

فهرست

- ۱- جدول توزیع فراوانی طبقه بندی نشده ۱
- ۲- دامنه تغییرات ۱
- ۳- شاخصهای مرکزی یا پارامترهای مکانی ۱
- ۳-۱- میانگین حسابی (Mean) ۱
- الف- اگر داده‌ها تکراری نباشند ۱
- ب- اگر هر یک از داده‌ها تکراری باشند ۱
- ۳-۲- میانه (Median) ۲
- الف - تعیین میانه در جدول توزیع فراوانی دسته بندی نشده (طبقه بندی نشده) ۲
- ب- تعیین میانه در جدول توزیع فراوانی طبقه بندی شده ۳
- ۳-۳- مد یا نما ۵
- ۳-۴- چارک‌ها (Quantile) ۶
- ۳-۴-۱- تعیین چارک اول و سوم در یک سری داده ۶
- الف - تعیین چارک‌ها در جدول توزیع فراوانی طبقه بندی نشده ۷
- ب- تعیین چارک‌ها در جدول توزیع فراوانی طبقه بندی شده ۷

[Www.iepnu.ir](http://www.iepnu.ir)



۱- جدول توزیع فراوانی طبقه بندی نشده

از این جدول برای تنظیم داده های گسسته که تنوع داده ها اندک است استفاده می کنند و فراوانی هر داده در مقابل آن ثبت می شود.

مثال ۱. برای نمرات یک کلاس ۳۰ نفری داریم:

تعداد دانش آموزان = F_i	نمرات = X_i
۲	۸
۱	۱۰
۶	۱۲
۵	۱۳
۶	۱۷
۸	۱۹
۲	۲۰

۲- دامنه تغییرات

اختلاف بین بزرگترین داده آماری و کوچکترین داده آماری را دامنه تغییرات گویند.

$$R = X_{\max} - X_{\min}$$

چنانچه داده های آماری با تقریب کمتر از واحد گرد شده باشند دامنه تغییرات برابر است با:

$$R = X_{\max} - X_{\min} + 1$$

۳- شاخصهای مرکزی یا پارامترهای مکانی

۳-۱- میانگین حسابی (Mean)

الف- اگر داده‌ها تکراری نباشند

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n}$$

ب- اگر هر یک از داده ها تکراری باشند

$$\bar{X} = \frac{\sum F_i X_i}{N}$$

مثال ۲. در جدول زیر مطلوب‌ست میانگین حسابی: $\bar{X} = \frac{654}{50} = 13.08$

نماینده طبقات			
حدود طبقات	فراوانی	X_i	$F_i X_i$
۲-۴	۲	۳	۶
۵-۷	۳	۶	۱۸
۸-۱۰	۵	۹	۴۵
۱۱-۱۳	۱۰	۱۲	۱۲۰
۱۴-۱۶	۲۵	۱۵	۳۷۵
۱۷-۱۹	۵	۱۸	۹۰

$$\sum F_i = 50 \quad \sum F_i X_i = 654$$

۲-۳ - میانه (Median)

عددی را که در یک مجموعه از اعداد مرتب شده آماری درست در وسط داده‌ها قرار گیرد، میانه گویند. برای تعیین میانه در یک سری داده‌های آماری ابتدا داده‌ها را به ترتیب صعودی یا نزولی مرتب می‌کنیم. در صورتیکه تعداد داده‌ها فرد باشد، عددی که در وسط قرار می‌گیرد عدد میانه بوده و اگر تعداد داده‌ها زوج باشد نصف مجموع دو عددی که در وسط قرار گرفته عدد میانه را مشخص می‌کند، میانه را با \tilde{X} نشان می‌دهیم.

مثال ۳.

$$\begin{array}{ll} 4, 7, 6, 9, 1, 5, 3 & 10, 12, 16, 14, 26, 5 \\ 1, 3, 4, 5, 6, 7, 9 & 5, 1, 12, 14, 16, 26 \\ \tilde{X} = 5 & \tilde{X} = \frac{12+14}{2} = 13/5 \end{array}$$

الف - تعیین میانه در جدول توزیع فراوانی دسته بندی نشده (طبقه بندی نشده)

ابتدا، $\sum F_i$ را به دست آورده و N می‌نامیم. سپس اولین ردیفی را که فراوانی تجمعی آن بزرگتر یا مساوی $\frac{N}{2}$ است را به عنوان ردیف میانه معین می‌کنیم. داده مربوط به این ردیف میانه خواهد بود.

مثال ۴.

X_i	F_i	CF_i
۴	۳	۳
۶	۲	۵
۷	۴	۹
۱۰	۱	۱۰
۱۱	۳	۱۳
۱۶	۲	۱۵
۲۰	۱	۱۶

ردیف میانه ←

$$N = \sum F_i = 16$$

$$\frac{N}{2} = 8$$

$$\tilde{X} = 7$$

ب- تعیین میانه در جدول توزیع فراوانی طبقه بندی شده

در جدول توزیع فراوانی دسته بندی شده ابتدا مثل قبل ردیف میانه را مشخص کرده و سپس میانه

را از فرمول زیر به دست می آوریم:

$$\tilde{X} = L + \frac{\frac{N}{2} - CF_{i-1}}{F_i} \times C$$

که در این فرمول

$$\tilde{X} = \text{میانه}$$

 $L =$ کوچکترین عدد طبقه میانه دار (در صفات پیوسته کرانه پایین و در صفات گسسته حد پایین

طبقه میانه دار)

$$CF_{i-1} = \text{فراوانی تجمعی طبقه ماقبل طبقه میانه دار}$$

$$F_i = \text{فراوانی طبقه میانه دار}$$

$$C = \text{فاصله طبقات جدول (۱ + حد پایین - حد بالا)}$$

مثال ۵. در جدول ذیل میانه را مشخص کنید.

الف - اگر داده‌ها پیوسته باشند.

$$\frac{N}{2} = \frac{50}{2} = 25$$

$$\tilde{X} = \frac{49}{5} + \frac{25-20}{6} \times 5 = 53/66$$

ب- اگر داده‌ها گسسته باشند.

$$\frac{N}{2} = \frac{50}{2} = 25$$

$$\tilde{X} = 50 + \frac{25-20}{6} \times 5 = 54.167$$

	F_i	FC_i
۴۰-۴۴	۱۲	۱۲
۴۵-۴۹	۸	۲۰
۵۰-۵۴	۶	۲۶
۵۵-۵۹	۱۰	۳۶
۶۰-۶۴	۴	۴۰
۶۵-۶۹	۱۰	۵۰

ردیف میانه ←

نکته: اگر در ردیف فراوانی‌های تجمعی عدد $\frac{N}{2}$ عیناً وجود داشته باشد آنگاه کرانه بالای طبقه

میانه دار را میانه بدانید.

مثال ۶.

	۲-۴	۵-۷	۸-۱۰	۱۱-۱۳	۱۴-۱۶	۱۷-۱۹
F_i	۲	۳	۵	۱۵	۲۰	۵
FC_i	۲	۵	۱۰	۲۵	۴۵	۵۰

طبقه میانه دار ↑

$$\frac{N}{2} = \frac{50}{2} = 25$$

$$\tilde{X} = 13/5$$

نکته: اگر در یک جدول توزیع فراوانیهای طبقه بندی شده مربوط به صفات پیوسته، مجموع

فراوانیهای طبقه ماقبل میانه دار برابر فراوانیهای طبقات ما بعد طبقه میانه‌دار باشد آنگاه نماینده

طبقه میانه دار را میانه خواهیم دانست.

مثال ۷. جدول زیر مربوط به اندازه قد دانشجویان یک کلاس می باشد. میانه را مشخص کنید.

	۱۰-۱۴	۱۵-۱۹	۲۰-۲۴	۲۵-۲۹	۳۰-۳۴	۳۵-۶۹
F_i	۴	۱۰	۶	۱۶	۱۲	۸
CF_i	۴	۱۴	۲۰	۳۶	۴۸	۵۶

طبقه میانه دار ↑

$$\frac{N}{2} = \frac{56}{2} = 28$$

$$\begin{aligned} \text{مجموع فراوانی های قبل از طبقه میانه دار} &= 4+10+6=20 \\ \text{مجموع فراوانی های بعد از طبقه میانه دار} &= 12+8=20 \end{aligned} \Rightarrow \tilde{X} = \frac{25-29}{2} = 27$$

۳-۳- مد یا نما

در اعداد آماری، عددی که بیشترین تکرار (فراوانی) را داشته باشند، نما نامیده می شود. لذا یک نمونه آماری می تواند نما داشته باشد یا بیش از یک نما داشته باشد.

مثال ۸.

۱,۱,۲,۲,۲,۳,۴	۱,۱,۱,۲,۲,۲,۳,۳,۴,۵,۵
Mode = ۲	Mode = ۱,۲
۱,۲,۳,۳,۴,۵,۶,۷	۱,۱,۱,۲,۲,۲,۳,۳,۳
مد ندارد	مد ندارد

- تعیین مد در جدول توزیع فراوانی های دسته بندی شده

ابتدا طبقه ای که بیشترین فراوانی را دارد به عنوان طبقه نمادار مشخص می کنیم و سپس مد را از رابطه زیر به دست می آوریم:

$$\text{Mode} = L + \frac{d_1}{d_1 + d_2} \times C$$

که در آن

M = نما

d_1 = تفاضل فراوانی طبقه نمادار با فراوانی طبقه ما قبل

d_2 = تفاضل فراوانی طبقه نمادار با فراوانی طبقه ما بعد

C = فاصله طبقات

L = کوچکترین عدد طبقه نمادار (کرانه پایین)

مثال ۹.

	۱۰-۱۹	۲۰-۲۹	۳۰-۳۹	۴۰-۴۹	۵۰-۵۹
F_i	۱۲	۱۷	۲۰	۴۰	۱۰

طبقه مد دار ↑

$$\text{Mode} = ۳۹/۵ + \frac{۲۰}{۲۰+۳۰} \times ۱۰ = ۴۳/۵$$

نکته: اگر در جدول توزیع فراوانی ها فراوانی طبقات ماقبل و مابعد طبقه نمادار مساوی باشند، نماینده طبقه نمادار را نما بدانید.

فراوانی طبقه مابعد = فراوانی طبقه مابعد

مثال ۱۰.

	۱۰-۱۲	۱۳-۱۵	۱۶-۱۸	۱۹-۲۱	۲۲-۲۴
F_i	۱۰	۱۲	۸	۱۶	۸

$$\text{Mode} = \frac{۱۹+۲۱}{۲} = ۲۰$$

طبقه نما دار ↑

۳-۴- چارک ها (Quantile)

سه نوع چارک داریم: چارک اول (Q_1)، چارک دوم (Q_2) و چارک سوم (Q_3)

الف- چارک اول: عددی که در یک مجموعه از داده های آماری مرتب شده، مرز ۲۵٪ داده ها را مشخص کند چارک اول است. بنابراین می توان ادعا کرد که ۲۵٪ داده ها از نقطه Q_1 کوچکتر و ۷۵٪ داده ها از این نقطه بزرگتراند.

ب- چارک دوم: همان میانه است.

ج- چارک سوم: نقطه یا عددی که در یک مجموعه از اعداد مرتب شده آماری مرز ۷۵٪ داده ها را نشان دهد چارک سوم است. یعنی نقطه ای که ۷۵٪ داده ها از آن کوچکتر و ۲۵٪ داده از آن بزرگتراند.

۳-۴-۱- تعیین چارک اول و سوم در یک سری داده

ابتدا داده های آماری را به صورت صعودی از چپ به راست مرتب می کنیم. سپس اعداد را به ۲ نیم تقسیم می کنیم. میانه نیمه سمت چپ را چارک اول و میانه اعداد سمت راست را چارک سوم می نامند و خود میانه اعداد همان چارک دوم می باشد.

مثال ۱۱.

$$\begin{array}{ccc} ۱۴, ۱۶, ۱۲, ۱۷, ۲۰, ۱۹, ۱۷, ۱۱, ۱۰, ۱۸ \\ ۱۰, ۱۱, ۱۲, ۱۴, ۱۶, ۱۷, ۱۷, ۱۸, ۱۹, ۲۰ \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ Q_1=۱۲ \quad Q_2=۱۶/۵ \quad Q_3=۱۸ \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} ۷, ۴, ۲, ۱, ۳, ۵, ۶ \\ ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷ \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ Q_1=۲ \quad Q_2=۴ \quad Q_3=۶ \end{array}$$

الف - تعیین چارک ها در جدول توزیع فراوانی طبقه بندی نشده

ابتدا فراوانی تجمعی را حساب می کنیم. سپس اولین طبقه ای که فراوانی تجمعی آن بیشتر از $\frac{N}{4}$

است طبقه چارک اول و داده مربوط به آن چارک اول، سپس اولین طبقه ای که فراوانی تجمعی آن

بیشتر از $\frac{N}{2}$ است طبقه چارک دوم و داده مربوط به آن چارک دوم و اولین طبقه ای که فراوانیتجمعی آن $\frac{3N}{4}$ است طبقه چارک سوم و داده مربوط به آن چارک سوم است.

مثال ۱۲.

X_i	۸	۱۰	۱۵	۱۶	۲۰	۲۸	۴۰	۴۲
F_i	۳	۸	۷	۱۳	۱۲	۲۳	۲۴	۱۰
CF_i	۳	۱۱	۱۸	۳۱	۴۳	۶۶	۹۰	۱۰۰

طبقه چارک اول ↑

$Q_1=۱۶$

طبقه چارک دوم ↑

$Q_2 = \tilde{X} = ۲۸$

طبقه چارک سوم ↑

$Q_3=۴۰$

$$N=۱۰۰ \quad \frac{N}{4}=۲۵ \quad \frac{N}{2}=۵۰ \quad \frac{3N}{4}=۷۵$$

ب- تعیین چارک ها در جدول توزیع فراوانی طبقه بندی شده

برای تعیین چارک اول ابتدا اولین طبقه ای را که فراوانی تجمعی آن بیشتر از $\frac{N}{4}$ است را به عنوان

طبقه چارک اول تعیین کرده و چارک اول را از فرمول زیر به دست می آوریم:

$$Q_1 = L + \frac{\frac{N}{4} - CF_{i-1}}{F_i} \times C$$

چارک دوم را از تعریف میانه به دست می آوریم.

برای تعیین چارک سوم ابتدا اولین طبقه ای را که فراوانی تجمعی آن بیشتر از $\frac{3N}{4}$ است را به

عنوان طبقه چارک سوم تعیین کرده و چارک سوم را از فرمول زیر به دست می آوریم:

اگر داده ها از نوع پیوسته بود L کرانه پایین طبقه چارک دار است. و اگر داده ها از نوع گسسته بود

$$Q_3 = L + \frac{\frac{3N}{4} - CF_{i-1}}{F_i} \times C$$

L حد پایین طبقه چارک دار است.

مثال ۱۳.

	۱۰-۱۴	۱۵-۱۹	۲۰-۲۴	۲۵-۲۹	۳۰-۳۴	۳۵-۳۹
F_i	۲	۸	۶	۱۴	۷	۳
CF_i	۲	۱۰	۱۶	۳۰	۳۷	۴۰

طبقه چارک اول ↑

$$Q_1 = 19/5$$

طبقه چارک دوم و سوم ↑

$$Q_3 = 29/5$$

$$N = 40 \cdot \frac{N}{4} = 10 \cdot \frac{N}{2} = 20 \cdot \frac{2N}{4} = 30$$

$$Q_2 = \tilde{X} = 24/5 + \frac{20-16}{14} \times 5 = 25/92$$

نکته: چون $\frac{N}{4} = 10$ دقیقاً در ستون فراوانی تجمعی می باشد لذا Q_1 کرانه بالای طبقه چارک اول است.

همین نکته در مورد چارک سوم صدق می کند.

سلامتی و تعجیل در فرج آقا امام زمان (عج) صلوات

Www.iepnu.ir



فهرست

- ۱- تعاریف ۱
- ۱-۱- تعریف جامعه (Population) ۱
- ۲-۱- تعریف پارامتر (Parameter) ۱
- ۳-۱- تعریف نمونه (Sample) ۱
- ۴-۱- اندازه نمونه (Sample Size) ۲
- ۵-۱- تعریف نمونه تصادفی (Random Sample) ۲
- ۶-۱- توزیع نمونه ۲
- ۷-۱- تعریف آماره ۲
- ۸-۱- میانگین نمونه ۳
- ۹-۱- گشتاور نمونه ۳
- ۱۰-۱- گشتاور r ام حول میانگین ۳
- ۱۱-۱- واریانس نمونه ۴
- ۱۲-۱- انحراف معیار نمونه ۴
- ۱۳-۱- قضیه حد مرکزی ۵
- ۱۴-۱- توزیع Gamma ۵
- ۲- توزیع مربع کای (Chi Square) ۶
- ۳- توزیع t _student ۱۰
- ۴- توزیع تفاوت بین دو میانگین نمونه ۱۳
- ۵- توزیع F ۱۶
- ۶- توزیع میانگین جامعه های متناهی ۱۹
- ۷- آماره های ترتیبی ۲۲



۱- تعاریف

۱-۱- تعریف جامعه (Population)

جامعه مجموعه عناصر مورد مطالعه است که ممکن است تعداد آن محدود یا نامحدود باشد. مثلاً جامعه متولدین در یک سال و یا قیمت یک کالا در طول زمان معین.

۱-۲- تعریف پارامتر (Parameter)

مقدار ثابتی مربوط به جامعه آماری است که معمولاً مورد علاقه بررسی کننده واقع می شود. مثلاً در مورد لامپ ها، متوسط طول عمر لامپ ها.

نکته: موقعی روش های آماری مفید است که پارامتر مجهول داشته باشیم.

X	۰	۱	۲	مدل آمار
P	$\frac{\theta}{2}$	$1-\theta$	$\frac{\theta}{2}$	

X	۰	۱	۲	مدل
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	

۱-۳- تعریف نمونه (Sample)

در حالاتی که به جامعه دسترسی نداریم و یا به علت محدودیت در زمان و هزینه، بناچار مطالعه و بررسی بر روی بخشی از جامعه به عنوان نمونه انجام می شود. نمونه باید به گونه‌ای باشد که معرف جامعه اصلی بوده و نتایج حاصل از آن بتواند قابل تعمیم به جامعه برگرفته از آن باشد.

الف- نمونه تصادفی از جامعه متناهی بدون جاگذاری

در این حالت نمونه باید طوری انتخاب شود که احتمال انتخاب تمام نمونه‌های ممکن برابر باشد.

مثلا اگر جامعه دارای N عضو است انتخاب هر نمونه n تایی با احتمال $\frac{1}{\binom{N}{n}}$ رخ می‌دهد.

تذکر: معمولا اگر در جریان انتخاب هیچ عاملی یا محدودیت و شرطی دخالت نکند نمونه تصادفی خواهد بود.

ب- نمونه تصادفی از جامعه نامتناهی (متناهی با جاگذاری)

مقدار هر متغیر که در نمونه تصادفی ظاهر می‌شود مربوط به یک متغیر تصادفی است و این متغیر دارای یک توزیع است.

۴-۱- اندازه نمونه (Sample Size)

تعداد افراد نمونه را حجم نمونه یا اندازه نمونه می‌نامند.

۵-۱- تعریف نمونه تصادفی (Random Sample)

متغیرهای تصادفی x_1, x_2, \dots, x_n تشکیل یک نمونه تصادفی به اندازه n می‌دهند اگر:

۱- هم توزیع باشند.

۲- از یکدیگر مستقل باشند.

۶-۱- توزیع نمونه

اگر x_1, x_2, \dots, x_n نشان دهنده نمونه‌ای به حجم n باشد بنا به تعریف، تابع توزیع توام

x_1, x_2, \dots, x_n را تابع توزیع نمونه می‌نامند. لذا اگر x_1, x_2, \dots, x_n یک نمونه تصادفی به حجم n از

جامعه $f_x(x)$ باشد در این صورت توزیع نمونه تصادفی x_1, x_2, \dots, x_n عبارتست از:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_{x_1}(x_1) f_{x_2}(x_2) \dots f_{x_n}(x_n) = \prod_{i=1}^n f_{x_i}(x_i) = [f_x(x)]^n$$

۷-۱- تعریف آماره

تابعی است از نمونه تصادفی قابل مشاهده که شامل پارامتر مجهولی نیست (به پارامترهای نامعلوم

بستگی ندارد) مثلاً در یک نمونه‌گیری به اندازه n ، \bar{X} ، S^2 و S همه آماره‌اند. در این ارتباط توزیع آماره‌ها را توزیع نمونه‌ای می‌گویند و استنباطهای آماری معمولاً بر آماره‌ها متکی است.

۸-۱- میانگین نمونه

اگر x_1, x_2, \dots, x_n یک نمونه تصادفی از جامعه‌ای به حجم n باشد:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

۹-۱- گشتاور نمونه

فرض می‌کنیم x_1, x_2, \dots, x_n یک نمونه تصادفی از جامعه با تابع چگالی احتمال $f_x(x)$ باشند. در این صورت r مین گشتاور نمونه حول مبدا برابر است با:

$$M'_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^r$$

که در حالت خاص $r=1$ ، میانگین نمونه بدست می‌آید.

۱۰-۱- گشتاور r ام حول میانگین

$$M_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^r \quad \text{گشتاور } r \text{ ام حول میانگین برابر است با:}$$

قضیه ۱: فرض کنید x_1, x_2, \dots, x_n یک نمونه تصادفی از جامعه با تابع چگالی $f_x(x)$ باشد و

$$E[\bar{X}] = \mu \quad , \quad \text{Var}[\bar{X}] = \frac{\sigma^2}{n} \quad \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad \text{میانگین نمونه باشد در این صورت:}$$

که در آن μ و σ^2 به ترتیب میانگین و واریانس جامعه هستند.

اثبات:

$$E[\bar{X}] = E\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right] = \frac{1}{n} E\left[\sum_{i=1}^n x_i\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{1}{n} \cdot n\mu = \mu$$

$$\text{Var}[\bar{X}] = \text{Var}\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right] = \frac{1}{n^2} \text{Var}\left[\sum_{i=1}^n x_i\right] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(x_i) = \frac{1}{n^2} \cdot n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

۱۱-۱- واریانس نمونه

فرض کنید x_1, x_2, \dots, x_n یک نمونه تصادفی از جامعه $f_x(x)$ باشد در این صورت:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 ; n > 1$$

واریانس نمونه نامیده می‌شود.

۱۲-۱- انحراف معیار نمونه

انحراف معیار n مشاهده x_1, x_2, \dots, x_n را به عنوان ریشه دوم واریانس‌هایشان تعریف می‌کنیم:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}}$$

قضیه ۲: اگر تمام نمونه‌های تصادفی به حجم n از یک جامعه نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2

باشد در این صورت \bar{X} دارای توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس $\frac{\sigma^2}{n}$ است.

$$M_{\bar{X}} = M_X[(\sum x_i / n)t] = (M_X(t/n))^n = (e^{\mu(t/n) + \frac{1}{2}(t/n)^2 \sigma^2})^n = e^{\mu t + \frac{1}{2}t^2(\sigma^2/n)}$$

قضیه ۳: اگر تمام نمونه‌های تصادفی به حجم n از یک جامعه با میانگین μ و واریانس σ^2 با

جایگذاری انتخاب شود، توزیع نمونه \bar{X} تقریباً دارای توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس $\frac{\sigma^2}{n}$

است.

نکته:

اگر $n \geq 30$ باشد، بدون توجه به نوع توزیع جامعه، توزیع \bar{X} نرمال است.

اگر $n < 30$ باشد، توزیع \bar{X} تقریباً نرمال است اگر توزیع جامعه تقریباً نرمال باشد.

۱۳-۱- قضیه حد مرکزی

اگر x_1, x_2, \dots, x_n نمونه‌ای تصادفی از یک جامعه نامتناهی با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد

در این صورت توزیع حدی متغیر

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

وقتی $n \rightarrow \infty$ ، توزیع نرمال استاندارد است.

۱۴-۱- توزیع Gamma

اگر متغیر تصادفی گاما دارای تابع چگالی ذیل است:

$$f_x(x) = \frac{\lambda e^{-\lambda x} (\lambda x)^{s-1}}{\Gamma(s)} \quad ; x > 0$$

$$\phi(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^s; E[x] = \frac{s}{\lambda}; V$$



Www.iepnu.ir

۲- توزیع مربع کای (Chi Square)

توزیع مربع کای حالت خاصی از توزیع گاما است که در آن $\lambda = \frac{1}{\nu}$; $s = \frac{\nu}{\nu}$ است و بر این اساس تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی مربع کای بشرح ذیل است.

$$f_x(x) = \frac{1}{2^{\nu/2} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} x^{\left(\frac{\nu-2}{2}\right)} e^{-\frac{x}{2}} ; x > 0$$

که Γ معرف تابع گاما و معرف درجه آزادی است و

$$E(\chi^2) = \nu, \text{Var}(\chi^2) = 2\nu, M_x(t) = \phi(t) = (1-2t)^{-\frac{\nu}{2}}$$

قضیه ۴: اگر متغیر تصادفی Z_1 دارای توزیع نرمال استاندارد باشد، آنگاه متغیر تصادفی Z_1^2 دارای توزیع مربع کای با ۱ درجه آزادی خواهد بود. این قضیه در واقع بیانگر اهمیت توزیع مربع کای است.

قضیه ۵: اگر $\chi_1^2, \chi_2^2, \dots, \chi_k^2$ متغیرهای تصادفی مستقل هر یک دارای توزیع مربع کای با درجات آزادی به ترتیب $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k$ باشند، آنگاه متغیر تصادفی $\chi^2 = \chi_1^2 + \chi_2^2 + \dots + \chi_k^2$ نیز یک

توزیع مربع کای با $\nu = \sum_{i=1}^k \nu_i$ درجه آزادی دارد.

اثبات:

$$M_{X_i}(t) = (1-2t)^{-\nu_i/2}; M_{\sum X}(t) = \prod_{i=1}^n (1-2t)^{-\nu_i/2} = (1-2t)^{-\sum \nu_i/2}$$

قضیه ۶: اگر متغیرهای تصادفی مستقل Z_1, Z_2, \dots, Z_ν دارای توزیع نرمال استاندارد باشند، آنگاه

متغیر تصادفی $\chi^2 = Z_1^2 + Z_2^2 + \dots + Z_\nu^2$ یک توزیع مربع کای با ν درجه آزادی خواهد بود.

تذکر: اگر X_1, X_2, \dots, X_ν متغیرهای تصادفی مستقل نرمال به ترتیب با میانگین‌های

$\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_\nu$ و واریانس‌های $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_\nu^2$ باشند، جمع مربعات X ها یک توزیع مربع کای ندارد.

قضیه ۷: اگر متغیرهای تصادفی X_1, X_2, \dots, X_ν دارای توزیع نرمال مستقل با میانگین‌های

$\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_\nu$ و واریانس‌های $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_\nu^2$ باشند در این صورت متغیر تصادفی $Z = \frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i}$

برای $i = 1, 2, \dots, v$ دارای توزیع نرمال استاندارد می‌باشد و متغیر تصادفی:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^v \left(\frac{X_i - \mu_i}{\delta_i} \right)^2$$

دارای توزیع مربع کای با v درجه آزادی است.

قضیه ۸: اگر Z_n, \dots, Z_2, Z_1 نمونه‌های تصادفی حاصل از توزیع نرمال استاندارد $N(0,1)$ باشند در

این صورت:

$$\bar{Z} - 1 \text{ دارای توزیع نرمال } N\left(0, \frac{1}{n}\right) \text{ است.}$$

$$\bar{Z} - 2 \text{ و } \sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z})^2 \text{ از هم مستقلند.}$$

$$\sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z})^2 \text{ دارای توزیع Chi Square با } n-1 \text{ درجه آزادی است.}$$

نتیجه: اگر X_n, \dots, X_2, X_1 نمونه تصادفی حاصل از جامعه $N(\mu, \sigma^2)$ باشد در این صورت متغیر

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma} \right)^2 \text{ تصادفی دارای توزیع مربع کای با } n-1 \text{ درجه آزادی است.}$$

قضیه ۹: اگر X_n, \dots, X_2, X_1 یک نمونه تصادفی به اندازه n از یک جامعه نرمال با میانگین μ

و واریانس σ^2 باشد در این صورت $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ یک توزیع مربع کای با $n-1$ درجه آزادی است.

اثبات: در ابتدا بدون اثبات می‌پذیریم که هرگاه X_n, \dots, X_1 یک نمونه تصادفی n تایی از یک جامعه

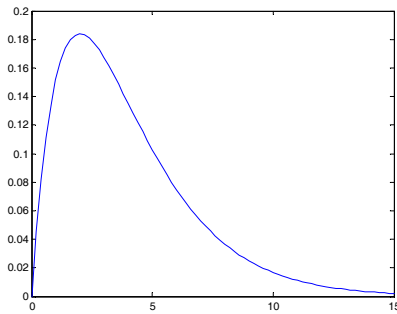
نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 باشند آنگاه توزیع‌های S^2, \bar{X} که به ترتیب میانگین و واریانس

نمونه است از یکدیگر مستقل هستند. حال داریم:

$$\begin{aligned}
 S^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \\
 \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} &= \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} \\
 \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} &= \frac{\sum_{i=1}^n [(X_i - \mu) - (\bar{X} - \mu)]^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{\sigma^2} + \frac{n(\bar{X} - \mu)^2}{\sigma^2} - \frac{2(\bar{X} - \mu) \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)}{\sigma^2} \\
 \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} &= \underbrace{\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2}_{\text{توزیع مربع کای با } n \text{ درجه آزادی}} - \underbrace{\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \right)^2}_{\text{توزیع مربع کای با یک درجه آزادی}} = \chi_{(n-1)}^2
 \end{aligned}$$

تذکر: در یک نمونه تصادفی، احتمال اینکه مقدار عددی یک متغیر تصادفی مربع کای بزرگتر از عدد مشخصی شود عبارتست از سطح زیر چگالی مربع کای دم سمت راست آن عدد مشخص و این عدد معمولاً توسط χ_{α}^2 نمایش داده می‌شود بطوری که سطح زیر چگالی توزیع مربع کای واقع در سمت راست آن عبارتست از α .

مثال توزیع مربع کای با چهار درجه آزادی.



قضیه ۱۰: اگر X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از جامعه‌ای نامشخص $f_x(x)$ باشد آنگاه: $E[S^2] = \sigma^2$

اثبات:

$$\begin{aligned} E(S^2) &= \left[\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \right] = \frac{1}{n-1} E \left[\sum_{i=1}^n (X_i - \mu) - (\bar{X} - \mu) \right]^2 = \\ &= \frac{1}{n-1} E \left[\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 - (\bar{X} - \mu)^2 - 2 \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)(\bar{X} - \mu) \right] = \\ &= \frac{1}{n-1} E \left[\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 + n(\bar{X} - \mu)^2 - 2(\bar{X} - \mu) \sum_{i=1}^n (X_i - \mu) \right] = \\ &= \frac{1}{n-1} E \left[\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 + n(\bar{X} - \mu)^2 - 2n(\bar{X} - \mu) \right] = \frac{1}{n-1} E \left[\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 - n(\bar{X} - \mu)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^n E[(X_i - \mu)^2] - nE[(\bar{X} - \mu)^2] \right] = \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^n \sigma^2 - n\text{Var}(\bar{X}) \right] = \\ &= \frac{1}{n-1} \left(n\sigma^2 - n \frac{\sigma^2}{n} \right) = \sigma^2 \end{aligned}$$

قضیه ۱۱: اگر X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از یک جامعه نرمال $N(\mu, \sigma^2)$ باشد آنگاه:

$$\text{Var}(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1}$$

اثبات:

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \chi^2(n-1)$$

$$\text{Var} \left[\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \right] = 2(n-1)$$

$$\frac{(n-1)^2}{\sigma^4} \text{Var}(S^2) = 2(n-1) \rightarrow \text{Var}(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1}$$

۳- توزیع t_student

توزیع t حاصل از تقسیم دو متغیر تصادفی است که صورت کسر متغیر تصادفی نرمال استاندارد و مخرج کسر جذر یک متغیر تصادفی دارای توزیع مربع کای تقسیم بر درجه آزادی آن است یعنی:

$$t_{(v)} = \frac{Z}{\sqrt{\frac{\chi^2_{(v)}}{v}}}$$

با استفاده از تکنیک تبدیل متغیر در تابع توزیع تابعی از یک متغیر تصادفی، تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی t-student بشرح ذیل خواهد بود.

$$f_{t(v)} = \frac{1}{\sqrt{\pi v}} \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{v}\right)^{-\left(\frac{v+1}{2}\right)} \quad ; \quad -\infty < x < +\infty$$

$$E[x] = 0$$

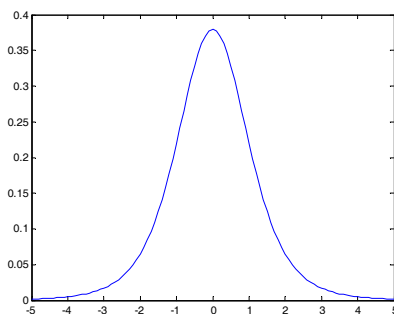
$$\text{Var}(x) = \frac{v}{v-2}; v > 2$$

شکل تابع چگالی متغیر تصادفی t، مانند توزیع نرمال با میانگین صفر حول نقطه صفر متقارن است.

تفاوت توزیع t با توزیع نرمال در آنست که توزیع t کمی پهن تر از توزیع نرمال است. در توزیع t با

افزایش درجه آزادی، واریانس کمتر می شود.

مثال: توزیع t با ۵ درجه آزادی



نکته: در یک نمونه تصادفی، احتمال اینکه مقدار عددی یک متغیر تصادفی t بزرگتر از عدد

مشخصی باشد عبارتست از سطح زیر چگالی t در سمت راست آن عدد مشخص و این عدد معمولاً

با t_α نمایش داده می‌شود بطوری که سطح زیر چگالی t واقع در سمت راست t_α عبارتست از α .

$$\begin{aligned} P(T \geq t_{\alpha, \nu}) &= \alpha \\ P(T_{(1.0)} \geq 1.812) &= P(T \geq t_{(1.0), \%5}) = \%5 \\ P(T_{(0.5)} \geq 2.015) &= P(T \geq t_{(0.5), \%5}) = \%5 \end{aligned}$$

قضیه ۱۲: در توزیع t هر چه ν بزرگتر باشد، توزیع t به سمت توزیع نرمال استاندارد میل خواهد کرد و وقتی که $\nu = +\infty$ باشد توزیع t همان توزیع نرمال استاندارد است. یعنی:

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} t_{(\nu)} = Z$$

اهمیت توزیع t

در حالتیکه σ معلوم باشد بر اساس قضیه حد مرکزی، متغیر تصادفی $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ دارای توزیع نرمال

استاندارد است اما در عمل σ مجهول است لذا برای تصمیم‌گیری لازم است توزیع متغیر تصادفی

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

را داشته باشیم که این مهم بر اساس توزیع t و قضیه ذیل برآورده می‌شود.

قضیه ۱۳: اگر X_n, \dots, X_2, X_1 نمونه تصادفی حاصل از جامعه $N(\mu, \sigma^2)$ و \bar{X} و S بترتیب

میانگین و انحراف معیار نمونه مزبور باشد در این صورت متغیر تصادفی $\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$ دارای

توزیع t با $n-1$ درجه آزادی است.

$$\begin{aligned} t_{\nu=(n-1)} &= \frac{Z}{\sqrt{\frac{\chi^2_{(n-1)}}{n-1}}} \\ t_{\nu=(n-1)} &= \frac{\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}}/(n-1)} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \end{aligned}$$

لذا متغیر تصادفی $\frac{\bar{X} - \mu}{\delta/\sqrt{n}}$ دارای توزیع t با $(n-1)$ درجه آزادی است.

نکته: اگر از یک جامعه نرمال $X \sim N(\mu, \sigma)$ یک نمونه n_1 تایی بگیریم و \bar{X} را بر اساس این نمونه

n_1 تایی تعریف کنیم و پس یک نمونه n_2 تایی مستقل از n_1 گرفته و S^2 را بر اساس آن تعریف

کنیم داریم آنگاه:

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n_1}} \sim t_{(n_2-1)}$$

$$t_{v=(n-1)} = \frac{Z}{\sqrt{\frac{\chi^2_{(n-1)}}{n-1}}}$$

$$t_{v=(n_1-1)} = \frac{\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n_1}}}{\sqrt{\frac{(n_2-1)S^2}{\sigma^2}/(n_2-1)}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n_1}} = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n_1}}$$

نکته: اگر یک نمونه n_1 از جامعه $X \sim N(\mu_1, \sigma_1)$ گرفته و \bar{X} را از روی آن تعریف کنیم و سپس یک نمونه n_2 از جامعه $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2)$ مستقل از X گرفته و S_y^2 را بر اساس آن تعریف کنیم داریم:

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \cdot \frac{\bar{X} - \mu_1}{S_y/\sqrt{n_1}} \sim t_{(n_2-1)}$$

نکته: توزیع t با یک درجه آزادی یک توزیع کوشی است. توزیع کوشی دارای میانگین نیست همچنین این توزیع دارای واریانس نیست.

$$f_{t(0)} = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \quad ; \quad -\infty < x < +\infty$$

۴- توزیع تفاوت بین دو میانگین نمونه

فرض کنید X_1, X_2, \dots, X_{n_x} یک نمونه تصادفی متشکل از n_x متغیر تصادفی مستقل با توزیع نرمال هر یک با میانگین μ_x و واریانس σ^2 باشد و فرض کنید Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_y} یک نمونه تصادفی متشکل از n_y متغیر تصادفی مستقل با توزیع نرمال هر یک با میانگین μ_y و واریانس σ^2 باشد. همچنین فرض کنید که تمام X ها، Y ها مستقل باشند در این صورت:

الف- اگر σ معلوم باشد:

$$\bar{X} \sim N\left(\mu_x, \frac{\sigma^2}{n_x}\right)$$

$$\bar{Y} \sim N\left(\mu_y, \frac{\sigma^2}{n_y}\right)$$

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(\mu_x - \mu_y, \frac{\sigma^2}{n_x} + \frac{\sigma^2}{n_y}\right)$$

آنگاه متغیر تصادفی $Z = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_x - \mu_y)}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}}}$ دارای توزیع نرمال استاندارد است

ب- اگر σ مجهول باشد:

$$\frac{(n_x - 1)S_x^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n_x - 1)}$$

$$\frac{(n_y - 1)S_y^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n_y - 1)}$$

آنگاه با استفاده از خاصیت جمع در توزیع مربع کای، متغیر تصادفی $\frac{(n_x - 1)S_x^2}{\sigma^2} + \frac{(n_y - 1)S_y^2}{\sigma^2}$ دارای

توزیع مربع کای با $n_x + n_y - 2$ درجه آزادی است. از طرفی توزیع آن از $\bar{X} - \bar{Y}$ مستقل است. بنا

به تعریف متغیر تصادفی t داریم:

$$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_x - \mu_y)}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}}} = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\frac{(n_x - 1)S_x^2 + (n_y - 1)S_y^2}{n_x + n_y - 2}} \sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}}}$$

لذا متغیر تصادفی $\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\frac{(n_x - 1)S_x^2 + (n_y - 1)S_y^2}{n_x + n_y - 2}} \sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}}}$ دارای توزیع t با $n_x + n_y - 2$ درجه آزادی است

آزادی است

مثال: نمونه‌های تصادفی مستقل به اندازه $n_1 = 30$ و $n_2 = 50$ از دو جامعه نرمال با میانگین‌های

$\mu_1 = 78$ و $\mu_2 = 75$ و واریانس‌های $\sigma_1^2 = 150$ و $\sigma_2^2 = 200$ اختیار شده‌اند. احتمال اینکه میانگین

نمونه اول از میانگین نمونه دوم حداقل 4.8 بیشتر باشد چقدر است؟

$$\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim Z$$

$$P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \geq 4.8) = P\left[\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (78 - 75)}{\sqrt{\frac{150}{30} + \frac{200}{50}}} \geq \frac{4.8 - (78 - 75)}{\sqrt{\frac{150}{30} + \frac{200}{50}}}\right] = P(Z \geq 0.53)$$

مثال: میانگین نمرات تست هوش دانشجویان سال اول یک دانشکده 540 و انحراف معیار آن 50

است. دو نمونه تصادفی با حجم $n_1 = 32$ و $n_2 = 50$ انتخاب می‌کنیم احتمال اینکه تفاضل

میانگین نمرات این دو نمونه:

الف- بیش از 20 باشد چقدر است؟

$$P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 > 20) = P\left[\frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{50\sqrt{\frac{1}{32} + \frac{1}{50}}} > \frac{20}{50\sqrt{\frac{1}{32} + \frac{1}{50}}}\right] =$$

$$P(Z > 1.76) = 1 - \phi(1.76)$$

ب- بین 5 و 10 باشد چقدر است؟

$$P(5 < \bar{X}_1 - \bar{X}_2 < 10) = P\left[\frac{5}{50\sqrt{\frac{1}{32} + \frac{1}{50}}} < Z < \frac{10}{50\sqrt{\frac{1}{32} + \frac{1}{50}}}\right] = P(0.44 < Z < 0.88)$$

نکته: نتایج بدست آمده از توزیع نمونه $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ ، نیز برای جمعیت‌های محدود و قتیکه نمونه گیری به روش بدون جایگذاری انجام می پذیرد صادق باشد، مشروط بر آنکه اندازه جمعیت ها یعنی N_1 و N_2 به ترتیب در مقابل اندازه نمونه یعنی n_1 و n_2 بزرگ باشد. بهرحال اگر جمعیت ها کوچک باشند و نمونه گیری به روش بدون جایگذاری انجام پذیرد در آنصورت ما باید $\sigma_{\bar{x}_2}$ و $\sigma_{\bar{x}_1}$ را بتوسط رابطه زیر محاسبه نمائیم:

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1}$$



[Www.iepnu.ir](http://www.iepnu.ir)

۵- توزیع F

اگر متغیرهای تصادفی مستقل χ_1^2 و χ_2^2 دارای توزیع های مربع کای با درجات آزادی به ترتیب ν_1 و ν_2 باشند متغیر تصادفی:

$$F = \frac{\chi_1^2 / \nu_1}{\chi_2^2 / \nu_2}$$

توزیع F با ν_1 و ν_2 درجه آزادی دارد. بر این اساس تابع چگالی متغیر تصادفی F به صورت ذیل است:

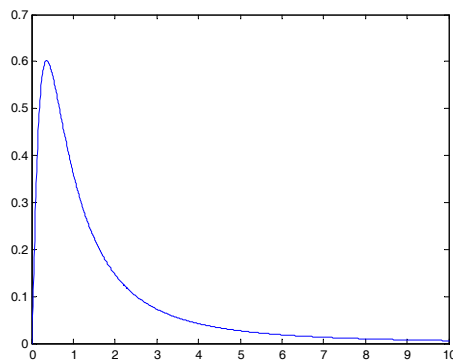
$$f_{F, \nu_1, \nu_2}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu_1 + \nu_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)} (v_1)^{\frac{\nu_1}{2}} (v_2)^{\frac{\nu_2}{2}} \frac{x^{\left(\frac{\nu_1-1}{2}\right)}}{(v_2 + v_1 x)^{\frac{\nu_1 + \nu_2}{2}}}; \quad x > 0$$

که در ν_1 و ν_2 بترتیب درجه آزادی صورت و مخرج است. شکل تابع چگالی متغیر تصادفی F مانند توزیع مربع کای است. اهمیت توزیع F در آنست که برای مقایسه واریانسهای دو جامعه بکار می‌رود. میانگین و واریانس توزیع F با درجات آزادی ν_1 و ν_2 به ترتیب برابر است با:

$$E[x] = \frac{\nu_2}{\nu_2 - 2}; \quad \nu_2 > 2$$

$$\text{Var}[x] = \frac{\nu_2^2(2\nu_2 + 2\nu_1 - 4)}{\nu_1(\nu_2 - 2)^2(\nu_2 - 4)}; \quad \nu_2 > 4$$

مثال : توزیع F با ۵ درجه آزادی در صورت و ۳ درجه آزادی در مخرج



نکته: در یک نمونه تصادفی، احتمال اینکه مقدار عددی یک متغیر تصادفی F بزرگتر از عدد مشخصی باشد عبارتست از سطح زیر چگالی F در سمت راست آن عدد مشخص و این عدد معمولاً با $F_{v_1, v_2, \alpha}$ نمایش داده می‌شود بطوری که سطح زیر چگالی F واقع در سمت راست آن عبارتست از α یعنی $P(F > F_{\alpha; v_1, v_2}) = \alpha$

قضیه ۱۴: اگر X_{m+1}, \dots, X_1 یک نمونه تصادفی به حجم $m+1$ از یک توزیع نرمال $N(\mu_x, \sigma_x^2)$ باشد، همچنین اگر Y_{n+1}, \dots, Y_1 یک نمونه تصادفی به حجم $n+1$ از یک توزیع نرمال $N(\mu_y, \sigma_y^2)$ باشد و نمونه‌های تصادفی ناهمبسته باشند در این صورت:

$$\frac{1}{\sigma_x^2} \sum_{i=1}^{m+1} (X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2(m)$$

$$\frac{1}{\sigma_y^2} \sum_{i=1}^{n+1} (Y_i - \bar{Y})^2 \sim \chi^2(n)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{m+1} (X_i - \bar{X})/m}{\sum_{i=1}^{n+1} (Y_i - \bar{Y})/n} \sim F_{m,n}$$

قضیه ۱۵: (توزیع نسبت دو واریانس) فرض کنید X_{n_x}, \dots, X_2, X_1 یک نمونه تصادفی متشکل از n_x متغیر تصادفی با توزیع نرمال هر یک با میانگین μ_x و واریانس σ_x^2 باشد. همچنین فرض کنید Y_{n_y}, \dots, Y_2, Y_1 یک نمونه تصادفی متشکل از n_y متغیر تصادفی با توزیع نرمال هر یک با میانگین μ_y و واریانس σ_y^2 باشد. همچنین فرض کنید تمام X ها و Y ها مستقل باشند لذا:

$$\frac{(n_x - 1)S_x^2}{\sigma_x^2} \sim \chi^2_{(n_x - 1)}$$

$$\frac{(n_y - 1)S_y^2}{\sigma_y^2} \sim \chi^2_{(n_y - 1)}$$

چون X ها و Y ها مستقل اند پس این دو متغیر تصادفی مربع کای مستقل از هم هستند.

اثبات: طبق تعریف متغیر تصادفی F داریم:

$$F_{v_1, v_2} = \frac{\chi_{(v_1)}^2 / v_1}{\chi_{(v_2)}^2 / v_2}$$

$$\frac{(n_x - 1)S_x^2 / (n_x - 1)}{\sigma_x^2} = F_{n_x - 1, n_y - 1}$$

$$\frac{(n_y - 1)S_y^2 / (n_y - 1)}{\sigma_y^2}$$

لذا متغیر تصادفی $\frac{S_x^2}{S_y^2} \cdot \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2}$ دارای توزیع F با درجات آزادی $n_x - 1$ و $n_y - 1$ است.

چند نکته مهم

۱- اگر x دارای توزیع F_{v_1, v_2} باشد آنگاه متغیر $Y = \frac{1}{X}$ نیز دارای توزیع F_{v_2, v_1} است.

۲- مربع توزیع $t_{(v)}$ دارای توزیع F با درجات آزادی $v, 1$ است.

$$t_{(v)} = \frac{Z}{\sqrt{\frac{\chi_{(v)}^2}{v}}} \rightarrow t_{(v)}^2 = \frac{Z^2 / 1}{\chi_{(v)}^2 / v}$$

$$F_{1-\alpha; v_2, v_1} \frac{1}{F_{\alpha; v_1, v_2}} \text{ یا } F_{\alpha; v_1, v_2} = \frac{1}{F_{1-\alpha; v_2, v_1}} \quad -3$$

۴- اگر X_1 و X_2 یک نمونه تصادفی از پخش $f(x) = e^{-x}$; $x > 0$ باشد آنگاه $Z = \frac{X_1}{X_2}$ دارای

پخش $F_{2,2}$ است. توزیع F با درجات آزادی ۲ و ۲ به صورت زیر است:

$$f_z(z) = \frac{1}{(1+z)^2}$$

۶- توزیع میانگین جامعه های متناهی

اگر آزمایش متشکل از انتخاب یک مقدار یا بیشتر از مجموعه ای متناهی از اعداد $\{c_1, \dots, c_n\}$ باشد این مجموعه را جامعه‌ای متناهی با اندازه N می‌نامند. اگر انتخاب بدون جایگذاری باشد و x_1 اولین و x_n امین عددی باشد که استخراج می‌شوند، این متغیرهای تصادفی، نمونه ای تصادفی به اندازه n این جامعه متناهی را تشکیل می‌دهند مشروط بر آنکه توزیع احتمال توأم آنها به ازای هر n تایی مرتب مقادیر انتخاب شده از مجموعه $\{c_1, \dots, c_n\}$ به صورت زیر باشد:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{N(N-1)\dots(N-n+1)}$$

$$f(x_i) = \frac{1}{N}, x_i = c_1, \dots, c_N, i = 1, \dots, n$$

میانگین و واریانس آنرا میانگین و واریانس جامعه متناهی می‌نامیم. یعنی میانگین و واریانس جامعه متناهی $\{c_1, \dots, c_N\}$ عبارتست از:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^N c_i}{N}, \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (c_i - \mu)^2}{N}$$

توزیع حاشیه ای توأم هر دو تا از متغیرهای تصادفی x_1, \dots, x_n برای هر زوج مرتب از مقادیر جامعه متناهی است و برابر است با:

$$g(x_i, x_j) = \frac{1}{N(N-1)}$$

و کوواریانس آنها عبارتست از:

$$\text{Cov}(x_i, x_j) = \frac{\sigma^2}{N-1}$$

اگر \bar{X} میانگین یک نمونه تصادفی به اندازه n از جامعه ای متناهی به اندازه N با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد آنگاه:

$$E(\bar{x}) = \mu, \text{Var}(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

قضیه ۱۶: اگر تمام نمونه‌های تصادفی n تایی ممکنه با روش بدون جایگذاری از یک جمعیت محدود N تایی با حد متوسط μ و انحراف معیار σ بیرون کشیده شود در آنصورت توزیع نمونه‌ای \bar{X} به طور تقریبی یک توزیع نرمال با حد متوسط و انحراف معیار زیر خواهد بود.

$$\mu_{\bar{x}} = \mu$$

$$\text{Var}(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

مثال:

جمعیت ۱۰۱ و ۱ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۶ و ۶ و ۷ داده شده است. نمونه تصادفی ۳۶ تایی به روش جایگزین انتخاب شده است. احتمال اینکه میانگین نمونه بیشتر از $3/8$ و کوچکتر از $4/5$ باشد چقدر است؟ توزیع احتمال جمعیت مربوط به صورت زیر است:

x	1	3	4	5	6	7
P(x)	0.3	0.1	0.1	0.1	0.3	0.1

$$E(x) = \mu = 4$$

$$\text{Var}(x) = \sigma^2 = 5$$

$$\bar{x} \sim N\left(4, \frac{5}{36}\right)$$

$$P(3.8 < \bar{x} < 4.5) = P(-0.405 < z < 1.216) = 0.5453$$

نکته: برای N هایی که در مقابل تعداد نمونه n عدد بزرگی هستند، ضریب $\frac{N-n}{N-1}$ به سمت ۱ میل می‌کند.

قضیه ۱۷: اگر نمونه‌ای تصادفی به اندازه n از جامعه‌ای متناهی که متشکل از N عدد صحیح مثبت است انتخاب شود آنگاه:

$$E(\bar{x}) = \frac{N+1}{2}$$

$$\text{Var}(\bar{x}) = \frac{(N+1)(N-n)}{12n}$$

$$E(y) = \frac{n(N+1)}{2}$$

$$\text{Var}(y) = \frac{n(N+1)(N-n)}{12}$$

$$\mu = E(\bar{x}) = \sum_{i=1}^N x_i \cdot f(x_i) = \sum_{i=1}^N x_i \cdot \frac{1}{N} = \frac{1}{N} (x_1 + x_2 + \dots + x_N) = \frac{1}{N} \cdot \frac{N(N+1)}{2} = \frac{N+1}{2}$$

$$E(x^2) - (E(x))^2 = \sum_{i=1}^N x_i^2 \cdot f(x_i) - \frac{(N+1)^2}{4} = \frac{1}{N} \cdot \frac{N(N+1)(N+1)}{6} - \frac{(N+1)^2}{4} = \frac{N^2-1}{12}$$

$$\text{Var}(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n} \left(\frac{N-n}{N-1} \right) = \frac{N^2-1}{12n} \cdot \frac{N-n}{N-1} = \frac{(N+1)(N-n)}{12n}$$

سلامتی و تعجیل در فرج آقا امام زمان (عج) صلوات

Www.iepnu.ir



۷- آماره‌های ترتیبی

فرض کنید از یک جامعه نامتناهی پیوسته یک نمونه تصادفی n تایی بشرح X_1, \dots, X_n انتخاب کرده‌ایم. اگر کوچکترین مقدار x ها را Y_1 ، بزرگترین مقدار بعد از آن را Y_2 و به همین ترتیب بزرگترین آنها را Y_n بنامیم در این صورت $Y_1 < Y_2 < \dots < Y_n$ را آماره ترتیبی می‌نامیم.

قضیه ۱۸: برای نمونه تصادفی به اندازه n از جامعه‌ای نامتناهی که دارای تابع چگالی $f(x)$ است.

چگالی r امین آماره ترتیبی y_r ، به ازای $-\infty < y_r < +\infty$ عبارتست از:

$$g_r(y_r) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \left[\int_{-\infty}^{y_r} f(x) dx \right]^{r-1} f(y_r) \left[\int_{y_r}^{\infty} f(x) dx \right]^{n-r}$$

اثبات: فرض کنید که محور اعداد حقیقی را به سه بازه تقسیم کرده‌ایم یکی از $-\infty$ تا y_r ، دومی از y_r

تا y_r+h (که در آن h ثابت است) و سومی از y_r+h تا $+\infty$. در اینصورت اگر چگالی جامعه‌ای که از

آن نمونه برگرفته شده است $f(x)$ باشد، احتمال اینکه $r-1$ تا از نمونه‌ها در اولین باز قرار بگیرد،

یکی در بازه دوم و $n-r$ تا در بازه سوم قرار بگیرند طبق فرمول توزیع چند جمله‌ای عبارتست از

$$g_r(y_r) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \left[\int_{-\infty}^{y_r} f(x) dx \right]^{r-1} \left[\int_{y_r}^{y_r+h} f(x) dx \right] \left[\int_{y_r}^{\infty} f(x) dx \right]^{n-r}$$

با استفاده از قضیه میانگین در حسابان داریم:

$$\left[\int_{y_r}^{y_r+h} f(x) dx \right] = f(\xi) \cdot h \quad y_r \leq \xi \leq y_r + h$$

و در زمانی که $h \rightarrow 0$ خواهیم داشت

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{y_r}^{y_r+h} f(x) dx = f(y_r)$$

و سرانجام

$$g_r(y_r) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \left[\int_{-\infty}^{y_r} f(x) dx \right]^{r-1} f(y_r) \left[\int_{y_r}^{\infty} f(x) dx \right]^{n-r}$$

بر این اساس توزیع اولین، آخرین و میانه آماره ترتیبی عبارتست از

الف - توزیع اولین آماره ترتیبی

$$g_1(y_1) = n f(y_1) \left[\int_{y_1}^{\infty} f(x) dx \right]^{n-1} \quad -\infty \leq y_1 \leq +\infty$$

ب- توزیع آخرین آماره ترتیبی

$$g_n(y_n) = n f(y_n) \left[\int_{-\infty}^{y_n} f(x) dx \right]^{n-1} \quad -\infty \leq y_n \leq +\infty$$

ج - در نمونه‌ای تصادفی به اندازه $n=2m+1$ توزیع $\tilde{x} = y_{m+1}$ میانه آماره‌های ترتیبی عبارتست از

$$h(\tilde{x}) = \frac{(2m+1)!}{m!m!} \left[\int_{-\infty}^{\tilde{x}} f(x) dx \right]^m f(\tilde{x}) \left[\int_{\tilde{x}}^{\infty} f(x) dx \right]^m \quad -\infty \leq \tilde{x} \leq +\infty$$

د - در نمونه‌ای تصادفی به اندازه $n=2m$ توزیع \tilde{x} میانه آماره‌های ترتیبی عبارتست از

$$h(\tilde{x}) = \frac{g_m(y_m) + g_{m+1}(y_{m+1})}{2}$$

ه- چگالی توام $g_{r,j}(y_r, y_j)$ عبارتست از

$$g_{r,j}(y_r, y_j) = \frac{n!}{(r-1)!(j-r-1)!(n-j)!} \left[\int_{-\infty}^{y_r} f(x) dx \right]^{r-1} f(y_r) \left[\int_{y_r}^{y_j} f(x) dx \right]^{j-r-1} f(y_j) \left[\int_{y_j}^{\infty} f(x) dx \right]^{n-j}$$

مثال: فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی n تایی از یک جامعه‌ای نمایی با $\lambda = 1$ باشد. تابع چگالی اولین و آخرین آماره ترتیبی را بدست آورید.

$$g_1(y_1) = n e^{-y_1} \left[\int_{y_1}^{\infty} e^{-x} dx \right]^{n-1} = n e^{-y_1} (e^{-y_1})^{n-1} = n e^{-n y_1}$$

$$g_n(y_n) = n e^{-y_n} \left[\int_{-\infty}^{y_n} e^{-x} dx \right]^{n-1} = n e^{-y_n} (1 - e^{-y_n})^{n-1}$$

فهرست

- ۱- مقدمه
- ۲- برآورد نقطه‌ای (Point Estimator)
- ۳- ارزیابی یک تخمین زنده یا مقایسه برآوردکننده ها
- ۳-۱- مقایسه دو برآوردکننده از طریق سنجش کارایی نسبی آنها
- ۳-۲- تعریف تخمین زنده بهینه
- ۳-۳- برآوردکننده های ناریب
- ۳-۴- برآوردکننده های سازگار
- ۳-۵- تخمین زنده های ناریب کارا
- ۴- روش های برآورد نقطه‌ای
- ۴-۱- روش گشتاورها
- ۴-۲- روش حداکثر درستنمایی (روش MLE)
- ۵- برآوردکننده های کافی

سلامتی و تعجیل در فرج آقا امام زمان (عج) صلوات

[Www.iepnu.ir](http://www.iepnu.ir)



۱- مقدمه

نظریه برآورد به دو موضوع برآورد نقطه‌ای و برآورد فاصله‌ای می‌پردازد. در برآورد نقطه‌ای یک آماره، تنها یک مقدار عددی بکار می‌رود تا بتوان به کمک آن یک پارامتر بخصوصی از جامعه را برآورد نمود در حالیکه در برآورد فاصله‌ای، یک فاصله مخصوصی معین می‌گردد که مقدار واقعی پارامتر در داخل این فاصله قرار دارد.

۲- برآورد نقطه‌ای (Point Estimator)

یک مقدار به خصوصی از یک آماره که برای برآورد یک پارامتر مشخص به کار می‌رود به نام برآورد نقطه‌ای نامیده می‌شود. می‌توان مساله کلی برآورد نقطه‌ای را به شرح ذیل بیان کرد:

متغیر تصادفی X ، با تابع چگالی احتمال $f_X(x; \theta)$ مفروض است که در آن پارامتر θ مجهول می‌باشد. یک نمونه تصادفی، x_1, x_2, \dots, x_n از این جامعه انتخاب می‌نماییم و بر اساس تابعی از این نمونه تصادفی، $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ، مقدار پارامتر θ را برآورد می‌کنیم. در این صورت متغیر تصادفی $\hat{\theta}$ یک برآورد کننده برای پارامتر θ و مقداری که $\hat{\theta}$ می‌گیرد برآورد نقطه‌ای θ نامیده می‌شود.

بدیهی است، برای پارامتر θ ، تعداد زیادی برآورد کننده وجود دارد. اما یک برآورد کننده خوب آن است که تا حد ممکن به مقدار واقعی پارامتر نزدیک باشد. در اینجا این سوال مطرح می‌شود که از بین تخمین زنده‌های مختلف برای پارامتر θ کدام بهتر است؟

از آنجایی که تخمین زنده‌ها، متغیرهای تصادفی هستند پس عملکرد آنها را نمی‌توان برای یک مورد خاص مدنظر قرار داد. بنابراین برآورد کننده‌ها باید براساس عملکردشان در بلندمدت مورد ارزیابی قرار گیرند.

۳- ارزیابی یک تخمین زنده یا مقایسه برآورد کننده‌ها

در برآورد پارامتر θ که بر اساس مقادیر نمونه تعیین می‌شود، در ابتدا تابع ضرر (زیان) به صورت ذیل تعریف می‌کنیم:

$$l(\hat{\theta}, \theta) = (\hat{\theta} - \theta)^2$$

از آنجایی که تابع زیان یک متغیر تصادفی است بنابراین منطقی بنظر می‌رسد از امید ریاضی تابع

زیان تحت عنوان تابع ریسک برای نیل به ارزیابی بهتر استفاده شود. تابع ریسک عبارتست از:

$$R(\hat{\theta}, \theta) = \text{MSE} = E[(\hat{\theta} - \theta)^2]$$

۳-۱- مقایسه دو برآوردکننده از طریق سنجش کارآیی نسبی آنها

اگر برآوردکننده $\hat{\theta}_1$ دارای میانگین مربع خطای $E(\hat{\theta}_1 - \theta)^2$ (که آنرا با MSE_1 نشان می‌دهند) و برآوردکننده $\hat{\theta}_2$ دارای میانگین مربع خطای $E(\hat{\theta}_2 - \theta)^2$ (که آنرا با MSE_2 نشان می‌دهند) باشد در این صورت کارایی $\hat{\theta}_2$ نسبت به $\hat{\theta}_1$ بصورت $\frac{\text{MSE}_1}{\text{MSE}_2}$ یا $\frac{E(\hat{\theta}_1 - \theta)^2}{E(\hat{\theta}_2 - \theta)^2}$ تعریف می‌شود. اگر کارایی $\hat{\theta}_2$ نسبت به $\hat{\theta}_1$ کمتر از یک باشد، $\hat{\theta}_1$ برآوردکننده ای بهتر از $\hat{\theta}_2$ برای θ به شمار می‌آید. در غیر این صورت $\hat{\theta}_2$ برآوردکننده ای بهتر از $\hat{\theta}_1$ برای θ است.

۳-۲- تعریف تخمین‌زننده بهینه

تخمین‌زننده بهینه به تخمین‌زننده‌ای گفته می‌شود که MSE مربوط به آن، از MSE سایر تخمین‌زننده‌ها به ازای تمام مقادیر θ کمتر باشد. به عنوان مثال \bar{X} یک تخمین‌زننده بهینه μ مربوط به توزیع نرمال می‌باشد.

۳-۳- برآوردکننده‌های نارایب

$\hat{\theta}$ یک برآوردکننده نارایب برای θ است اگر امید ریاضی آن با θ مساوی شود. یعنی اگر به ازای تمام مقادیر θ داشته باشیم:

$$E(\hat{\theta}) = \theta$$

اگر یک برآوردکننده نارایب نباشد، اریب نامیده می‌شود و مقدار $b = E(\hat{\theta}) - \theta$ به عنوان اریبی شناخته می‌شود. در اینصورت، اگر $b > 0$ باشد اریبی مثبت و اگر $b < 0$ باشد اریبی منفی است. در اینصورت میانگین مربعات خطا بر حسب مقدار اریبی عبارتست از:

$$\text{MSE}(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - \theta)^2 = \text{Var}(\hat{\theta}) + b^2$$

نکته: اگر متغیر تصادفی T یک برآوردکننده نارایب برای پارامتر مجهول θ باشد و $\text{Var}(T) \neq 0$ در این صورت T^2 همواره برای θ^2 اریب است.

مثال: دو برآوردکننده $\hat{\theta}_1$ و $\hat{\theta}_2$ برای پارامتر θ به شرح ذیل بیان شده است:

$$\begin{cases} E(\hat{\theta}_1) = \theta \\ \text{Var}(\hat{\theta}_1) = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} E(\hat{\theta}_2) = \frac{2}{3}\theta \\ \text{Var}(\hat{\theta}_2) = 3 \end{cases}$$

بر حسب مقادیر مختلف θ این دو تخمین زنده را مقایسه کنید.

$$MSE(\hat{\theta}) = \text{Var}(\hat{\theta}) + b^2$$

$$MSE(\hat{\theta}_1) = 7 + [E(\hat{\theta}_1) - \theta_1]^2 = 7 + (0)^2 = 7$$

$$MSE(\hat{\theta}_2) = 3 + [E(\hat{\theta}_2) - \theta_2]^2 = 3 + \left(\frac{2}{3}\theta - \theta\right)^2 = 3 + \frac{1}{9}\theta^2$$

اگر $\hat{\theta}_2$ برآورد کننده بهتری برای θ باشد آنگاه:

$$MSE(\hat{\theta}_1) > MSE(\hat{\theta}_2)$$

$$7 > 3 + \frac{\theta^2}{9} \rightarrow -6 < \theta < 6$$

مثال ۱: متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال با میانگین مجهول μ و واریانس مجهول σ^2 است. یک

نمونه تصادفی ۹ تایی می‌گیریم و ۲ برآورد کننده نقطه‌ای $T_1 = 0.1 \sum_{i=1}^9 (x_i - \bar{x})^2$ و

و $T_2 = 0.125 \sum_{i=1}^9 (x_i - \bar{x})^2$ را برای σ^2 تعریف می‌کنیم اگر $\text{Var}(T_1) = 0.16\sigma^4$ و

$\text{Var}(T_2) = 0.25\sigma^4$ باشد. کارایی T_1 نسبت به T_2 برابر است با:

$$\frac{\text{کارایی } T_1}{\text{کارایی } T_2} = \frac{MSE_2}{MSE_1} = \frac{\text{Var}(T_2) + (E(T_2) - \sigma^2)^2}{\text{Var}(T_1) + (E(T_1) - \sigma^2)^2} = \frac{0.25\sigma^4}{0.16\sigma^4 + 0.04\sigma^4} = 1.25$$

$$E(T_1) = 0.1 \times 8 \times \sigma^2 = 0.8\sigma^2$$

$$E(T_2) = 0.125 \times 8\sigma^2 = \sigma^2$$

مثال ۲: اگر X_1 و X_2 و X_3 یک نمونه تصادفی از جامعه نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 باشند،

کارایی نسبی برآورد کننده \bar{X} (میانگین نمونه) نسبت به برآورد کننده $\frac{x_1 + 2x_2 + x_3}{4}$ چقدر

است؟

$$\frac{\text{کارایی } \bar{x}}{\text{کارایی } y} = \frac{MSE(y)}{MSE(\bar{x})} = \frac{\text{Var}(y)}{\text{Var}(\bar{x})} = \frac{\frac{1}{16} \times 6\sigma^2}{\frac{\sigma^2}{3}} = \frac{9}{8}$$

مثال ۳: فرض کنید T_1 و T_2 برآورد کننده های θ هستند و بصورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{cases} E(T_1) = \theta \\ \text{Var}(T_1) = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} E(T_2) > \theta \\ \text{Var}(T_2) = 2 \end{cases}$$

و $[E(T_2) - \theta]^2 = 7$ است. کدام برآوردکننده بهتری برای θ است؟

$$\text{MSE}_{T_1} = \text{Var}(T_1) + b^2 = 4 + 0 = 4$$

$$\text{MSE}_{T_2} = \text{Var}(T_2) + [E(T_2) - \theta]^2 = 2 + 7 = 9$$

چون $\frac{\text{MSE}_{T_1}}{\text{MSE}_{T_2}} < 1$ است لذا T_1 برآوردکننده بهتری برای θ است.

مثال ۴: فرض کنید T بر اساس یک نمونه تصادفی n تایی، برآوردکننده‌ای برای θ باشد. اگر

$E(x_i) = \theta$ و $T = \sum a_i x_i$ باشد. a_i ها چه محدودیتی باید داشته باشند تا T یک برآوردکننده

ناریب θ شود؟

$$T = \sum a_i x_i \rightarrow E(T) = E\left[\sum a_i x_i\right] = \sum [E(a_i x_i)] = \sum [a_i E(x_i)]$$

چون T یک برآوردکننده ناریب θ است لذا:

$$\theta = \sum (a_i \theta) = \theta = \theta \sum a_i \rightarrow \sum a_i = 1$$

مثال ۵: فرض کنید $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ باشد. اگر $\hat{\theta}_1$ و $\hat{\theta}_2$ دو تخمین زنده برای پارامتر σ^2 باشند، آنها

را مقایسه کنید.

$$\hat{\theta}_1 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}, \quad \hat{\theta}_2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n+1}$$

$$E(\hat{\theta}_1) = E(S^2) = \sigma^2, \quad \text{Var}(\hat{\theta}_1) = \text{Var}(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1}, \quad \text{MSE}(\hat{\theta}_1) = \frac{2\sigma^4}{n-1}$$

$$E(\hat{\theta}_2) = E\left[\frac{(n-1)S^2}{(n+1)}\right] = \frac{n-1}{n+1}\sigma^2$$

$$\text{Var}(\hat{\theta}_2) = \text{Var}\left[\frac{(n-1)S^2}{(n+1)}\right] = \frac{2(n-1)}{(n+1)^2}\sigma^4$$

$$\text{MSE}(\hat{\theta}_2) = \frac{2(n-1)}{(n+1)^2}\sigma^4 + \left[\frac{n-1}{n+1}\sigma^2 - \sigma^2\right]^2 = \frac{2\sigma^4}{n+1}$$

$\text{MSE}(\hat{\theta}_1) > \text{MSE}(\hat{\theta}_2) \Rightarrow \hat{\theta}_2$ برآورد کننده بهتر از $\hat{\theta}_1$ برای پارامتر σ^2 است

۳-۴- برآوردکننده های سازگار

خاصیت نارایی بر حسب تکرار آزمایش‌ها بیان شده است اما خاصیت سازگاری مربوط به رفتار یک تخمین‌زننده در یک آزمایش است و تئیکه حجم نمونه اجازه یابد بسیار بزرگ شود.

تعریف: گفته می‌شود برآوردکننده $\hat{\theta}_{(n)}$ یک برآوردکننده سازگار است هرگاه:

$$1-\hat{\theta}_{(n)} \text{ نارایب باشد.}$$

۲- با بزرگ شدن اندازه نمونه (n) داشته باشیم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\theta}_{(n)} = \theta, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(\hat{\theta}_{(n)}) = 0$$

نماد $\hat{\theta}_{(n)}$ به کار می‌رود تا نشان دهد که ممکن است برآوردکننده تابعی از نمونه تصادفی باشد.

بطور کلی برآوردکننده‌هایی که تابع ریسک آنها، با بزرگ شدن اندازه نمونه به سمت صفر میل می‌گیرند، برآوردکننده های سازگارند.

اگر این برآوردکننده ها اریب باشند، مقدار اریبی آنها نیز به سمت صفر میل می‌کند.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{MSE}_{\theta}(\hat{\theta}_n) = 0$$

مثال ۶: نمونه تصادفی X_1, \dots, X_n را از متغیر تصادفی دلخواه X با میانگین μ واریانس σ^2 در نظر

$$\bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum x_i; \quad U_n = \bar{x}_n + 1 \quad \text{می‌گیریم. فرض کنید:}$$

نشان دهید که \bar{X}_n یک برآوردکننده سازگار و U_n یک برآوردکننده ناسازگار برای μ می‌باشد.

$$E(\bar{X}_n) = \mu, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(\bar{X}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma^2}{n} = 0 \quad \text{است.}$$

$$E(U_n) = E(\bar{X}_n + 1) = \mu + 1 \quad \text{یک برآوردکننده ناسازگار است.}$$

نکته: سازگاری یک خاصیت مجانبی است یعنی خاصیت حدی یک برآوردکننده است. به عبارت

دیگر وقتی n به حد کافی بزرگ است می‌توانیم عملاً مطمئن باشیم که خطایی که با یک

برآوردکننده سازگار صورت می‌گیرد از هر ثابت مثبت مفروضی کمتر خواهد بود.

نکته: شرط کافی (نه لازم) برای اینکه آماده $\hat{\theta}$ یک برآوردکننده سازگار پارامتر θ باشد این است

که:

(۱) $\hat{\theta}$ ناریب باشد.

(۲) وقتی $n \rightarrow \infty$ ، $\text{Var}(\hat{\theta}) \rightarrow 0$

این شرط، شرط کافی است و شرط لازم نیست. لذا یک برآوردکننده می تواند سازگار باشد بدون اینکه ناریب باشد.

مثال ۷: نشان دهید برآوردکننده $\frac{x+1}{n+2}$ یک برآوردکننده سازگار پارامتر θ جامعه دو جمله ای است.

نکته: یک برآوردکننده اریب تنها وقتی می تواند سازگار باشد که بطور مجانبی ناریب باشد یعنی وقتی $n \rightarrow \infty$ ناریب باشد.

مثال ۸: برآوردکننده مینیماکس پارامتر θ ی دو جمله ای یعنی $\frac{X + \frac{1}{2}\sqrt{n}}{n + \sqrt{n}}$ مجانباً ناریب است.

$$E\left(\frac{x + \frac{1}{2}\sqrt{n}}{n + \sqrt{n}}\right) = \frac{E(x) + \frac{1}{2}\sqrt{n}}{n + \sqrt{n}} + \frac{n\theta + \frac{1}{2}\sqrt{n}}{n + \sqrt{n}} \neq \theta$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\left(\frac{x + \frac{1}{2}\sqrt{n}}{n + \sqrt{n}}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\theta + \frac{1}{2}\sqrt{n}}{n + \sqrt{n}} = \theta$$

مثال ۹: نشان دهید که واریانس نمونه ای S^2 ، برآوردکننده سازگار σ^2 برای یک نمونه تصادفی از جامعه های نرمال است.

۱) $E(S^2) = \sigma^2$ ناریب است

۲) $\text{Var}(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(S^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sigma^4}{n-1} = 0$$

مثال ۱۰: نشان دهید که \bar{x}^2 یک برآوردکننده مجانباً ناریب μ^2 است.

$$E(\bar{x}^2) = \text{Var}(\bar{x}) + [E(\bar{x})]^2$$

$$E(\bar{x}^2) = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\bar{x}^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2 \right) = \mu^2$$

پس \bar{x}^2 یک برآوردکننده مجاناً نارایب است.

۳-۵- تخمین زننده های نارایب کارا

اگر برآوردکننده های پارامتر θ متعلق به طبقه برآوردکننده نارایب باشند تابع ریسک، همان واریانس برآوردکننده می شود. در صورت وجود، برآوردکننده بهینه، $\hat{\theta}_0$ ، در میان این طبقه برآوردکننده ای است که به ازای تمام مقادیر θ واریانس آن از واریانس هیچ برآوردکننده نارایب دیگر تجاوز نکند. اگر چنین تخمین زننده ای وجود داشته باشد تخمین زننده $\hat{\theta}_0$ به تخمین زننده نارایب با حداقل واریانس θ معروف بوده و نیز در این طبقه از همه کاراتر است.

برای جستجو برای یک چنین برآورد کننده ای، تعیین یک حد پائین برای واریانس تمام برآوردکننده های نارایب مفید خواهد بود. یک چنین حدی بوسیله یک نامساوی مشهور به نامساوی کرایمر- رائو ارائه می شود.

فرض کنید $\hat{\theta}$ ، یک برآورد کننده نارایب برای پارامتر θ از جامعه ای با تابع چگالی $f_x(x; \theta)$ باشد. تحت شرایط بسیار کلی $\hat{\theta}$ در نامساوی ذیل صدق می کند.

$$\text{Var}(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{nE\left[\left(\frac{\partial \text{Ln}f(x; \theta)}{\partial \theta}\right)^2\right]}$$

است. اگر X گسسته باشد، $f_x(x; \theta)$ را برداشته و به جای آن از $P(x, \theta)$ استفاده می کنیم.

متأسفانه همواره برآوردکننده ای که عملاً دارای حد پائین کرایمر- رائو باشد وجود ندارد. اما در بسیاری از موارد می توان نشان داد که برآوردکننده ای مانند $\hat{\theta}_0$ دارای چنین حدی است در این صورت $\hat{\theta}_0$ باید برآوردکننده بهینه نارایب باشد. به عبارت دیگر حد پائین کرایمر- رائو متعلق به

تخمین زننده ناریب بهینه است.

قضیه: اگر $\hat{\theta}$ یک برآوردکننده ناریب θ باشد و $\text{Var}(\hat{\theta}) = \frac{1}{nE\left[\left(\frac{\partial \text{Ln}f(x;\theta)}{\partial \theta}\right)^2\right]}$ باشد، آنگاه $\hat{\theta}$ یک

برآوردکننده ناریب با کمترین واریانس از θ است.

مثال ۱۱: نشان دهید \bar{X} یک برآوردکننده ناریب با کمترین واریانس برای میانگین جامعه نرمال است.

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$f_x(x; \mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \quad ; \quad -\infty < x < \infty$$

$$\text{Ln} f_x(x; \mu) = \text{Ln} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} - \frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2$$

$$\frac{d \text{Ln} f_x(x; \mu)}{d\mu} = \frac{x-\mu}{\sigma^2}$$

$$E\left\{\frac{d \text{Ln} f_x(x; \mu)}{d\mu}\right\}^2 = \frac{E(x-\mu)^2}{\sigma^4} = \frac{\sigma^2}{\sigma^4} = \frac{1}{\sigma^2}$$

$$\frac{1}{nE\left\{\frac{d \text{Ln} f_x(x; \mu)}{d\mu}\right\}^2} = \frac{\sigma^2}{n} \quad (1)$$

$$\text{Var}(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n} \quad (2)$$

$$(1) = (2)$$

لذا واریانس میانگین نمونه به حد پائین کریمر-رائو می رسد. بنابراین \bar{X} برآوردکننده ناریب

کمترین واریانس برای میانگین توزیع نرمال با واریانس معلوم است.

۴- روش‌های برآورد نقطه‌ای

۴-۱- روش گشتاورها

فرض کنید x_1, \dots, x_n یک نمونه تصادفی n تایی از یک توزیع دلخواه باشد. در این صورت k امین

گشتاور نمونه M'_k حول مبدا امین گشتاور توزیع حول مبدا بترتیب عبارتست از $M'_k = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^k}{n}$

و $E(X^k)$ که گشتاور توزیع حول مبدا، عموماً تابعی از p پارامتر مجهول است. در روش گشتاورها

با برابر قرار دادن p گشتاور اول توزیع با گشتاورهای نظیر نمونه

$$\begin{aligned} M'_1 &= E(x) & \bar{x} &= E(x) \\ M'_2 &= E(x^2) & \frac{\sum x_i^2}{n} &= E(x^2) \\ & \vdots & \vdots & \\ & \vdots & \vdots & \\ M'_p &= E(x^p) & \frac{\sum x_i^p}{n} &= E(x^p) \end{aligned}$$

و حل دستگاه حاصل پارامترهای مجهول جامعه بدست می‌آید. بطور خلاصه: این روش عبارتست از

مساوی قرار دادن گشتاورهای جامعه با گشتاورهای نمونه و بعد حل دستگاه معادلات حاصل.

مثال ۱۲: برآورد کننده های μ و σ^2 یک جامعه نرمال با میانگین مجهول μ و واریانس مجهول σ^2

را به روش گشتاورها تعیین کنید.

برای یک متغیر تصادفی با توزیع نرمال داریم:

$$\begin{aligned} E(x) &= \mu \\ E(x^2) &= \sigma^2 + \mu^2 \end{aligned}$$

در این صورت با مساوی قرار دادن دو گشتاور اول نمونه با دو گشتاور اول توزیع داریم:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \mu \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 &= \sigma^2 + \mu^2 \end{aligned}$$

می انجامد. از حل توام این معادلات، برآورد کننده های روش گشتاورها عبارتند از:

$$\hat{\mu} = \bar{x}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \bar{x}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

مثال ۱۳: اگر x_1, \dots, x_n مقادیر یک نمونه تصادفی به اندازه n از جامعه ای با چگالی

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{2(\theta - x)}{\theta^2} & ; 0 < x < \theta \\ 0 & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

برآورد کننده ای برای θ به روش گشتاورها پیدا کنید.

$$E(x) = \int_0^{\theta} x \frac{2(\theta - x)}{\theta^2} dx = \frac{2}{\theta^2} \int_0^{\theta} (\theta x - x^2) dx = \frac{2}{\theta^2} \left[\frac{1}{2} \theta x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^{\theta} = \frac{2}{\theta^2} \left(\frac{1}{2} \theta^3 - \frac{1}{3} \theta^3 \right) =$$

$$\frac{2}{\theta^2} \cdot \frac{1}{6} \theta^3 = \frac{1}{3} \theta$$

$$M'_1 = E(x)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{3} \theta \rightarrow \hat{\theta} = 3\bar{x}$$

مثال ۱۴: اگر x_1, \dots, x_n مقادیر یک نمونه تصادفی به اندازه n از جامعه هندسی باشد. برآورد کننده

پارامتر θ ی توزیع را به روش گشتاورها بدست آورید.

$$f_x(x; \theta) = \theta(1 - \theta)^{x-1}$$

$$E(x) = \frac{1}{\theta} \quad \bar{x} = \frac{1}{\theta} \rightarrow \theta = \frac{1}{\bar{x}}$$

مثال ۱۵: نمونه تصادفی به اندازه n از جامعه گاما داریم. برای برآورد کردن پارامترهای α و β روش

گشتاورها را بکار ببرید.

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= \alpha\beta \\ \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} &= \alpha\beta^2 + \bar{x}^2 \end{aligned} \right\} \rightarrow \hat{\alpha} = \frac{n\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad \hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n\bar{x}}$$

مثال ۱۶: اگر x_1, \dots, x_n مقادیر یک نمونه تصادفی به اندازه n از جامعه بتا با $\beta = 1$ باشد برآوردی

برای پارامتر α به روش گشتاورها بدست آورید.

$$f_x(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}$$

$$E(x) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \quad \bar{x} = \frac{\alpha}{\alpha + 1} \rightarrow \hat{\alpha} = \frac{\bar{x}}{1 - \bar{x}}$$

مثال ۱۷: تابع چگالی زیر داده شده است که در آن θ پارامتر مجهول می باشد. θ را به روش گشتاورها تخمین بزنید.

$$f_x(x) = \theta x^{\theta-1} \quad ; \quad 0 < x < 1 \quad ; \quad 0 < \theta < \infty$$

$$E(x) = \int_0^1 x \theta x^{\theta-1} dx = \theta \int_0^1 x^\theta dx = \frac{\theta}{\theta+1} [x^{\theta+1}]_0^1 = \frac{\theta}{\theta+1}$$

$$\frac{\theta}{\theta+1} = \bar{x} \rightarrow \hat{\theta} = \frac{\bar{x}}{1 - \bar{x}}$$

۲-۴- روش حداکثر درست‌نمایی (روش MLE)

این روش عبارتست از حداکثر کردن درست‌نمایی احتمال بدست آوردن یک مجموعه از مقادیر نمونه تصادفی. فرض کنید x_n, \dots, x_2, x_1 یک نمونه به حجم n از یک جامعه پیوسته با چگالی احتمال $f_x(x, \theta)$ یا گسسته با احتمال $P_x(x, \theta)$ باشد که θ یک پارامتر مجهول است و باید برآورد شود. در حقیقت می‌خواهیم بجای برآورده θ ، آن تابعی از مشاهدات نمونه‌ای را قرار دهیم که احتمال نمونه به ازای آن حداکثر شود. تابع احتمال L را بصورت:

$$L = P(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta) = \prod_{i=1}^n P(x_i = x_i)$$

$$L = f_x(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta) = \prod_{i=1}^n f_x(x_i, \theta)$$

تعریف می‌کنیم که همان احتمال توام برای مشاهدات نمونه است. تخمین θ باید به گونه‌ای صورت پذیرد که بیشترین احتمال برای مشاهده مقادیر x_n, \dots, x_2, x_1 حاصل شود. به عبارت دیگر تخمین‌زننده بیشترین احتمال $\hat{\theta}$ مقداری خواهد بود که به ازای آن تابع L حداکثر شود. به تابع L ، تابع درست‌نمایی می‌گویند و $\hat{\theta}$ حاصل از این روش را با نماد $\hat{\theta} = \text{MLE}(\theta)$ نمایش می‌دهیم.

توجه: اغلب در حداکثر کردن تابع $f(x_1, \dots, x_n | \theta)$ راحت‌تر است که L_n آن حداکثر شود زیرا

$\ln(L)$ یک تابع صعودی یکنواخت از L است و θ که L را ماکزیمم می کند $\ln(L)$ را نیز ماکزیمم می کند.

مثال ۱۸: اگر x_1, \dots, x_n مقادیر یک نمونه تصادفی به اندازه n از یک جامعه نرمال $N(\mu, \sigma^2)$ باشد، برآورد کننده ای برای μ و σ بیابید.

$$L = f(x_1, \dots, x_n | \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i | \mu, \sigma) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i - \mu)^2} =$$

$$\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}$$

$$\ln L = -n \ln \sigma\sqrt{2\pi} - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) = 0 \rightarrow \hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \bar{x}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = 0 \Rightarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

مثال ۱۹: اگر x_1, \dots, x_n مقادیر یک نمونه تصادفی به اندازه n از جامعه برنولی باشد. MLE پارامتر برنولی را بدست آورید.

$$p_x(x_i, p) = p^{x_i} (1-p)^{1-x_i}, x_i = 0, 1$$

$$L = p^{\sum x_i} (1-p)^{n - \sum x_i}$$

$$\ln L = (\ln p) \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) + [\ln(1-p)] \left(n - \sum_{i=1}^n x_i \right)$$

$$\frac{d \ln L}{dp} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{p} - n - \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{1-p} = 0 \Rightarrow \frac{\sum x_i}{p} = \frac{n - \sum x_i}{1-p} \Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i = np \Rightarrow p = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

$$\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \bar{x}$$

مثال ۲۰: اگر x_1, \dots, x_n نمونه ای به اندازه n از جامعه دو جمله ای با پارامتر $p = \theta$ باشد. MLE

پارامتر دوجمله‌ای را بدست آورید.

$$L(\theta) = f(x; \theta) = \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x} \quad \text{راه حل اول:}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \binom{n}{x} [x\theta^{x-1}(1-\theta)^{n-x} - (n-x)\theta^x(1-\theta)^{n-x-1}] = 0$$

$$f_x(x; \theta) [x\theta^{-1} - (n-x)(1-\theta)^{-1}] = 0$$

$$\frac{x}{\theta} - \frac{n-x}{1-\theta} = 0 \Rightarrow x = n\theta \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{x}{n}$$

راه حل دوم:

$$\ln L(\theta) = \ln \binom{n}{x} + x \ln \theta + (n-x) \ln(1-\theta)$$

$$\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{x}{\theta} - \frac{n-x}{1-\theta} = 0 \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{x}{n}$$

خواص MLE

۱- با افزایش n توزیع MLE به توزیع نرمال میل می‌کند و در زمانیکه $n \rightarrow \infty$ MLE، توزیع نرمال دارد.

۲- در زمانیکه $n \rightarrow \infty$ ، MLE سازگار است و به تبع ناریب است.

۳- اگر $\hat{\theta}$ برآورد کننده به روش حداکثر درست نمایی برای θ باشد و n به سمت ∞ میل کند، آنگاه واریانس $\hat{\theta}$ برابر حد پایین نامساوی کرایمر - راتو خواهد شد.

۴- MLE دارای خاصیت پایایی است یعنی اگر فرض کنید $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_k)$ که در آن

$\hat{\theta}_j = \hat{f}(x_1, \dots, x_n)$ است که برآورد کننده درست‌نمایی ماکزیمم $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_4)$ در چگالی

$f(\theta_1, \dots, \theta_n)$ باشد، آنگاه برآورد کننده درست‌نمایی ماکزیمم $\tau(\theta) = (\tau_1(\theta), \dots, \tau_r(\theta))$ برابر است با

$$\tau(\hat{\theta}) = (\tau_1(\hat{\theta}), \dots, \tau_r(\hat{\theta}))$$

مثال ۲۱: فرض کنید $x \sim N(\mu, 1)$ برآورد کننده MLE پارامتر $\alpha = \mu^2$ را پیدا کنید.

$$\hat{\mu} = \bar{x} \Rightarrow \hat{\alpha} = \hat{\mu}^2 = \bar{x}^2$$

۵- برآوردکننده های کافی

برآورد کننده ای مانند $\hat{\theta}$ را کافی می نامیم در صورتی که از همه اطلاعات یک نمونه، مربوط به برآورد پارامتر θ یک جامعه بهره‌برداری کند. یعنی اگر تمام دانشی را که می توانیم با مشخص کردن مقادیر فردی نمونه ها و ترتیب آنها بدست آوریم، بتوانیم تنها با مشاهده مقدار آماره $\hat{\theta}$ هم بدست آوریم. این را می توان بر حسب توزیع شرطی مقادیر نمونه به فرض $\hat{\theta}$ بیان کرد. این کمیت با عبارت زیر داده می شود.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n | \hat{\theta}) = \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_n, \hat{\theta})}{g(\hat{\theta})}$$

اگر این عبارت به $\hat{\theta}$ بستگی داشته باشد، مقادیر خاص x_n, \dots, x_2, x_1 که $\hat{\theta}$ را بدست می دهند برای برخی مقادیر θ محتملتر از سایر مقادیرند و دانستن این مقادیر نمونه ای به برآورد θ کمک خواهد کرد. اگر این عبارت به θ بستگی نداشته باشد، مقادیر خاص x_n, \dots, x_2, x_1 که $\hat{\theta}$ را بدست می دهند برای هر مقدار θ به یک اندازه محتمل اند و دانستن این مقادیر نمونه ای به برآورد θ کمکی نخواهد کرد.

تعریف: آماره $\hat{\theta}$ یک برآوردکننده کافی پارامتر θ است اگر و تنها اگر به ازای هر مقدار $\hat{\theta}$ ، توزیع شرطی نمونه تصادفی x_n, \dots, x_2, x_1 به فرض $\hat{\theta}$ ، مستقل از θ باشد.

مثال ۲۲: اگر x_n, \dots, x_2, x_1 متغیرهای تصادفی برنولی با پارامتر یکسان θ باشند. نشان دهید که

آماره $\hat{\theta} = \frac{X}{n}$ که در آن $X = x_1 + \dots + x_n$ ، برآورد کننده کافی برای θ است.

$$f(x; \theta) = \theta^{x_i} (1-\theta)^{1-x_i} \quad ; \quad x_i = 0, 1$$

$$f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \theta^{x_i} (1-\theta)^{1-x_i} = \theta^{\sum x_i} (1-\theta)^{n-\sum x_i} = \theta^x (1-\theta)^{n-x} = \theta^{n\hat{\theta}} (1-\theta)^{n-n\hat{\theta}}$$

X یک متغیر دو جمله ای با پارامترهای n و θ است لذا:

$$b(x; n, \theta) = \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x}$$

$$g(\hat{\theta}) = \binom{n}{n\hat{\theta}} \theta^{n\hat{\theta}} (1-\theta)^{n-n\hat{\theta}} \quad ; \quad \hat{\theta} = 0, \frac{1}{n}, \dots, 1$$

$$f(x_1, \dots, x_n | \hat{\theta}) = \frac{f(x_1, \dots, x_n)}{g(\hat{\theta})} = \frac{\theta^{n\hat{\theta}} (1-\theta)^{n-n\hat{\theta}}}{\binom{n}{n\hat{\theta}} \theta^{n\hat{\theta}} (1-\theta)^{n-n\hat{\theta}}} = \frac{1}{\binom{n}{x}}$$

که به θ بستگی ندارد.

مثال ۲۳: نشان دهید که آماره $y = \frac{1}{6}(x_1 + 2x_2 + 3x_3)$ برای برآورد پارامتر θ ی جامعه برنولی،

کافی نیست.

باید نشان دهیم $f(x_1, x_2, x_3 | y) = \frac{f(x_1, x_2, x_3, y)}{g(y)}$ به ازای برخی مقادیر x_3, x_2, x_1 مستقل از θ

نیست. بنابراین حالت خاصی را در نظر می‌گیریم که در آن $x_3 = 0, x_2 = 1, x_1 = 1$ بطوری که

$$f\left(1, 1, 0 \mid y = \frac{1}{2}\right) = \frac{P\left(x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0, y = \frac{1}{2}\right)}{p\left(y = \frac{1}{2}\right)} = \frac{f(1, 1, 0)}{f(1, 1, 0) + f(0, 0, 1)} = \frac{\theta^2(1-\theta)}{\theta^2(1-\theta) + \theta(1-\theta)^2} = \theta$$

که به θ بستگی دارد.

قضیه: آماره θ یک برآوردکننده کافی پارامتر θ است اگر و فقط اگر چگالی یا توزیع احتمال توام

نمونه تصادفی را بتوان تجزیه کرد بطوری که

$$f(x_1, \dots, x_n; \theta) = g(\hat{\theta}, \theta) h(x_1, \dots, x_n)$$

که در آن $g(\hat{\theta}, \theta)$ تنها به $\hat{\theta}$ و θ بستگی دارد و $h(x_1, \dots, x_n)$ به θ بستگی ندارد.

مثال ۲۴: نشان دهید که \bar{x} یک برآورد کننده کافی μ جامعه نرمال یا واریانس معلوم σ^2 است.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, \mu) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right)^n \cdot e^{-\frac{1}{2}\sum \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)^2}$$

$$\sum (x_i - \mu)^2 = \sum (x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - \mu)^2$$

$$f(x_1, \dots, x_n; \mu) = \left\{ \frac{\sqrt{n}}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \right)^2} \right\} \times \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right)^{n-1} \cdot e^{-\frac{1}{2} \sum \left(\frac{x_i - \bar{x}}{\sigma} \right)^2} \right\}$$

که در آن اولین عامل سمت راست تنها به برآورد \bar{x} و به میانگین جامعه، μ ، بستگی دارد و دومین عامل شامل μ نیست. بنابراین \bar{x} یک برآورد کننده کافی μ جامعه نرمال با واریانس معلوم σ^2 است.

سلامتی و تعجیل در فرج آقا امام زمان (عج) صلوات

www.iepnu.ir

