow$ کمبود جزئی نیست



نکته: همواره $P \geq D$ است زیرا همان‌طور که از شکل مشخص است اگر $P < D$ باشد به کمبود بر می‌خوریم.

$$\begin{aligned} \tan \beta = P = \frac{Q}{t_p} &\Rightarrow t_p = \frac{Q}{P} \\ T = \frac{Q}{D} &\Rightarrow t_d = T - t_p = \frac{Q}{D} - \frac{Q}{P} = \frac{Q}{D} \left(1 - \frac{D}{P}\right) = T \left(1 - \frac{D}{P}\right) \end{aligned}$$

$$I_{\max} = (P - D)t_p = Dt_d = Q \left(1 - \frac{D}{P}\right)$$

$$\bar{I} = \frac{I_{\max}}{2} = \frac{Q}{2} \left(1 - \frac{D}{P}\right)$$

$$\text{متوسط تعداد دوره‌ها در سال} = \frac{D}{Q} = \frac{1}{T}$$

$$\text{کل هزینه سالیانه} = \frac{DA}{Q} + h \frac{Q}{2} \left(1 - \frac{D}{P}\right) + CD$$

$$\frac{dK(Q)}{dQ} = 0 \Rightarrow Q^* = \sqrt{\frac{2DA}{h \left(1 - \frac{D}{P}\right)}} = \frac{Q_{\infty}}{\sqrt{1 - \frac{D}{P}}}$$

$$I_{\max} = Q^* \left(1 - \frac{D}{P}\right) = Q_{\omega} \sqrt{1 - \frac{D}{P}}$$

$$\bar{I} = \frac{Q^*}{2} \left(1 - \frac{D}{P}\right) = \frac{Q_{\omega}}{2} \sqrt{1 - \frac{D}{P}}$$

$$K(Q^*) = \sqrt{2DAh \left(1 - \frac{D}{P}\right)}$$

$$\text{کل هزینه بهینه سالیانه} = K(Q^*) + CD = \sqrt{2DAh \left(1 - \frac{D}{P}\right)} + CD$$

نقطه سفارش مجدد بر حسب موجودی در دست در مدل EPQ با توجه به این که لحظه صدور سفارش در قسمت صعودی نمودار یا نزولی آن بیافتد دو حالت مختلف دارد و این دو حالت از مقایسه بین $L' = L - mT$ و t_d (مدت زمانی که فقط در حال مصرف هستیم) به دست می آید.

$$r^* = D.L$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r_h^* = DL' = D(L - mT) = DL - mQ^* \quad \text{اگر } L' = L - mT < t_d \\ r_h^* = (P - D)(T - L') = DL - PL + (m + 1) \left(\frac{P}{D} - 1\right) Q^* \quad \text{اگر } L' = L - mT \geq t_d \end{array} \right.$$

۴-۲ نکات مدل EPQ

نکته ۱: مقایسه مدل EPQ و مدل EOQ

- مقدار سفارش بهینه در مدل EPQ بیشتر از مدل EOQ است.

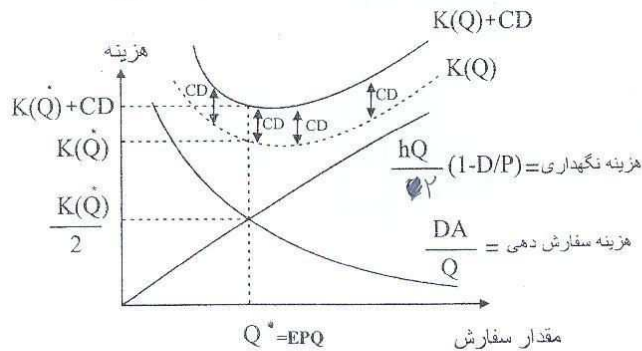
- حداکثر موجودی در مدل EOQ بیشتر از مدل EPQ است.

- هزینه بهینه سالیانه در مدل EOQ بیشتر از مدل EPQ است.

نکته ۲: نمودار موقعیت موجودی مدل EPQ کاملاً مشابه مدل EOQ و به همان شکل است.

$$D.L \leq y(t) \leq DL + Q^*$$

نکته ۳: نمودار هزینه‌ها بر حسب مقدار سفارش در مدل EPQ مانند مدل EOQ و به شکل زیر است:



نکته ۴: محل تلاقی منحنی هزینه نگهداری و هزینه سفارش‌دهی سالیانه نقطه بهینه است.

$$K(Q^*) = \frac{2DA}{Q^*} = hQ^* \left(1 - \frac{D}{P}\right) = 2nA = \frac{2A}{T^*} \sqrt{DAh \left(1 - \frac{D}{P}\right)} = hI_{\max}^*$$

نکته ۵:

اگر $Q > EPQ$ باشد آن‌گاه هزینه نگهداری < هزینه سفارش‌دهی

اگر $Q = EPQ$ باشد آن‌گاه هزینه نگهداری = هزینه سفارش‌دهی

اگر $Q < EPQ$ باشد آن‌گاه هزینه نگهداری > هزینه سفارش‌دهی

نکته ۶: شیب منحنی هزینه‌ها در نقطه بهینه برای هزینه نگهداری و هزینه سفارش‌دهی به ترتیب برابر $\frac{h}{2} \left(1 - \frac{D}{P}\right)$ و

$$-\frac{h}{2} \left(1 - \frac{D}{P}\right)$$

است.

نکته ۷: در صورتی که به جای مقدار Q^* مقدار نابهبینه Q سفارش دهیم، درصد افزایش هزینه متغیر میانه از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\frac{K(Q)}{K(Q^*)} = \frac{1}{2} \left(\frac{Q}{Q^*} + \frac{Q^*}{Q} \right)$$

نکته ۸: مانند مدل EOQ شیب منحنی هزینه‌ها در سمت راست نقطه بهینه نسبت به سمت چپ آن ملایم‌تر است یعنی:

$$K(Q^* - a) > K(Q^* + a)$$

نکته ۹: در صورتی که یکی از پارامترهای مدل تغییر کند، برای مقایسه و یافتن مقدار سفارش بهینه و هزینه بهینه متغیر سالیانه

باید از روابط زیر استفاده کرد:

$$\frac{Q_1^*}{Q_0^*} = \frac{\sqrt{\frac{2D_1A_1}{h_1 \left(1 - \frac{D_1}{P_1}\right)}}}{\sqrt{\frac{2D_0A_0}{h_0 \left(1 - \frac{D_0}{P_0}\right)}}} = \sqrt{\frac{A_1}{A_0}} \cdot \sqrt{\frac{h_0}{h_1}} \cdot \sqrt{\frac{D_1 \left(1 - \frac{D_0}{P_0}\right)}{D_0 \left(1 - \frac{D_1}{P_1}\right)}}$$

$$\frac{K(Q_1^*)}{K(Q_0^*)} = \frac{\sqrt{\frac{2D_1A_1h_1 \left(1 - \frac{D_1}{P_1}\right)}{2D_0A_0h_0 \left(1 - \frac{D_0}{P_0}\right)}}}{\sqrt{\frac{2D_0A_0h_0 \left(1 - \frac{D_0}{P_0}\right)}{2D_1A_1h_1 \left(1 - \frac{D_1}{P_1}\right)}}} = \sqrt{\frac{h_1}{h_0}} \cdot \sqrt{\frac{A_1}{A_0}} \cdot \sqrt{\frac{D_1 \left(1 - \frac{D_1}{P_1}\right)}{D_0 \left(1 - \frac{D_0}{P_0}\right)}}$$

نکته ۱۰: با افزایش پارامترهای مدل مقدار سفارش بهینه و هزینه بهینه سالیانه به صورت زیر تغییر می‌کند.

$K(Q^*)$	Q^*	
افزایش	افزایش	افزایش A
تغییرات مشخص نیست	افزایش	افزایش D
افزایش	کاهش	افزایش h
افزایش	تغییری نمی‌کند	افزایش i
افزایش	تغییری نمی‌کند	افزایش c
افزایش	تغییری نمی‌کند	افزایش w
افزایش	تغییری نمی‌کند	افزایش p
تغییری نمی‌کند	تغییری نمی‌کند	افزایش L

نکته ۱۰ ≤ استوار دارد

نکته: مقایسه بین مدل EOQ، EPQ و مدل EOQ در حالت کمیود پس افت (حالت خاص)

مدل EPQ	مدل EOQ	مدل EOQ در حالت کمیود پس افت	
$Q_{\omega} \sqrt{1 - \frac{D}{P}}$	Q_{ω}	$Q_{\omega} \sqrt{\frac{\hat{\pi} + h}{\hat{\pi}}}$	مقدار سفارش بهینه (Q^*)
$Q_{\omega} \sqrt{1 - \frac{D}{P}}$	Q_{ω}	$Q_{\omega} \sqrt{\frac{\hat{\pi}}{\hat{\pi} + h}}$	حداکثر موجودی بهینه (I_{max})
$\frac{Q_{\omega} \sqrt{1 - \frac{D}{P}}}{2}$	$\frac{Q_{\omega}}{2}$	$\frac{(Q^* - b^*)}{2Q^*}$	متوسط موجودی بهینه (\bar{I})
$h\bar{I}$	$h\bar{I}$	$h\bar{I}$	هزینه نگهداری
$\sqrt{2DAh} \left(1 - \frac{D}{P}\right)$	$\sqrt{2DAh}$	$\sqrt{2DAh} \sqrt{\frac{\hat{\pi}}{\hat{\pi} + h}}$	کل هزینه متغیر سالیانه $K(Q^*)$

مثال: مدیر یک سیستم موجودی اغلب با این تصمیم روبرو است که آیا قطعه مورد لزوم را بخرد یا در کارخانه تولید نماید. فرض کنید که اگر قطعه از خارج خریداری شود، هر واحد 25 تومان تمام می‌شود در حالی که اگر در کارخانه تولید شود، هر واحد 22 تومان خواهد بود، بهر حال اگر قطعه خریداری شود، هزینه هر بار سفارش 5 تومان است، در حالی که اگر قطعه در کارخانه تولید شود، هزینه هر بار راه‌اندازی ماشین‌آلات 50 تومان است. ماشین‌آلات تنها می‌توانند در سال 10000 قطعه تولید نمایند، تقاضای سالیانه این قطعه 2500 واحد بوده و نرخ نگهداری قطعه به‌طور موجودی 10% است.

با توجه اطلاعات فوق به سوالات زیر جواب دهید:

الف) متوسط هزینه سالیانه بهینه برای سیاست خرید عبارت است از:

- ۱) 62500 تومان ۲) 62750 تومان ۳) 60000 تومان ۴) 63550 تومان

حل: گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

مدل خرید: $C=25$, $A=5$, $D=2500$, $i=0.1$

$$h = i.c = 0.1 \times 25 = 2.5$$

$$\text{کل هزینه بهینه سالیانه} = \sqrt{2DAh} + CD = \sqrt{2 \times 2500 \times 5 \times 2.5} + 25 \times 2500 = 62750$$

(ب) متوسط هزینه سالیانه بهینه برای سیاست تولید عبارت است از (اعداد روند شده است).

- (۱) 55000 تومان (۲) 55742 تومان (۳) 55642 تومان (۴) 65324 تومان

حل: گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$C=22, P=10000, D=2500, A=50, i=0.1$$

$$h = i.c = 0.1 \times 22 = 2.2$$

$$\text{کل هزینه بهینه سالیانه} = \sqrt{2DAh \left(1 - \frac{D}{P}\right)} + CD = \sqrt{2 \times 2500 \times 50 \times 2.2 \left(1 - \frac{2500}{10000}\right)} + 22 \times 2500 = 55642$$

(ج) اندازه انباشته بهینه برای سیاست خرید عبارت است از:

- (۱) 100 واحد (۲) 250 واحد (۳) 200 واحد (۴) 300 واحد

حل: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$Q^* = \sqrt{\frac{2DA}{h}} = \sqrt{\frac{2 \times 2500 \times 5}{2.5}} = 100$$

(د) اندازه انباشته بهینه برای سیاست تولید عبارت است از (اعداد روند شده است):

- (۱) 377 واحد (۲) 389 واحد (۳) 674 واحد (۴) 730 واحد

حل: گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$Q^* = \sqrt{\frac{2DA}{h \left(1 - \frac{D}{P}\right)}} = \sqrt{\frac{2 \times 2500 \times 5}{2.5 \left(1 - \frac{2500}{10000}\right)}} = 389$$

مثال: در یک سیستم سفارشات، دریافت به صورت آنی (لحظه‌ای) بوده و در این شرایط مقدار اقتصادی سفارش (EOQ) برابر 800 است. اخیراً دریافت حالت تدریجی دارد. در شرایط جدید سایر پارامتر مانند قبل است، مقدار اقتصادی سفارش به 1600 رسیده است. در شرایط جدید سرعت مصرف به سرعت دریافت کالا برابر است با:

- (۱) 0.25 (۲) صفر (۳) 0.75 (۴) ∞

حل: گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$Q_{EOQ} = 800$$

$$Q_{EPQ} = 1600$$

$$Q_{EPQ} = \frac{Q_{EOQ}}{\sqrt{1 - \frac{D}{P}}} \Rightarrow \sqrt{1 - \frac{D}{P}} = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - \frac{D}{P} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{D}{P} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{\text{سرعت مصرف}}{\text{سرعت دریافت}} = \frac{D}{P}$$

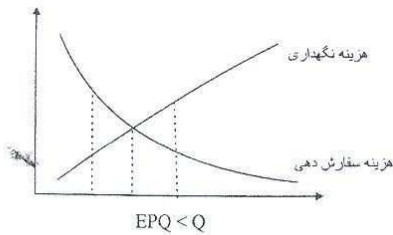
مثال: یک کارخانه که دارای سیستم تولیدی دسته‌ای (Batch Production) می‌باشد، در هر بار که به تولید محصول X می‌پردازد این محصول را در حجمی بیشتر از مقدار اقتصادی (EPQ) تولید می‌کند.

جمع هزینه‌های نگهداری (انبارداری) کالای X را در سال THC می‌نامیم. جمع هزینه‌های آمادگی سیستم برای تولید محصول X در سال را TOC می‌نامیم. در این شرایط کدام یک از گزاره‌های زیر می‌تواند صحیح باشد.

$$\frac{1}{2} TOC \leq THC \leq 2 TOC \quad (۲) \quad TOC = 700, \quad THC = 1000 \quad (۱)$$

$$TOC = 1000, \quad THC = 700 \quad (۴) \quad TOC = 1000, \quad THC = 1000 \quad (۳)$$

حل: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.



با توجه به منحنی هزینه‌ها بر حسب مقدار سفارش مشخص است که هنگامی که $EPQ < Q$ باشد. هزینه نگهداری THC از هزینه سفارش‌دهی TOC به صورت اکید بیشتر خواهد بود بنابراین تنها گزینه (۱) می‌تواند صحیح باشد.

مثال: موقعیت موجودی بر حسب مجموع موجودی در دست و در راه در یک مدل کنترل موجودی قطعی در مقایسه با مدل با دریافت تدریجی به چه صورتی است؟ ($y(t)$: موقعیت موجودی در لحظه E)

$$DL \leq y(t) \leq DL + Q \left(1 - \frac{D}{P}\right) \quad (1)$$

$$DL + Q \left(1 - \frac{D}{P}\right) \leq y(t) \leq DL + Q \left(1 - \frac{D}{P}\right) \quad (2)$$

$$DL + Q \left(1 - \frac{D}{P}\right) \leq y(t) \leq DL + Q \quad (3)$$

(۴) مانند موقعیت موجودی در مدل ساده قطعی است.

حل: گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

همان‌طور که در نکات مدل EPQ ذکر شد نمودار موقعیت موجودی مدل EPQ مشابه نمودار موقعیت موجودی مدل EOQ است و محدوده تغییرات آن به صورت زیر است:

$$DL \leq y(t) \leq DL + Q$$

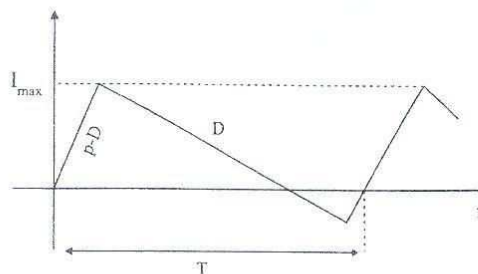
۳-۴ مدل EPQ در حالت کمبود پس‌افت

فرضیات مدل مانند مدل EPQ است با این تفاوت که کمبود به صورت سفارشات عقب افتاده مجاز می‌باشد.

هدف مدل تعیین مقدار سفارش اقتصادی بهینه (Q^*) و مقدار کمبود بهینه (b^*) و همین‌طور r_h^* , r^* با کمینه کردن هزینه‌ها است.

پارامترهای هزینه کمبود ($\pi, \hat{\pi}$) و نرخ تولید (P) مقدار ثابتی را دارا می‌باشند.

موجودی خالص



الگوریتم حل مدل:

اگر $\pi D \geq \sqrt{2DAh \left(1 - \frac{D}{P}\right)}$ باشد به مدل EPQ بر می‌گردیم:

$$Q^* = EPQ, \quad K(Q^*) = \sqrt{2DAh \left(1 - \frac{D}{P}\right)}, \quad b^* = 0$$

اگر $\pi D < \sqrt{2DAh \left(1 - \frac{D}{P}\right)}$ باشد، دو حالت می‌تواند رخ دهد.

- اگر $\hat{\pi} = 0$ باشد سیستم موجودی وجود ندارد.

- اگر $\hat{\pi} > 0$ باشد، مقدار بهینه از مدل EPQ کمبود به دست می‌آید.

مانند مدل EOQ با کمبود پس‌افت، مدل EPQ با کمبود پس‌افت نیز حالت خاصی دارد که از این حالت برای مقایسه حل مسایل این مدل استفاده می‌گردد. در این حالت $\pi = 0$ ، $\hat{\pi} > 0$ است. روابط بهینه این حالت به صورت زیر است:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2DA}{h \left(1 - \frac{D}{P}\right)}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{\pi} + h}{\hat{\pi}}}$$

$$I_{\max}^* = \sqrt{\frac{2DA}{h}} \cdot \sqrt{1 - \frac{D}{P}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{\pi}}{\hat{\pi} + h}}$$

$$K(Q^*) = \sqrt{2DAh} \cdot \sqrt{1 - \frac{D}{P}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{\pi}}{\hat{\pi} + h}}$$

برای نقطه سفارش مجدد بر حسب موجودی درست در این مدل مانند مدل EPQ دو حالت وجود دارد. در ادامه روابط نقطه سفارش مجدد ذکر می‌گردد.

$$r^* = DL - b^*$$

$$\begin{cases} r_h^* = DL' - b^* = DL - mQ^* - b^* & \text{اگر } L' = L - mT \leq t_d \\ r_h^* = (P - D)(T - L') - b^* & \text{اگر } L' = L - mT > t_d \\ = DL - PL + (m+1)\left(\frac{P}{D} - 1\right)Q^* - b^* & \end{cases}$$

مثال: تقاضای کالایی 24000 واحد در سال است و می‌توان این کالا را با نرخ 48000 واحد در سال تولید کرد. کسری به صورت تقاضای عقب افتاده مجاز است و مقدار بهینه هر بار سفارش‌دهی و کسری در هر دوره سفارش به ترتیب 1200 و 420 واحد محاسبه شده است اگر مدت زمان تحویل یک ماه باشد، نقطه سفارش مجدد چقدر است؟

- (۱) 20- واحد کالا (۲) 380 واحد کالا (۳) 410 واحد کالا (۴) 790 واحد کالا

حل: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$D = 24000, \quad P = 48000, \quad Q^* = 1200, \quad b^* = 420, \quad L = \frac{1}{12}$$

$$T = \frac{Q^*}{D} = \frac{1200}{24000} = \frac{1}{20}$$

$$u = L - mT = Td$$

$$\downarrow$$

$$ROP = I_{max}$$

$$m = \left[\frac{L}{T} \right] = \left[\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{20}} \right] = 1$$

$$\left. \begin{aligned} L' &= L - mT = \frac{1}{12} - 1 \times \frac{1}{20} = \frac{1}{30} \\ t_d &= T \left(1 - \frac{D}{P} \right) = \frac{1}{20} \left(1 - \frac{24000}{48000} \right) = \frac{1}{40} \end{aligned} \right\} \Rightarrow L' > t_d$$

$$r_h^* = (P - D)(T - L') - b^* = (48000 - 24000) \left(\frac{1}{20} - \frac{1}{30} \right) - 420 = 4000 - 420 = -20$$

مثال: شرکتی می‌خواهد به جای یکی از قطعات موردنیاز خود اقدام به تولید آن کند. هزینه آماده‌سازی تولید درست برابر هزینه سفارش‌دهی در حال خرید است. نرخ (سرعت) تولید 2 برابر نرخ (سرعت) تقاضا است، کدام یک از عبارات زیر درست است؟

- (1) مقدار اقتصادی هر بار تولید برابر تولید مقدار اقتصادی هر بار خرید است.
- (2) مقدار اقتصادی هر بار تولید تقریباً 20% بزرگتر از مقدار اقتصادی هر بار خرید است.
- (3) مقدار اقتصادی هر بار تولید تقریباً 20% کوچکتر از مقدار اقتصادی هر بار خرید است.
- (4) مقدار اقتصادی هر بار تولید تقریباً 40% بزرگتر از مقدار اقتصادی هر بار خرید است.

حل: گزینه 4 صحیح می‌باشد.

$$A_{خرید} = A_{تولید}$$

$$P = 2D \Rightarrow 1 - \frac{D}{P} = \frac{1}{2}$$

$$Q_{تولید} = \frac{Q_{خرید}}{\sqrt{1 - \frac{D}{P}}} = \sqrt{2} Q_{خرید} = 1.4 Q_{خرید}$$

بنابراین مقدار اقتصادی هر بار تولید 40% بزرگتر از مقدار اقتصادی هر بار خرید است.

مثال: در سوال فوق حداکثر موجودی در حالت تولید نسبت به حداکثر موجودی در حالت خرید:

- (1) تقریباً 70% بیشتر است.
- (2) تقریباً 70% کمتر است.
- (3) تقریباً 30% بیشتر است.
- (4) تقریباً 30% کمتر است.

حل: گزینه 4 صحیح می‌باشد.

$$\frac{I_{max \text{ تولید}}}{I_{max \text{ خرید}}} = \frac{Q_{\omega} \sqrt{1 - \frac{Q}{P}}}{Q_{\omega}} = \sqrt{1 - \frac{D}{P}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.7$$

حداکثر موجودی در حالت تولید 30% کمتر از حالت خرید است.

۵- مدل های چند محصولی و محدودیت دار

۵-۱- مدل چند محصولی ساده

فرضیات این مدل مانند مدل EOQ است با این تفاوت که برنامه ریزی برای چند محصول انجام می پذیرد.

هدف مدل تعیین مقدار سفارش بهینه برای هر محصول (Q_j^*) و نقطه سفارش بهینه $(r_{h_j}^*, r_j^*)$ با کمینه کردن هزینه هاست. این هدف به صورت زیر قابل بیان است.

$$\min = \sum_j \left(\frac{D_j A_j}{Q_j} + \frac{h_j Q_j}{2} + C_j D_j \right)$$

رای یافتن می نیمم Z از تابع فوق بر حسب Q_j مشتق گرفته و Q_j^* را می یابیم.

$$\frac{\delta z}{\delta Q_j} = 0 \Rightarrow Q_j^* = Q_{\omega j} = \sqrt{\frac{2D_j A_j}{h_j}}$$

ا توجه به Q_j^* های به دست آمده کل هزینه متغیر سالیانه برابر جمع هزینه های متغیر سالیانه هر کدام از محصولات است.

$$\text{کل هزینه متغیر سالیانه} = \sum_j \sqrt{2D_j A_j h_j}$$

مان طور که مشاهده می شود، در این مدل چون هیچ گونه محدودیتی وجود ندارد و مانند این است که چند محصول را جداگانه نامه ریزی کنیم.

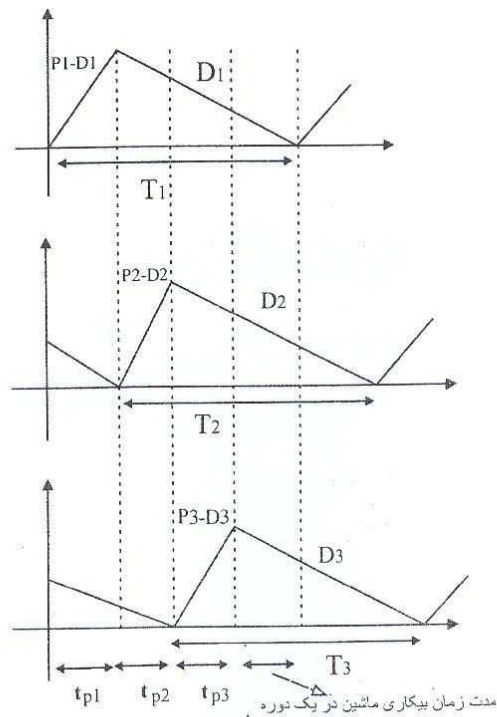
۲- مدل چند محصولی تولیدی

ضیات این مدل مانند مدل چند محصولی ساده است با این تفاوت که:

۱- سفارش به تدریج به انبار تحویل می شود. $P = cte$

۲- کلیه محصولات توسط یک ماشین یا یک خط تولید، تولید می شوند.

ف. مدل تعیین مقدار تولید بهینه برای هر محصول (Q_j^*) و نقطه سفارش بهینه $(r_{h_j}^*, r_j^*)$ با کمینه کردن هزینه هاست.



برای سادگی این مدل طوری برنامه‌ریزی می‌شود که مدت زمان دوره هر محصول برابر با یکدیگر باشد. یعنی فرض می‌کنیم:

$$\forall j: T_j = T$$

T_j : سیکل تولیدی محصول j ام (زمان تولید زمان مصرف)

$$T_j = \frac{Q_j}{D_j}$$

$$K(T) = \sum_j \left(\frac{D_j A_j}{Q_j} + \frac{h_j Q_j}{2} \right) \left(1 - \frac{D_j}{P_j} \right)$$

$$\Rightarrow K(T) = \frac{\sum A_j}{T} + \frac{T}{2} \sum h_j D_j \left(1 - \frac{D_j}{P_j} \right)$$

در این مدل ابتدا باید T^* را محاسبه کرده و سپس از طریق آن Q_j^* را محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{dK(T)}{dT} = 0 \Rightarrow T^* = \sqrt{\frac{2 \sum A_j}{\sum h_j D_j \left(1 - \frac{D_j}{P_j} \right)}}$$

Q_j^* توسط رابطه زیر محاسبه می‌گردد.

$$Q_j^* = T^* D_j$$

هزینه متغیر سالیانه بهینه را نیز می توان از روابط زیر به دست آورد:

$$K(T^*) = \sqrt{2 \sum A_j \sum h_j D_j \left(1 - \frac{D_j}{P_j}\right)} = \frac{2 \sum A_j}{T^*} = T^* \sum h_j D_j \left(1 - \frac{D_j}{P_j}\right)$$

۲-۱- شرط لازم برای جوابدار بودن

$\frac{D_j}{P_j}$: درصد زمانی از سال که ماشین مشغول تولید محصول ژام است.

$\frac{t_{P_j}}{T_j}$: درصد زمانی از یک دوره که ماشین مشغول تولید محصول ژام است.

کسرهای فوق چون از جنس درصد هستند بنابراین واحد نداشته و در دوره یا سال بودن آنها تفاوتی نمی کند و با هم برابرند.

$$\frac{t_{P_j}}{T_j} = \frac{\frac{Q_j}{P_j}}{\frac{Q_j}{D_j}} = \frac{D_j}{P_j}$$

$\sum_j \frac{D_j}{P_j}$ = درصد زمان کار ماشین (در سال یا دوره)

$1 - \sum_j \frac{D_j}{P_j}$ = درصد زمان بیکاری ماشین (در سال یا دوره)

شرط جوابدار بودن مسئله این است که درصد زمان کار ماشین از یک کمتر باشد و یا به عبارتی درصد زمانی بیکاری ماشین از صفر بیشتر باشد.

$$1 - \sum_j \frac{D_j}{P_j} \geq 0 \Rightarrow \sum_j \frac{D_j}{P_j} \leq 1$$

$1 - \sum_j \frac{D_j}{P_j}$ = مدت زمان بیکاری ماشین در سال

$\left(1 - \sum_j \frac{D_j}{P_j}\right) T$ = مدت زمان بیکاری در دوره

۲-۴ الگوریتم حل مدل

ابتدا شرط جوابدار بودن مدل را چک می کنیم:

$$\sum \frac{D_j}{P_j} \leq 1$$

اگر شرط فوق برقرار نباشد مدل جواب ندارد بنابراین امکان تولید این محصولات با ماشین داده شده وجود ندارد. در صورتی که شرط فوق برقرار باشد، T^* از روابط به دست آمده محاسبه شده و سپس Q_j^* را به دست می آوریم.

مثال: در یک کارگاه صنعتی سه نوع محصول به وسیله یک ماشین تولید می‌شود. ظرفیت تولیدی ماشین برای محصول یک برابر 27000 واحد در سال، برای محصول 2 برابر 36000 واحد در سال، و برای محصول 3 برابر 9000 واحد در سال است. سایر ارقام مربوط به جدول در زیر آمده است:

محصول	1	2	3
مصرف سالیانه به واحد	9000	18000	6000
هزینه نگهداری هر واحد در سال به تومان	5	6	8
هزینه هر بار سفارش به تومان	800	700	500

مقدار اقتصادی هر بار تولید برای هر یک از محصولات چه مقدار است؟ (رقم سمت راست مربوط به محصول اول است و رقم سمت چپ مربوط به محصول سوم است.)

$$(۲) 17000, 4200, 1600$$

$$(۱) 1900, 3200, 2000$$

$$(۳) 1200, 3600, 1800$$

(۴) تولید این محصولات با ماشین داده شده امکان پذیر نیست.

حل: گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$D_1=9000, P_1=27000, h_1=5, A_1=800$$

$$D_2=18000, P_2=36000, h_2=6, A_2=700$$

$$D_3=6000, P_3=9000, h_3=8, A_3=500$$

$$\sum \frac{D_j}{P_j} = \frac{9000}{27000} + \frac{18000}{36000} + \frac{6000}{9000} = 1.5 \leq 1$$

مسئله جواب ندارد

$$\sum \frac{D_j}{P_j} \leq 1$$

باته منطوق دارد

حال اگر بدون توجه به شرط جوابدار بودن مسئله به حل آن می‌پرداختیم گزینه 3 به صورت زیر به دست می‌آمد که گزینه درستی نمی‌باشد.

$$T^* = \sqrt{\frac{\sum A_j}{\sum h_j D_j \left(1 - \frac{D_j}{P_j}\right)}}$$

$$= \sqrt{\frac{2 \times (800 + 700 + 500)}{5 \times 9000 \left(1 - \frac{9000}{27000}\right) + 6 \times 18000 \left(1 - \frac{18000}{36000}\right) + 8 \times 6000 \left(1 - \frac{6000}{9000}\right)}} = 0.2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Q_1^* = T^* D_1 = 1800 \\ Q_2^* = T^* D_2 = 3600 \\ Q_3^* = T^* D_3 = 1200 \end{cases}$$

۳-۵ مدل چندمحصولی تولیدی با زمان آماده‌سازی

در این حالت مدل چندمحصولی تولیدی را در حالتی که هر محصول برای هر بار تولید خود نیاز به زمان آماده‌سازی برابر با S_j دارد مورد بررسی قرار می‌دهیم.

S_j : زمان هر بار آماده‌سازی محصول لازم

این زمان‌های آماده‌سازی در مدت زمان بیکاری ماشین در هر دوره جای می‌گیرد و در صورتی که از این زمان بیشتر گردد باید T^* را طوری تغییر داد که این زمان را در بر گیرد.

در صورتی که T_0 را T^* به دست آمده از رابطه مدل چند محصولی تولیدی یعنی:
$$\sqrt{\frac{2 \sum A_j}{\sum h_j D_j \left(1 - \frac{D_j}{P_j}\right)}}$$
 بنامیم نکته ذکر شده را

می‌توان به صورت زیر نیز بیان کرد.

$$\text{اگر } \sum S_j \leq \left(1 - \frac{D_j}{P_j}\right) T_0 \Rightarrow T^* = T_0 = \sqrt{\frac{2 \sum A_j}{\sum h_j D_j \left(1 - \frac{D_j}{P_j}\right)}}$$

$$\text{اگر } \sum S_j > \left(1 - \sum \frac{D_j}{P_j}\right) T_0 \Rightarrow T^* = T_{\min} = \frac{\sum S_j}{1 - \sum \frac{D_j}{P_j}}$$

بنابراین الگوریتم حل مدل به صورت زیر خواهد بود:

T_{\min}, T_0 از روابط مربوطه به دست آورید، T^* ماکزیمم این دو مقدار خواهد بود.

$$T^* = \max\{T_0, T_{\min}\}$$

مقدار سفارش بهینه برای هر محصول از فرمول روبرو محاسبه می‌گردد:

$$Q^* = T^* D_j$$

هزینه مدل از رابطه زیر به دست خواهد آمد

$$K = \sqrt{2 \sum A_j \sum h_j D_j \left(1 - \frac{D_j}{P_j}\right)} \quad \text{اگر } T^* = T_0 \text{ باشد}$$

$$K = \frac{\sum A_j}{T} + \frac{T}{2} \sum h_j D_j \left(1 - \frac{D_j}{P_j}\right) \quad \text{اگر } T^* = T_{\min} \text{ باشد}$$

مثال: سیکل تولید بهینه 3 محصول که توسط یک ماشین تولید می‌شوند، برابر با 2 سال است. مدت زمان بیکاری این محصولات در سال برابر با 0.1 سال است، اگر زمان آماده‌سازی هر محصول برابر با 0.05 سال باشد، آن‌گاه در حالت جدید (با در نظر گرفتن زمان آماده‌سازی) سیکل بهینه چقدر خواهد بود؟

$T_0 = 2$ سال

$$\text{زمان بیکاری} = 0.1 = 1 - \sum \frac{D_j}{P_j}$$

$$\sum S_j = 3 \times 0.05 = 0.15$$

$$0.15 > 0.1$$

$$S_j = 0.05$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} T_0 = 2 \\ T_{\min} = \frac{\sum S_j}{1 - \frac{D_j}{P_j}} = \frac{3 \times 0.05}{0.1} = 1.5 \end{array} \right\} \Rightarrow T^* = \max\{2, 1.5\} = 2 = T_0$$

بنابراین سیکل بهینه تغییری نخواهد کرد.

۴-۵ مدل چندمحصولی با محدودیت فضا

فرضیات مدل مانند مدل چندمحصولی ساده است با این تفاوت که حداکثر فضای موجود در انبار برابر با F می‌باشد.

F : حداکثر فضای موجود در انبار

f_j : فضای اشغالی متوسط هر واحد محصول j ام

در این صورت حداکثر فضای اشغالی محصول j ام از رابطه زیر به دست می‌آید:

حداکثر فضای اشغالی محصول j ام = (حداکثر موجودی محصول j ام) $\times f_j$

و محدودیت فضای انبار به صورت زیر خواهد بود:

$$\sum_j I_j \leq F \Rightarrow \sum_j f_j I_{\max} \leq F$$

باید توجه کرد که برای هر مدل باید I_{\max} مربوطه را قرار داد، به عنوان مثال برای مدل تولیدی $I_{\max} = Q \left(1 - \frac{D}{P}\right)$ و برای مدل ساده قطعی، $I_{\max} = Q$ است.

در ادامه مدل را برای مدل چندمحصولی ساده با $I_{\max} = Q$ بررسی می‌کنیم و بنابراین مدل به دنبال یافتن جواب مسئله زیر است

$$\text{Min } Z = \frac{D_j A_j}{Q_j} + \frac{h_j Q_j}{2}$$

$$\sum f_j Q_j \leq F$$

برای ارضای محدودیت فضا تابع هدف را با استفاده از ضریب لاگرانژ و تکنیک مربوط به آن به صورت زیر تغییر می‌دهیم.

$$\text{Min } J = Z + Q \left(F - \sum f_j Q_j \right)$$

و به روش زیر جواب‌های منحصر به فرد مسئله را به دست خواهیم آورد:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial J}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial Q_j} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum f_j \sqrt{\frac{2D_j A_j}{h_j + 2\theta^* f_j}} = F \quad (I) \\ Q_j^* = \sqrt{\frac{2D_j A_j}{h_j + 2\theta^* f_j}} \quad (II) \end{array} \right.$$

بنابراین الگوریتم حل مدل به صورت زیر است:

ابتدا از محدودیت فضا صرف‌نظر می‌کنیم، و جواب مسئله $Q_{0j} = \sqrt{\frac{2D_j A_j}{h_j}}$ خواهد بود. در صورتی که این جواب محدودیت فضا

$\left(\sum f_j Q_j \leq F \right)$ را ارضای کند، جواب‌های به دست آمده جواب‌های مدل هستند و در غیر این صورت مقدار θ^* را با استفاده از روش

لاگرانژ از معادله (I) به دست آورده و در معادله (II) جایگزین می‌کنیم و جواب مسئله را به دست می‌آوریم.

تذکره: از آنجا که روش به دست آوردن θ^* از روابط فوق به صورت سعی و خطاست روش فوق زمان حل زیادی را می طلبد بنابراین روش حل مسائل فوق به صورت تستی، این است که در صورتی که بعد از محاسبات متوجه می شویم که Q_{wj} محدودیت را رعایت نمی کنند، گزینه ای جواب مسئله است که محدودیت فضا را مساوی می کند.

نکته: در صورتی که Q_{wj} محدودیت را ارضا نکند، جواب های بهینه به دست آمده الزاماً از Q_{wj} ها کمتر خواهد بود ($Q_j^* < Q_{wj}$)

مثال: کارخانه ای سه نوع کالای سفارشی ۱، ۲ و ۳ دارد. این کارخانه در حدود ۷۰۰ متر مربع جهت انبار کردن دارد. با توجه به اطلاعاتی که در جدول زیر آمده است:

اول زیاد حساب می کنیم
از دستورات مسئله یاد بگیریم
از دستورات مسئله یاد بگیریم
از دستورات مسئله یاد بگیریم

کالای ۱	کالای ۲	کالای ۳	
۵۰۰۰	۲۰۰۰	۱۰۰۰۰	تقاضای سالیانه (واحد)
۱۰۰	۲۰۰	۷۵	هزینه سفارش (تومان)
۱۰	۱۵	۵	هزینه خرید (تومان)
۰.۷	۰.۸	۰.۴	مساحت اشغال شده توسط هر واحد (مترمربع)
۰.۲	۰.۲	۰.۲	نرخ هزینه نگهداری
۱۲۲۴، ۵۱۶، ۷۰۷ (۱)		۱۲۲۴، ۲۸۰، ۷۰۷ (۲)	مقدار سفارش بهینه کالای ۱، ۲ و ۳ به ترتیب با توجه به محدودیت ذکر شده عبارت است از:
۵۷۱، ۲۸۰، ۳۴۸ (۳)		۵۷۱، ۵۱۶، ۳۴۸ (۴)	

حل: گزینه ۳ صحیح می باشد.

$$F = 700m^2$$

$$\sum f_j Q_j \leq F \Rightarrow 0.7Q_1 + 0.8Q_2 + 0.4Q_3 \leq 700$$

$$Q_{w_1} = \sqrt{\frac{2D_1 A_1}{h_1}} = 707$$

$$Q_{w_2} = 516$$

$$Q_{w_3} = 1224$$

Q_{w_3} را در محدودیت می گذاریم:

$$0.7 \times 707 + 0.8 \times 516 + 0.4 \times 1224 = 495 + 413 + 490 = 1398 \geq 700$$

مشاهده می گردد که محدودیت را ارضا نمی کند بنابراین باید از میان گزینه هایی به دنبال جواب گشت که از Q_{wj} ها کمتر است تنها گزینه، گزینه ۳ است که هر ۳ Q_j آن از Q_{wj} ها کمتر می باشد.

$$0.7 \times 348 + 0.8 \times 280 + 0.4 \times 571 = 244 + 224 + 228 = 696$$

۵-۵ مدل چندمحصولی با محدودیت سرمایه درگیر موجودی

فرضیات مدل مانند مدل چندمحصولی ساده است با این تفاوت که حداکثر سرمایه موجود برای موجودی برابر با X می‌باشد.

X : حداکثر سرمایه درگیر موجودی

محدودیت سرمایه درگیر موجودی به صورت زیر است:

$$\sum_j C_j \leq X \Rightarrow \sum_j C_j I_{\max j} \leq X$$

برای مدل قطعی ساده $I_{\max} = Q$ است و محدودیت به صورت $\sum_j C_j Q_j \leq X$ است. حل مدل مانند مدل محدودیت فضا است با

این تفاوت که مقدار β^* از رابطه (I) در زیر محاسبه شده و در رابطه‌های (II) جایگزین می‌گردد.

$$\sum C_j \sqrt{\frac{2A_j D_j}{h_j + 2\beta^* C_j}} = X \quad (I)$$

$$Q_j^* = \sqrt{\frac{2A_j D_j}{h_j + 2\beta^* C_j}} \quad (II)$$

تذکر: مانند مدل محدودیت فضا در صورتی که بعد از محاسبات متوجه شویم که $Q_{\omega j}$ ها محدودیت را ارضا نمی‌کنند، گزینه‌های

جواب مسئله است که محدودیت سرمایه درگیر موجودی را مساوی کند.

نکته: در صورتی که $Q_{\omega j}$ ها محدودیت را ارضا نکنند، جواب‌های بهینه به دست آمده مانند مدل محدودیت فضا، الزاماً از $Q_{\omega j}$ ها

کمتر خواهند بود. ($Q_j^* < Q_{\omega j}$)

۵-۶ مدل چندمحصولی با محدودیت تعداد دفعات سفارش در سال

فرضیات مدل مانند مدل چندمحصولی ساده است با این تفاوت که تعداد دفعات سفارش در سال حداکثر می‌توان برابر ℓ گردد.

ℓ : حداکثر تعداد دفعات سفارش در سال برای کلیه محصولات

تعداد دفعات سفارش در سال: $\frac{D_j}{Q_j}$

محدودیت تعداد دفعات سفارش در سال به صورت زیر است:

$$\sum \frac{D_j}{Q_j} \leq \ell$$

روش حل مدل مانند مدل محدودیت فضا است، با این تفاوت که از رابطه (I) مقدار α^* را به دست آورده و در رابطه‌های (II)

جایگزین می‌کنیم.

$$\sum \sqrt{\frac{h_j D_j}{2(A_j + \alpha^*)}} = \ell \quad (I)$$

$$Q_j^* = \sqrt{\frac{2D_j(A_j + \alpha^*)}{h_j}} \quad (II)$$

تذکر: مانند مدل‌های محدودیت‌دار ذکر شده، در صورتی که بعد از محاسبات متوجه شویم که $Q_{\omega j}$ ها محدودیت را ارضا نمی‌کنند، گزینه‌ای جواب مسئله است که محدودیت را مساوی می‌کند.

نکته: برخلاف دو مدل گذشته در صورتی که $Q_{\omega j}$ ها محدودیت را ارضا نکنند، جواب‌های بهینه به دست آمده الزاماً از $Q_{\omega j}$ ها بزرگتر خواهند بود ($Q_j^* > Q_{\omega j}$)

۷-۲. مدل چند محصولی در حالت الزام سفارش همزمان محصولات

فریضات مدل مانند مدل چند محصولی ساده است با این تفاوت که محصولات باید با هم سفارش داده شوند. در این صورت مساله شرط یکسان بودن سیکل بهینه تمامی محصولات به مساله تحمیل خواهد شد.

$$\forall j \quad T_j = T = \frac{Q_j}{T_j}$$

بنابراین تابع هدف مدل به صورت زیر است:

$$\min Z = \sum \left(\frac{D_j A_j}{Q_j} + \frac{h_j Q_j}{2} \right)$$

$$\Rightarrow K(T) = \frac{\sum A_j}{T} + \frac{T}{2} \sum h_j D_j$$

و T^* از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\frac{dK(t)}{dT} = 0 \Rightarrow T^* = \sqrt{\frac{2 \sum A_j}{\sum h_j D_j}}$$

و Q_j^* از رابطه زیر محاسبه می‌گردد.

$$Q_j^* = T^* D_j$$

و در انتها هزینه‌ها را محاسبه می‌نماییم.

$$k(T^*) = \sqrt{2 \sum A_j \sum h_j D_j}$$

مثال: دو محصول a و b از یک فروشنده خریداری می‌شوند. این دو محصول همیشه با هم سفارش داده می‌شوند و هزینه ثابت سفارش‌دهی (دو محصول با هم) 2500 تومان است. تقاضای محصول a برابر 10000 تن در سال و تقاضای محصول b برابر 20000 تن در سال است. کمبود موجودی برای هیچ یک از این دو محصول جایز نیست. هزینه نگهداری به غیر از هزینه فضای انبار برای هر واحد محصول a برابر 10 تومان و برای هر واحد محصول b برابر 20 تومان در سال است.

الف: در سه سوال زیر فرض کنید هزینه فضای انبار صفر است.

• مقدار سفارش اقتصادی محصول a برابر است با:

(۱) $500\sqrt{20}$ تن

(۲) $500\sqrt{10}$ تن

(۳) 15000 تن

(۴) هیچ کدام از ارقام فوق نیست.

حل: گزینه ۴ صحیح می باشد.

$$\sum A_j = 2500$$

$$D_a = 10000, \quad h_{1a} = 10$$

$$D_b = 20000, \quad h_{1b} = 20$$

$$T^* = \sqrt{\frac{2 \sum A_j}{\sum h_j D_j}} = \sqrt{\frac{2 \times 2500}{10 \times 10000 + 20 \times 20000}} = 0.1$$

$$\Rightarrow Q_a^* = T^* D_a = 0.1 \times 10000 = 1000$$

• تعداد سفارش اقتصادی محصول b برابر است با:

(۱) $500\sqrt{20}$ تن

(۳) 2000 تن

(۲) $500\sqrt{10}$ تن

(۴) هیچ کدام از ارقام فوق نیست.

حل: گزینه ۳ صحیح می باشد.

$$Q_b^* = T^* D_b = 0.1 \times 20000 = 2000$$

• متوسط مجموع هزینه های نگهداری و سفارش دهی دو محصول در سال در حالت بهینه برابر است با:

(۱) $10000\sqrt{20}$

(۳) 50000

(۲) $10000\sqrt{10}$

(۴) هیچ کدام از ارقام فوق نیست.

حل: گزینه ۳ صحیح می باشد.

$$K^* = \sqrt{2 \sum A_j \sum h_j D_j} = \frac{2 \sum A_j}{T^*} = \frac{2 \times 2500}{0.1} = 50000$$

ب: در سه سوال زیر فرض کنید هزینه فضای انبار که بر اساس حداکثر موجودی محاسبه می گردد برای هر واحد محصول بدون توجه به نوع محصول برابر 10 تومان در سال است.

• تعداد سفارش اقتصادی محصول a برابر است با:

(۱) $\frac{5000}{\sqrt{55}}$

(۳) $5000\sqrt{\frac{1}{10}}$

(۲) $5000\sqrt{\frac{2}{15}}$

(۴) هیچ کدام از ارقام فوق نیست.

حل: گزینه ۱ صحیح می باشد.

$h_2 = 10$ (بر حسب حداکثر موجودی)

$$\Rightarrow h_a = h_{1a} + 2h_2 = 10 + 2 \times 10 = 30$$

$$h_b = h_{1b} + 2h_2 = 20 + 2 \times 10 = 40$$

$$T^* = \sqrt{\frac{2 \sum A_j}{\sum h_j D_j}} = \sqrt{\frac{2 \times 2500}{30 \times 10000 + 40 \times 20000}} = \frac{1}{\sqrt{220}}$$

$$Q_a^* = T^* D_a = \frac{1}{\sqrt{220}} \times 10000 = \frac{5000}{\sqrt{55}}$$

• تعداد سفارش اقتصادی محصول b برابر است با:

$$(1) 1000\sqrt{10} \quad (2) \frac{1000}{\sqrt{30}} \quad (3) \frac{500}{\sqrt{15}} \quad (4) \text{هیچ کدام}$$

حل: گزینه ۴ صحیح می باشد.

$$Q_b^* = T^* D_b = \sqrt{\frac{1}{220}} \times 20000 = \frac{10000}{\sqrt{55}}$$

• متوسط مجموع هزینه های نگهداری و سفارش دهی دو محصول در سال برابر است با:

$$(1) 10000(\sqrt{15+4\sqrt{10}}) \quad (2) 100000(\sqrt{10+30}) \quad (3) 5000\sqrt{220} \quad (4) \text{هیچ کدام}$$

حل: گزینه ۴ صحیح می باشد.

$$K^* = \frac{2 \sum A_j}{T^*} = 5000\sqrt{220}$$

۵- مدل چند محصولی در حالت الزام سفارش همزمان و محدودیت تعداد دفعات سفارش در سال

فرضیات مدل مانند مدل چند محصولی در حالت الزام سفارش همزمان با اضافه کردن این محدودیت که حداکثر تعداد دفعات سفارش در سال برابر ℓ است.

ℓ : حداکثر تعداد دفعات سفارش در سال

مانند مدل قبل شرط یکسان بودن سیکل بهینه تمامی محصولات را خواهیم داشت.

$$\forall_j T_j = T = \frac{Q_j}{D_j}$$

و محدودیت به صورت زیر خواهد بود.

$$\frac{D_j}{Q_j} = \frac{1}{T_j} = \frac{1}{T} \leq \ell$$

الگوریتم حل مدل به صورت زیر خواهد بود:

مقدار T_0 و T_{\min} از رابطه های زیر حساب می کنیم:

$$T_0 = \sqrt{\frac{2 \sum A_j}{\sum h_j D_j}}$$

$$T_{\min} = \frac{1}{\ell}$$

و T^* حداکثر دو مقدار فوق خواهد بود

$$T^* = \max\{T_0, T_{\min}\}$$

و Q_j^* از رابطه زیر محاسبه می گردد:

$$Q_j^* = T^* D_j$$

مثال: مصرف سالیانه دو کالا به ترتیب 10000 و 12000 واحد و هزینه نگهداری هر واحد هر یک از دو کالا 2 تومان در سال می‌باشد. این دو کالا الزاماً باید با همدیگر سفارش داده شوند. هزینه سفارش‌دهی این دو کالا مجموعاً 1000 تومان است. بیش از 5 بار سفارش‌دهی در سال مجاز نیست. مقدار سفارش اقتصادی هر یک از این دو کالا برابر است با:

$$(1) \quad 2132 \text{ و } 2559 \quad (2) \quad 3162 \text{ و } 3464 \quad (3) \quad 2000 \text{ و } 2400 \quad (4) \quad 2236 \text{ و } 2449$$

حل: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$D_1=10000, \quad D_2=12000, \quad h_1=h_2=2, \quad \sum A_j=1000, \quad \ell=5$$

$$T_0 = \sqrt{\frac{2 \sum A_j}{\sum h_j D_j}} = \sqrt{\frac{2 \times 1000}{2 \times 10000 + 2 \times 12000}} = 0.2132$$

$$T_{\min} = \frac{1}{\ell} = \frac{1}{5} = 0.2$$

$$T^0 = \max\{0.2, 0.2132\} = 0.2132 = T_0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Q_1^* = T^* D_1 = 0.2132 \times 10000 = 2132 \\ Q_2^* = T^* D_2 = 0.2132 \times 12000 = 2559 \end{cases}$$

مثال: در مدل تولید چندمحصولی توسط یک منبع تولید همراه با زمان آماده‌سازی برای هر بار تولید محصول، مسئله وقتی جواب دارد که:

(۱) کسر بیکاری ماشین بزرگتر یا مساوی صفر باشد.

(۲) زمان بیکاری ماشین بزرگتر از مجموع زمان‌های آماده‌سازی می‌باشد.

(۳) نسبت مجموع زمان‌های آماده‌سازی به کسر بیکاری ماشین بزرگتر از یک باشد.

(۴) نسبت مجموع زمان‌های آماده‌سازی به کسر بیکاری کوچکتر از یک باشد.

حل: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

همان‌طور که در مدل چندمحصولی تولیدی ذکر گردید تنها شرط جواب‌دار بودن مسئله این است که $\sum \frac{D_j}{P_j} \leq 1$ باشد یا

$$1 - \sum \frac{D_j}{P_j} \geq 0$$

باشد که همان کسر بیکاری ماشین است.

نکته: در صورتی که در یک مدل چند محصولی بیش از یک محدودیت ارایه گردد برای حل مدل باید یک محدودیت را در نظر

بگیریم و جواب‌های مدل را به دست آوریم، چنانچه جواب حاصل محدودیت حذف شده را ارضا کند جواب مدل است. در غیر

این صورت گزینه‌ای جواب مدل است که محدودیت در نظر گرفته شده را مساوی کند.

مثال: در فروشگاهی حداکثر مساحت قابل استفاده برای انبار کردن دو محصول a و b برابر 150 متر مربع است. به علاوه این دو محصول در یک زمان و با یکدیگر سفارش داده می‌شوند و زمان تحویل برای هر دو یکی است. ارقام مربوط به این دو محصول در جدول زیر آمده است.

b	a	محصول
12000	10000	مصرف سالیانه به واحد
350	150	هزینه هر بار سفارش به تومان
5	4	هزینه نگهداری هر واحد در سال به تومان
$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{10}$	سطح هر واحد محصول به متر مربع

مقدار اقتصادی هر بار سفارش از محصول a و محصول b به ترتیب کدام یک از موارد زیر است؟

- (۱) 900 و 750 (۲) 1250 و 900 (۳) 1450 و 1150 (۴) 1600 و 1200

حل: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$\sum f_i Q_i = \frac{1}{10} Q_1 + \frac{1}{12} Q_2 \leq 150$$

$$\forall j = T_j = T \quad \frac{Q_1}{D_1} = \frac{Q_2}{D_2}$$

ابتدا تنها محدودیت الزام سفارش همزمان را در نظر می‌گیریم.

$$T^* = \sqrt{\frac{2 \sum A_i}{\sum h_j D_j}} = \sqrt{\frac{2(150+350)}{4 \times 10000 + 5 \times 12000}} = \sqrt{\frac{1000}{100 \times 1000}} = 0.1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Q_1 = 0.1 \times 10000 = 1000 \\ Q_2 = 0.1 \times 12000 = 1200 \end{cases}$$

سپس محدودیت فضا را چک می‌کنیم:

$$\frac{1}{10} \times 1000 + \frac{1}{12} \times 1200 = 200 \leq 150$$

پس گزینه‌ای جواب مسئله است که محدودیت فضا را مساوی کند.

$$\text{گزینه ۴: } \frac{1}{10} \times 1600 + \frac{1}{12} \times 1200 = 260 \neq 150$$

$$\text{گزینه ۳: } \frac{1}{10} \times 1450 + \frac{1}{12} \times 1150 = 241 \neq 150$$

$$\text{گزینه ۲: } \frac{1}{10} \times 1250 + \frac{1}{12} \times 900 = 200 \neq 150$$

$$\text{گزینه ۱: } \frac{1}{10} \times 900 + \frac{1}{12} \times 750 = 152.5 \neq 150$$

پس گزینه صحیح، گزینه ۱ می‌باشد.

نکته: در صورتی که در مدلی محدودیت‌دار، محدودیتی غیر از مدل‌های عنوان شده برای مدلی تک‌محصولی ارایه گردد، ابتدا محدودیت را بر اساس متغیر خواسته شده توسط مسئله می‌نویسیم و بدون در نظر گرفتن محدودیت مقدار بینه متغیر را به دست می‌آوریم. در صورتی که محدودیت را رعایت کرد، جواب مسئله است. در غیر این صورت مقداری که محدودیت را مساوی کند جواب مساله می‌باشد.

مثال: تولیدکننده‌ای محصولی تولید می‌کند که از این نقطه نظر که محصول در انبار تحت تاثیر فاسد شدن بوده برای شرکت گران می‌باشد. او احساس می‌کند که ماکزیمم زمانی که می‌تواند هر واحد از محصول را به صورت موجودی نگه‌دارد، دو هفته می‌باشد. او محصول را به صورت انباشته تولید می‌کند و فرآیند تولیدی به نحوی است که کل انباشته در یک لحظه تکمیل شده و به موجودی اضافه می‌شود نرخ تقاضای سالیانه 5200 واحد، هزینه راه‌اندازی تولید 400 تومان، نرخ هزینه نگهداری موجودی 20% هزینه متغیر هر واحد محصول 100 تومان بوده و هیچ کمبود موجودی مجاز نیست. اندازه انباشته اقتصادی را به توجه به محدودیت عمر نگهداری محصولات در انبار محاسبه کنید. سال را 50 هفته در نظر بگیرید.

- (۱) 258 واحد (۲) 235 واحد (۳) 244 واحد (۴) 208 واحد

حل: گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$D=5200, \quad i=0.2, \quad A=400, \quad C=100$$

محدودیت مورد نظر هفته $T \leq 2$ می‌باشد ابتدا محدودیت را بر اساس متغیر خواسته شده یعنی Q می‌نویسیم:

$$T \leq 2 \text{ هفته} \Rightarrow T \leq \frac{2}{50} \text{ سال} \Rightarrow \frac{Q}{D} \leq \frac{2}{50} \Rightarrow Q \leq 208$$

مشاهده می‌شود تنها گزینه ۴ می‌تواند صحیح باشد.

مثال: با دستگاهی می‌توان محصول را با نرخ (سرعت) سالیانه 10000 واحد در سال تولید کرد. سرعت تقاضای سالیانه برای این محصول 5000 واحد است. هزینه آماده‌سازی هر بار این دستگاه برای تولید برابر 200 تومان، هزینه نگهداری هر واحد این محصول در سال 100 تومان و هزینه مواد برای هر واحد محصول 50 تومان است. اگر قرار باشد حداکثر سرمایه درگیر در موجودی این محصول برابر 2000 تومان باشد، آن‌گاه مقدار تولید بهینه این محصول به کدام یک از مقادیر زیر نزدیک‌تر است؟

- (۱) 40 واحد (۲) 80 واحد (۳) 100 واحد (۴) 200 واحد

حل: گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$P=10000, \quad D=5000, \quad A=200, \quad h=100, \quad C=50, \quad X=2000$$

$$CI_{\max} \leq 2000 \Rightarrow CQ \left(1 - \frac{D}{P}\right) \leq 2000 \Rightarrow 50 \times Q \left(1 - \frac{5000}{10000}\right) \leq 2000$$

$$\Rightarrow Q \leq 80$$

$$Q^* = \sqrt{\frac{2DA}{h \left(1 - \frac{D}{P}\right)}} = \sqrt{\frac{2 \times 5000 \times 200}{100 \left(1 - \frac{5000}{10000}\right)}} = 200 \not\leq 80$$

بنابراین $Q^* = 80$ می‌باشد.

مثال: دو محصول A و B با هم سفارش داده می‌شوند (فروشنده هر دو محصول یکی است) و مقدار تقاضای سالیانه برای محصول A برابر 500 واحد و محصول B برابر 1500 واحد است. اگر هزینه نگهداری هر واحد محصول A و B سالیانه 10 تومان و هزینه هر بار سفارش دهی 100 تومان باشد. تعداد دفعات بهینه سفارش در سال چقدر است؟

- (۱) 6 (۲) 8 (۳) 10 (۴) 12

حل: گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$D_A=500, \quad D_B=1500, \quad h_A=10, \quad h_B=10, \quad \sum A_j=100$$

$$T^* = \sqrt{\frac{2 \sum A_j}{\sum h_j D_j}} = \sqrt{\frac{2 \times 100}{10 \times 2000}} = 0.1 \Rightarrow n = \frac{1}{T^*} = \frac{1}{0.1} = 10$$

مثال: اطلاعات مربوط به دو نوع مواد اولیه در یک شرکت طبق جدول زیر می‌باشد. این شرکت جهت تولید این مواد از یک ماشین استفاده می‌نماید. مقدار تولید اقتصادی هر یک از مواد I و II برابر است با:

	I	II
مصرف سالیانه	6000	1800
تولید سالیانه	40000	36000
هزینه آماده‌سازی ماشین	500	700
هزینه نگهداری هر واحد در سال	8	6

(۱) 960 و 2880 (۲) 866 و 2050 (۳) 1000 و 3000 (۴) 1500 و 1500

حل: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$T^* = \frac{2 \sum A_j}{\sqrt{\sum h_j D_j \left(1 - \frac{D_j}{P_j}\right)}} = \frac{2(500+700)}{\sqrt{8 \times 6000 \left(1 - \frac{6000}{40000}\right) + 6 \times 18000 \left(1 - \frac{18000}{36000}\right)}} = \sqrt{\frac{2400}{14800}} = 0.16$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Q_1^* = T^* D_1 = 0.16 \times 6000 = 960 \\ Q_2^* = T^* D_2 = 0.16 \times 18000 = 2880 \end{cases}$$

مثال: مصرف سالیانه ماده اولیه شرکتی 4000 واحد در سال است. قیمت خرید هر واحد این ماده اولیه 50 تومان و نرخ هزینه نگهداری در این شرکت 20 درصد در سال است. هزینه هر بار سفارش دهی این ماده اولیه 200 تومان است. اگر حداکثر مقدار سرمایه درگیر در موجودی این ماده اولیه نبایستی از 10000 تومان تجاوز کند، آنگاه مقدار سفارش اقتصادی چقدر است؟

(۱) 400 واحد (۲) 300 واحد (۳) 200 واحد (۴) 100 واحد

حل: گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$D = 4000, \quad C = 50, \quad i = 0.2, \quad A = 200$$

$$h = i.c = 0.2 \times 50 = 10$$

$$CQ \leq 10000 \Rightarrow 50Q \leq 10000 \Rightarrow Q \leq 200$$

$$Q_{\infty} = \sqrt{\frac{2 \times 4000 \times 200}{10}} = 400 \leq 200$$

بنابراین $Q^* = 200$ واحد می‌باشد.

مثال: در یک سیستم کنترل موجودی، دو قطعه A و B از یک فروشنده تامین و لذا با هم سفارش داده می‌شوند و فقط یک هزینه سفارش برای هر دو آنها تعلق می‌گیرد (C) برای قطعه A محدودیت تعداد سفارش در هر سال (n) وجود دارد ولی برای قطعه B محدودیتی مطرح نیست. در حالی که این دو نقطه همواره با هم سفارش داده شود، با توجه به داده‌های زیر مقدار کل هزینه متغیر سالانه (هزینه موجودی‌ها) را برای این سیستم موجودی محاسبه نموده و مشخص کنید که به کدام گزینه نزدیک‌تر است؟

($n = 10$ / واحد پولی $C = 1000$ / $H_A = H_B = 200$ / هزینه نگهداری/واحد در سال $R_A = 6000$ تقاضا/ واحد در سال $R_B = 4000$ تقاضا)

(۱) 100000 (۲) 110000 (۳) 120000 (۴) 200000

حل : گزینه ۲ صحیح می باشد.

هنگامی که دو قطعه الزام سفارش هم زمان دارند و یکی از آنها محدودیت تعداد سفارش دارد بنابراین برای هر دو آنها محدودیت تعداد سفارش وجود دارد.

$$T_{\min} = 0.1$$

$$T_o = \sqrt{\frac{2 \sum A_j}{\sum h_j D_j}} = \sqrt{\frac{2 \times 1000}{200 \times 6000 + 200 \times 4000}} = 0.032$$

$$T^* = \max \{ 0.1, 0.032 \} = 0.1 = T_{\min} \Rightarrow \begin{cases} Q_a = 0.1 \times 6000 = 600 \\ Q_b = 0.1 \times 4000 = 400 \end{cases}$$

$$k = \frac{\sum A_j}{T} + \frac{\sum h_j Q_j}{2} = \frac{1000}{0.1} + \frac{200 \times 600}{2} + \frac{200 \times 400}{2} = 110000$$

۶- مدل های تخفیف

تخفیف یعنی قیمت هر واحد کالا (C) با افزایش مقدار سفارش کاهش می یابد.

تخفیف دو نوع کلی و نموی (افزایشی) دارد:

- **تخفیف کلی:** در این حالت تخفیف بر کل کالاها به صورت یکسان اعمال می شود. به عبارت دیگر در این حالت تمام واحدهای

خریداری شده با یک قیمت واحد محصول خریداری می شوند.

- **تخفیف نموی یا افزایشی:** در این حالت تخفیف بر هر محدوده به صورت جداگانه اعمال می شود به عبارت دیگر در این حالت

تمامی واحدهای خریداری شده با یک قیمت واحد محصول خریداری نمی شوند و تخفیف بر اساس مقادیر داخل محدوده تخفیف

برای هر واحد محصول تعریف می شود.

کل هزینه خرید دو نوع تخفیف به صورت جدول زیر می باشد:

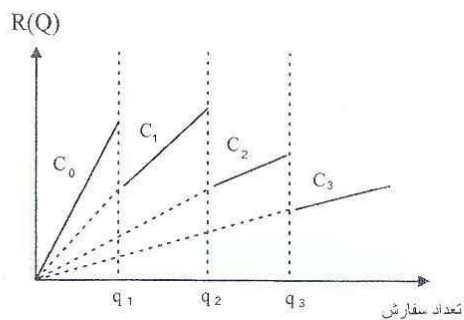
شماره محدوده	محدوده تخفیف	قیمت واحد کالا	کل هزینه خرید (تخفیف کلی)	کل هزینه خرید (تخفیف نموی)
0	$q_0 \leq Q < q_1$	C_0	$C_0 Q$	$C_0 Q$
1	$q_1 \leq Q < q_2$	C_1	$C_1 Q$	$C_0(q_1 - q_0) + C_1(Q - q_1)$
2	$q_2 \leq Q < q_3$	C_2	$C_2 Q$	$C_0(q_1 - q_0) + C_1(q_2 - q_1) + C_2(Q - q_2)$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
j	$q_j \leq Q < q_{j+1}$	C_j	$C_j Q$	$\sum_{i=1}^j C_{i-1}(q_i - q_{i-1}) + C_j(Q - q_j)$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	$q_n \leq Q$	C_n	$C_n Q$	$\sum_{i=1}^n C_{i-1}(q_i - q_{i-1}) + C_n(Q - q_n)$

همان طور که ذکر شد در تخفیف با افزایش مقدار سفارش با قیمت هر واحد کالا کاهش می یابد یعنی:

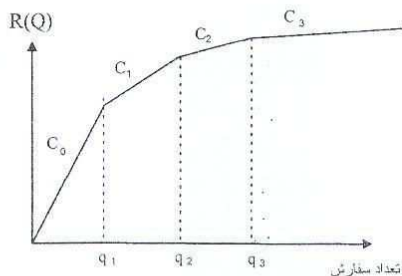
$$C_0 > C_1 > \dots > C_n$$

کل هزینه خریدار را با $R(Q)$ نشان می دهند. و به q_j ها نقاط تخفیف یا نقاط شکست یا نقاط تغییر قیمت می گویند.

نمودار هزینه خرید برای تخفیف کلی به شکل زیر است. این نمودار به صورت گسسته می باشد و امتداد تمام خطوط از مبدأ مختصات می گذرد. شیب خطوط نیز برای قیمت خرید است.



نمودار هزینه خرید تخفیف نموی به صورت پیوسته است. این نمودار در شکل زیر مشخص گشته است. شیب خطوط برابر قیمت خرید است.



نکته: اگر قیمت‌ها یکسان باشد، به ازای یک Q مشخص، هزینه خرید در تخفیف نموی بیشتر از تخفیف کلی است.

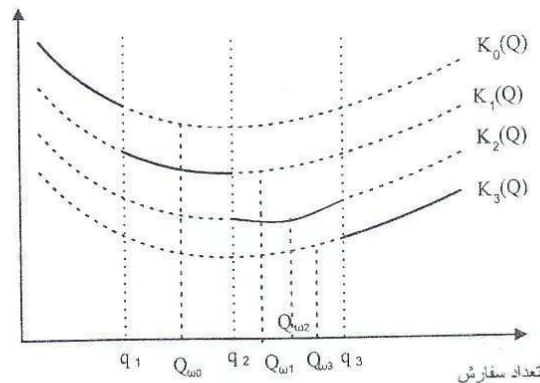
۶-۱ مدل تخفیف کل

فرضیات مدل مانند مدل EOQ است، با این تفاوت که تخفیف از نوع کلی وجود دارد. هدف مدل تعیین مقدار سفارش بهینه (Q^*) و نقطه سفارش بهینه با کمینه کردن هزینه‌هاست. همان‌طور که هزینه خرید در هر محدوده متفاوت است، تابع کل هزینه‌ی سالیانه نیز برای هر محدوده متفاوت و به صورت زیر است.

$$k_j(Q) = \frac{DA}{Q} + \frac{h_j Q}{2} + C_j D, \quad h_j = iC_j + \omega \quad q_i \leq q_{j+1}$$

بنابراین مانند هزینه خرید نمودار کل هزینه‌ی سالیانه سیستم برای مدل تخفیف کلی نیز گسسته می‌باشد.

کل هزینه های سالیانه



بهترین نقطه تابع محدوده زام با مشتق گیری از k به دست می آید و به صورت زیر است:

$$Q_{wj} = \sqrt{\frac{2QA}{h_j}}$$

اما ممکن است این نقطه داخل محدوده خود نباشد بنابراین بهترین نقطه قابل قبول محدوده زام به صورت زیر تعیین می گردد.

- اگر Q_{wj} از نقطه تخفیف انتهایی محدوده (q_{j+1}) بیشتر باشد، بهترین نقطه قابل قبول محدوده زام (Q_j^*) برابر q_{j+1} می باشد.

$$q_{j+1} < Q_{wj} \Rightarrow Q_j^* = q_{j+1}$$

- اگر Q_{wj} بین نقاط تخفیف ابتدایی و انتهایی محدوده خود باشد، بهترین نقطه قابل قبول محدوده برای Q_{wj} می باشد.

$$q_j \leq Q_{wj} < q_{j+1} \Rightarrow Q_j^* = Q_{wj}$$

- اگر Q_{wj} از نقطه تخفیف ابتدایی محدوده (q_j) کمتر باشد، بهترین نقطه قابل قبول محدوده زام (Q_j^*) برابر q_j می باشد.

$$Q_{wj} < q_j \Rightarrow Q_j^* = q_j$$

بنابراین الگوریتم حل مدل به صورت زیر خواهد بود.

از محدوده n ام (محدوده آخر) ابتدا Q_{wj} و سپس Q_j^* را برای محدوده محاسبه می کنیم. این کار را تا زمانی ادامه می دهیم که برای اولین بار Q_{wj} داخل محدوده قابل قبول تخفیف بیافتد $(Q_j^* = Q_{wj})$ در این جا متوقف می شویم و برای نقاط قابل قبول بهینه بدست آمده، $K_j(Q_j^*)$ را محاسبه می کنیم، کمترین هزینه، هزینه بهینه سالیانه و نقطه متناظر با آن نقطه بهینه مدل است.

$$K(Q^*) = \min K_j(Q_j^*)$$

تذکر : علت متوقف شدن در آنجا که برای اولین بار Q_{wj} داخل محدوده قابل قبول تخفیف خود می افتد این است که طی قضیه ای ثابت می گردد که هزینه سالیانه زمانی که $Q_j^* = Q_{wj}$ از تمام هزینه های Q_j^* های سمت چپ خود (محدوده ها با نقاط شکست کوچک تر) کمتر است و نیازی به محاسبه هزینه آنها نمی باشد.

بنابراین نقطه بهینه در مدل تخفیف کلی تنها می تواند نقطه ویلسون و نقاط تغییر قیمت درست است نقطه ویلسون باشد.

نکته: روابط زیر برای Q_{ω_j} و $K(Q_{\omega_j})$ های تمام محدوده‌ها برقرار است.

$$Q_{\omega_0} \leq Q_{\omega_1} \leq Q_{\omega_2} \leq \dots \leq Q_{\omega_n}$$

$$K_0(Q_{\omega_0}) > K_1(Q_{\omega_1}) > K_2(Q_{\omega_2}) > \dots > K_n(Q_{\omega_n})$$

نکته: همان‌طور که ذکر گردید، مجموعه قابل بررسی نقاط بهینه برای به دست آوردن Q^* نقطه ویلسون و نقاط تغییر قیمت بعد از آن است یعنی:

$$Q^* = \{Q_{\omega_2}, q_3, q_4, \dots\}$$

نکته: اگر کل هزینه نگهداری سالیانه را TCH و کل هزینه سفارشی سالیانه را TCS بنامیم. در نقطه Q_{ω_2} ، $TCH = TCS$ و

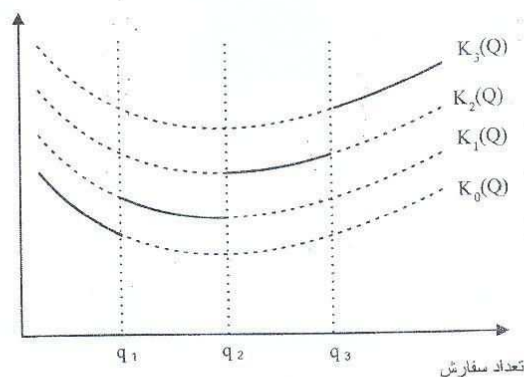
در نقاط q_2, q_3, \dots از آنجا که بزرگتر از Q_{ω_1} مربوط به خود هستند $TCH > TCS$ است پس می‌توان گفت در نقطه

بهینه مدل تخفیف رابطه بین هزینه نگهداری و هزینه سفارشی به صورت زیر است:

$$TCH \geq TCS$$

نکته: در یک مدل خلاف تخفیف کلی اگر به ازای افزایش مقدار سفارش، قیمت واحد کالا نیز افزایش یابد یعنی $C_0 < C_1 < C_2 < \dots < C_n$ روش حل مدل مشابه تخفیف کلی است، با این تفاوت که از محدوده اول شروع می‌کنیم و Q_j^* را تا آنجا که $Q_j^* = Q_{\omega_j}$ شود ادامه می‌دهیم و... در این حالت ترتیب نمودارها برعکس می‌گردد یعنی نمودار هزینه کل به صورت زیر خواهد بود:

کل هزینه سیستم



در این حالت مجموعه نقاط بهینه قابل بررسی، نقطه ویلسون و نقاط تغییر قیمت در سمت چپ نقطه ویلسون است یعنی

$$Q^* = \{Q_{\omega_2}, q_2, q_1\}$$

همچنین رابطه بین هزینه نگهداری و هزینه سفارشی سالیانه به صورت زیر است.

$$TCH \leq TCS$$

نکته: در صورتی که تخفیف کلی برای سایر پارامترهای مدل مثل A, h, \dots باشد، دقیقاً مانند روش حل مدل تخفیف کلی عمل

می‌کنیم یا این تفاوت که Q_{ω_j}, K_j را بر اساس پارامتر تغییر یافته محاسبه می‌کنیم.

مثال: قیمت خرید هر واحد کالایی برابر 2 تومان و میزان تقاضای سالیانه آن 1000 واحد می‌باشد. هزینه نگهداری سالیانه هر واحد کالا 2 تومان بوده و هزینه انجام یک سفارش وابسته به مقدار سفارش و چنین است:

10 تومان اگر کمتر از 110 واحد سفارش داده شود و 8 تومان اگر بیش از 110 واحد سفارش شود. اندازه بهینه سفارش‌دهی چند واحد خواهد بود؟

- 110 (۱) 100 (۲) 90 (۳) 89 (۴)

حل: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$C = 2, D = 1000, h = 2$

شماره محدوده	محدوده	A
0	$Q < 110$	10
1	$Q > 110$	8

$Q_{\omega_1} = \sqrt{\frac{2 \times 1000 \times 8}{2}} = 89.5 \neq 110 \Rightarrow Q_1^* = 110$

$Q_{\omega_0} = \sqrt{\frac{2 \times 1000 \times 10}{2}} = 100 < 110 \Rightarrow Q_0^* = 100$

$k(Q_1^*) = \frac{DA_1}{Q} + h \frac{Q_1}{C} = \frac{1000 \times 8}{110} + \frac{2 \times 110}{2} = 182$

$K(Q_0^*) = \sqrt{2DA_0h} = \sqrt{2 \times 1000 \times 10 \times 2} = 200$

از آنجایی که هزینه سفارش ثابت است و هزینه نگهداری به ازای هر واحد کالا کمتر از 110 واحد است، بنابراین بهترین گزینه سفارش 110 واحد است.

بنابراین $Q^* = 110$ می‌باشد که کمترین هزینه را داراست.

مثال: برای خرید یک کالا، فروشنده در مقابل مقادیر هر بار سفارش (q)، قیمت هر واحد را به شرح زیر اعلام نموده است.

قیمت واحد	q
510	$0 \leq q \leq 100$
400	$100 \leq q \leq 300$
390	$300 \leq q$

با توجه به نرخ تقاضای کالا و هزینه سفارش آن، نقطه ویلسون معتبر منحنی هزینه کل موجودی‌ها برابر با 250 واحد کالا محاسبه شده است. مقدار بهینه (اقتصادی EOQ) برای سفارش این کالا مطابق با کدام گزینه می‌باشد؟

- 250 یا 300 (۱)
 250 دقیقاً (۲)
 250 یا 200 یا 100 (۳)
 هر مقداری از 250 به پایین (۴)

حل: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

از آنجا که $Q_{\omega} = 250$ در محدوده دوم قرار دارد بر اساس الگوریتم حل ذکر شده، مجموعه نقاط بهینه قابل بررسی 250 و 300 است و از آنجا که اطلاعات کافی برای محاسبه هزینه این دو نقطه در دست نیست تنها می‌تواند گفت که نقطه بهینه 250 یا 300 می‌باشد.

مثال: برای خرید یک نوع کالا، فروشنده به ازای مقادیر مختلف سفارش تخفیفی قائل نمی‌شود، ولی شرکت حمل و نقل هزینه‌های حمل کالا را به صورت زیر پیشنهاد نموده است:

مقدار	واحد هزینه حمل (ریال / کیلو)
$0 < Q < 10000$	2.5
$Q \geq 10000$	1.5

هزینه هر بار سفارش کالا 400 ریال و واحد هزینه نگهداری (انبارداری) کالا $0.1 = \frac{\text{ریال}}{\text{کیلو-سال}}$ و مصرف سالیانه کالا 500 کیلو است. در این شرایط مقدار اقتصادی هر بار سفارش کالا برابر است با:

(۱) 2000 (۲) 1000 (۳) 12000 (۴) 500

حل: گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$D = 500, A = 400, h = 0.1$$

$$Q_0 = \sqrt{\frac{2 \times D \times A}{h}} = \sqrt{\frac{2 \times 500 \times 400}{0.1}} = 2000$$

Q_0 در محدوده اول است بنابراین

$$Q_1^* = 2000$$

$$Q_2^* = 10000$$

$$K(Q_2^*) = \frac{DA}{Q_2} + \frac{hQ_2}{2} + C_2D = \frac{500 \times 400}{2000} + \frac{0.1 \times 2000}{2} + 1.5 \times 500 = 1275$$

$$K(Q_1^*) = \sqrt{2DAh} + C_1D = \sqrt{2 \times 500 \times 4 \times 0.1} + 2.5 \times 500 = 1450$$

$1275 < 1450$ است بنابراین $Q_2^* = 10000$ که کمترین هزینه را دارد، به عنوان مقدار اقتصادی هر بار سفارش در نظر گرفته می‌شود.

۶-۲- مدل تخفیف نموی یا افزایشی

فرضیات مدل مانند مدل EOQ است با این تفاوت که تخفیف از نوع نموی وجود دارد.

هدف مدل تعیین مقدار سفارش بهینه (Q^*) و نقطه سفارش بهینه با کمینه کردن هزینه‌هاست.

همان‌طور که ذکر شد تابع کل هزینه سالیانه در مدل‌های تخفیف برای هر محدوده متفاوت است و در مدل تخفیف نموی به صورت زیر است.

$$k_j(Q) = \frac{DA}{Q} + h_j \frac{Q}{2} + \bar{C}D, h_j = i\bar{C} \quad q_j \leq A < q_{j+1}$$

که در آن $\bar{C} = \frac{R(Q)}{Q}$ متوسط قیمت خرید است و

$$R(Q) = \sum_{i=1}^j C_{i-1}(q_i - q_{i-1}) + C_j(Q - q_j)$$

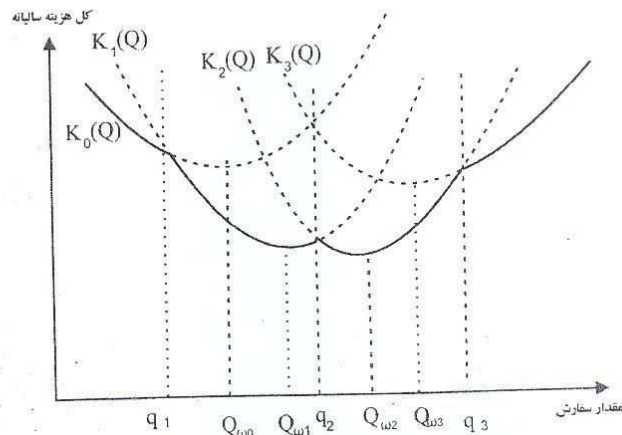
برابر کل هزینه خرید Q کلاست. به همین صورت می‌توان کل هزینه خرید تا نقطه شکست q_j را به صورت $R(q_j)$ را به صورت $R(q_j)$ و با استفاده از رابطه بالا محاسبه کرد. بنابراین رابطه کل هزینه سالیانه برای محدوده Q به صورت زیر بدست خواهد آمد:

$$K_j(Q) = \frac{D}{Q}(A + R(q_j) - C_j q_j) + i C_j \frac{Q}{2} + C_j D + \frac{i R(q_j)}{2} - \frac{i C_j q_j}{2}$$

بر اساس این تابع و با مشتق‌گیری از آن مقدار بهینه هر محدوده به صورت زیر خواهد بود:

$$Q_{wj} = \sqrt{\frac{2D(A + R(q_j) - C_j q_j)}{i C_j}}$$

نمودار هزینه کل سالیانه مدل تخفیف نموی باشد نمودار هزینه خرید آن پیوسته است و به صورت شکل زیر خواهد بود.



نکته: ثابت می‌گردد که نقاط تخفیف هیچ‌گاه نمی‌توانند نقطه بهینه باشند بنابراین بهینه از بین Q_{wj} هایی خواهد بود که در محدوده خود قرار گیرند.

بدین اساس الگوریتم حل مدل به صورت زیر خواهد بود:

برای تمامی محدوده‌ها Q_{wj} را بدست می‌آوریم. هر محدوده‌ای که Q_{wj} آن داخل محدوده تخفیف افتد، آن $Q_j^* = Q_{wj}$ می‌گردد. سایر محدوده‌ها نقاط بهینه قابل قبول ندارند. نقاط بهینه قابل قبول بدست آمده را در تابع هزینه مرتبط گذاشته و $k_j(Q_j^*)$ را بدست می‌آوریم. کمترین هزینه، هزینه سالیانه Q_j^* متناظر با آن، Q_j^* بهینه است.

مثال: در یک مدل تخفیف نموی (Incremental Discount) اگر مقدار خرید مساوی و یا کمتر از q_1 باشد هزینه هر واحد C_0 و اگر مقدار خرید بیشتر از q_1 باشد، هزینه هر واحد برای واحدهای اضافه بر q_1 برابر C_1 ($C_1 < C_0$) است. مقدار بهینه سفارش را با Q_0 نشان دهید. در این صورت به نظر شما کدام یک از عبارات زیر صحیح است؟

(۱) Q_0 همیشه کوچکتر از q_1 است.

(۲) Q_0 بزرگتر از q_1 است.

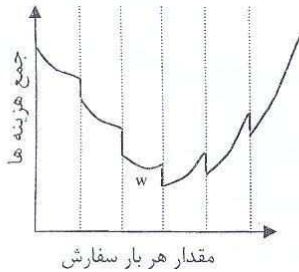
(۳) Q_0 نمی‌تواند برابر q_1 باشد.

(۴) برای تعیین Q_0 باید هزینه سیستم در نقطه q_1 محاسبه شود.

حل : گزینه ۳ صحیح می باشد.

همان طور که ذکر شد نقطه بهینه تخفیف نموی (Q_0) نمی تواند برابر نقاط تخفیف (مانند q_1) گردد.

مثال: در صورتی که فروشنده حاضر باشد با زیاد شدن مقدار هر بار سفارش، تخفیفی در قیمت واحد کالا قائل شود، آنگاه منحنی جمع هزینه موجودی ها در سال (شامل هزینه سفارشات + هزینه نگهداری + هزینه خرید) مطابق نمودار خواهد بود. نقطه W نقطه ویلسون می نمایم. برای یافتن مقدار اقتصادی هر بار سفارش (EOQ) باید مقدار جمع هزینه موجودی ها را در نقاط زیر حساب نموده و با یکدیگر مقایسه نمود:



(۱) فقط نقطه ویلسون

(۲) نقطه ویلسون و نقاط تغییر قیمت در سمت چپ نقطه ویلسون

(۳) نقطه ویلسون و نقاط تغییر قیمت در سمت راست نقطه ویلسون

(۴) نقطه ویلسون و نقاط تغییر قیمت در سمت راست و چپ نقطه ویلسون

حل : گزینه ۳ صحیح می باشد.

از نمودار مشخص است که تخفیف به صورت کلی می باشد. بنابراین همان طور که ذکر شد نقطه بهینه یکی از نقاط ویلسون و یا نقاط تغییر قیمت در سمت راست نقطه ویلسون است.

مثال: جهت جلوگیری از احتکار، قیمت کالایی طبق جدول زیر پیشنهاد شده است به طوری که $C_1 < C_2 < C_3$ می باشد. هزینه نگهداری این کالا مستقل از قیمت است، اگر کل هزینه های نگهداری سالیانه را با TC_H کل و هزینه های سفارش دهی سالیانه را با TC_S نشان دهیم، کدام رابطه را خواهیم داشت:

مقدار سفارش	قیمت هر واحد
$0 - q_1$	C_1
$q_1 - q_2$	C_2
$q_2 - q_3$	C_3

$$TC_H > TC_S \quad (۲) \quad TC_H = TC_S \quad (۱)$$

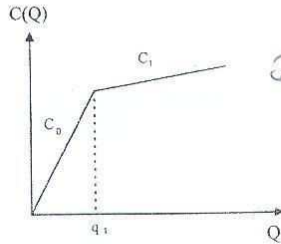
$$TC_H \leq TC_S \quad (۴) \quad TC_H \neq TC_S \quad (۳)$$

$$C_1 > C_2 > C_3 \rightarrow TC_H > TC_S$$

حل : گزینه ۴ صحیح می باشد.

این مدل، خلاف مدل تخفیف کلی است یعنی $C_1 < C_2 < C_3$ می باشد. بنابراین مجموعه نقاط بهینه نقطه ویلسون و نقاط تخفیف سمت چپ آن (کوچک تر از نقطه ویلسون) است پس $TC_H \leq TC_S$ می باشد.

مثال: در یک مسأله تخفیف اگر مقدار هر بار خرید برای Q باشد، آنگاه مقدار هزینه مواد در هر بار $C(Q)$ در شکل رسم شده است. اگر قیمت هر واحد مواد را با C نمایش دهیم، و مقدار EOQ را به ازای $C = C_0$ با $Q_0(0)$ و به ازای $C = C_1$ با $Q_0(1)$ نشان دهیم. فرض کنید $Q_0(0) < Q_0(1)$ و نیز $q_1 < Q_0(1)$ است. با توجه به این اطلاعات کدام عبارت صحیح است؟



چون $Q_0(1)$ تنها نقطه مورد نیاز است
بنابراین نقطه بهینه است پس $q_1 > Q_0(1)$
گزینه صحیح ۱ است

- (۱) برای پیدا کردن مقدار سفارش بهینه به هیچ‌گونه محاسبه هزینه سالیانه نیاز نیست.
- (۲) برای پیدا کردن مقدار سفارش بهینه باید هزینه سالیانه سیستم در نقطه q_1 محاسبه شود.
- (۳) برای پیدا کردن مقدار سفارش بهینه باید هزینه سالیانه سیستم در نقطه $Q_0(1)$ محاسبه شود.
- (۴) برای پیدا کردن مقدار سفارش بهینه باید هزینه سالیانه سیستم در نقطه $Q_0(0)$ محاسبه شود.

حل: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

شکل نمودار هزینه خرید بیان‌گر این مطلب است که تخفیف از نوع نموی است. بنابراین نقاط بهینه، نقاط ویلسونی هستند که در محدوده تخفیف خود قرار گیرند. $Q_0(0) < q_1$ است بنابراین در محدوده تخفیف خود $(Q < q_1)$ قرار ندارد. $q_1 < Q_0(1)$ است یعنی در محدوده تخفیف خود $(Q > q_1)$ قرار دارد و از آنجا که تنها $Q_0(1)$ در محدوده تخفیف خود قرار دارد نیازی به محاسبه هزینه سالیانه‌ای نیست و $Q_0(1)$ نقطه بهینه مدل است.

newsboy problem

۷- مدل احتمالی یک دوره‌ای

این مدل تنها برای یک دوره است بنابراین به مدل درخت کریسمس یا پسرک روزنامه فروش نیز معروف است.
فرضیات مدل:

- ۱- تقاضا احتمالی و ساکن است.
- ۲- سفارش صرفاً یکبار در ابتدای دوره به موجودی اضافه می‌گردد.
- ۳- برنامه‌ریزی صرفاً برای یک دوره انجام می‌پذیرد و موجودی باقیمانده در انتهای دوره حراج شده یا از بین می‌رود.
- ۴- کمیود جایز است.
- ۵- هزینه نگهداری صرفاً برای واحدهای باقی‌مانده در انتهای دوره (که حراج می‌شوند یا از بین می‌روند) محاسبه می‌گردد.
- ۶- در ابتدای دوره موجودی برابر با I به عنوان موجودی ابتدای دوره وجود دارد.

پارامترهای مدل:

D : متغیر تصادفی تقاضا در یک دوره

$f_D(x)$: تابع چگالی تقاضا در مدت زمان یک دوره

$F_D(x)$: تابع توزیع تجمعی تقاضا در مدت زمان یک دوره

C : قیمت خرید هر واحد

V : قیمت فروش هر واحد

π : هزینه کمیود هر واحد

L : قیمت حراج هر واحد

A : هزینه هر بار سفارش

h : هزینه نگهداری هر واحد در مدت زمان یک دوره

H : ترکیب هزینه‌های هر واحد باقیمانده در انتهای دوره

$L - H = h +$ هزینه انتقال جهت حراج یا فروش برحسب هر واحد

I : موجودی ابتدای دوره (یک لحظه قبل از سفارش)

متغیرهای مدل:

R^* : موجودی بهینه ابتدای دوره (یک لحظه بعد از سفارش)

Q^* : مقدار سفارش بهینه

$$Q^* = R^* - I$$

همان‌طور که در فرضیات مدل ذکر شد موجودی به دوره‌ی بعد منتقل نمی‌گردد و در آخر دوره باید تصمیم بگیریم که آن را از بین ببریم یا با قیمتی کمتر از C آن را بفروشیم.

مدل‌های احتمالی تک دوره‌ای می‌توانند با تقاضای پیوسته و یا گسسته باشند و همین‌طور هزینه هر بار سفارش دهی (A) ممکن است صفر باشد بنابراین مدل‌های احتمالی تک دوره‌ای به 4 نوع تقسیم می‌گردند:

- تقاضا پیوسته و $A = 0$

- تقاضا پیوسته و $A \neq 0$

- تقاضا گسسته و $A = 0$

- تقاضا گسسته و $A \neq 0$

$$H = h - L$$

در اینجا مدل‌هایی که در آن $A = 0$ را بررسی خواهیم کرد، روش حل مدل‌هایی که در آن $A \neq 0$ است به صورت سعی و خطاست الگوریتم حل مدل در حالتی که تقاضا پیوسته و $A = 0$ باشد به صورت زیر است:
مقدار R را از فرمول زیر محاسبه می‌کنیم:

$$F_D(R^*) = \frac{V + \pi - C}{V + \pi + H}$$

بدین معنی که به دنبال نقطه‌ای می‌گردیم که تابع توزیع تجمعی در آن نقطه برابر $\frac{V + \pi - C}{V + \pi + H}$ شود، آن نقطه برابر R^* می‌باشد.

- اگر $R^* \leq I$ باشد نیازی به سفارش نمی‌باشد.

- اگر $R^* > I$ باشد باید به میزان $Q^* = R^* - I$ سفارش دهیم.

در حالت گسسته ممکن است تابع توزیع تجمعی در هیچ نقطه‌ای دقیقاً برابر $\frac{V + \pi - C}{V + \pi + H}$ نشود بنابراین برای حالتی که تقاضا

گسسته و $A = 0$ است به صورت زیر عمل می‌کنیم.

در حالت گسسته، کوچک‌ترین مقداری از تقاضا در مدت زمان یک دوره که تابع توزیع تجمعی تقاضا را مساوی و یا بزرگتر می‌کند را

به عنوان R^* انتخاب می‌کنیم، یعنی کوچک‌ترین مقداری که به ازای آن

$$F_D(R^*) \geq \frac{V + \pi - C}{V + \pi + H}$$

- اگر $R^* \leq I$ باشد نیازی به سفارش نمی‌باشد.

- اگر $R^* > I$ باشد به میزان $Q^* = R^* - I$ سفارش می‌دهیم.

تذکر: متوسط هزینه نگهداری، متوسط هزینه کمبود، متوسط موجودی باقیمانده و متوسط مقدار کمبود از روابط زیر بدست می‌آید.

تقاضا پیوسته: $\text{متوسط موجودی باقیمانده در انتهای دوره} = \int_0^R (R - x) f_D(x) dx$

تقاضا گسسته: $\text{متوسط موجودی باقیمانده در انتهای دوره} = \sum_{x=0}^R (R - x) p\{D = x\}$

(متوسط موجودی باقیمانده در انتهای دوره) $= h$ متوسط هزینه نگهداری برای واحدهای باقیمانده در انتهای دوره

تقاضا پیوسته: $\text{متوسط تعداد کمبود در یک دوره} = \int_R^\infty (x - R) f_D(x) dx$

تقاضا گسسته: $\text{متوسط تعداد کمبود در یک دوره} = \sum_{x=R}^\infty (x - R) p\{D = x\}$

(متوسط تعداد کمبود در یک دوره) $= \pi$ متوسط هزینه کمبود در یک دوره

مثال: کارگاهی قرار است محصولی را که در ایام عید به فروش می‌رسد، تولید کند. تابع توزیع تصادفی تقاضا برای این محصول به صورت زیر است. اگر هزینه تولید هر واحد برابر با 3000 تومان و قیمت فروش هر واحد برابر با 5000 تومان و قیمت حراج هر واحد باقی مانده در انتهای دوره برابر با 2000 تومان باشد.

الف) میزان تولید بهینه برای این محصول چقدر خواهد بود.

ب) متوسط موجودی باقیمانده در انتهای دوره چقدر خواهد بود.

ج) متوسط تعداد کمبود در یک دوره چقدر خواهد بود

x	≤ 5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$p\{D = x\}$	0	0.05	0.05	0.1	0.2	0.2	0.2	0.1	0.05	0.05

حل :

تومان / عدد $L = 2000$ و تومان / عدد $V = 5000$ و تومان / عدد $C = 3000$

$$A = 0, I = 0, h = 0, \pi = 0$$

$$H = (h + 0 - L) = 0 - 2000 = -2000$$

ابتدا باید تابع توزیع تجمعی را بدست آوریم:

x	≤ 5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$P_D(x)$	0	0.05	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	0.9	0.95	1

$$\frac{V + \pi - C}{V + \pi + H} = \frac{500 + 0 - 3000}{5000 + 0 + (-2000)} = 0.66$$

$$\Rightarrow R^* = 11 \Rightarrow Q^* = R^* - I = 11 - 0 = 11$$

به اندازه 11 واحد سفارش می‌دهیم.

$$\text{متوسط موجودی باقیمانده در انتهای دوره} = \sum_{i=0}^{11} (11 - i) p\{D = i\}$$

$$= (11 - 6) \times 0.05 + (11 - 7) \times 0.05 + (11 - 8) \times 0.1 + (11 - 9) \times 0.2 + (11 - 10) \times 0.2 + (11 - 11) \times 0.2 = 1.35$$

$$\text{متوسط کمبود در یک دوره} = \sum_{i=11}^{14} (i - 11) P\{D = i\}$$

$$= (14 - 11) \times 0.05 + (13 - 11) \times 0.05 + (12 - 11) \times 0.1 + (11 - 11) \times 0.2 = 0.35$$

مثال: در یک مدل کنترل موجودی احتمالی یک دوره‌ای، هزینه واحد کسری 20 واحد پول است. اگر توزیع تقاضا یکنواخت در فاصله (0, 10) باشد، هزینه کسری مورد انتظار وقتی که در ابتدای دوره دو واحد کالا وجود داشته باشد و چهار واحد نیز تهیه شود چقدر است؟

(۴) 20 واحد پولی

(۳) 16 واحد پولی

(۲) 12 واحد پولی

(۱) صفر واحد پولی

حل: گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$I = 2, Q = 4, \pi = 20$$

$$D \sim U(0, 10) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{10}$$

$$R = Q + I = 6$$

$$\text{متوسط کسری یک دوره} = \int_6^{10} (x - 6) \frac{1}{10} dx = \left[\frac{x^2}{20} - \frac{6x}{10} \right]_6^{10} = 0.8$$

$$\text{هزینه کسری مورد انتظار} = \pi (\text{متوسط کسری در یک دوره}) = 20 \times 0.8 = 16$$

۸-۱ خط‌مشی سیستم موجودی / خط‌مشی دور سیستم موجودی / خط‌مشی های سفارش دهی

در خط‌مشی سیستم موجودی چگونگی کسب اطلاع در موجودی و هم چنین نوع و نحوه سفارش دهی مشخص می‌گردد.

دو نوع خط‌مشی اصلی وجود دارد:

- خط‌مشی مرور دائم
- خط‌مشی مرور دوره‌ای

۸-۱-۱ خط‌مشی مرور دائم

در این خط‌مشی وضعیت موجودی در هر لحظه از زمان بررسی می‌گردد. به محض آنکه مقدار موجودی برابر یا کمتر از نقطه سفارش

(r) شود، به اندازه ثابت Q سفارش می‌دهیم.

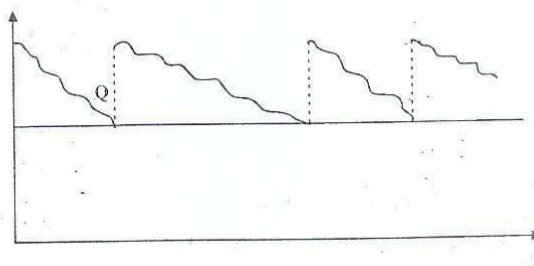
حالت معروف این خط‌مشی FOS، (r, Q)، نقطه سفارش، کنترل موجودی مقداری و مقدار سفارش ثابت نامیده می‌شود. در این

حالت وضعیت موقعیت موجودی در هر لحظه مرور می‌شود، به محض اینکه به مقدار نقطه سفارش (r) رسید به اندازه ثابت Q

سفارش می‌دهیم و این کار به طور مرتب تکرار می‌شود، در این خط‌مشی فاصله بین دو سفارش متوالی لزوماً یکسان نیست.

نمودار موقعیت موجودی این خط‌مشی می‌تواند به صورت زیر باشد.

موقعیت موجودی



۸-۲ خط‌مشی مرور دوره‌ای

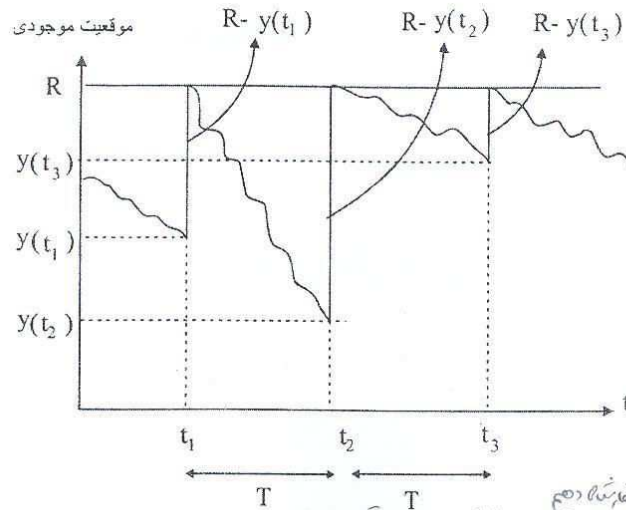
در این خط‌مشی در فواصل زمانی مشخص و یکسان موقعیت موجودی مرور می‌گردد.

حالت معروف این خط‌مشی FOI، (R, T)، سقف موجودی و فاصله سفارش ثابت نامیده می‌شود. در این حالت زمان‌های t_1 و t_2

و t_3 ... که فاصله‌ای برابر T دارند، موقعیت موجودی مرور می‌گردد و تا سقف موجودی (R) سفارش داده می‌شود. در این خط

مشی مقدار سفارش لزوماً یکسان نیست.

نمودار موقعیت موجودی این خط‌مشی می‌تواند به صورت زیر باشد.

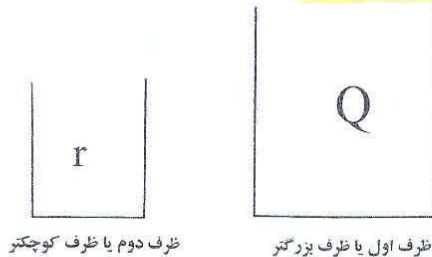


۳-۸- مقایسه بین FOS و FOI

- ۱- احتمال مواجهه با کمبود به علت مرور دائم در FOS از FOI کمتر است بنابراین ذخیره اطمینان (SS) کمتری دارد.
- ۲- هم گروه کردن اقلام سفارش (سفارش هم زمان) در FOI امکان پذیر است اما در FOS امکان پذیر نیست.
- ۳- هزینه‌های حمل و نقل سفارش در FOI به علت هم گروه کردن اقلام سفارش کمتر از FOS است. لذا فروشندگان بیشتر تمایل به خط مشی FOI برای خریدار دارد.
- ۴- هزینه‌های مرور سیستم موجودی که جزو هزینه‌های سفارش‌دهی است در FOI نسبت به FOS کمتر است.

۴-۸- خط مشی سفارش‌دهی دو ظرفی، دو قفسه‌ای، مینی‌موم ماگزیمم، Two-Bin

- این خط مشی که حالت کاربردی از خط مشی FOS است (مرور دائم) انبار را به دو قسمت ظرف بزرگتر یا ظرف اول (Q) و ظرف کوچکتر یا ظرف دوم (r) تقسیم می‌کند.
- ابتدا از ظرف بزرگتر مصرف می‌کنیم و به محض اینکه بخواهیم از ظرف کوچکتر (r) مصرف کنیم سفارش می‌دهیم و تا زمان رسیدن سفارش از ظرف کوچکتر مصرف می‌کنیم. بعد از رسیدن سفارش ابتدا ظرف کوچکتر را تکمیل کرده و هر چه باقی بماند در ظرف بزرگتر خواهیم ریخت و دوباره مصرف را شروع می‌کنیم.



مثال: سیستم معروف موجودی دو قفسه‌ای Two Bin system

(۱) حالت خاصی از سیستم موجودی مقدار سفارش ثابت محسوب می‌شود.

(۲) جزء سیستم دوره ثابت محسوب می‌شود.

(۳) ترکیبی از در سیستم فوق است.

(۴) جزء هیچ‌کدام از در سیستم فوق نیست.

حل: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

همان‌طور که ذکر گردیده سیستم Two Bin حالت خاصی از خط مشی FOS یا همان مقدار سفارش ثابت است.

۹- مدل های احتمالی

۹-۱- مدل احتمالی ساده با خط مشی سفارش دهی FOS و (r, Q)

فرضیات مدل مانند مدل EOQ است با تفاوت های زیر:

۱- تقاضا احتمالی و ساکن است.

۲- کمبود جایز است.

۳- خط مشی سفارش دهی FOS است.

هدف مدل تعیین مقدار سفارش بهینه (Q) و نقطه سفارش (r^*) با کمینه کردن هزینه هاست.

پارامترهای مدل:

D : متغیر تصادفی تقاضا در سال

μ_D : میانگین تقاضا در سال

σ_D : انحراف معیار تقاضا در سال

μ_{D_L} : میانگین تقاضا در مدت زمان تحویل

D_L : متغیر تصادفی تقاضا در مدت زمان تحویل

σ_{D_L} : انحراف معیار تقاضا در مدت زمان تحویل

p : سطح خدمت، سطح اطمینان

متغیرهای مدل:

Q : مقدار سفارش

r : نقطه سفارش، حداقل موقعیت موجودی

SS: موجودی اطمینان (ذخیره ایمنی): موجودی اطمینان در مدل های احتمال جهت جواب گویی به تغییرات تقاضا در مدت زمان

تحويل تعریف می گردد و مقدار آن در تعاملی بین کل هزینه های کمبود نگهداری تعیین می شود.

نکته: در صورتی که SS افزایش یابد، کل هزینه های نگهداری افزایش و کل هزینه های کمبود کاهش می یابد.

$$r = \mu_{D_L} + SS$$

بدین اساس نقطه سفارش مجدد از رابطه زیر محاسبه می گردد.

تعریف سطح خدمت

سطح خدمت برابر است با احتمال اینکه در یک دوره با کمبود مواجه نشویم یعنی احتمال اینکه تقاضا در مدت زمان تحويل کوچکتر

یا مساوی باشد.

$$P\{D_L \leq r\} = \text{سطح خدمت} \Rightarrow F_{D_L}(r) = p$$

سطح ریسک یا سطح خطر برابر است با احتمال اینکه در یک دوره با کمبود مواجه شویم: $(1 - P)$

نحوه محاسبه سطح خدمت (p)

الف) توسط مدیر سیستم موجودی مشخص گردد.

ب) از روی مقادیر N_b ، T_b توسط رابطه زیر مشخص گردد.

N_b : متوسط تعداد دوره‌های دارای کمبود در سال

T_b : متوسط فاصله زمانی بین دو دوره کمبود متوالی یا فاصله انتظاری مواجه شدن با یک دوره دارای کمبود

$$1 - p = \frac{\text{متوسط تعداد دوره‌های دارای کمبود به سال}}{\text{متوسط تعداد دوره‌ها در سال}} = \frac{N_b}{\mu_D} = N_b \times \frac{Q}{D}$$

در مدل‌های احتمالی گاه‌به‌گاه μ_D از D استفاده می‌کنند.

$$T_b = \frac{I}{N_b}$$

الگوریتم حل مدل احتمالی ساده FOS

برای حل مدل احتمالی ساده FOS دو روش وجود دارد:

(۱) با استفاده از مقادیر π و $\hat{\pi}$: در این روش تابع ϕ هزینه‌ها را نوشته و نسبت به Q و r مشتق می‌گیریم و روابط محاسبه Q و r بدست می‌آید.

(۲) با استفاده از مفهوم سطح خدمت که جایگزین پارامترهای π و $\hat{\pi}$ می‌گردد. الگوریتم این روش به شرح ذیل است.

الف) Q^* از رابطه روبرو محاسبه می‌گردد. در این رابطه منظور از D ، میانگین توزیع تقاضا در سال یعنی μ_D است.

$$Q^* = \sqrt{\frac{2DA}{h}}$$

ب) مقدار سطح خدمت (p) از روش‌های عنوان شده بدست می‌آید.

$$1 - p = N_b \times \frac{Q}{D}$$

ج) مقدار نقطه سفارش (r) از رابطه زیر محاسبه می‌گردد.

اگر تقاضا پیوسته باشد مقداری از تقاضا در مدت زمان تحویل برابر با r می‌باشد که به ازای آن تابع توزیع تجمعی برابر با سطح خدمت (p) شود.

$$F_{D_L}(r) = p$$

اگر تقاضا گسسته باشد کوچک‌ترین مقداری از تقاضا در مدت زمان تحویل که رابطه زیر را برقرار می‌کند برابر r می‌گردد.

$$F_{D_L}(r) \geq p$$

د) مقدار ذخیره اطمینان از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$r = \mu_{D_L} + SS \Rightarrow SS = r - \mu_{D_L}$$

هـ) متوسط مقدار کمبود در دوره $(\bar{b}(r))$ ، متوسط مقدار کمبود در سال $(B(r))$ و درصد تقاضایی (مشتریانی) که با کمبود مواجه می‌شوند (در دوره یا سال) از روابط زیر محاسبه می‌گردد.

$$\bar{b}(r) = \int_r^{\infty} (x - r) f_{D_L}(x) dx$$

تقاضا پیوسته

$$\bar{b}(r) = \sum_{x=r}^{\infty} (x-r)p\{D_L = x\}$$

تقاضا گسسته

$$B(r) = \frac{D}{Q} \bar{b}(r)$$

$$\text{درصد تقاضایی که با کمبود مواجه می‌شوند} = \frac{B(r)}{D} = \frac{\bar{b}(r)}{Q}$$

(و) متوسط موجودی در دست از رابطه زیر محاسبه می‌گردد

$$\bar{I} = \frac{Q}{2} + SS$$

مثال: میانگین تقاضا در مدت زمان تحویل محصول 90 واحد و توزیع احتمالی تقاضای محصول در طی مدت زمان تحویل آن در جدول زیر داده شده است. متوسط تقاضای سالیانه این محصول 500 واحد و مقدار هر بار سفارش آن ثابت و برابر 50 واحد است.

X	80	85	90	95	100	105
p(X=x)	0.3	0.2	0.05	0.2	0.15	0.1

قرار است سطح خدمت (میزان اطمینان از موجودی) طوری انتخاب شود که احتمال کمبود و موقع دریافت هر بار سفارش 0.25 (25 درصد) باشد در این ارتباط به سوال‌های زیر پاسخ دهید.

- موجودی اطمینان این محصول برابر است با:

- (۱) 5 واحد (۲) 10 درصد (۳) 5 تا 10 واحد (۴) از 10 واحد بیشتر

حل: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

X	80	85	90	95	100	105
F(x)	0.2	0.5	0.55	0.75	0.9	1

$$1 - p = 0.25 \Rightarrow p = 0.75$$

به دنبال کوچک‌ترین عدد صحیحی می‌گردیم که $F_x(r) \geq 0.75$ باشد.

$$\Rightarrow r = 95$$

$$\mu_{D_L} = \sum x p\{X=x\} = 80 \times 0.3 + 85 \times 0.2 + 90 \times 0.05 + 100 \times 0.15 + 105 \times 0.1 = 90$$

$$SS = r - \mu_{D_L} = 95 - 90 = 5$$

- به طور متوسط چه مدت زمان طول می‌کشد تا در یکی از دوره‌های سفارش کمبود رخ دهد؟

- (۱) 2.5 سال (۲) 1.6 سال (۳) 0.4 سال (۴) 1.4 سال

حل: گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$1 - p = N_b \times \frac{Q}{D} \Rightarrow N_b = \frac{D}{Q}(1 - p) = \frac{500}{50} \times 0.25 = 2.5$$

$$T_b = \frac{1}{N_b} = \frac{1}{2.5} = 0.4$$

- مقدار متوسط کل کمبود در سال چقدر است؟

- (۱) 15 واحد (۲) 17.5 واحد (۳) 1.5 واحد (۴) 1.75 واحد

حل : گزینه ۲ صحیح می باشد.

$$\bar{b}(r) = \sum_{95}^{100} (x - r) p \{D_L = x\} = (105 - 95) \times 0.1 + (100 - 95) \times 0.15 + (95 - 9) \times 0.2 = 1.75$$

$$B(r) = \frac{D}{Q} \bar{b}(r) = \frac{500}{50} \times 1.75 = 17.5$$

- درصد مشتریانی که با کمبود موجودی روبرو می شوند چقدر است؟

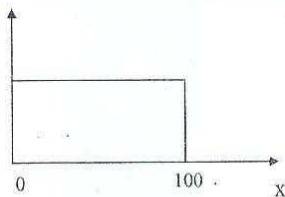
- (۱) 14.5 درصد (۲) 15 درصد (۳) 25 درصد (۴) 3.5 درصد

حل : گزینه ۴ صحیح می باشد.

$$\frac{B(r)}{D} = \frac{17.5}{500} = 0.035 \Rightarrow \%3.5$$

درصد مشتریانی که به کمبود موجودی روبرو می شوند.

مثال: توزیع احتمالی تقاضای محصولی در طی مدت زمان تحویل یکنواخت بوده و چگالی آن به شکل زیر است



روش سفارش دهی این محصول روش مقدار سفارش ثابت بوده، مقدار سفارش در هر بار 40 واحد و متوسط مصرف سالیانه این محصول 400 واحد است. اگر قرار باشد در هر دور سفارش احتمالی کمبود (کسری) مواد برابر 10 درصد باشد به سوال های زیر پاسخ دهید.
- مقدار موجودی اطمینان برابر است با:

- (۱) 90 واحد (۲) 50 واحد (۳) 40 واحد (۴) 30 واحد

حل : گزینه ۲ صحیح می باشد.

$$f(x) = \frac{1}{100}$$

$$Q = 40, D = 400, 1 - p = 0.1 \Rightarrow p = 0.9$$

$$F_{D_L}(r) = p \Rightarrow \int_0^r f(x) dx = 0.9 \Rightarrow \frac{r - 0}{100 - 0} = 0.9 \Rightarrow r = 90$$

$$\mu_{D_L} = \frac{100 + 0}{2} = 50 \Rightarrow SS = r - \mu_{D_L} = 90 - 50 = 40$$

- حداقل موقعیت موجودی (Inventory Position) این محصول برابر است با:

- (۱) 40 واحد (۲) 50 واحد (۳) 90 واحد (۴) مقداری بین 50 تا 90 واحد

حل : گزینه ۳ صحیح می باشد.

$$r = 90 = \text{حداقل موقعیت موجودی}$$

- درصد مشتریانی که با کمبود روبرو می‌شوند برابر است با:

- (۱) 10 درصد (۲) 5 درصد (۳) 2.5 درصد (۴) 1.25 درصد

حل: گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$\bar{b}(r) = \int_r^{100} (x - 90) \frac{1}{100} dx = \left[\frac{x^2}{20} - \frac{90x}{100} \right]_{90}^{100} = 0.5$$

$$\text{درصد مشتریانی که با کمبود روبرو می‌شوند} = \frac{\bar{b}(r)}{Q} = \frac{0.5}{40} = 0.0125 \Rightarrow 1.25\%$$

- میانگین تعداد دوره‌های سفارش که در یک سال در آنها کمبود رخ می‌دهد برابر است با:

- (۱) عددی بین 0 تا 0.5 (۲) عددی بین 0.5 تا 1.5
(۳) عددی بین 1.5 تا 2.5 (۴) عددی بین 2.5 تا 10

حل: گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$1 - p = \frac{N_b}{D} \Rightarrow N_b = \frac{D}{Q}(1 - p) = \frac{400}{40} \times 0.1 = 1$$

که عددی است بین 0.5 تا 1.5

۹-۲- مدل احتمالی ساده با خط‌مشی FOS در حالتی که تقاضا در مدت تحویل دارای توزیع نرمال باشد.

در این مدل تقاضا در مدت زمان تحویل دارای توزیع نرمال یا میانگین μ_{D_L} و واریانس $\sigma_{D_L}^2$ است. توزیع نرمال از این جهت با دیگر توزیع‌ها متمایز است که می‌توان به راحتی با استانداردهای احتمال‌های مورد نظر را محاسبه و رابطه صریحی برای r پیدا نمود.

$$D_L \sim N(\mu_{D_L}, \sigma_{D_L}^2) \quad k_p \text{ ضریب اطمینان}$$

$$p = p\{D_L \leq r\} = p\left\{ \frac{Z - N(0.1)}{D_L + \mu_{D_L}} \leq \frac{r - \mu_{D_L}}{\sigma_{D_L}} \right\}$$

$$\frac{r - \mu_{D_L}}{\sigma_{D_L}} = K_p \Rightarrow r = \mu_{D_L} + K_p \sigma_{D_L}$$

$$SS = k_p \sigma_{D_L}$$

در صورتی که مدت زمان تحویل نیز احتمالی باشد روابط زیر برای تبدیل میانگین و واریانس به کار می‌رود.

$$D: \text{متغیر تصادفی تقاضا در سال با میانگین } \mu_D \text{ و واریانس } \sigma_D^2$$

$$L: \text{متغیر تصادفی مدت زمان تحویل با میانگین } \mu_L \text{ و واریانس } \sigma_L^2$$

$$D_L: \text{متغیر تصادفی در مدت زمان تحویل با میانگین } \mu_{D_L} \text{ و واریانس } \sigma_{D_L}^2$$

$$\mu_{D_L} = \mu_D \times \mu_L$$

$$\sigma_{D_L} = \sqrt{\mu_D^2 \times \sigma_L^2 + \mu_L \sigma_D^2}$$

بدین اساس حالت‌های زیر برای مدل قابل تصور است.

$$r = \mu_{DL} + SS = L \times \mu_D + k_p \times \sqrt{L} \times \sigma_D$$

$$= \frac{1}{24} \times 8000 + 1.64 \times \sqrt{\frac{1}{24}} \times 1000 = 669$$

مثال: مصرف روزانه کالایی ثابت و برابر 5 واحد، اما مدت تحویل این کالا دارای توزیع نرمال با متوسط 2 و واریانس 0.57 هفته است.

نقطه سفارش مجدد این کالا جهت سطح خدمت‌دهی 90 درصد برابر است با: (هر هفته 6 روز و $p(z \leq 1.28) = 0.9$)

(۱) 31 واحد (۲) 89 واحد (۳) 65 واحد (۴) 275 واحد

حل: گزینه ۲ صحیح می‌باشد. $\sigma_{DL} = \sqrt{L^2 \times \sigma_D^2 + L \times \sigma_D^2} \rightarrow \sigma_{DL} = \sqrt{30^2 \times 0.57^2 + 2 \times 0^2} = 30 \times 0.57$

$L \sim N(2, 0.57)$ هفته $D = 5$ $\frac{\text{عدد}}{\text{روز}} = 5 \times 6$ $\frac{\text{عدد}}{\text{هفته}} = 30$ $\frac{\text{عدد}}{\text{هفته}}$

$p = 0.9 \Rightarrow k_p = 1.28$

$r = D\mu_L + k_p D\sigma_L = 30 \times 2 + 1.28 \times 30 \times 0.57 = 81.86$

۳-۹. مدل احتمالی ساده با خط‌مشی سفارش‌دهی (R, T)

فرضیات مدل مانند EOQ است با تفاوت‌های زیر:

۱- تقاضا احتمالی و ساکن است.

۲- کمبود جایز است.

۳- خط‌مشی سفارش‌دهی FOI می‌باشد.

هدف مدل تعیین مقدار سقف موجودی بهینه (R^*) و فاصله زمانی بهینه بین دو سفارش متوالی (T^*) با کمینه کردن هزینه‌هاست.

پارامترهای مدل:

D : متغیر تصادفی تقاضا در سال

μ_D : میانگین تصادفی تقاضا در سال

σ_D : انحراف معیار تقاضا در سال

$D_L + T$: متغیر تصادفی تقاضا در مدت زمان تحویل به علاوه زمان یک دوره

$\mu_{D_L + T}$: میانگین تصادفی تقاضا در مدت زمان تحول به علاوه زمان یک دوره

$\sigma_{D_L + T}$: انحراف معیار تصادفی تقاضا در مدت زمان تحول به علاوه زمان یک دوره

p : سطح خدمت، سطح ریسک، سطح اطمینان

متغیرهای مدل:

R : سقف موجودی، حداکثر موقعیت موجودی

T : فاصله زمانی بین دو سفارش متوالی

SS : موجودی اطمینان (ذخیره ایمنی):

موجودی اطمینان در مدل احتمالی ساده با خط‌مشی FOI برابر است با مقداری از موجودی که جهت جواب‌گویی به تغییرات تقاضا

در مدت زمان تحویل به علاوه زمان یک دوره سفارش تعریف می‌شود و مقدار آن در تعاملی بین هزینه‌های کمبود و هزینه نگهداری

بدرست می‌آید.

تعریف سطح خدمت

سطح خدمت برابر است با احتمال اینکه در یک دوره سفارش با کمبود مواجه نشویم و برابر است با احتمال اینکه تقاضا در مدت زمان تحویل به علاوه زمان یک دوره سفارش از حداکثر موقعیت موجودی (R^*) کوچک‌تر یا مساوی باشد.

$$p = p\{D_{L+T} \leq R\} = F_{D_{L+T}}(R)$$

$1 - p$: سطح ریسک یا سطح خطر برابر است با احتمال اینکه در یک دوره با کمبود مواجه شویم.

$$1 - p = p\{D_{L+T} > R\} = 1 - F_{D_{L+T}}(R)$$

نحوه محاسبه سطح خدمت (p)

الف) توسط مدیر سیستم موجودی مشخص گردد.

ب) از روی مقادیر N_b و T_b توسط روابط زیر مشخص گردد.

$$1 - p = \frac{N_b}{I} = N_b \cdot T$$

$$T_b = \frac{1}{N_b}$$

الگوریتم حل مدل احتمال ساده FOI

مدل احتمالی FOI از دو روش زیر قابل حل است.

(۱) با استفاده از پارامترهای π و $\tilde{\pi}$: در این روش تابع هزینه‌ها را بر اساس متغیرها و پارامترها نوشته و نسبت به دو متغیر R و T مشتق می‌گیریم و روابط محاسبه T و R بدست می‌آید.

(۲) با استفاده از مفهوم جایگزین سطح خدمت. الگوریتم این روش به شرح ذیل است.

الف) مقدار T^* از رابطه زیر محاسبه می‌گردد.

$$T^* = \sqrt{\frac{2A}{Dh}}$$

ب) مقدار سطح خدمت از روش‌های عنوان شده محاسبه می‌گردد.

$$1 - p = TN_b$$

ج) مقدار سقف موجودی (R) از رابطه زیر محاسبه می‌گردد.

اگر تقاضا پیوسته باشد، مقداری از تقاضا در مدت زمان تحویل به علاوه، یک دوره سفارش برابر با R می‌باشد که به ازای آن تابع توزیع تجمعی برابر با سطح خدمت (p) گردد.

$$F_{D_{L+T}}(R) = p$$

اگر تقاضا گسسته باشد کوچک‌ترین مقداری از تقاضا در مدت زمان تحویل بعلاوه یک دوره سفارش که رابطه زیر را برقرار کند برابر R می‌گردد.

$$F_{D_{L+T}}(R) \geq p$$

د) مقدار ذخیره اطمینان از رابطه زیر محاسبه می‌گردد.

$$R = \mu_{D_{L+T}} + SS \Rightarrow SS = R - \mu_{D_{L+T}}$$

هـ - متوسط مقدار کمبود در یک دوره $(\bar{b}(R))$ ، متوسط مقدار کمبود در یک سال $(B(R))$ و درصد نقاضایی (مشتریانی) که با کمبود مواجه می‌شوند (در دوره یا سال) از فرمول‌های زیر محاسبه می‌گردد.

$$\bar{b}(R) = \int_R^{\infty} (x - R) f_{D_{L+T}}(x) dx \quad \text{تقاضا پیوسته:}$$

$$\bar{b}(R) = \sum_{x=R}^{\infty} (x - R) p\{D_{L+T} = x\} \quad \text{تقاضا گسسته:}$$

$$B(R) = \frac{\bar{b}(R)}{T}$$

$$\text{درصد نقاضایی که کمبود مواجه می‌شود} = \frac{B(R)}{D} = \frac{\bar{b}(R)}{D \cdot T}$$

(و) متوسط موجودی در دست از رابطه زیر محاسبه می‌گردد.

$$\bar{I} = \frac{D \cdot T}{2} + SS$$

مثال: در سیستم مرور دوره‌ای (دوره ثابت سفارش) میزان حداکثر موجودی در شرایطی که موجودی ذخیره صفر باشد برابر است با:

(۱) میزان تقاضا در زمان دوره سفارش منهای تقاضا در طی زمان تحویل

(۲) میزان تقاضا در طول زمان تحویل

(۳) میزان تقاضا در طول زمان تحویل + تقاضا در طول دوره سفارش

(۴) میزان تقاضا در طول دوره سفارش

حل: گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

همان‌طور که ذکر گردید در سیستم FOI، میزان حداکثر موجودی (R) برابر است با میزان تقاضا در طول زمان تحویل بعلاوه یک دوره سفارش + ذخیره اطمینان. از آن‌جا که ذخیره اطمینان برابر صفر فرض گردیده است بنابراین گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

مثال: از کالایی هر T ماه به اندازه‌ای سفارش می‌دهیم که به حداکثر سطح موجودی خود (E) برسد، اگر نرخ تقاضای ماهیانه این

کالا (D) به صورت یک متغیر تصادفی و زمان انتظار تحویل آن L به صورت ثابت باشد در این صورت میانگین موجودی در طول

دوره برابر است با:

$$E - \frac{D \cdot L}{2} + D \cdot L \quad (۴) \quad \frac{D \cdot T + D \cdot L}{2} \quad (۳) \quad E - \frac{D \cdot T + D \cdot L}{2} \quad (۲) \quad E - \frac{D \cdot T}{2} - D \cdot L \quad (۱)$$

حل: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$SS = E - \mu_{D_{L+T}} = E - D \cdot (L + T)$$

$$\bar{I} = \frac{D \cdot T}{2} + SS = \frac{D \cdot T}{2} + E - D \cdot L - D \cdot T = E - D \cdot L - \frac{D \cdot T}{2}$$

۹-۴. مدل احتمالی ساده با خطمشی FOI در حالتی که تقاضا در مدت زمان تحویل بعلاوه یک دوره سفارش دارای توزیع نرمال باشد.

در این مدل تقاضا در مدت زمان تحویل بعلاوه یک دوره سفارش دارای توزیع نرمال با میانگین $\mu_{D_{L+T}}$ و واریانس $\sigma_{D_{L+T}}^2$ است.

$$D_{L+T} \sim N(\mu_{D_{L+T}}, \sigma_{D_{L+T}}^2)$$

رابطه سقف موجودی به صورت زیر به دست می آید.

$$p = P\{D_{L+T} \leq R\} = P\left\{\frac{D_{L+T} - \mu_{D_{L+T}}}{\sigma_{D_{L+T}}} \leq \frac{R - \mu_{D_{L+T}}}{\sigma_{D_{L+T}}}\right\} \Rightarrow R = \mu_{D_{L+T}} + k_p \sigma_{D_{L+T}}$$

$$SS = k_p \sigma_{L+T}$$

در صورتی که مدت زمان تحویل نیز احتمالی باشد، روابط زیر برای تبدیل میانگین و واریانس به کار می رود.

$$D: \text{متغیر تصادفی تقاضا در سال با میانگین } \mu_D \text{ و واریانس } \sigma_D^2$$

$$L: \text{متغیر تصادفی مدت زمان تحویل با میانگین } \mu_L \text{ و واریانس } \sigma_L^2$$

$$D_{L+T}: \text{متغیر تصادفی تقاضا در مدت زمان تحویل به علاوه زمان یک و سفارش با میانگین } \mu_{D_{L+T}} \text{ و واریانس } \sigma_{D_{L+T}}^2$$

$$\mu_{D_{L+T}} = \mu_D \times \mu_{L+T}$$

$$\sigma_{D_{L+T}} = \sqrt{\mu_D^2 \sigma_{L+T}^2 + \mu_{L+T} \sigma_D^2}$$

متوسط

قابل ذکر است که از آنجا T ثابت است، داریم:

$$\mu_{L+T} = \mu_L + T$$

$$\sigma_{L+T} = \sigma_L$$

بنابراین حالت های زیر برای مدل قابل ذکر است.

حالت ۱: D متغیر تصادفی با توزیع نرمال (μ_D, σ_D^2) و L ثابت و قطعی است.

$$\mu_{D_{L+T}} = (L+T)\mu_D$$

$$\sigma_{D_{L+T}} = \sqrt{L+T} \sigma_D$$

$$\Rightarrow R = (L+T)\mu_D + k_p \sqrt{L+T} \sigma_D$$

$$SS = k_p \sqrt{L+T} \sigma_D$$

حالت ۲: D ثابت و قطعی و L متغیر تصادفی با توزیع نرمال (μ_L, σ_L^2) باشد.

$$\mu_{D_{L+T}} = D\mu_{L+T} = D(\mu_{L+T})$$

$$\sigma_{D_{L+T}} = D\sigma_{L+T} = D\sigma_L$$

$$\Rightarrow R = D(\mu_L + T) + k_p D\sigma_L$$

$$SS = k_p D\sigma_L$$

حالت ۳: D و L هر دو متغیر تصادفی با توزیع نرمال باشند.

$$\mu_{D_{L+T}} = \mu_D \times \mu_{L+T} = \mu_D(\mu_L + T)$$

$$\sigma_{D_{L+T}} = \sqrt{\mu_D^2 \sigma_{L+T}^2 + \mu_{L+T} \sigma_D^2} = \sqrt{\mu_D^2 \sigma_L^2 + (\mu_L + T)\sigma_D^2}$$

مثال: محصولی هر سه ماه یکبار سفارش داده می‌شود، مدت تحویل این محصول یک ماه است. توزیع تقاضای این محصول در طی مدت T (به ماه) نرمال با میانگین $100t$ و انحراف معیار $10\sqrt{t}$ است. اگر سطح خدمت و احتمال نبودن کمبود در هر دوره سفارش این محصول 90% باشد، آنگاه حداکثر موقعیت موجودی این محصول عبارت است از: (اگر X دارای توزیع نرمال استاندارد باشد، آنگاه $p(X \leq 1.28) = 0.9$ است.)

- (۱) 125.6 (۲) 425.6 (۳) 112.8 (۴) 312.8

حل: گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$T = 3, L = 1, D_t \sim N(100t, (10\sqrt{t})^2)$$

$$p = 0.9 \Rightarrow k_p = 1.28$$

$$L + T = 3 + 1 = 4$$

$$\mu_{D_t} = 100t \Rightarrow \mu_{D_{L+T}} = \mu_{D_4} = 100 \times 4 = 400$$

$$\sigma_{D_t} = 10\sqrt{t} \Rightarrow \sigma_{D_{L+T}} = \sigma_{D_4} = 10\sqrt{4} = 20$$

$$R = \mu_{D_{L+T}} + k_p \sigma_{D_{L+T}} = 400 + 1.28 \times 20 = 425.6$$

مثال: طول دوره سفارش T (فاصله زمانی بین دو سفارش متوالی) برای محصولی ثابت و برابر 1 ماه انتخاب شده است. مدت تحویل این محصول 3 ماه است. توزیع تقاضای این محصول در طی هر ماه متغیر تصادفی با توزیع نرمال با میانگین 100 واحد و انحراف معیار 20 واحداست. قرار است سطح خدمت این محصول طوری انتخاب شود که احتمال کمبود در موقع دریافت سفارش 5 درصد باشد. (برای متغیر تصادفی نرمال واحد (استاندارد) U داریم: $P(U < 1.65) = 0.95$). متوسط موجودی این محصول به کدامیک از تصاویر زیر نزدیک‌تر است؟

- (۱) 175 (۲) 265 (۳) 125 (۴) 116

حل: گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$T = 1, L = 3, D \sim N(100, (20)^2)$$

$$1 - p = 0.05 \Rightarrow p = 0.95 \Rightarrow k_p = 1.65$$

$$SS = k_p \sigma_{D_{L+T}} = k_p \sqrt{(\mu + T)} \sigma_D = 1.65 \times \sqrt{(3 + 1)} \times 20 = 66$$

$$\bar{I} = \frac{D \cdot T}{2} + SS = \frac{100 \times 1}{2} + 66 = 116$$

۹-۵. مقایسه بین مدل احتمالی FOS و مدل احتمالی FOI

	معلوم نمی‌باشد	
	FOS	FOI
حداکثر موقعیت موجودی	$r + Q$	R
حداقل موقعیت موجودی	r	معلوم نمی‌باشد
متوسط موجودی در دست	$\frac{Q}{2} + SS_{FOS}$	$\frac{D.T}{2} + SS_{FOI}$
موجودی اطمینان	SS_{FOS}	SS_{FOI}
موجودی اطمینان در حالت نرمال	$k_p \sigma_{D_L}$	$k_p \sigma_{D_L + T}$
کل هزینه نگهداری سالیانه	h (متوسط موجودی در دست)	h (متوسط موجودی در دست)
کل هزینه کمیود سالیانه	$\pi B(r)$	$\pi B(R)$

شرط مقایسه موارد فوق برابر بودن تمامی پارامترها من جمله سطح خدمت (p) است (شرایط یکسان است).

مثال: دو سیستم سفارش دهی (r, Q) یا FOS و (R, T) یا FOI را در نظر بگیرید.

- (۱) برای یک سطح خدمت مشخص در دو سیستم موجودی اطمینان یکسان است.
- (۲) برای یک سطح خدمت مشخص، متوسط مقدار کسری سالیانه دو سیستم برابر است.
- (۳) برای یک سطح خدمت مشخص، کل هزینه نگهداری سیستم (r, Q) بیشتر از سیستم (R, T) است.
- (۴) برای یک سطح خدمت مشخص، متوسط کسری در یک دوره سفارش برای سیستم (r, Q) کمتر از سیستم (R, T) است.

حل: گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

همان‌طور که در مقایسه دو سیستم ذکر گردید، برای یک سطح خدمت مشخص موجودی اطمینان سیستم FOI بیشتر از FOS است $(SS_{FOS} < SS_{FOI})$ ، متوسط کسری سالیانه سیستم FOI نیز از سیستم FOS بیشتر است $(B(r) < B(R))$ ، کل هزینه نگهداری سیستم FOS کمتر از سیستم FOI است و نیز متوسط کسری در یک دور سفارش سیستم FOS کمتر از سیستم FOI است $(\bar{b}(r) < \bar{b}(R))$ بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

مثال: مصرف روزانه کالایی ثابت و برابر 10 واحد اما پیش زمان تامین این کالا (Lead Time) متغیر و بر اساس جدول زیر می‌باشد، مقدار سفارش این کالا ثابت و برابر 400 واحد است، در صورتی که هزینه نگهداری هر واحد 2 تومان در سال و کل هزینه‌های نگهداری برابر 480 تومان در سال باشد. نقطه سفارش مجدد این کالا برابر است با:

پیش زمان	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
احتمال	0.05	0.07	0.15	0.2	0.15	0.12	0.1	0.08	0.05	0.03

(۴) 80 واحد

(۳) 110 واحد

(۲) 120 واحد

(۱) 40 واحد

حل: گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$D = 10 \frac{\text{عدد}}{\text{روز}}, Q = 400, h = 2$$

$$h\bar{I} = 480 \Rightarrow h\left(\frac{Q}{2} + SS\right) = 480 \Rightarrow 2\left(\frac{400}{2} + SS\right) = 480 \Rightarrow SS = 40$$

$$\mu_L = 4 \times 0.05 + 5 \times 0.07 + 6 \times 0.15 + 7 \times 0.2 + 8 \times 0.15 + 9 \times 0.12 + 10 \times 0.1 + 11 \times 0.08 + 12 \times 0.05 + 13 \times 0.03 = 8$$

$$\mu_{D_L} = D\mu_L = 10 \times 8 = 80$$

$$r = \mu_{D_L} + SS = 80 + 40 = 120$$

مثال: در سیستم نقطه سفارش (سفارشات مستمر یا کنترل موجودی مقداری) با افزایش یافتن هزینه‌های سفارش، در صورتی که سطح خدمت‌دهی (سطح اطمینان از موجودی) ثابت باشد، مقدار کمیود این کالا در سال:

(۱) کاهش می‌یابد. (۲) افزایش می‌یابد. (۳) ثابت باقی می‌ماند. (۴) قابل پیش‌بینی نیست.

حل: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

هزینه سفارش‌دهی (A) بر هیچ‌کدام از موارد μ_{D_L} , σ_{Q_L} , r , SS , $\bar{b}(r)$ تأثیری ندارد و تنها بر $Q = \sqrt{\frac{2DA}{h}}$ تأثیر گذار است.

بنابراین با افزایش A، Q افزایش می‌یابد و $\frac{D}{Q}$ کاهش خواهد یافت و $B(r) = \frac{D}{Q}b(r)$ نیز کاهش می‌یابد.

مثال: یک واحد صنعتی هر هفته نیاز ثابت به 6 واحد از کالایی دارد. سوابق توزیع زمان تحویل کالا در جدول زیر نشان داده شده است. اگر بخواهیم با احتمال 95% یا بیشتر دچار کمیود نشویم میزان موجودی اطمینان چقدر خواهد بود؟

تکرار	مدت زمان تحویل (هفته)
14	4
18	5
12	6
6	7

(۱) 6.2

(۲) 8.4

(۳) 10.8

(۴) 12.6

حل: گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

ابتدا باید تکرارهای فوق را به احتمال تبدیل کرده و سپس توزیع تجمعی را بیابیم. بنابراین تکرارها را بر مجموع تکرارها یعنی 50 باید تقسیم کرد.

از طرفی باید توزیع D_L را بدست آوریم یعنی باید مدت زمان تحویل را در مقدار ثابت D ضرب نماییم یعنی $D_{LS} = D \times L$

L	4	5	6	7
D_L	4×6	5×6	6×6	7×6
توزیع احتمال	$\frac{14}{50} = 0.28$	$\frac{18}{50} = 0.36$	$\frac{12}{50} = 0.24$	$\frac{6}{50} = 0.12$
توزیع تجمعی	0.28	0.64	0.88	1

$$p = 0.95 \Rightarrow r = 7 \times 6 = 42$$

$$\mu_{D_L} = 24 \times 0.28 + 30 \times 0.36 + 36 \times 0.24 + 42 \times 0.12 = 31.2$$

$$\Rightarrow SS = r - \mu_{D_L} = 42 - 31.2 = 10.8$$

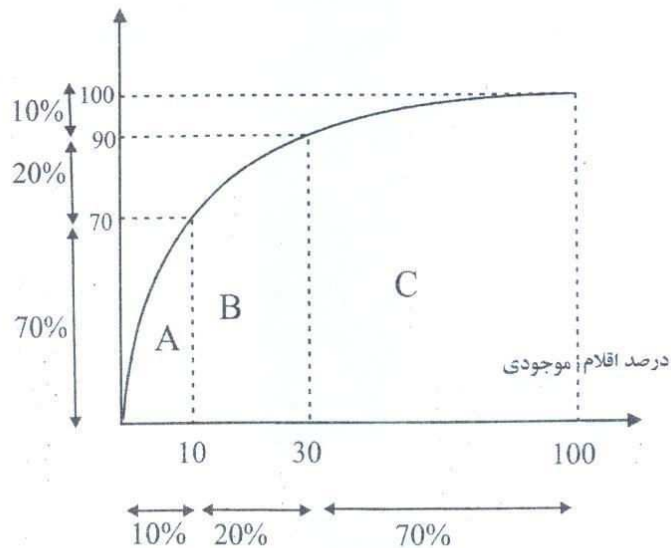
۱۰- آنالیز ABC

آنالیز ABC که حالتی از نمودارهای پارتو است، اقلام موجودی را به سه طبقه A و B و C به شرح ذیل تقسیم می‌کند:

طبقه	درصد اقلام موجودی	درصد سرمایه درگیر موجودی
A	کمترین (حدود 10%)	بیشترین (حدود 70%)
B	متوسط (حدود 20%)	متوسط (حدود 20%)
C	بیشترین (حدود 70%)	کمترین (حدود 10%)

نمودار درصد سرمایه درگیر موجودی به صورت زیر است.

درصد سرمایه درگیر موجودی



در این روش حجم سرمایه درگیر موجودی هر کالا به صورت زیر محاسبه می‌گردد.

$$\text{حجم سرمایه درگیر موجودی محصول } i \text{ ام} = C_i \times D_i$$

سیس اقلام را بر اساس حجم سرمایه درگیر موجودی به صورت نزولی مرتب می‌کنیم و سپس درصد حجم سرمایه درگیر موجودی برای هر محصول را محاسبه می‌کنیم که برابر است با حجم سرمایه درگیر موجودی محصول i ام تقسیم بر مجموع حجم سرمایه درگیر موجودی محصولات. حدود 10% کالاهای اول که 70% حجم سرمایه درگیر موجودی را دارا می‌باشند گروه A، 20% دوم که حدود 20% حجم سرمایه درگیر موجودی را دارا می‌باشند گروه B و 70% باقی مانده که 10% حجم سرمایه درگیر موجودی را دارا می‌باشند گروه C را در برخواهند داشت.

مثال: کدامیک از اقلام زیر جزو گروه A در آنالیز ABC قرار می‌گیرد.

- ۱) قلم کالایی که بیشترین تقاضای سالیانه را دارد.
- ۲) قلم کالایی که کمترین سرمایه درگیر موجودی را دارد.
- ۳) قلم کالایی که بیشترین تقاضا برحسب ریال را دارد.
- ۴) قلم کالایی که بیشترین قیمت واحد را دارد.

حل : گزینه ۳ صحیح می باشد.

همان طور که ذکر گردید. آنالیز ABC براساس حجم سرمایه درگیر موجودی، کالاها را گروه بندی می نماید و تنها قیمت ملاک طبقه بندی نسبت بلکه قیمت در تقاضا یا همان تقاضا برحسب ریال ملاک طبقه بندی است بنابراین گروه A بیشترین حجم سرمایه درگیر موجودی یا تقاضا برحسب ریال را دارد.

مثال: در آنالیز ABC اقلام موجودی، گروه اقلامی که شامل بیشترین درصد اقلام بوده ولی کمترین درصد حجم پولی را دارا هستند عبارت است از:

گروه Z (۱) گروه A (۲) گروه C (۳) گروه B (۴)

حل : گزینه ۳ صحیح می باشد.

۱-۱ مدل های قطعی و پویا

در این مدل ها تقاضا به صورت قطعی (غیراحتمالی) است ولی در طول مدت برنامه ریزی تغییر می کند یعنی در هر دوره با دوره بعد می تواند متفاوت باشد.

فرضیات مدل مانند مدل EOQ است با این تفاوت که:

۱- تقاضا قطعی و پویا است.

۲- کمبود حایز نیست (همان طور که ذکر گردید، مانند مدل EOQ)

۳- سفارش صرفاً در ابتدای هر دوره می رسد.

۴- هزینه نگهداری صرفاً برای واحدهایی محاسبه می گردد که از یک دوره به دوره دیگر منتقل می شوند.

دوره: فاصله زمانی تعیین شده که تقاضا در آن مشخص بوده (قطعی بوده) ولی با تقاضا در دوره های دیگر متفاوت است. دوره می تواند روز، هفته، ماه، سال و یا هر بازه زمانی ثابتی باشد.

هدف این مدل ها این است که به چه میزان و برای چند دوره سفارش داده شود. قابل ذکر است که نقاط مشخص شده محل دریافت سفارش است و سفارش با زمان قبل صادر می شود.

در این مدل ها هزینه هر بار سفارش دهی A و هزینه نگهداری هر واحد در دوره h است.

روش های حل مدل

این روش ها اکثراً به صورت هیوریستیک (ابتکاری) بوده و جواب های بهینه برای تمامی تابع های هدف ارائه نمی دهند. بنابراین برحسب شرایط مدل برخی از روش ها جواب های بهتری ارائه می دهند. این روش ها به شرح ذیل می باشند.

۱- روش دسته به دسته Lot for Lot LFL Method

در این روش در هر دوره به اندازه تقاضای آن دوره سفارش داده می شود. در این روش، هزینه های نگهداری صفر است و از آنجا که در هر دوره سفارش می دهیم، هزینه سفارش دهی، حداکثر است.

مثال: تقاضای محصولی به صورت زیر است. برنامه سفارش بر اساس روش ^{LFL} مشخص شده و نقطه سفارش به صورت فلش مشخص گشته است.

40	50	30	70	10	90	30	40
↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
40	50	30	70	10	90	30	40

نقطه سفارش در هر دوره مشخص شده است.

چون هزینه نگهداری صفر است، مقدار سفارش در هر دوره همان تقاضای آن دوره است. همچنین هزینه سفارش دهی در هر دوره ثابت است.

۲- روش FOS با Q دلخواه

در این روش مقدار سفارش دهی ثابت (Q) است ولی مقدار Q به صورت دلخواه خواهد بود. یعنی هر بار برای دوره هایی سفارش می دهیم که مجموع تقاضای آنها برابر Q گردد.

مثلاً مقدار سفارش دهی $Q=100$ است
 مثلاً مقدار سفارش دهی $Q=100$ است
 مثلاً مقدار سفارش دهی $Q=100$ است

مثال: $Q = 80$

30	50	40	30	10	25	55	80
↑	↑			↑		↑	
80	80			80		80	

میانگین است

مجموع نیازها: Q نیازها

بسیار متغیر برای دوره‌های طولانی، به خصوص نیازها در این

۳- روش FOS با $Q = \sqrt{\frac{2DA}{h}}$

این روش مانند روش قبل است با این تفاوت که $Q = \sqrt{\frac{2DA}{h}}$ است. لازم به ذکر است که در این رابطه D برابر میانگین تقاضا در دوره‌ها می‌باشد.

مثال:

$$Q = \sqrt{\frac{2DA}{n}} = \sqrt{\frac{2 \times 30 \times 30}{0.5}} = 60 \quad D = \frac{60 + 30 + 15 + 15 + 20 + 40 + 25 + 35}{8} = 30$$

60	30	15	15	20	40	25	35
↑	↑			↑		↑	
60	60			60		60	

۴- روش FOI با T دلخواه

در این روش تعداد دوره‌های سفارش‌دهی ثابت است، یعنی سفارش در بازه‌هایی زمانی یکسان دریافت می‌گردد. این بازه زمانی به صورت دلخواه مشخص می‌گردد و در طول برنامه‌ریزی ثابت است. مقدار سفارش در هر بار برابر مجموع تقاضای دوره‌های داخل بازه می‌باشد.

مثال:

$T = 2$

25	15	10	40	55	90	30	20
↑	↑			↑		↑	
40	50			145		50	

کودک با هزینه کم، چون به اندازه دوره سفارش‌دهی برای سفارش اول، اینصورت می‌باشد

۵- روش FOI با $T = \sqrt{\frac{2A}{Dh}}$

این روش مانند روش قبل است با این تفاوت که بازه زمانی با توجه به رابطه $T = \sqrt{\frac{2A}{Dh}}$ مشخص می‌گردد. در این رابطه D برابر میانگین تقاضا در دوره‌ها می‌باشد.

مثال: $D = \frac{15 + 25 + 10 + 60 + 20 + 25 + 45 + 40}{8} = 30$ ، $h = 0.15$ ، $A = 30$

$$T = \sqrt{\frac{2A}{Dh}} = \sqrt{\frac{2 \times 30}{30 \times 0.15}} = 2$$

15	25	10	60	20	25	45	40
↑	↑			↑		↑	
40	70			45		80	

۶- روش حداقل هزینه واحد (LUC)

در این روش هدف می‌نیمم کردن هزینه سفارش‌دهی و نگهداری به ازای هر واحد سفارش است

$$UC = \frac{\text{هزینه نگهداری} + \text{هزینه سفارش‌دهی}}{\sum_{i=1}^j D_i} = \frac{A + h \sum_{i=1}^j (i-1)D_i}{\sum_{i=1}^j D_i}$$

که در آن j تعداد دوره، A هزینه سفارش‌دهی برای یک دوره، h هزینه نگهداری به ازای هر واحد در دوره و D_i تقاضای دوره i ام می‌باشد.

مثال: $UC(1) = 10$ ، $UC(2) = 4.28$ ، $UC(3) = 4.2$ ، $UC(4) = 5$ ، $UC(5) = 2.5$ ، $UC(6) = 2.29$ ، $UC(7) = 2.29$ ، $UC(8) = 2.4$

$$\left. \begin{aligned} UC(j) < UC(j-1) \\ UC(j) < UC(j+1) \end{aligned} \right\} \text{تا زمانی ادامه می‌دهیم که}$$

و در این صورت برای بار اول باید به تعداد دوره سفارش دهیم و محاسبات را برای بارهای دیگر تکرار کنیم.

D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7	D_8
10	25	15	40	30	0	5	10
↑		↑				↑	
50		70				15	

اولین محاسبه است
میان‌های Min (برای)
حداقل هزینه سفارش است

مثال: $A=100$ و $h=2$

$$UC(1) = \frac{A+0}{D_1} = \frac{100}{10} = 10$$

$$UC(2) = \frac{A+hD_2}{D_1+D_2} = \frac{100+2 \times 25}{10+25} = \frac{150}{35} = 4.28$$

$$UC(3) = \frac{A+h(D_2+2D_3)}{D_1+D_2+D_3} = \frac{100+2 \times 25+2 \times 2 \times 15}{10+25+15} = \frac{210}{50} = 4.2$$

$$UC(4) = \frac{A+h(D_2+2D_3+3D_4)}{D_1+D_2+D_3+D_4} = \frac{100+2 \times 25+2 \times 2 \times 15+2 \times 3 \times 40}{10+25+15+40} = \frac{450}{90} = 5$$

پس برای بار اول برای 3 پریود (1, 2, 3) یعنی $50 = 10 + 25 + 15$ واحد سفارش می‌دهیم.
حال برای بار دوم

$$UC(1) = \frac{A+0}{D_4} = \frac{100}{40} = 2.5$$

$$UC(2) = \frac{A+hD_5}{D_4+D_5} = \frac{100+2 \times 30}{40+30} = \frac{160}{70} = 2.29$$

$$UC(3) = \frac{A+h(D_5+2D_6)}{D_4+D_5+D_6} = \frac{100+2 \times 30+2 \times 2 \times 0}{40+30+0} = \frac{160}{70} = 2.29$$

$$UC(4) = \frac{A+h(D_5+2D_6+2D_7)}{D_4+D_5+D_6+D_7} = \frac{100+2 \times 30+2 \times 2 \times 0+2 \times 2 \times 5}{40+30+0+5} = \frac{80}{75} = 2.4$$

برای بار دوم باز هم به میزان 3 دوره (4, 5, 6) یعنی $70 = 40 + 30 + 0$ واحد سفارش می‌دهیم.

و برای بار سوم:

$$UC(1) = \frac{A + 0}{D_7} = \frac{100}{5} = 20$$

$$UC(2) = \frac{A + hD_8}{D_7 + D_8} = \frac{100 + 2 \times 10}{5 + 10} = \frac{120}{15} = 8$$

برای بار آخر هم 2 دوره یعنی $15 = 10 + 5$ واحد سفارش می‌دهیم.

۷- روش سیلور - میل

در این روش به اندازه تعداد دوره‌های سفارش می‌دهیم که هزینه نگهداری و سفارش‌دهی هر دوره را می‌نیمیم کند. بنابراین تنها تفاوت این روش با روش قبل در این است که مجموع هزینه‌های سفارش‌دهی و نگهداری بر تعداد دوره تقسیم می‌گردد، یعنی:

$$SC(j) = \frac{\text{هزینه نگهداری} + \text{هزینه سفارش دهی}}{j} = \frac{A + h \sum_{i=1}^j (i-1)D_i}{j}$$

ماشاءالله تعالی

در اینجا هم تا زمانی ادامه می‌دهیم که $\left. \begin{matrix} SC(j) < SC(j-1) \\ SC(j) < SC(j+1) \end{matrix} \right\}$

و در این صورت برای بار اول به تعداد j دوره سفارش می‌دهیم و برای بارهای بعد محاسبات را از اول تکرار می‌کنیم.

مثال: $h = 2, A = 100$

10	25	15	40	30	0	5	10
----	----	----	----	----	---	---	----

↑		↑				↑	
50		75				10	

$$SC(1) = \frac{A + 0}{1} = \frac{100}{1} = 100$$

$$SC(2) = \frac{A + hD_2}{2} = \frac{100 + 2 \times 25}{2} = \frac{150}{2} = 75$$

$$SC(3) = \frac{A + h(D_2 + 2D_3)}{3} = \frac{100 + 2 \times 25 + 2 \times 2 \times 15}{3} = \frac{210}{3} = 70$$

$$SC(4) = \frac{A + h(D_2 + 2D_3 + 3D_4)}{4} = \frac{100 + 2 \times 25 + 2 \times 3 \times 15 + 2 \times 3 \times 40}{4} = \frac{450}{4} = 112.5$$

برای بار اول به میزان سه دوره یعنی 50 واحد سفارش می‌دهیم. برای بار دوم:

$$S(1) = \frac{A + 0}{1} = \frac{100}{1} = 100$$

$$SC(2) = \frac{A + hD_5}{2} = \frac{100 + 2 \times 35}{2} = \frac{160}{2} = 80$$

$$SC(3) = \frac{A + h(D_5 + 2D_6)}{3} = \frac{100 + 2 \times 30 + 2 \times 2 \times 0}{3} = \frac{160}{3} = 53.3$$

$$SC(4) = \frac{A + h(D_5 + 2D_6 + 3D_6)}{4} = \frac{100 + 2 \times 30 + 2 \times 2 \times 0 + 2 \times 3 \times 5}{4} = \frac{190}{4} = 47.51$$

$$SC(5) = \frac{A + h(D_5 + 2D_6 + 3D_7 + 4D_8)}{5} = \frac{100 + 2 \times 30 + 2 \times 2 \times 0 + 2 \times 3 \times 5 + 2 \times 4 \times 10}{5} = \frac{270}{5} = 54$$

پس برای بار دوم به اندازه 4 دوره یعنی 75 واحد سفارش می‌دهیم. و برای بار آخر نیز مشخص است که باید برای 1 دوره یعنی 10 واحد سفارش داد.

۸- روش حداقل هزینه کل (LTC)

در این روش ملاک تعیین تعداد دوره بهینه، نزدیکی هزینه نگهداری و سفارش‌دهی می‌باشد. یعنی به اندازه تعداد دوره‌ای سفارش می‌دهیم که قدرمطلق فاصله هزینه نگهداری از هزینه سفارش‌دهی از بقیه کمتر باشد. روابط این دو هزینه به صورت زیر است:

$$\text{هزینه نگهداری} = h \sum_{i=1}^j D_i(i-1)$$

$$\text{هزینه سفارش‌دهی} = A$$

مثال: $h = 2, A = 100$

10	25	15	40	30	0	5	10
↑		↑		↑			
50		75		10			

تا اینجا از روش هزینه کل (LTC) استفاده می‌کنیم. در هر مرحله فاصله هزینه نگهداری از هزینه سفارش‌دهی را محاسبه می‌کنیم. در هر مرحله که فاصله کمتر باشد، همان دوره بهینه است.

دوره	هزینه سفارش‌دهی	هزینه نگهداری	فاصله دو هزینه
J	A	$h \sum_{i=1}^j D_i(i-1)$	$ A - h \sum_{i=1}^j D_i(i-1) $
1	100	0	100
2	100	$2 \times 25 = 50$	50
3	100	$2 \times 25 + 2 \times 2 \times 15 = 110$	10
4	100	$2 \times 25 + 2 \times 2 \times 15 + 2 \times 3 \times 40 = 350$	250

بنابراین برای بار اول برای 3 دوره و به میزان 50 واحد سفارش داده می‌شود.

دوره	هزینه سفارش‌دهی	هزینه نگهداری	فاصله در هزینه
4	100	0	100
5	100	$2 \times 30 = 60$	40
6	100	$2 \times 30 + 2 \times 2 \times 0 = 60$	40
7	100	$2 \times 30 + 2 \times 2 \times 0 + 2 \times 3 \times 5 = 80$	20
8	100	$2 \times 30 + 2 \times 2 \times 0 + 2 \times 3 \times 5 + 2 \times 4 \times 10 = 160$	60

برای بار دوم برای چهار دوره و به میزان 75 واحد سفارش می‌دهیم و برای آخرین بار برای یک دوره و میزان 10 واحد سفارش خواهیم داد.

۹- مدل واگنر - وی تین

در این مدل، از روش‌های برنامه‌ریزی پویا برای حل مدل استفاده می‌گردد.

مثال: مقادیر تقاضای کالایی در 10 ماه آینده در جدول زیر نشان داده شده است. اگر هزینه نگهداری هر واحد کالا در هر ماه برابر 2 واحد پولی و هزینه هر بار سفارش دهی برابر جدول زیر باشد، چنانچه هر بار به اندازه تقاضای 2 ماه سفارش داده شود، هزینه کل (هزینه نگهداری + هزینه سفارش دهی) چقدر خواهد بود؟

ماه	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
تقاضا	40	30	70	40	60	40	50	70	80	60

تعداد سفارش	هزینه سفارش دهی
1-100	50 واحد پولی
101 و بیشتر	80 واحد پولی

- (۱) 1040 واحد پولی (۲) 940 واحد پولی (۳) 820 واحد پولی (۴) 760 واحد پولی

حل: گزینه ۳ صحیح می باشد.

از آنجا که هر بار به اندازه تقاضای دو ماه سفارش داده می شود، تنها کافی است در هر بار هزینه سفارش دهی را از جدول مربوط (جدول هزینه سفارش دهی) یافته و با هزینه نگهداری جمع کنیم و هزینه کل را از جمع هزینه های هر بار بدست آوریم.

دوره	تعداد سفارش	هزینه سفارش دهی	هزینه نگهداری	مجموع هزینه ها
1 و 2	$40 + 30 = 70$	50	$30 \times 2 = 60$	110
3 و 4	$70 + 40 = 110$	80	$40 \times 2 = 80$	160
5 و 6	$60 + 40 = 100$	50	$40 \times 2 = 80$	130
7 و 8	$50 + 70 = 120$	80	$70 \times 2 = 140$	220
9 و 10	$80 + 60 = 140$	80	$60 \times 2 = 120$	200
هزینه کل				820

مثال: مقادیر تقاضای محصولی در 10 دوره آینده در جدول زیر آورده شده است:

دوره	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
تقاضا	30	60	80	60	50	30	70	100	60	40

اگر هزینه نگهداری هر واحد محصول در هر دوره برابر دو واحد پولی و هزینه هر بار سفارش دهی برابر 80 واحد پولی باشد، اولین و دومین سفارش با استفاده از روش حداقل هزینه هر واحد (LUC) چقدر خواهد بود؟

- (۱) به ترتیب 90 و 80 (۲) به ترتیب 90 و 140 (۳) به ترتیب 30 و 140 (۴) ترتیب 170 و 140

حل: گزینه ۱ صحیح می باشد.

$$h = 2, A = 80$$

$$UC(j) = \frac{A + h \sum_{i=1}^j D_i (i-1)}{\sum_{i=1}^j D_i}$$

$$UC(1) = \frac{80 + 0}{30} = \frac{80}{30} = 2.66$$

چون سفارش اول را در دوره ۱ در صورتی که سفارش را در
 دوره ۱ یا ۲ قرار دهیم هزینه کل برابر با ۱۱۰ و ۱۶۰
 می باشد، پس سفارش اول را در دوره ۱ قرار دهیم.
 همان دوره دوم سفارش دهی.

$$U(2) = \frac{80 + 2 \times 60}{40 + 60} = \frac{200}{90} = 2.2$$

$$U(3) = \frac{80 + 2 \times 60 + 2 \times 2 \times 80}{30 + 60 + 80} = \frac{520}{170} = 3.06$$

برای بار اول به میزان دوره‌های اول و دوم یعنی $90 = 30 + 60$ واحد سفارش می‌دهیم.

$$UC(1) = \frac{80 + 0}{80} = 1$$

$$UC(2) = \frac{80 + 2 \times 60}{80 + 60} = \frac{200}{140} = 1.4$$

پس برای بار دوم به میزان یک دوره (دوره ۳) یعنی ۸۰ واحد سفارش می‌دهیم.

مثال: تقاضای محصولی طی پریودهای مختلف (هفتگی) به صورت زیر است. در صورتی که هزینه هر بار سفارش ۲۰۰ تومان و هزینه نگهداری هر واحد محصول در هفته ۲ واحد پولی باشد، مقدار اولین سفارش بر طبق روش سیلور - میل (Silver - Meal) به چه میزان خواهد بود؟

پریود (هفته)	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
مقدار تقاضا	۱۰۰	۵۰	۴۰	۹۰	۱۵۰	۱۵۰	۲۰۰	۱۰۰

(۴) ۲۸۰ واحد

(۳) ۱۹۰ واحد

(۲) ۱۵۰ واحد

(۱) ۱۰۰ واحد

حل: گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$h = 2, A = 200$$

$$SC(j) = \frac{A + h \sum_{i=1}^j D_i (i-1)}{j}$$

$$SC(1) = \frac{200 + 0}{1} = 200$$

$$SC(2) = \frac{200 + 2 \times 50}{2} = \frac{300}{2} = 150$$

$$SC(3) = \frac{200 + 2 \times 50 + 2 \times 2 \times 40}{3} = \frac{460}{3} = 153.3$$

بنابراین سفارش، برای دو هفته و به میزان $150 = 100 + 50$ واحد خواهد بود.

۱۲- پیش‌بینی

یکی از قدم‌های ابتدایی در کنترل موجودی، پیش‌بینی تقاضا در آینده است. پیش‌بینی یک تخمین از میزان تقاضا برای یک یا چند محصول در یک پرپود زمانی در آینده است.

روش‌های متنوعی برای پیش‌بینی موجود است که با توجه به حساسیت و دقت مورد نیاز جهت کالای مصرفی باید تکنیک مورد نظر را انتخاب نمود. برخی از این روش‌ها به صورت زیر است.

در این روش‌ها X_i معرف تقاضای واقعی سال i ام و \hat{X}_i معرف پیش‌بینی سال i ام می‌باشد.

۱- روش معدل (میانگین) ساده

در این روش کلیه داده‌های سال‌های گذشته با هم جمع شده و بر مقدار آن تقسیم می‌گردد. مقدار به دست آمده برای پیش‌بینی سال آینده و سال‌های آینده مورد استفاده قرار می‌گیرد.

$$\hat{X}_{t+l} = \hat{X}_{t+1} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_t}{t}$$

این روش صرفاً برای داده‌هایی مناسب است که دارای میانگین ثابتی بوده و پیرامون آن میانگین نوسان دارند.

مثال: تقاضا محصولی در ۴ ماه اخیر به صورت زیر بوده است. با استفاده از روش میانگین ساده مقدار پیش‌بینی تقاضا برای ماه ۹ ام برابر است با:

ماه	1	2	3	4
تقاضا	10	30	20	50

$$\hat{X}_9 = \hat{X}_5 = \frac{10 + 30 + 20 + 50}{4} = \frac{110}{4} = 27.5$$

۲- روش معدل متحرک ساده

در این روش N داده آخر با هم جمع شده و بر تعداد آن تقسیم می‌گردد. این روش برای پیش‌بینی سال بعد و سال‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرد. اگر در سال جدید داده‌ای اضافه گردد، قدیمی‌ترین داده مورد استفاده حذف می‌گردد. این روش تمام خصوصیات روش قبلی را داراست، یعنی برای داده‌هایی که نوسانات زیاد دارند مناسب نمی‌باشد.

مثال: در مثال فوق در صورتی که $N = 3$ باشد، پیش‌بینی تقاضای ماه ۹ ام برابر است با:

$$\hat{X}_9 = \hat{X}_5 = \frac{50 + 20 + 30}{3} = \frac{100}{3} = 33.3$$

۳- روش معدل متحرک تصحیح شده

این روش مانند روش قبل است تنها با برخی اصلاحات در آن روند صعودی و نزولی بودن تقاضا را در نظر می‌گیرد و مقدار عقب افتادگی از روند را به پیش‌بینی اضافه می‌کند.

بیشتر سوال ها کنکور از این روش لا روش است

۴- روش هموار سازی نمایی

در این روش تخمین جدید برابر است با تخمین قدیم به علاوه درصدی از اختلاف بین تخمین قدیم و مقدار واقعی

$$\hat{X}_{t+1} = \hat{X}_t + \alpha(X_t - \hat{X}_t) \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

رابطه فوق را می توان به صورت زیر نیز نوشت:

$$\hat{X}_{t+1} = \alpha X_t + (1 - \alpha)\hat{X}_t$$

به ضریب α در این روابط ضریب هموارسازی یا ضریب در نظر گرفتن خطا می گویند.

ممکن است که پیش بینی سال های گذشته نیز بر اساس هموارسازی نمایی باشد یعنی:

$$\hat{X}_{t+1} = \alpha X_t + (1 - \alpha)\hat{X}_t$$

$$\hat{X}_t = \alpha X_{t-1} + (1 - \alpha)\hat{X}_{t-1}$$

$$\hat{X}_{t-1} = \alpha X_{t-2} + (1 - \alpha)\hat{X}_{t-2}$$

در این صورت رابطه پیش بینی تقاضای سال آینده بر اساس تقاضای سال های گذشته به صورت زیر خواهد بود.

$$\hat{X}_{t+1} = \alpha X_t + \alpha(1 - \alpha)X_{t-1} + \alpha(1 - \alpha)^2 X_{t-2} + \dots + \alpha(1 - \alpha)^{t-1} X_1 + (1 - \alpha)^t \hat{X}_1$$

مجموع ضریب های رابطه فوق برابر 1 می باشد یعنی:

$$\alpha + \alpha(1 - \alpha) + \dots + \alpha(1 - \alpha)^{t-1} + (1 - \alpha)^t = 1 \quad \text{Sum} = \frac{\alpha}{1 - (1 - \alpha)} = 1$$

همان طور که مشاهده می شود در این روش هر پیش بینی بر اساس پیش بینی دوره قبل آن انجام می گردد. ممکن است پیش بینی دوره

قبل نیز بر اساس پیش بینی دوره های قبل انجام شده باشد. اگر بخواهیم از روش هموار سازی نمایی ساده استفاده کنیم باید یک

پیش بینی (اولیه) داشته باشیم که بر اساس روشی غیر از روش هموارسازی نمایی محاسبه شده باشد (\hat{X}_1) این پیش بینی ممکن

است بر اساس N داده قبلی محاسبه شده باشد. هر چه N بیشتر باشد، ضریب هموارسازی (α) کمتر است. برای محاسبه α می توان

از رابطه زیر استفاده کرد:

$$\alpha = \frac{2}{N + 1}$$

در نظر گرفتن خطا یا هموارسازی از پیش بینی پایه شروع شده و تا پیش بینی سال $t + 1$ (\hat{X}_{t+1}) ادامه می یابد.

لازم به ذکر است که این روش روند صعودی یا نزولی تقاضا را به خوبی در نظر نمی گیرد یعنی در صورتی که تقاضا روند صعودی داشته

باشد پیش بینی انجام شده از این روش همیشه از مقدار واقعی کمتر است و در صورتی که تقاضا روند نزولی داشته باشد این پیش بینی

بزرگتر از مقدار واقعی خواهد بود.

نکته: هر چه α بیشتر باشد به داده های نزدیک (سال های اخیر) اهمیت بیشتری داده می شود و بالعکس، به عنوان مثال اگر

$$\alpha = 0.9 \quad \alpha + \alpha(1 - \alpha) + \alpha(1 - \alpha)^2 = 0.999$$

بعد از آن تنها به میزان 0.001 اهمیت داده خواهد شد.

مثال: مقدار واقعی تقاضا برای چهار ماه گذشته به صورت جدول زیر است. اگر پیش بینی تقاضا برای ماه سوم برابر با 32 باشد و این

مقدار بر اساس سه داده قبلی محاسبه شده باشد. پیش بینی تقاضای ماه پنجم و ششم بر اساس روش هموارسازی نمایی ساده چقدر

می باشد.

ماه	1	2	3	4
تقاضا واقعی	20	25	40	42
پیش‌بینی			32	

$$\alpha = \frac{2}{N+1} = \frac{2}{3+1} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$\hat{X}_{t+1} = \alpha X_t + (1 - \alpha) \hat{X}_{t-1}$$

$$\hat{X}_4 = 0.5 \times 40 + 0.5 \times 32 = 36$$

$$\hat{X}_5 = 0.5 \times 42 + 0.5 \times 36 = 39$$

بنابراین پیش‌بینی تقاضای ماه پنجم برابر 39 عدد می‌باشد.

$$\hat{X}_6 = 0.5 \times X_5 + 0.5 \times 39$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود در آنجا که تقاضای واقعی ماه پنجم مشخص نمی‌باشد بنابراین در روش هموارسازی نمایی نمی‌توان برای دوره‌ای به جز اولین دوره بعدی پیش‌بینی تقاضا نمود.

۵- روش هموارسازی نمایی تصحیح شده

این روش مانند روش قبلی است تنها با تصحیح آن روند صعودی و نزولی تقاضا در نظر گرفته می‌شود.

مثال: در کدام یک از حالات زیر روش نمو هموار (هموارسازی نمایی) با تصحیح روند استفاده می‌شود؟

- (۱) مصرف کالا دارای روند افزایش باشد.
- (۲) مصرف کالا دارای روند کاهش باشد.
- (۳) مصرف کالا دارای نوسانات زیاد باشد.
- (۴) هر سه مورد فوق

حل: گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

همان‌طور که ذکر گردید، روش همواره سازی نمایی با تصحیح روند برای حالاتی استفاده می‌شود که تقاضا دارای روند افزایشی یا کاهشی یا دارای نوسانات زیاد باشد.

مثال: پیش‌بینی تقاضای کالایی در دوره t با استفاده از روش نمو هموار (هموارسازی نمایی) با ضریب ثابت $\alpha = 0.2$ و $\alpha = 0.3$ برابر است با:

$\alpha = 0.2$		$\alpha = 0.3$	
پیش‌بینی	خطا	پیش‌بینی	خطا
80	5	91	6

پیش‌بینی مصرف دوره $t+1$ عبارتست از:

- (۱) 81 واحد
- (۲) 93 واحد
- (۳) 96 واحد
- (۴) 87 واحد

حل: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

ابتدا باید مقدار واقعی تقاضای دوره t را محاسبه کنیم. با توجه به پیش‌بینی و مقدار خطاهای داده شده می‌توان مقدار تقاضای واقعی دوره t را محاسبه کرد.

$$\alpha = 0.2 \rightarrow \text{مقدار واقعی} \begin{cases} 80 - 5 = 75 \\ 80 + 5 = 85 \end{cases}$$

$$\alpha = 0.3 \rightarrow \text{مقدار واقعی} = \begin{cases} 91 - 6 = 85 \\ 91 + 6 = 97 \end{cases}$$

از اعداد فوق برمی‌آید که $X_t = 85$ است. حال باید \hat{X}_{t+1} را با $\alpha = 0.2$ و $\alpha = 0.3$ محاسبه کنیم.

$$\hat{X}_{t+1} = \hat{X}_t + \alpha(X_t - \hat{X}_t)$$

$$\alpha = 0.2 \Rightarrow \hat{X}_{t+1} = 80 + 0.2(85 - 80) = 81$$

$$\alpha = 0.3 \Rightarrow \hat{x}_{t+1} = 91 + 0.3(85 - 91) = 89.2$$

که تنها 81 در گزینه‌ها موجود است.

مثال: تقاضای واقعی ماهیانه برای 12 ماه قبل محصولی به صورت زیر است اگر پیش‌بینی تقاضا بر اساس متحرک 9 ماهه برای ماه بیست و دوم برابر 190 واحد باشد پیش‌بینی تقاضا را برای ماه بعد (24) بر اساس روش پیش‌بینی هموار سازی نمای چقدر است؟

ماه	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
تقاضا	160	180	170	150	180	205	170	160	180	200	195	171

198 (۴)

187 (۳)

176 (۲)

169 (۱)

حل: گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$\alpha = \frac{2}{N+1} = \frac{2}{9+1} = 0.2$$

$$\hat{X}_{t+1} = \hat{X}_t + \alpha(X_t - \hat{X}_t)$$

$$\hat{X}_{23} = 190 + 0.2(195 - 190) = 191$$

$$\hat{X}_{24} = 191 + 0.2(171 - 191) = 187$$

مثال: مقدار مصرفی واقعی و پیش‌بینی مصرف بر اساس دو روش معدل متحرک و نمو همواره (هموارسازی نمایی) برای دو دوره گذشته طبق جدول می‌باشد. پیش‌بینی مصرف دوره بعد (دوره سوم) چقدر است؟

دوره	مقدار پیش‌بینی		مصرف واقعی
	معدل متحرک	نمو همواره	
1	29	28	30
2	26	28.4	28

27.5 (۴)

28.3 (۳)

29 (۲)

29.5 (۱)

حل: گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

از آنجا که N مشخص نمی‌باشد نمی‌توان از روش معدل متحرک برای پیش‌بینی استفاده کرد. برای پیش‌بینی از روش نمو همواره نیز باید α را از روش زیر بدست آوریم:

$$\hat{X}_{t+1} = X_t + \alpha(X_t - \hat{X}_t)$$

$$\hat{X}_2 = \hat{X}_1 + \alpha(X_1 - \hat{X}_1) \Rightarrow 28.4 = 28 + \alpha(30 - 28) \Rightarrow \alpha = 0.2$$

$$\hat{X}_3 = \hat{X}_2 + \alpha(X_2 - \hat{X}_2) = 28.4 + 0.2(28 - 28.4) = 28.32$$

مثال: در پیش‌بینی مصرف قطعات یدکی در یک انبار از روش هموارسازی نمایی (Exponential Smoothing) استفاده شده است.

برای کالای A, B مقدار ضریب ثابت هموارسازی نمایی (α) به ترتیب 0.2 و 0.3 منظور شده است. در پیش‌بینی مصرف کدام یک از

دو کالا به مصارف دوره‌های قبل اهمیت بیشتری داده شده است؟

(۲) کالای B

(۱) کالای A

(۴) اطلاعات کافی نیست.

(۳) جواب بستگی به تغییرات α ندارد.

حل: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

هر چه α کمتر باشد به مصارف دوره‌های قبل اهمیت بیشتری داده می‌شود.

سلامتی و تعجیل در فرج آقا امام زمان (عج) صلوات

www.iepnu.ir

