تمرینهای فصل ۱

تمرینهای ۱.۱

۱. داریم $f'(x) = ۳x^۲ - ۲$ و $g'(x) = ۲x + ۱$. روشن است که این توابع دارای شرایط قضیهٔ کُشی هستند. فرمول کُشی را برای این توابع می‌نویسیم. داریم

$$\frac{f(۱) - f(۰)}{g(۱) - g(۰)} = \frac{-۱ - ۰}{۱ + ۱} = \frac{۳x^۲ - ۲}{۲x + ۱}$$

با حل کردن این معادله نسبت به x، به دست می‌آوریم $x = \frac{-۱ \pm \sqrt{۱۹}}{۶}$. ملاحظه می‌کنیم که $C = \frac{-۱ + \sqrt{۱۹}}{۶}$ در بازهٔ $(۰,۱)$ واقع است و در فرمول کُشی صدق می‌کند.

۲. داریم $f'(x) = ۲x$ و $g'(x) = \frac{۱}{x}$. توابع f و g در شرایط قضیهٔ کُشی صدق می‌کنند. فرمول کُشی برای این توابع عبارت‌اند از

$$\frac{f(۲) - f(۱)}{g(۲) - g(۱)} = \frac{۴ - ۱}{\ln ۲ - ۰} = \frac{۲x}{۱/x}$$

با حل کردن این معادله نسبت به x، داریم $۳ = (۲\ln ۲)x^۲$ یا $x = \pm\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۲\ln ۲}}$. جواب $C = \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۲\ln ۲}}$ در بازهٔ $(۱,۲)$ واقع است و در فرمول کُشی صدق می‌کند.

۳. عبارت داده شده به صورت مبهم $\frac{۰}{۰}$ است. دستور هوپیتال را به کار می‌بریم. داریم

$$\lim_{x\to ۹}\frac{\sqrt{x}-۳}{x-۹}=\lim_{x\to ۹}\frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}}{۱}=\lim_{x\to ۹}\frac{۱}{۲\sqrt{x}}=\frac{۱}{۶}$$

۴. با به کار بستن دستور هوپیتال، به دست می‌آوریم

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{۱+x}-۱}{x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\frac{۱}{۲\sqrt{۱+x}}}{۱}=\lim_{x\to ۰}\frac{۱}{۲\sqrt{۱+x}}=\frac{۱}{۲}$$

۵. دستور هوپیتال را به کار می‌بریم:

$$\lim_{x\to ۰^+}\frac{\sin ۲x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{۲\cos ۲x}{۱/۲\sqrt{x}}=\lim_{x\to ۰^+}۴\sqrt{x}\cos ۲x=۰$$

۶. دستور هوپیتال را سه بار به کار می‌بریم:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x-x}{x^۳}=\lim_{x\to ۰}\frac{\cos x-۱}{۳x^۲}=\lim_{x\to ۰}\frac{-\sin x}{۶x}$$
$$=\lim_{x\to ۰}\frac{-\cos x}{۶}=-\frac{۱}{۶}$$

۷. چون $\lim_{x\to\pi/۲}(۱+\sin x)=۲\neq ۰$ و $\lim_{x\to\pi/۲}(۱+\cos x)=۱\neq ۰$، پس عبارت داده شده مبهم نیست و در نتیجه دستور هوپیتال قابل اجرا نیست. این حد برابر است با

$$\lim_{x\to\pi/۲}\frac{۱+\sin x}{۱+\cos x}=\frac{۱+۱}{۱+۰}=\frac{۲}{۱}=۲$$

۸. این عبارت به صورت مبهم $\frac{۰}{۰}$ است. دستور هوپیتال را به کار می‌بریم:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{\ln x}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{\frac{۱}{x}}{۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{۱}{x}=۱$$

۹. دستور هوپیتال را به کار می‌بریم:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{x-e^x+۱}{\ln(۱+x)-x}=\lim_{x\to ۰}\frac{۱-e^x}{\frac{۱}{۱+x}-۱}=\lim_{x\to ۰}\frac{(۱+x)(۱-e^x)}{-x}$$

این عبارت نیز به صورت $\frac{۰}{۰}$ است. در نتیجه یک بار دیگر دستور هوپیتال را به کار می‌بریم:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{(۱+x)(۱-e^x)}{-x}=\lim_{x\to ۰}\frac{(۱-e^x)+(۱+x)(-e^x)}{-۱}=\frac{-۱}{-۱}=۱$$

۱۰. بنا به دستور هوپیتال، داریم

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۲^x-۳^x}{x}=\lim_{x\to ۰}\frac{(\ln ۲)۲^x-(\ln ۳)۳^x}{۱}=\ln ۲-\ln ۳=\ln\frac{۲}{۳}$$

۱۱. دستور هوپیتال قابل اجرا است:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\operatorname{tg}^{-۱}x}{x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\frac{۱}{۱+x^۲}}{۱}=\lim_{x\to ۰}\frac{۱}{۱+x^۲}=۱$$

۱۲. دستور هوپیتال را به کار می‌بریم:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sin^{-۱}x}{x}=\lim_{x\to ۰}\frac{۱/\sqrt{۱-x^۲}}{۱}=\lim_{x\to ۰}\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}=۱$$

۱۳. این عبارت به صورت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ است. دستور هوپیتال را چهار بار به کار می‌بریم:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^۴}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{۴x^۳}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{۱۲x^۲}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{۲۴x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{۲۴}=+\infty$$

۱۴. دستور هوپیتال را برای صورت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ به کار می‌بریم. داریم

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{۱}{x}}{۱}=\lim_{x\to\infty}\frac{۱}{x}=۰$$

۱۵. دستور هوپیتال را به کار می‌بریم:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(۲+e^x)}{۳x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x/(۲+e^x)}{۳}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{۳(۲+e^x)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{۳e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۳}$$

۱۶. این عبارت به صورت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ است. با به کار بستن دستور هوپیتال، داریم

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^-}\frac{\sec^۲ x}{\sec^۲ ۳x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^-}\frac{۲\sec^۲ x\operatorname{tg}x}{۶\sec^۲ ۳x\operatorname{tg}۳x}$$

اگر دستور هوپیتال را مجدداً به کار ببریم به نتیجه‌ای نمی‌رسیم. ولی اگر ابتدا بنویسیم $\frac{\sec^۲x}{\sec^۲۳x}=\frac{\cos^۲۳x}{\cos^۲x}$ و سپس دستور هوپیتال را به کار ببریم، به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\sec^2 x}{\sec^2 3x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\cos^2 3x}{\cos^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{-6\cos^2 3x\sin 3x}{-2\cos x\sin x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{3(2\cos 3x\sin 3x)}{2\cos x\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{3\sin 6x}{\sin 2x}$$

این عبارَت نیز به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ است. دستور هوپیتال را مجدداً به کار می‌بریم. داریم

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{3\sin 6x}{\sin 2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{18\cos 6x}{2\cos x}=\frac{-18}{-2}=9$$

۱۷. بنابه تعریف مشتق، داریم

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^{-2}}-0}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1/x}{e^{x^{-2}}}$$

این عبارت به صورت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ است. دستور هوپیتال را به کار می‌بریم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1/x}{e^{x^{-2}}}=\lim_{x\to 0}\frac{-1/x^2}{-2x^{-3}e^{x^{-2}}}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^{x^{-2}}}=0$$

۱۸. با استفاده از تعریف مشتق، داریم

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^2}$$

با به کار بستن قاعدهٔ هوپیتال، به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2}=0$$

تمرینهای ۲.۱

۱. این عبارت به صورت مبهم $\infty - \infty$ است. ابتدا مخرجها را مشترک می‌کنیم و سپس دستور هوپیتال را به کار می‌بریم:

$$\lim_{x\to ۰}\left(\frac{۱}{۱-e^x}+\frac{۱}{x}\right)=\lim_{x\to ۰}\frac{x+۱-e^x}{x-xe^x}=\lim_{x\to ۰}\frac{۱-e^x}{۱-e^x-xe^x}$$
$$=\lim_{x\to ۰}\frac{-e^x}{-e^x-e^x-xe^x}=\lim_{x\to ۰}\frac{۱}{۲+x}=\frac{۱}{۲}$$

.۲

$$\lim_{x\to ۰^+}\left(\frac{۱}{x}-\frac{۱}{\sin x}\right)=\lim_{x\to ۰^+}\frac{\sin x-x}{x\sin x}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{\cos x-۱}{\sin x+x\cos x}$$
$$=\lim_{x\to ۰^+}\frac{-\sin x}{\cos x+\cos x-x\sin x}=\frac{۰}{۲}=۰$$

۳. این عبارت به صورت مبهم $۰^۰$ است. قرار می‌دهیم $y=(\sqrt{x})^x$ و از طرفین لگاریتم می‌گیریم. داریم

$$\ln y=x\ln\sqrt{x}=\frac{۱}{۲}x\ln x=\frac{\ln x}{۲x^{-۱}}$$

حال دستور هوپیتال را به کار می‌بریم:

$$\lim_{x\to ۰^+}\frac{\ln x}{۲x^{-۱}}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{۱/x}{-۲/x^۲}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{x}{-۲}=۰$$

در نتیجه $\lim\limits_{x\to ۰^+} y=e^۰=۱$.

۴. می‌نویسیم $y=x^{۱/(۱-x)}$. در نتیجه $\ln y=\frac{۱}{۱-x}\ln x=\frac{\ln x}{۱-x}$. حال دستور هوپیتال را به کار می‌بریم:

$$\lim_{x\to ۱}\ln y=\lim_{x\to ۱}\frac{۱/x}{-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{-۱}{x}=-۱$$

در نتیجه $\lim\limits_{x\to ۱} y=e^{-۱}=\frac{۱}{e}$.

.۵

$$\lim_{x\to\infty}(x^۲-۱)e^{-x^۲}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^۲-۱}{e^{x^۲}}=\lim_{x\to\infty}\frac{۲x}{۲x\,e^{x^۲}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{۱}{e^{x^۲}}=۰$$

۶. می‌نویسیم $y=\left(\frac{۱}{x^۲}\right)^{\sin x}$. در نتیجه

$$\ln y=\sin x \ln\left(\frac{۱}{x^{۲}}\right)=\frac{-\ln x^{۲}}{۱/\sin x}$$

در نتیجه

$$\lim_{x\to ۰}\ln y=\lim_{x\to ۰}-\frac{\ln x^{۲}}{۱/\sin x}=\lim_{x\to ۰}-\frac{۲x/x^{۲}}{-\cos x/\sin^{۲} x}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{۲\sin^{۲} x}{x\cos x}=\lim_{x\to ۰}\frac{۴\sin x\cos x}{\cos x-x\sin x}=\frac{۰}{۱}=۰$$

بنابراین $\lim\limits_{x\to ۰} y=e^{۰}=۱$.

۷. می‌نویسیم $y=(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$. در نتیجه $\ln y=\operatorname{tg} x\ln\sin x$ و

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\ln y=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\operatorname{tg} x\ln\sin x=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{\ln\sin x}{\operatorname{cotg} x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{\cos x/\sin x}{-۱/\sin^{۲} x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}-\sin x\cos x=۰$$

در نتیجه $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}} y=e^{۰}=۱$.

۸. قرار می‌دهیم $y=(۱+\sin x)^{۱/x}$. در نتیجه $\ln y=\dfrac{\ln(۱+\sin x)}{x}$. حال دستور هوپیتال را به کار می‌بریم:

$$\lim_{x\to ۰}\ln y=\lim_{x\to ۰}\frac{\ln(۱+\sin x)}{x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\frac{\cos x}{۱+\sin x}}{۱}=۱$$

در نتیجه $\lim\limits_{x\to ۰} y=e^{۱}=e$.

۹. می‌نویسیم

$$\frac{۳^{x^{۲}}}{۲^{x}}=\frac{e^{x^{۲}\ln ۳}}{e^{x\ln ۲}}=e^{(x^{۲}\ln ۳-x\ln ۲)}=e^{x(x\ln ۳-\ln ۲)}$$

حال داریم

$$\lim_{x\to\infty}\frac{۳^{x^{۲}}}{۲^{x}}=\lim_{x\to\infty}e^{x(x\ln ۳-\ln ۲)}=e^{\lim x(x\ln ۳-\ln ۲)}=\infty$$

۱۰. قرار می‌دهیم $y=x^{\ln x}$. پس $\ln y=\ln x\ln x$. در نتیجه

$$\lim_{x\to ۰^{+}}\ln y=\lim_{x\to ۰^{+}}\ln^{۲} x=\infty$$

در نتیجه $\lim\limits_{x\to 0^+} y=\infty$.

تمرینهای ۳.۱

.۱

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{t\to\infty}\int_0^t x^{-\frac{1}{3}}dx = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\right]_1^t$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{3}{2}\; t^{2/3}-\frac{3}{2}\right)=\infty$$ (وجود ندارد)

در نتیجه $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ واگراست.

.۲

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x^3} = \lim_{t\to\infty}\int_2^t x^{-3}dx = \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{2}x^{-2}\right]_2^t$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{2t^2}+\frac{1}{8}\right]=\frac{1}{8}$$

بنابراین انتگرال داده شده همگرا و مقدار آن برابر $\frac{1}{8}$ است.

.۳

$$\int_0^\infty e^{-x}dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{-x}dx = \lim_{t\to\infty}[\;-e^{-x}]_0^t = 1$$

بنابراین انتگرال داده شده همگرا و مقدار آن برابر ۱ است.

.۴

$$\int_1^\infty \frac{dx}{1+x} = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{dx}{1+x} = \lim_{t\to\infty}[\;\ln|x+1|\;]_1^t$$

$$=\lim_{t\to\infty}(\ln|t+1|-\ln 2)=\infty$$ (وجود ندارد)

در نتیجه انتگرال $\int_1^\infty \frac{dx}{x+1}$ واگراست.

.۵ می‌نویسیم

$$\int_{۱}^{\infty} \frac{x}{(۱+x^{۲})^{۲}}\, dx = \lim_{t\to\infty} \int_{۱}^{t} \frac{x}{(۱+x^{۲})^{۲}}\, dx$$

برای محاسبهٔ این انتگرال از جانشینی $u = ۱ + x^{۲}$، $du = ۲x\, dx$ استفاده می‌کنیم. داریم

$$\int \frac{x\, dx}{(۱+x^{۲})^{۲}} = \frac{۱}{۲}\int \frac{du}{u^{۲}} = \frac{۱}{۲}\left(-\frac{۱}{u}\right) + c = -\frac{۱}{۲}\cdot\frac{۱}{۱+x^{۲}} + c$$

بنابراین

$$\int_{۱}^{\infty} \frac{x\, dx}{(۱+x^{۲})^{۲}} = \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{۱}{۲(۱+x^{۲})}\right]_{۱}^{t} = -\frac{۱}{۲}\lim_{t\to\infty}\left(\frac{۱}{۱+t^{۲}} - \frac{۱}{۲}\right) = \frac{۱}{۴}$$

۶. ابتدا می‌نویسیم

$$\int_{۰}^{\infty} xe^{-x^{۲}} dx = \lim_{t\to\infty}\int_{۰}^{t} xe^{-x^{۲}} dx$$

برای محاسبهٔ انتگرال فوق از جانشینی $u = -x^{۲}$ و $du = -۲x\, dx$ استفاده می‌کنیم. داریم

$$\int xe^{-x^{۲}} dx = -\frac{۱}{۲}\int e^{u} du = -\frac{۱}{۲}e^{u} + c = -\frac{۱}{۲}e^{-x^{۲}} + c$$

در نتیجه

$$\int_{۰}^{\infty} xe^{-x^{۲}} dx = \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{۱}{۲}e^{-x^{۲}}\right]_{۰}^{t} = \frac{۱}{۲}$$

(چرا؟)

۷. بنابه تعریف داریم

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^{۲}+۲x+۵} = \int_{-\infty}^{۰} \frac{dx}{x^{۲}+۲x+۵} + \int_{۰}^{\infty} \frac{dx}{x^{۲}+۲x+۵}$$
$$= \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{۰} \frac{dx}{x^{۲}+۲x+۵} + \lim_{t\to\infty}\int_{۰}^{t} \frac{dx}{x^{۲}+۲x+۵}$$

حال داریم

$$\int \frac{dx}{x^{۲}+۲x+۵} = \int \frac{dx}{(x+۱)^{۲}+۴} = \int \frac{du}{u^{۲}+۲^{۲}} \quad (u = x+۱)$$
$$= \frac{۱}{۲}\,\mathrm{tg}^{-۱}\frac{u}{۲} + c = \frac{۱}{۲}\,\mathrm{tg}^{-۱}\frac{x+۱}{۲} + c$$

در نتیجه با محاسبهٔ حدهای فوق، انتگرال ناسرهٔ مورد نظر برابر با $\frac{\pi}{۲}$ به دست می‌آید.
۸. این انتگرال واگراست (چرا؟)
۹.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^{۲}-۲x+۱۰} = \int_{-\infty}^{۰} \frac{dx}{x^{۲}-۲x+۱۰} + \int_{۰}^{\infty} \frac{dx}{x^{۲}-۲x+۱۰}$$

$$= \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{۰} \frac{dx}{x^{۲}-۲x+۱۰} + \lim_{t\to\infty} \int_{۰}^{t} \frac{dx}{x^{۲}-۲x+۱۰}$$

$$= \lim_{t\to-\infty} \left[\frac{۱}{۳} \operatorname{tg}^{-۱} \frac{x-۱}{۳}\right]_{t}^{۰} + \lim_{t\to\infty} \left[\frac{۱}{۳} \operatorname{tg}^{-۱} \frac{x-۱}{۳}\right]_{۰}^{t}$$

$$= \frac{\pi}{۳}$$

(چرا؟)

۱۰. ابتدا انتگرال نامعین $\int xe^{-x}dx$ را به روش انتگرالگیری جزء به جزء پیدا می‌کنیم. نتیجه می‌گیریم که $\int xe^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + c$. حال داریم

$$\int_{۰}^{\infty} xe^{-x}dx = \lim_{t\to\infty} \int_{۰}^{t} xe^{-x}dx = \lim_{t\to\infty} [-xe^{-x}-e^{-x}]_{۰}^{t}$$

$$= \lim_{t\to\infty} (-te^{-t}-e^{-t}) = ۱$$

(چرا؟)

۱۱.

$$\int_{۱}^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx = \lim_{t\to\infty} \int_{۱}^{t} \frac{\ln x}{x}\, dx = \lim_{t\to\infty} \left[\frac{۱}{۲} (\ln x)^{۲}\right]_{۱}^{t}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left[\frac{۱}{۲} (\ln t)^{۲} - ۰\right] = \infty$$

در نتیجه انتگرال ناسرهٔ داده شده واگراست.

۱۲. ابتدا $\int e^{-x} \cos x\, dx$ را به روش جزء به جزء پیدا می‌کنیم. قرار می‌دهیم $u=e^{-x}$، $du=-e^{-x}dx$، $dv=\cos x\, dx$، $v=\int \cos x\, dx = \sin x$. در نتیجه

$$\int e^{-x}\cos x\, dx = e^{-x}\sin x - \int -e^{-x}\sin x\, dx$$

با اعمال مجدد روش انتگرالگیری جزء به جزء به دست می‌آوریم

$$\int e^{-x}\sin x\, dx = -e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\cos x\, dx$$

در نتیجه

$$\int e^{-x}\cos x\, dx = e^{-x}\sin x - e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\cos x\, dx$$

یا

$$۲\int e^{-x}\cos x\, dx = e^{-x}(\sin x - \cos x)$$

و بنابراین

$$\int e^{-x}\cos x\, dx = \frac{۱}{۲}e^{-x}(\sin x - \cos x)$$

حال، داریم

$$\begin{aligned}\int_{۰}^{\infty} e^{-x}\cos x\, dx &= \lim_{t\to\infty}\int_{۰}^{t} e^{-x}\cos x\, dx\\ &= \lim_{t\to\infty}\left[\frac{۱}{۲}e^{-x}(\sin x - \cos x)\right]_{۰}^{t}\\ &= \lim_{t\to\infty}\left[\frac{۱}{۲}e^{-t}(\sin t - \cos t) + \frac{۱}{۲}\right] = ۰ + \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}\end{aligned}$$

۱۳. روشن است که

$$\int x^n dx = \begin{cases}\frac{۱}{n+۱}x^{n+۱}+c & \text{اگر } x \neq -۱ \text{ ،}\\ \ln|x|+c & \text{اگر } x = -۱ \text{ ،}\end{cases}$$

پس دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

حالت $x \neq -۱$:

$$\int_{۱}^{\infty} x^{n}dx = \lim_{t\to\infty}\int_{۱}^{t} x^{n}dx$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left[\frac{۱}{x+۱}x^{n+۱}\right]_{۱}^{t} = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{۱}{n+۱}t^{n+۱} - \frac{۱}{n+۱}\right]$$

$$= \begin{cases} \infty & \text{اگر } x>-۱ \text{ ،} \\ -\dfrac{۱}{n+۱} & \text{اگر } x<-۱ \text{ ،} \end{cases}$$

حالت $x = -۱$:

$$\int_{۱}^{\infty}\frac{dx}{x} = \lim_{t\to\infty}\int_{۱}^{t}\frac{dx}{x}$$

$$= \lim_{t\to\infty}[\ \ln\ |x|\ ]_{۱}^{t} = \lim_{t\to\infty}(\ln t - ۰)$$

بنابراین، با توجه به نتایج به دست آمده در دو حالت بالا، انتگرال داده شده به ازای $x<-۱$ همگرا، با مقدار $-\frac{۱}{x+۱}$، و به ازای $x\geq -۱$ واگراست.

۱۴. در اینجا نیز مانند تمرین ۱۳ دو حالت $x\neq -۱$ و $x=۱$ را در نظر بگیرید. محاسبات نتیجه خواهند داد که انتگرال داده شده به ازای $x<-۱$ همگرا، با مقدار $\frac{۱}{n+۱}(-۱)^{n+۱}$، و به ازای $x\geq -۱$ واگراست (جزئیات را نشان دهید).

۱۵. به عنوان مثال تابع $f(x) = x$ را در نظر می‌گیریم. داریم

$$\lim_{t\to\infty}\int_{-t}^{t} x\ dx = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{۱}{۲}x^{۲}\right]_{-t}^{t} = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{۱}{۲}t^{۲} - \frac{۱}{۲}t^{۲}\right) = ۰$$

در حالی که

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\ dx = \int_{-\infty}^{۰} x\ dx + \int_{۰}^{\infty} x\ dx$$

واگراست، زیرا

$$\int_{۰}^{\infty} x\ dx = \lim_{t\to\infty}\int_{۰}^{t} x\ dx = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{۱}{۲}x^{۲}\right]_{۰}^{t}$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left[\frac{۱}{۲}t^{۲} - ۰\right] = \infty$$

.۱۶

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx + \int_{b}^{\infty} f(x)dx = \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{b} f(x)dx + \lim_{t\to\infty}\int_{b}^{t} f(x)dx$$

$$= \lim_{t\to-\infty}\left[\int_{t}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{b} f(x)dx\right] + \lim_{t\to\infty}\left[\int_{b}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{t} f(x)dx\right]$$

$$= \lim_{t\to-\infty}\left[\int_{t}^{a} f(x)dx\right] + \int_{a}^{b} f(x)dx + \int_{b}^{a} f(x)dx + \lim_{t\to\infty}\left[\int_{a}^{t} f(x)dx\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{b} f(x)dx - \int_{a}^{b} f(x)dx + \int_{a}^{\infty} f(x)dx$$

این مطلب نشان می‌دهد که تعریف انتگرال ناسره به صورت

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{\infty} f(x)dx$$

به انتخاب a بستگی ندارد.

تمرینهای ۴.۱

.۱

$$\int_{۰}^{۴} \frac{dx}{(۴-x)^{\frac{۳}{۲}}} = \lim_{t\to ۴^-}\int_{۰}^{t} (۴-x)^{-\frac{۳}{۲}} dx$$

$$= \lim_{t\to ۴^-}\left[۲(۴-x)^{-\frac{۱}{۲}}\right]_{۰}^{t} = \lim_{t\to ۴^-}\left[\frac{۲}{\sqrt{۴-t}} - ۱\right]$$

$= \infty$ (وجود ندارد)

در نتیجه انتگرال داده شده واگراست.

.۲

$$\int_{۰}^{۴} \frac{dx}{(۴-x)^{\frac{۲}{۳}}} = \lim_{t \to ۴^-} \int_{۰}^{t} (۴-x)^{-\frac{۲}{۳}} dx$$

$$= \lim_{t \to ۴^-} \left[-۳(۴-x)^{\frac{۱}{۳}} \right]_{۰}^{t} = \lim_{t \to ۴^-} \left[-۳\sqrt[۳]{۴-t} + ۳\sqrt[۳]{۴} \right]$$

$$= ۰ + ۳\sqrt[۳]{۴} = ۳\sqrt[۳]{۴}$$

بنابراین انتگرال داده شده به $۳\sqrt[۳]{۴}$ همگراست.

.۳

$$\int_{۲}^{۳} \frac{dx}{\sqrt{x-۲}} = \lim_{t \to ۲^+} \int_{t}^{۳} (x-۲)^{-\frac{۱}{۲}} dx = ۲$$ (چرا؟)

۴. تابع $y = \frac{۱}{\sqrt{۴-x^۲}}$ در $x = ۲$ ناپیوسته و در بقیهٔ نقاط بازهٔ $[۰,۲]$ پیوسته است. در نتیجه

$$\int_{۰}^{۲} \frac{dx}{\sqrt{۴-x^۲}} = \lim_{t \to ۲^-} \int_{۰}^{t} \frac{dx}{\sqrt{۴-x^۲}}$$

$$= \lim_{t \to ۲^-} \left[\sin^{-۱} \frac{x}{۲} \right]_{۰}^{t} = \lim_{t \to ۲^-} \left[\sin^{-۱} \frac{t}{۲} - ۰ \right] = \frac{\pi}{۲}$$

بنابراین انتگرال داده شده به $\frac{\pi}{۲}$ همگراست.

۵. تابع $y = \sec x = \frac{۱}{\cos x}$ در $x = \frac{\pi}{۲}$ ناپیوسته است. پس

$$\int_{\frac{\pi}{۳}}^{\frac{\pi}{۲}} \sec x \, dx = \lim_{t \to \frac{\pi}{۲}^-} \int_{\frac{\pi}{۳}}^{t} \sec x \, dx$$

چگونگی محاسبهٔ $\int \sec x \, dx$ را یادآوری می‌کنیم:

$$\int \sec x\, dx = \int \sec x \frac{\sec x + \operatorname{tg} x}{\sec x + \operatorname{tg} x} dx$$
$$= \int \frac{\sec^{۲} x + \sec x \operatorname{tg} x}{\sec x + \operatorname{tg} x} dx$$
$$= \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + C$$

زیرا $\sec^{۲} x + \sec x \operatorname{tg} x$ مشتق عبارت $\sec x + \operatorname{tg} x$ است. بنابراین

$$\int_{\frac{\pi}{۳}}^{\frac{\pi}{۲}} \sec x\, dx = \lim_{t \to \frac{\pi}{۲}^-} [\ln |\sec x + \operatorname{tg} x|]_{\frac{\pi}{۳}}^{t}$$
$$= \lim_{t \to \frac{\pi}{۲}^-} \left[\ln |\sec t + \operatorname{tg} t| - \ln (۲ + \sqrt{۳})\right]$$
$$= \infty$$

(وجود ندارد)

در نتیجه انتگرال داده شده واگراست.

۶. این انتگرال ناسره واگراست (چرا؟).

۷. تابع $y = \frac{۱}{(x - ۳)^{۲}}$ در $x = ۳$ ناپیوستگی (نامتناهی) دارد. چون عدد ۳ در بازهٔ $(۰, ۴)$ واقع است، بنابه تعریف می‌نویسیم

$$\int_{۰}^{۴} \frac{۱}{(x-۳)^{۲}} dx = \int_{۰}^{۳} \frac{dx}{(x-۳)^{۲}} + \int_{۳}^{۴} \frac{dx}{(x-۳)^{۲}}$$

حال انتگرال اول طرف راست تساوی فوق را محاسبه می‌کنیم. داریم

$$\int_{۰}^{۳} \frac{dx}{(x-۳)^{۲}} = \lim_{t \to ۳^-} \int_{۰}^{t} \frac{dx}{(x-۳)^{۲}} = \lim_{t \to ۳^-} \left[\frac{-۱}{x-۳}\right]_{۰}^{t}$$
$$= \lim_{t \to ۳^-} \left(\frac{-۱}{t-۳} - \frac{۱}{۳}\right) = \infty \qquad \text{(وجود ندارد)}$$

در نتیجه $\int_{۰}^{۳} \frac{dx}{(x-۳)^{۲}}$، و بنابراین $\int_{۰}^{۴} \frac{dx}{(x-۳)^{۲}}$، واگراست. توجه کنید که قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال برای محاسبه $\int_{۰}^{۴} \frac{dx}{(x-۳)^{۲}}$ قابل اجرا نیست زیرا تابع $y = \frac{۱}{(x - ۳)^{۲}}$ در بازهٔ

$[0,4]$ پیوسته نیست. در واقع اگر به اشتباه قضیهٔ اساسی را به کار ببریم، به دست می‌آوریم

$$\int_0^4 \frac{dx}{(x-3)^2} = \left[\frac{-1}{x-3}\right]_0^4 = -1-\frac{1}{3} = -\frac{4}{3}$$

که به روشنی جوابی نادرست است، زیرا تابع $y = \frac{1}{(x-3)^2}$ هیچگاه منفی نیست.

۸. تابع $y = \frac{1}{(x+1)^3}$ در $x = -1$ ناپیوستگی (نامتناهی) دارد. به روشی مشابه حل تمرین ۷ نتیجه بگیرید که انتگرال داده شده واگراست.

۹. ابتدا $\int \frac{dx}{x^2-x-2}$ را به روش تجزیه به کسرهای ساده پیدا می‌کنیم. داریم

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2-x-2} &= \int \frac{dx}{(x-2)(x+1)} = \frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+1}\right)dx\\ &= \frac{1}{3}[\ln|x-2| - \ln|x+1|] + C\\ &= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right| + C\end{aligned}$$

حال چون تابع $y = \frac{1}{x^2-x-1}$ در $x = 2$ متعلق به بازهٔ $(0,4)$ ناپیوستگی (نامتناهی) دارد، می‌نویسیم

$$\int_0^4 \frac{dx}{x^2-x-2} = \int_0^2 \frac{dx}{x^2-x-2} + \int_2^4 \frac{dx}{x^2-x-2}$$

چون

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{dx}{x^2-x-2} &= \lim_{t\to 2^-}\int_0^t \frac{dx}{x^2-x-2} = \lim_{t\to 2^-}\left[\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|\right]_0^t\\ &= \frac{1}{3}\lim_{t\to 2^-}\left[\ln\left|\frac{t-2}{t+1}\right| - \ln 2\right] = \infty \qquad \text{(وجود ندارد)}\end{aligned}$$

در نتیجه انتگرال داده شده واگراست.

۱۰. تابع $y = \frac{1}{(x^2-1)^2}$ در $x = 1$ ناپیوستگی (نامتناهی) دارد. پس

$$\int_{\circ}^{۲} \frac{x}{(x^{۲}-۱)^{۲}}\,dx = \int_{\circ}^{۱} \frac{x}{(x^{۲}-۱)^{۲}}\,dx + \int_{۱}^{۲} \frac{x\,dx}{(x^{۲}-۱)^{۲}}$$

چون

$$\int_{\circ}^{۱} \frac{x\,dx}{(x^{۲}-۱)^{۲}} = \lim_{t\to ۱^-} \int_{\circ}^{t} \frac{x\,dx}{(x^{۲}-۱)^{۲}}$$

$$= \lim_{t\to ۱^-} \left[-\frac{۱}{۲(x^{۲}-۱)}\right]_{\circ}^{t} \quad (u = x^{۲}-۱ \quad \text{جانشینی})$$

$$= \lim_{t\to ۱^-} \left[-\frac{۱}{۲(t^{۲}-۱)} - \frac{۱}{۲}\right] = \infty \quad (\text{وجود ندارد})$$

پس انتگرال داده شده واگراست.

تمرینهای ۵.۱

۱. مقادیر مشتقهای اول تا سوم تابع $f(x)$ در $x = ۴$ را در جدول زیر قرار می‌دهیم.

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(۴)$
۰	$x^{\frac{۱}{۲}}$	۲
۱	$\frac{۱}{۲}x^{-\frac{۱}{۲}}$	$\frac{۱}{۴}$
۲	$-\frac{۱}{۴}x^{-\frac{۳}{۲}}$	$-\frac{۱}{۳۲}$
۳	$\frac{۳}{۸}x^{-\frac{۵}{۲}}$	$\frac{۳}{۲۵۶}$

همچنین $f^{(۴)}(x) = -\frac{۱۵}{۱۶}x^{-\frac{۷}{۲}}$ و $f^{(۴)}(z) = -\frac{۱۵}{۱۶}z^{-\frac{۷}{۲}}$. بنابراین

$$f(x)=\sqrt{x}=f(۴)+\frac{f'(۴)}{۱!}(x-۴)+\frac{f''(۴)}{۲!}(x-۴)^۲$$
$$+\frac{f^{(۳)}(۴)}{۳!}(x-۴)^۳+\frac{f^{(۴)}(z)}{۴!}(x-۴)^۴$$
$$=۲+\frac{۱}{۴}(x-۴)-\frac{۱}{۶۴}(x-۴)^۲+\frac{۱}{۵۱۲}(x-۴)^۳-\frac{۵}{۱۲۸}z^{-\frac{۷}{۲}}(x-۴)^۴$$

که در آن z بین ۴ و x است.

۲. مقدار $f(x) = \sin x^۲$ و مقادیر مشتقهای اول تا سوم آن در $x = ۰$ برابرند با $f(۰) = ۰$، $f'(۰) = ۰$، $f''(۰) = ۲$ و $f^{(۳)}(۰) = ۰$. همچنین

$$f^{(۴)}(z) = -۱۲\sin z^۲ - ۴۸ z^۲ \cos z^۲ + ۱۶ z^۴ \sin z^۲$$

در نتیجه

$$f(x) = \sin x^۲ = f(۰) + f'(۰)\,x + \frac{f''(۰)}{۲!}x^۲ + \frac{f^{(۳)}(۰)}{۳!}x^۳ + \frac{f^{(۴)}(z)}{۴!}x^۴$$
$$= x^۲ + \frac{f^{(۴)}(z)}{۴!}x^۴$$

که در آن z بین ۰ و x است.

۳.

$$f(x)=e^{-x^۲} \qquad f(۱)=e^{-۱}$$
$$f'(x)=-۲xe^{-x^۲} \qquad f'(۱)=-۲e^{-۱}$$
$$f''(x)=-۲e^{-x^۲}+۴x^۲e^{-x^۲} \qquad f''(۱)=۲e^{-۱}$$
$$f^{(۳)}(x)=۱۲xe^{-x^۲}-۸x^۳e^{-x^۲} \qquad f^{(۳)}(۱)=۴e^{-۱}$$
$$f^{(۴)}(x)=(۱۲-۴۸x^۲+۱۶x^۴)e^{-x^۲}$$

بنابراین

$$f(x)=e^{-x^۲}=f(۱)+f'(۱)(x-۱)+\frac{f''(۱)}{۲!}(x-۱)^۲+\frac{f^{(۳)}(۱)}{۳!}(x-۱)^۳+\frac{f^{(۴)}(z)}{۴!}(x-۱)^۴$$

$$=e^{-۱}-۲e^{-۱}(x-۱)+e^{-۱}(x-۱)^۲+\frac{۲}{۳}e^{-۱}(x-۱)^۳+\frac{f^{(۴)}(z)}{۲۴}(x-۱)^۴$$

که در آن $f^{(۴)}(z) = (۱۲ - ۴۸z^۲ + ۱۶z^۴)\,e^{-z^۲}$ و z بین ۱ و x است.

۴. مقدار $f(x) = \operatorname{tg} x$ و مقادیر مشتقهای اول تا چهارم آن در $x = \frac{\pi}{۴}$ به ترتیب برابرند با ۱، ۲، ۴، ۱۶ و ۸۰. همچنین $f^{(۵)}(z) = ۱۶ \sec^۲ z \operatorname{tg}^۴ z + ۸۸ \sec^۴ z \operatorname{tg}^۲ z + ۱۶ \sec^۶ z$.

در نتیجه

$$f(x) = \operatorname{tg} x = ۱ + ۲(x-\frac{\pi}{۴}) + ۲(x-\frac{\pi}{۴})^۲ + \frac{۸}{۳}(x-\frac{\pi}{۴})^۳ + \frac{۱۰}{۳}(x-\frac{\pi}{۴})^۴ + \frac{f^{(۵)}(z)}{۱۲۰}(x-\frac{\pi}{۴})^۵$$

که در آن z بین $\frac{\pi}{۴}$ و x است.

۵. جدول مشتقهای اول تا ششم $f(x) = e^{۲x}$ را تشکیل می‌دهیم.

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(۱)$
۰	$e^{۲x}$	$e^۲$
۱	$۲e^{۲x}$	$۲e^۲$
۲	$۴e^{۲x}$	$۴e^۲$
۳	$۸e^{۲x}$	$۸e^۲$
۴	$۱۶e^{۲x}$	$۱۶e^۲$
۵	$۳۲e^{۲x}$	$۳۲e^۲$
۶	$۶۴e^{۲x}$	$f^{(۶)}(z) = ۶۴e^{۲z}$

بنابراین

$$f(x) = e^{۲x} = e^۲ + ۲e^۲(x-۱) + ۲e^۲(x-۱)^۲ + \frac{۴}{۳}e^۲(x-۱)^۳ + \frac{۲}{۳}e^۲(x-۱)^۴ + \frac{۴}{۱۵}e^۲(x-۱)^۵ + \frac{۴}{۴۵}e^{۲z}(x-۱)^۶$$

که در آن z بین ۱ و x است.

۶. مقدار $f(x) = \ln \cos x$ و مقادیر مشتقهای اول و دوم آن در $x = ۰$ به ترتیب عبارت‌اند از ۰، ۰ و ۱− . همچنین $f^{(۳)}(z) = -۲ \sec^۲ z \operatorname{tg} z$.

در نتیجه

$$f(x) = \ln \cos x = f(۰) + f'(۰)\,x + \frac{f''(۰)}{۲!}x^۲ + \frac{f^{(۳)}(z)}{۳!}x^۳$$
$$= -\frac{۱}{۲}x^۲ - \frac{۱}{۳}\sec^۲ z \operatorname{tg} z x^۳$$

که در آن z بین ۰ و x است.

۷. جواب $f(x)=\sin^{-1}x=x+\frac{f^{(3)}(z)}{6}x^3$ که در آن $f^{(3)}(z)=(1-z^2)^{-\frac{3}{2}}+3z^2(1-z^2)^{-\frac{5}{2}}$ و z بین ۰ و x است.

۸. به آسانی می‌توان نشان داد که

$f(0)=1$، $f'(0)=0$، $f''(0)=1$ و $f^{(3)}(z)=\sec z\ \mathrm{tg}^3 z+5\sec^3 z\ \mathrm{tg}\, z$.

بنابراین

$$f(x)=\sec x=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}f^{(3)}(z)\,x^3$$

که در آن z بین ۰ و x است.

۹. داریم $f(0)=1$. حال $f'(0)$ و $f''(0)$ را با استفاده از تعریف مشتق محاسبه می‌کنیم.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{2x} \qquad \text{(هوپیتال)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2}=0$$

در نتیجه $f'(0)=0$. حال چون به ازای هر $x\neq 0$، $f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$

$$g(x)=f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2} & (x\neq 0)\\[2mm] 0 & (x=0)\end{cases}$$

بنابراین

$$f''(0)=g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}-0}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{3x^2} \qquad \text{(هوپیتال)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-x\sin x}{3x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\sin x}{3x} = -\frac{1}{3}$$

در نتیجه

$$p_2(x) = f(0) + f'(0) + x\,\frac{f''(0)}{2!}x^2$$
$$= 1 - \frac{1}{6}x^2$$

۱۰. داریم $f(0) = 0$. حال

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} - 0}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1/x}{e^{1/x^2}} = \lim_{x \to 0} \frac{-1/x^2}{-\frac{2}{x^3}e^{1/x^2}}$$

$$= \lim_{x \to 0} -\frac{1}{2}\frac{x}{e^{1/x^2}} = 0$$

چون به ازای $x \neq 0$، $f'(x) = 2x^{-3}e^{-\frac{1}{x^2}}$،

$$f''(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{2x^{-3}e^{-1/x^2} - 0}{x}$$

$$= 2\lim_{x \to 0} \frac{x^{-4}}{e^{1/x^2}} = 2\lim_{x \to 0} \frac{-4x^{-5}}{-2x^{-3}e^{1/x^2}} \qquad \text{(هوپیتال)}$$

$$= 4\lim_{x \to 0} \frac{x^{-2}}{e^{1/x^2}} = 4\lim_{x \to 0} \frac{-2x^{-3}}{-2x^{-3}e^{1/x^2}} \qquad \text{(هوپیتال)}$$

$$= 4\lim_{x \to 0} \frac{1}{e^{1/x^2}} = 0$$

بنابراین

$$p_2(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}x^2$$
$$= 0 + 0 + 0 = 0$$

۱۱. جدول زیر را تشکیل می‌دهیم

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(\circ)$
$\circ$	$x^{۲} - x - ۲$	-۲
۱	$۲x - ۱$	-۱
۲	۲	۲
۳	$\circ$	$\circ$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
n	$\circ$	$\circ$

بنابراین

$$\begin{aligned} p_n(x) &= f(\circ) + f'(\circ)\, x + \frac{f''(\circ)}{۲!} x^{۲} + \frac{f^{(۳)}(\circ)}{۳!} x^{۳} + \dots + \frac{f^{(n)}(\circ)}{k!} x^n \\ &= -۲-x + x^{۲} + \circ + \dots + \circ = -۲-x + x^{۲} \end{aligned}$$

که همان تابع داده شده است. از این نتیجه تعجب نمی‌کنیم، زیرا $f(x)$ خود یک چند جمله‌ای است.

۱۲. مشابه تمرین ۱۱ حل می‌شود و $p_n(x) = ۴+۳x + x^{۵}$ بدست می‌آید.

۱۳. جدول زیر را تشکیل می‌دهیم.

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(\circ)$
$\circ$	$(x+۱)^{-۱}$	۱
۱	$(-۱)(x+۱)^{-۲}$	-۱
۲	$(-۱)(-۲)(x+۱)^{-۳}$	$۲!$
۳	$(-۱)(-۲)(-۳)(x+۱)^{-۴}$	$-۳!$
.		
.		
.		
n	$(-۱)^n\, n!\, (x-۱)^{-(n+۱)}$	$(-۱)^n\, n!$

بنابراین

$$p_n(x) = ۱-x + x^{۲} - \dots + (-۱)^n x^n$$

۱۴. با قرار دادن $2x$ به جای x در تمرین ۱۳، یا با محاسبهٔ مستقیم مشابه تمرین ۱۳، به‌دست می‌آوریم.

$$p_n(x) = 1-2x + 2^2x^2 - \dots + (-1)^n\, 2^n\, x^n$$

۱۵. می‌توانیم بنویسیم

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x)$$

حال با توجه به مثال ۱. ۵. ۶، چند جمله‌ای nام تیلور $\ln(1+x)$ در $x = 0$ برابر است با

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n \qquad (x \geq 1)$$

همچنین با قرار دادن $-x$ به جای x در فرمول بالا، یا با محاسبهٔ مستقیم، چند جمله‌ای تیلور $\ln(1-x)$ در $x=0$ برابر با

$$-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots - \frac{x^n}{n}$$

به دست می‌آید. بنابراین چند جمله‌ای تیلور $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$ عبارت‌اند از

$$\begin{aligned} p_n(x) &= 2x + \frac{2}{3}x^3 + \dots + [(-1)^{n-1}+1]\,\frac{x^n}{n} \\ &= 2(x + \frac{1}{3}x^3 + \dots + \frac{1}{2n-1}x^{2n-1}) \end{aligned}$$

۱۶. مشتقهای $f(x) = \cos x$ در دسته‌های چهارتایی تکرار می‌شوند:

$$\begin{array}{ll} f(x)=\cos x & f^{(4)}(x)=\cos x \\ f'(x)=-\sin x & f^{(5)}(x)=-\sin x \\ f''(x)=-\cos x & f^{(6)}(x)=-\cos x \\ f^{(3)}(x)=\sin x & f^{(7)}(x)=\sin x \end{array}$$

و به همین ترتیب، $f^{2k}(x) = (-1)^k \cos x$ و $f^{(2k-1)}(x) = (-1)^k \sin x$. بنابراین $f^{(2k-1)}(0) = 0$ و $f^{2k}(0) = (-1)^k$. یعنی مشتقهای مرتبهٔ فرد f در $x = 0$ برابر با صفر و مشتقهای مرتبهٔ زوج آن بین ۱ و ۱− متناوب هستند. در نتیجه ضریب x^{2k-1} در هر چند جمله‌ای

تیلور f برابر صفر است، و بنابراین به ازای هر x و هر n داریم $p_{2n}(x)=p_{2n-1}(x)$. بنابراین،

$$p_{2n-1}(x) = p_{2n}(x) = f(0) + f'(0)\,x + \dots + \frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!}\,x^{2n}$$
$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}\,x^{2n}$$

۱۷. چند جمله‌ای nام مک لورن e^x برابر است با

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

با قرار دادن $-x$ به جای x در این فرمول، چند جمله‌ای مک لورن e^{-x} به‌صورت

$$1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!}\;x^n$$

به دست می‌آید. محاسبهٔ مستقیم چند جمله‌ای nام تیلور $f(x) = e^{-x}$ نیز ساده است.

۱۸. داریم $\cosh x = \frac{1}{2}\,(e^x + e^{-x})$. چون چند جمله‌ایهای nام مک لورن e^x و e^{-x} به ترتیب عبارت‌اند از

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \quad \text{و} \quad 1 - x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!}\,x^n$$

پس چند جمله‌ای nام مک لورن $\cosh x$ عبارت‌اند از

$$p_n(x) = \frac{1}{2}\left(2 + 2\,\frac{x^2}{2!} + \dots + 2\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right)$$
$$= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

۱۹. با قرار دادن $3x$ به جای x در چند جمله‌ای nام مک لورن e^x، یا با محاسبهٔ مستقیم، چند جمله‌ای مورد نظر به دست می‌آید:

$$p_n(x) = 1 + 3x + \frac{3^2}{2!}\,x^2 + \dots + \frac{3^n}{n!}\,x^n$$

۲۰. اگر $f(x) = e^x$ آنگاه $f(\frac{۱}{۲})=e^{\frac{۱}{۲}}$. چون $f^{(n+۱)}(z) = e^z$، پس

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+۱)}(z)}{(n+۱)!}x^{n+۱} = \frac{e^z}{(n+۱)!}x^{n+۱}$$

که در آن z بین ۰ و x است. حال اگر $۰<z<\frac{۱}{۲}$ آنگاه $۰<e^z<۲$ و در نتیجه

$$\left|r_n(\frac{۱}{۲})\right| = \left|\frac{e^z}{(n+۱)!}(\frac{۱}{۲})^{n+۱}\right| < \frac{۱}{۲^n(n+۱)!}$$

محاسبه نشان می‌دهد که اگر $n\geq ۴$ آنگاه $|r_n(\frac{۱}{۲})| \leq ۰/۰۰۱$. بنابراین $e^{\frac{۱}{۲}} \approx p_۴(\frac{۱}{۲})$.
ولی با استفاده از $p_۴(x)$ برای e^x داریم

$$p_۴(\frac{۱}{۲}) = ۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲})^۲+\frac{۱}{۶}(\frac{۱}{۲})^۳+\frac{۱}{۲۴}(\frac{۱}{۲})^۴ = \frac{۶۳۳}{۳۸۴} \approx ۱/۶۴۸۴۳$$

بنابراین $e^{\frac{۱}{۲}} \approx ۱/۶۴۸۴۳$ تقریب خواسته شده است.

۲۱. اگر $f(x) = e^{۳x}$ آنگاه $f^{(n)}(x) = ۳^n e^{۳x}$. در نتیجه فرمول تیلور با باقیمانده (در $x=۰$) برای $x^{۳n}$ عبارت‌اند از

$$e^{۳x} = ۱+۳x+\frac{۳^۲}{۲!}x^۲+\dots+\frac{۳^n}{n!}x^n+\frac{۳^{n+۱}}{(n+۱)!}e^{۳z}x^{n+۱}$$

که در آن z بین ۰ و x است. حال اگر $۰<z<\frac{۱}{۲}$ آنگاه $۰<e^{۳z}<۲^۳$ و در نتیجه

$$\left|r_n(\frac{۱}{۲})\right| = \left|\frac{۳^{n+۱}}{(n+۱)!}e^{۳z}(\frac{۱}{۲})^{n+۱}\right| < \frac{۳^{n+۱}}{۲^{n-۲}(n+۱)!}$$

محاسبه نشان می‌دهد که اگر $n\geq ۷$ آنگاه $|r_n(\frac{۱}{۲})|<۰/۰۱$. پس $e^{\frac{۳}{۲}} = f(\frac{۱}{۲}) \approx p_۷(\frac{۱}{۲})$. ولی

$$p_۸(\frac{۱}{۲}) = ۱+۳(\frac{۱}{۲})+\frac{۹}{۲}(\frac{۱}{۲})^۲+\frac{۲۷}{۶}(\frac{۱}{۲})^۳+\frac{۸۱}{۲۴}(\frac{۱}{۲})^۴+\frac{۲۴۳}{۱۲۰}(\frac{۱}{۲})^۵$$
$$+\frac{۷۲۹}{۷۲۰}(\frac{۱}{۲})^۶+\frac{۲۱۸۷}{۵۰۴۰}(\frac{۱}{۲})^۷$$
$$= ۱+\frac{۳}{۲}+\frac{۹}{۸}+\frac{۹}{۱۶}+\frac{۲۷}{۱۲۸}+\frac{۸۱}{۱۲۸۰}+\frac{۸۱}{۵۱۲۰}+\frac{۲۴۳}{۷۱۶۸۰}$$

بنابراین $e^{\frac{3}{2}} \approx 4/4805$ تقریب مورد نظر است.

۲۲. مانند مسألهٔ نمونه‌ای ۱. ۵. ۱۷ ، برای تابع $f(x) = \sin x$، داریم

$$\left| f^{(n+1)}(z) \right| = |\sin z| \leq 1 \quad \text{یا} \quad \left| f^{(n+1)}(z) \right| = |\cos z| \leq 1$$

بنابراین

$$\left| r_n\left(\frac{\pi}{10}\right) \right| = \left| \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} \left(\frac{\pi}{10}\right)^{n+1} \right| \leq \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{\pi}{10}\right)^{n+1}$$

محاسبه نشان می‌دهد که اگر $n \geq 3$ آنگاه $\left|r_n\left(\frac{\pi}{10}\right)\right| < 0/001$. پس $\sin\frac{\pi}{10} \approx p_3\left(\frac{\pi}{10}\right)$. ولی، باتوجه به حل تمرین ۱۹،

$$p_3\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{\pi}{10} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^3 \approx 0/30884$$

در نتیجه $\sin\frac{\pi}{2} \approx 0/30884$ تقریب خواسته شده است و تا دو رقم اعشار دقیق است.

۲۳. با توجه به حل تمرین ۱۹، برای $f(x)=\cos x$، داریم

$$\left| f^{(n+1)}(z) \right| = |\cos z| \leq 1 \quad \text{یا} \quad \left| f^{(n+1)}(z) \right| = |\sin z| \leq 1$$

در نتیجه

$$\left| r_n\left(\frac{7\pi}{36}\right) \right| = \left| \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} \left(\frac{7\pi}{36}\right)^{n+1} \right| \leq \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{7\pi}{36}\right)^{n+1}$$

محاسبه نشان می‌دهد که اگر $n \geq 3$ آنگاه $\left|r_n\left(\frac{7\pi}{36}\right)\right| \leq 0/001$. پس $\cos\frac{7\pi}{36} \approx p_3\left(\frac{7\pi}{36}\right)$. ولی، باتوجه به حل تمرین ۱۹،

$$p_{۳}(\frac{۷\pi}{۳۶}) = ۱ - \frac{۱}{۲!}(\frac{۷\pi}{۳۶})^{۲} \approx ۰/۸۱۳۶$$

در نتیجه ۰/۸۱۳۶ تقریب خواسته شده برای $\cos \frac{۷\pi}{۳۶}$ است.

تمرینهای فصل ۲

تمرینهای ۱.۲

۱. صورت و مخرج کسر را بر n تقسیم می‌کنیم و قضیه‌های حدی را به کار می‌بریم،

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{۳n+۲}=\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{۳+\frac{۲}{n}}=\frac{۱}{۳+۰}=\frac{۱}{۳}$$

پس این دنباله همگراست و حد آن $\frac{۱}{۳}$ است.

۲. صورت و مخرج کسر را بر $n^۲$ تقسیم می‌کنیم و قضیه‌های حدی را به کار می‌بریم،

$$\lim_{n\to\infty}\frac{۷-۴n^۲}{۳+۲n^۲}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{۷}{n^۲}-۴}{\frac{۳}{n^۲}+۲}=\frac{۰-۴}{۰+۲}=-۲$$

پس این دنباله همگرا و حد آن ۲− است.

۳. دنبالۀ داده شده یک دنبالۀ ثابت است و در نتیجه

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(-۵)=-۵$$

پس این دنباله همگرا و حد آن ۵− است.

۴. ابتدا می‌نویسیم

$$\frac{(۲n-۱)(۳n+۱)}{n^۳+۱}=\frac{۶n^۲-n-۱}{n^۳+۱}$$

حال صورت و مخرج این کسر را بر $n^{۳}$ تقسیم می‌کنیم و قضیه‌های حدی را به کار می‌بریم،

$$\lim_{n\to\infty}\frac{۶n^{۲}-n-۱}{n^{۳}+۱}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{۶}{n}-\frac{۱}{n^{۲}}-\frac{۱}{n^{۳}}}{۱+\frac{۱}{n^{۳}}}=\frac{۰-۰-۰}{۱+۰}=\frac{۰}{۱}=۰$$

پس دنبالهٔ داده شده همگرا و حد آن صفر است.

۵. صورت و مخرج کسر را بر $n>۰$ تقسیم می‌کنیم و سپس قضیه‌های حدی را به کار می‌بریم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{۲}{\sqrt{n^{۲}+۹}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{۲}{n}}{\frac{۱}{n}\sqrt{n^{۲}+۹}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{۲}{n}}{\sqrt{۱+\frac{۹}{n^{۲}}}}=\frac{۰}{\sqrt{۱+۰}}=۰$$

پس دنبالهٔ داده شده به صفر همگراست.

۶. ابتدا $\lim_{n\to\infty}|a_n|$ را محاسبه می‌کنیم. به این منظور صورت و مخرج کسر را بر $n^{۲}$ تقسیم می‌کنیم و قضیه‌های حدی را به کار می‌بریم. داریم

$$\lim_{n\to\infty}|a_n|=\lim_{n\to\infty}\frac{۳n}{n^{۲}+۴n+۵}=\lim_{n\to\infty}\frac{۳/n}{۱+\frac{۴}{n}+\frac{۵}{n^{۲}}}$$

$$=\frac{\lim_{n\to\infty}\frac{۳}{n}}{\lim_{n\to\infty}۱+\lim_{n\to\infty}\frac{۴}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{۵}{n^{۲}}}=\frac{۰}{۱+۰+۰}=۰$$

در نتیجه بنابه قضیهٔ ۲۲.۱.۲، $\lim_{n\to\infty}a_n=۰$ و در نتیجه دنبالهٔ داده شده به صفر همگراست.

۷. $$\lim_{n\to\infty}\left[۱+\left(\frac{۱}{۱۰}\right)^{n}\right]=\lim_{n\to\infty}۱+\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{۱۰^{n}}=۱+۰=۱$$

در نتیجه دنبالهٔ داده شده همگرا و حد آن ۱ است.

۸. این دنباله به صورت ...,۰, ۲, ۰, ۲ است که بین ۲ و ۰ نوسان می‌کند. پس حد آن وجود ندارد و در نتیجه واگراست.

۹. این دنباله به ۴ همگراست.

۱۰. صورت و مخرج کسر را بر $\sqrt{n}$ تقسیم می‌کنیم و از $\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{\sqrt{n}}=۰$ و قضیه‌های دیگر حدی استفاده می‌کنیم. داریم

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}+۱}{\sqrt{n}-۱}=\lim_{n\to\infty}\frac{۱+\frac{۱}{\sqrt{n}}}{۱-\frac{۱}{\sqrt{n}}}=\frac{۱+۰}{۱-۰}=۱$$

یعنی دنبالهٔ داده شده به ۱ همگراست.

۱۱. عبارت داده شده را در کسر $\frac{\sqrt{n+۱}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+۱}+\sqrt{n}}$ ضرب می‌کنیم: داریم

$$\sqrt{n+۱}-\sqrt{n}=(\sqrt{n+۱}-\sqrt{n})\,\frac{\sqrt{n+۱}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+۱}+\sqrt{n}}$$

$$=\frac{n+۱-n}{\sqrt{n+۱}+\sqrt{n}}=\frac{۱}{\sqrt{n+۱}+\sqrt{n}}$$

حال صورت و مخرج این کسر را بر $\sqrt{n}$ تقسیم می‌کنیم و از قضیه‌های حدی استفاده می‌کنیم. داریم

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+۱}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{\sqrt{n+۱}+\sqrt{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{۱}{\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{n+۱}{n}}+۱}$$

$$=\frac{\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{\sqrt{n}}}{\lim_{n\to\infty}\sqrt{۱+\frac{۱}{n}}+\lim_{n\to\infty}۱}=\frac{۰}{۱+۱}=۰$$

پس دنبالهٔ داده شده به صفر همگراست.

۱۲. مشابه تمرین ۱۱ عمل می‌کنیم و نتیجه می‌گیریم که دنبالهٔ داده شده به $\frac{۱}{۲}$ همگراست.

۱۳. ابتدا می‌نویسیم

$$\frac{۲^{n+۱}}{۵^{n+۳}}=\frac{۲^{n+۱}}{۵^{n+۱}\times ۲۵}=\frac{۱}{۲۵}(\frac{۲}{۵})^{n+۱}$$

بنابر مثال ۲. ۱. ۹، با $۱ > r = \frac{۲}{۵}$، داریم $\lim_{n\to\infty}(\frac{۲}{۵})^{n+۱}=۰$. بنابراین

$$\lim_{n\to\infty}\frac{۲^{n+۱}}{۵^{n+۳}}=\frac{۱}{۲۵}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{۲}{۵}\right)^{n+۱}=\frac{۱}{۲۵}\times ۰=۰$$

در نتیجه دنبالهٔ داده شده به صفر همگراست.

۱۴. دنبالهٔ داده شده به صورت ... ,۲۵− ,۱۶ ,۹− ,۴ ,۱− است و به حدی چون L میل نمی‌کند. پس این دنباله واگراست.

۱۵. فرض می‌کنیم $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^{۲}}$. چون $\lim\limits_{x\to\infty} \ln x = \infty$ و $\lim\limits_{x\to\infty} x^{۲} = \infty$ دستور هوپیتال را به‌کار می‌بریم. داریم

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^{۲}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{۱}{x}}{۲x} = \lim_{x\to\infty}\frac{۱}{۲x^{۲}} = ۰$$

پس $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n^{۲}} = ۰$ و دنبالهٔ داده شده به صفر همگراست.

۱۶. فرض می‌کنیم که $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$. با استفاده از دستور هوپیتال، داریم

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{۱} = \infty$$

بنابراین $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^n}{n} = \infty$ و دنبالهٔ داده شده واگراست.

۱۷. ابتدا می‌نویسیم

$$\left(۱+\frac{۱}{۳n}\right)^n = \left[\left(۱+\frac{۱}{۳n}\right)^{۳n}\right]^{۱/۳}$$

حال قرار می‌دهیم $t = ۳n$ و از مثال ۲.۱.۱۰ استفاده می‌کنیم. داریم

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(۱+\frac{۱}{۳n}\right)^n &= \lim_{t\to\infty}\left[\left(۱+\frac{۱}{t}\right)^{t}\right]^{۱/۳}\\ &= \left[\lim_{t\to\infty}\left(۱+\frac{۱}{t}\right)^{t}\right]^{۱/۳} = e^{۱/۳}\end{aligned}$$

در نتیجه دنبالهٔ داده شده همگرا و حد آن $e^{\frac{۱}{۳}}$ است.

۱۸. مشابه حل تمرین ۱۷ قرار می‌دهیم $t = \dfrac{n}{۲}$ و مثال ۲. ۱. ۱۰ را به کار می‌بریم. داریم

$$\lim_{n\to\infty}\left(۱+\frac{۲}{n}\right)^n = \lim_{t\to\infty}\left[\left(۱+\frac{۱}{t}\right)^{t}\right]^{۲} = e^{۲}$$

بنابراین دنبالهٔ داده شده به $e^{۲}$ همگراست.

۱۹. فرض می‌کنیم که $t = ۱+\frac{۱}{n}$. در نتیجه $a_n = \frac{۱-t^۲}{۱-t}$. روشن است که $t \longrightarrow ۱$ اگر و تنها اگر $n \longrightarrow \infty$. بنابراین

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{t\to ۱}\frac{۱-t^۲}{۱-t} = \lim_{t\to ۱}(۱+t) = ۲$$

در نتیجه دنبالهٔ داده شده به ۲ همگراست.

۲۰. بنابر مثال ۱۵.۱.۲ ، داریم $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{۵} = ۱$. همچنین $\lim_{n\to\infty}\frac{n-۱}{n+۱} = ۱$.

حال بنابر قضیهٔ ۶.۱.۲ (۳)، حد دنبالهٔ داده شده برابر است با

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{۵}\;\frac{n-۱}{n+۱} = (۱)(۱) = ۱$$

۲۱. صورت و مخرج کسر را بر $n > ۰$ تقسیم می‌کنیم و قضیه‌های حدی را به کار می‌بریم. حد دنبالهٔ داده شده برابر با $\frac{۱}{۲}$ به‌دست می‌آید.

۲۲. داریم $\left|\frac{\sin^۲ n}{n}\right| \le \frac{۱}{n}$ یا

$$-\frac{۱}{n} \le \frac{\sin^۲ n}{n} \le \frac{۱}{n}$$

چون $\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n} = ۰ = \lim_{n\to\infty}(-\frac{۱}{n})$ ، بنابر قضیهٔ ساندویچ، حد دنبالهٔ داده شده برابر است با

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin^۲ n}{n} = ۰$$

۲۳. این دنباله به صفر همگراست.

۲۴. چون $\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n} = ۰$ و $\lim_{n\to\infty}-\frac{۱}{e^n} = ۰$ ، بنابر قضیهٔ ۶.۱.۲ (۳)،

$$\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{ne^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\cdot\frac{۱}{e^n} = ۰.۰ = ۰$$

در نتیجه دنباله داده شده به صفر همگراست.

۲۵. فرض می‌کنیم $f(x) = e^{-۲x}$. چون بنابر مثال ۲. ۱. ۹، $\lim_{x\to\infty} e^{۲x} = \infty$ ،

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{۱}{e^{۲x}} = ۰$$

در نتیجه $\lim_{n\to\infty} e^{-۲n} = ۰$ و دنبالهٔ داده شده به صفر همگراست.

۲۶. فرض می‌کنیم $g(x) = e^x$ و $a_n = \frac{۱}{n}$. چون $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n} = ۰$، بنابر قضیهٔ ۵.۱.۲

(ب) $$\lim_{n\to\infty} e^{\frac{۱}{n}} = \lim_{n\to\infty} g(a_n) = g(۰) = e^{۰} = ۱$$

۲۷. فرض می‌کنیم $f(x) = \frac{x}{e^x}$. بنابر دستور هوپیتال داریم

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{۱}{e^x} = ۰$$

در نتیجه $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{e^n} = ۰$.

۲۸. فرض می‌کنیم $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ و دستور هوپیتال را به کار می‌بریم:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{۱}{x}}{\frac{۱}{۲}x^{-\frac{۱}{۲}}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{۲}{\sqrt{x}} = ۰$$

در نتیجه $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} = ۰$.

۲۹. این تمرین را می‌توانیم با استفاده از مثال ۲.۱.۱۵ و مسألهٔ نمونه‌ای ۲. ۱. ۱۶ و قضیهٔ حدی ۱. ۲. ۶ (۳) به صورت زیر حل کنیم:

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{۲k} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{۲} \cdot \sqrt[k]{k} = (۱)(۱) = ۱$$

حال این تمرین را با استفاده از قضیهٔ ۲. ۱. ۵ حل می‌کنیم، ابتدا می‌نویسیم

$$\sqrt[k]{۲k} = (۲k)^{۱/k} = e^{\frac{۱}{k}\ln(۲k)}$$

حال فرض می‌کنیم $g(x) = e^x$ و $a_k = \frac{\ln(۲k)}{k}$. بنابر دستور هوپیتال داریم

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(۲x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{۲}{۲x}}{۱}=\lim_{x\to\infty}\frac{۱}{x}=۰$$

پس $\lim_{k\to\infty} a_k = ۰$ و از آنجاکه تابع g در ۰ پیوسته است، بنابر قضیهٔ ۲. ۱. ۵ (ب)

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{۲k}=\lim_{k\to\infty}e^{\frac{\ln(۲k)}{k}}=\lim_{k\to\infty}g(a_k)$$
$$=g(۰)=e^{۰}=۱$$

۳۰. داریم

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\frac{۱}{n}}^{\frac{۱}{n}}e^x dx=\lim_{n\to\infty}[\,e^x\,]_{-\frac{۱}{n}}^{\frac{۱}{n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(e^{\frac{۱}{n}}-e^{-\frac{۱}{n}}\right)=e^{۰}-e^{۰}=۱-۱=۰$$

۳۱. مانند حل تمرین ۳۰ عمل می‌کنیم. داریم

$$\lim_{n\to\infty}\int_{۱+\frac{۱}{n}}^{۲-\frac{۱}{n}}\frac{۱}{x}dx=\lim_{n\to\infty}[\,\ln x\,]_{۱+\frac{۱}{n}}^{۲-\frac{۱}{n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left[\ln\left(۲-\frac{۱}{n}\right)-\ln\left(۱+\frac{۱}{n}\right)\right]$$
$$=\lim_{n\to\infty}\ln\frac{۲-\frac{۱}{n}}{۱+\frac{۱}{n}}=\ln ۲$$

زیرا $\lim_{n\to\infty}\frac{۲-\frac{۱}{n}}{۱+\frac{۱}{n}}=۲$ و تابع $g(x) = \ln x$ در $x = ۲$ پیوسته است (قضیهٔ ۲. ۱. ۵ (ب) را به کاربرده‌ایم).

۳۲. فرض می‌کنیم

$$f(x)=\left(۱+\frac{۰/۰۵}{x}\right)^x=\left[\left(۱+\frac{۱}{۲۰x}\right)^{۲۰x}\right]^{\frac{۱}{۲۰}}$$

حال قرار می‌دهیم $t = ۲۰x$ و $\lim_{t\to\infty}(۱+\frac{۱}{t})^t = e$ را به‌کار می‌بریم. در نتیجه

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{t\to\infty}\left[\left(۱+\frac{۱}{t}\right)^t\right]^{\frac{۱}{۲۰}} = e^{\frac{۱}{۲۰}} = e^{۰/۰۵}$$

در نتیجه $\lim_{n\to\infty}(۱+\frac{۰/۰۵}{n})^n = e^{۰/۰۵}$.

۳۳. جمله‌های این دنباله عبارت‌اند از

$$\frac{۲}{۱!}, \frac{۲^۲}{۲!}, \frac{۲^۳}{۳!}, \frac{۲^۴}{۴!}, \dots, \frac{۲^n}{n!}, \dots$$

یا $\dots, \frac{۲^n}{n!}, \dots, \frac{۲}{۳}, \frac{۴}{۳}, ۲, ۲$. ملاحظه می‌کنیم که این دنباله ظاهراً ناافزایشی است. برای اثبات این مطلب باید نشان دهیم که به ازای هر $n\geq ۱$، $a_n \geq a_{n+۱}$، یعنی

$$\frac{۲^n}{n!} \geq \frac{۲^{n+۱}}{(n+۱)!}$$

که معادل است با نامساوی $n! \,.\, ۲^{n+۱} \geq ۲^n(n+۱)!$ یا $n! \,.\, ۲^n.۲ \geq n! \,.\, (n+۱) \,.\, ۲^n$ یا $n+۱\geq ۲$ که به ازای هر $n\geq ۱$ برقرار است. در نتیجه دنبالهٔ داده شده یکنوای ناافزایشی است. همچنین چون به ازای هر $n\geq ۱$،

$$\frac{۲^n}{n!} = \frac{۲.۲.۲.۲\dots۲}{۱.۲.۳.۴\dots n} \leq ۲$$

پس دنبالهٔ داده شده کراندار نیز هست و در نتیجه بنابر قضیهٔ ۲.۱.۲۷، همگراست.

۳۴. برای بررسی یکنوا بودن این دنباله، فرض می‌کنیم $f(x) = \frac{۳x-۱}{۴x+۵}$. چون

$$f'(x) = \frac{۱۹}{(۴x+۵)^۲} > ۰$$

پس دنبالهٔ داده شده افزایشی است. همچنین چون بـه ازای هـر $n\geq ۱$، $۳n-۱ < ۴n+۵$، پس $\frac{۳n-۱}{۴n+۵} < ۱$ و در نتیجه دنبالهٔ داده شده کراندار نیز است.

بنابراین دنبالهٔ داده شده یکنوا و کراندار است و بنابر قضیهٔ ۲. ۱. ۲۷ همگراست.

۳۵. روشن است که

$$\circ < \frac{e^n}{\text{۱}+e^n} < \text{۱}$$

در نتیجه دنبالهٔ داده شده کراندار است. با نوشتن چند جملهٔ اول این دنباله، حدس می‌زنیم که افزایشی است. برای اثبات این مطلب مانند حل تمرین ۳۴ عمل می‌کنیم. فرض می‌کنیم $f(x) = \frac{e^x}{\text{۱}+e^x}$. حال چون

$$f'(x) = \frac{e^x + e^{\text{۲}x} - e^{\text{۲}n}}{(\text{۱}+e^x)^{\text{۲}}} = \frac{e^x}{(\text{۱}+e^x)^{\text{۲}}} > \circ$$

پس تابع f و در نتیجه دنبالهٔ داده شده افزایشی است. البته می‌توانیم بگوییم که به ازای $n \geq \text{۱}$

$$\frac{e^n}{\text{۱}+e^n} < \frac{e^{n+\text{۱}}}{\text{۱}+e^{n+\text{۱}}}$$

اگر و تنها اگر

$$e^n(\text{۱}+e^{n+\text{۱}}) < e^{n+\text{۱}}(\text{۱}+e^n)$$

یا

$$\text{۱}+e^{n+\text{۱}} < e(\text{۱}+e^n)$$

یا

$$\text{۱}+e^{n+\text{۱}} < e+e^{n+\text{۱}}$$

یا $e > \text{۱}$ که گزاره‌ای درست است. حال از این مطلب نتیجه بگیریم که دنبالهٔ داده افزایشی است. در هر صورت از قضیهٔ ۲. ۱. ۲۷ نتیجه می‌گیریم که دنبالهٔ (یکنوا و کراندار) داده شده همگراست.

۳۶. روشن است که به ازای هر $n \geq \text{۱}$،

$$\circ < \frac{e^n}{\text{۱}+e^{\text{۲}n}} < \text{۱}$$

در نتیجه دنبالهٔ داده شده کراندار است. با نوشتن چند جملهٔ اول این دنباله، حدس می‌زنیم که کاهشی است. برای اثبات این مطلب مشابه تمرین ۳۵ می‌توانیم به دو روش عمل کنیم. در روش اول فرض می‌کنیم که

$$f(x) = \frac{e^x}{\text{۱}+e^{\text{۲}x}}$$

در نتیجه

$$f'(x) = \frac{e^x + e^{۳x} - ۲e^{۳x}}{(۱+e^{۲x})^۲} = \frac{e^x - e^{۳x}}{(۱+e^{۲x})^۲} < ۰$$

و دنبالهٔ داده شده کاهشی است. اثبات کاهشی بودن این دنباله به روش دوم را به عهدهٔ شما می‌گذاریم. بنابراین دنبالهٔ داده شده یکنوا و کراندار بوده و درنتیجه همگراست.

۳۷. روشن است که چون به ازای هر $n \geq ۱$، $n < ۲^n$، پس $\frac{n}{۲^n} < ۱$ و درنتیجه دنبالهٔ داده شده کراندار است. بانوشتن چند جملهٔ اول این دنباله، حدس می‌زنیم که غیرافزایشی است. برای اثبات این مطلب می‌توانید از مشتق تابع $f(x) = \frac{x}{۲^x}$ استفاده کنید یانشان دهید که به‌ازای هر $n \geq ۱$، $\frac{n}{۲^n} \geq \frac{n+۱}{۲^{n+۱}}$. این نامساوی معادل است با $(n+۱)^n ۲ \geq n$. $۲^{n+۱}$ یا $۲n \geq n+۱$ که به ازای $n \geq ۱$ همواره درست است. در نتیجه دنبالهٔ داده شد. یکنوا و کراندار است. از این رو، بنابر قضیهٔ ۲. ۱. ۲۷، این دنباله همگراست.

۳۸. روشن است که چون به ازای $n \geq ۱$، $۲ \leq ۱+\frac{۱}{n}$، پس

$$(۱ + \frac{۱}{n})^۲ \geq ۴$$

یعنی دنبالهٔ داده شده کراندار است. همچنین، چون $۱ + \frac{۱}{n+۱} < ۱ + \frac{۱}{n}$، پس

$$(۱ + \frac{۱}{n})^۲ > (۱ + \frac{۱}{n+۱})^۲$$

و در نتیجه دنبالهٔ داده شده کاهشی است. بنابراین این دنباله یکنوا و کراندار بوده و در نتیجه همگراست.

۳۹. روشن است که به ازای هر $n \geq ۱$، $۲ - \frac{۱}{n} < ۲$ و در نتیجه دنبالهٔ داده شده کراندار است. این دنباله افزایشی است. زیرا

$$۲ - \frac{۱}{n} \leq ۲ - \frac{۱}{n+۱}$$

معادل است با $-\frac{۱}{n} \leq -\frac{۱}{n+۱}$ یا $\frac{۱}{n+۱} \leq \frac{۱}{n}$ که به ازای هر $n \geq ۱$ درست است. در نتیجه نشان داده‌ایم که دنبالهٔ داده شده یکنوا و کراندار است. بنابراین دنبالهٔ داده شده همگراست.

۴۰. فرض می‌کنیم $f(x) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{۲x+۱}$. در نتیجه

$$f'(x) = \frac{-۲\pi}{(۲x+۱)^۲} \sec^۲ \frac{\pi}{۲x+۱} < ۰$$

در نتیجه تابع f و بنابراین دنبالهٔ داده شده یکنوای کاهشی است. همچنین چون به ازای هر $n \geq ۱$، $\frac{\pi}{۲n+۱} \leq \frac{\pi}{۳}$، پس

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{۲n+۱} \leq \operatorname{tg} \frac{\pi}{۳} < ۲$$

در نتیجه، دنبالهٔ داده شده یکنوا و کراندار است و بنابراین همگراست.

تمرینهای ۲.۲

۱. سری داده شده عبارت است از

$$\sum_{n=۱}^{\infty} ۱ = ۱+۱+۱+...$$

پس $s_۱=۱$، $s_۲=۱+۱=۲$، $s_۳=۳$ و به همین ترتیب $s_n=n$. چون $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} n = \infty$، پس سری داده شده واگراست. (البته چون $a_n=۱$ و $\lim_{n\to\infty} a_n = ۱ \neq ۰$، پس بنابر آزمون واگرایی نیز می‌توان گفت که این سری واگراست).

۲. داریم

$$\sum_{n=۱}^{\infty} n = ۱+۲+۳+...+n+....$$

پس $s_۱=۱$، $s_۲=۱+۲=۳$، $s_۳=۱+۲+۳=۶$، و به همین ترتیب

$$S_n = ۱+۲+...+n = \frac{n(n+۱)}{۲}$$

در نتیجه $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+۱)}{۲} = \infty$ و سری داده شده واگراست. (البته چون $a_n=n$ و $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n \neq ۰$، بنابر آزمون واگرایی نیز می‌توان گفت که سری داده شده واگراست).

۳. این سری عبارت است از

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۳}{۴^{n-۱}} = ۳+\frac{۳}{۴}+\frac{۳}{۱۶}+\frac{۳}{۶۴}+...+\frac{۳}{۴^{n-۱}}+.....$$

پس $S_۱=۳$، $S_۲=۳+\frac{۳}{۴}=\frac{۱۵}{۴}$، $S_۳=۳+\frac{۳}{۴}+\frac{۳}{۱۶}=\frac{۶۳}{۱۶}$، و به طورکلی، بنابر فرمولی که دراثبات قضیهٔ ۱۲.۲.۲ برای S_n پیدا کردیم،

$$S_n=۳\frac{۱-(\frac{۱}{۴})^n}{۱-\frac{۱}{۴}}=۴-۴(\frac{۱}{۴})^n=۴-(\frac{۱}{۴})^{n-۱} \qquad (۱)$$

در نتیجه

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left[۴-\left(\frac{۱}{۴}\right)^{n-۱}\right]=۴-۰=۴$$

بنابراین سری داده شده همگرا و مجموع آن ۴ است.

متذکر می‌شویم که در اینجا $a_n=\frac{۳}{۴^{n-۱}}$ و

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{۳}{۴^{n-۱}}=۰$$

و چون این سری یک سری هندسی با $a=۳$ و $r=\frac{۳}{۴}<۱$ است، همگرا بوده و مجموع آن برابر است با

$$S=\frac{۳}{۱-\frac{۱}{۴}}=۴ \qquad (۲)$$

که باجواب به دست آمده در بالا مطابقت دارد.

۴. این سری عبارت است از

$$\sum_{n=۰}^{\infty} ۲^{-n}\,۳^{n-۱}=\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۲}+\frac{۳}{۴}+\frac{۹}{۸}+\ldots$$

در نتیجه $S_۱=\frac{۱}{۳}$ ، $S_۲=\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۲}=\frac{۵}{۶}$ ، $S_۳=\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۲}+\frac{۳}{۴}=\frac{۱۹}{۱۲}$. چون

$$a_n=۲^{-n}\quad ۳^{n-۱}=\frac{۳^{n-۱}}{۲^n}=\frac{۱}{۲}\ \frac{۳^{n-۱}}{۲^{n-۱}}=\frac{۱}{۲}\,(\frac{۳}{۲})^{n-۱}$$

سری داده شده یک سری هندسی با $a=\frac{۱}{۳}$ و $r=\frac{۳}{۲}$است. در نتیجه

(۳)
$$S_n=\frac{۱}{۳}\,\frac{۱-(\frac{۳}{۲})^n}{۱-\frac{۳}{۲}}=-\frac{۲}{۳}\left[۱-(\frac{۳}{۲})^n\right]$$

بنابراین
$$=\frac{۲}{۳}\left[(\frac{۳}{۲})^n-۱\right]$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{۲}{۳}\left[\left(\frac{۳}{۲}\right)^n-۱\right]=\infty$$

در نتیجه سری داده شده واگراست (البته چون $r>۱$، بنابر قضیهٔ سریهای هندسی نیز می‌توان گفت که این سری واگراست).

۵. این سری عبارت است از

$$\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n=۱-۱+۱-۱+\dots+(-۱)^n+\dots$$

پس $S_۱=۱$ ، $S_۲=۱-۱=۰$ و $S_۳=۱-۱+۱=۱$. به همین ترتیب

$$S_n=\begin{cases}۰ & n \text{ زوج ،}\\ ۱ & n \text{ فرد ،}\end{cases}$$

چون دنبالهٔ مجموعهای جزئی یعنی (S_n) بین ۱ و ۰ نوسان می‌کند، $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ وجود ندارد و در نتیجه سری داده شده واگراست. البته چون

$$a_n=(-۱)^n=\begin{cases}۱ & n \text{ زوج ،}\\ -۱ & n \text{ فرد ،}\end{cases}$$

پس $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq ۰$ ؛ در واقع این حد وجود ندارد. در نتیجه بنابر آزمون واگرایی نیز می‌توان گفت که سری داده شده واگراست.

۶. داریم

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\ln\frac{n}{n+۱}=\ln\frac{۱}{۲}+\ln\frac{۲}{۳}+\ln\frac{۳}{۴}+\dots+\ln\frac{n}{n+۱}+\dots$$

پس
$$S_۲= \ln \frac{۱}{۲} + \ln \frac{۲}{۳}= - \ln۲+\ln۲-\ln۳= -\ln۳,\ S_۱= \ln \frac{۱}{۲}= -\ln۲$$
و
$$S_۳= \ln \frac{۱}{۲} + \ln \frac{۲}{۳} + \ln \frac{۳}{۴} = -\ln۳ + \ln۳-\ln۴=-\ln۴$$

و به همین ترتیب، با توجه به این مطلب که $\ln \frac{x}{y} =\ln x-\ln y$، داریم

$$S_n= \ln \frac{۱}{۲} + \ln \frac{۲}{۳} + \ln \frac{۳}{۴} + ... + \ln \frac{n}{n+۱}$$
$$=(۰-\ln۲)+(\ln۲-\ln۳)+(\ln۳-\ln۴) +...+ (\ln(n-۱)-\ln n)+(\ln n-\ln(n+۱))$$
$$=۰-\ln(n+۱)=-\ln(n+۱)$$

حال چون $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=-\lim \ln(n+۱)=-\infty$، سری داده شده واگراست. توجه کنید که در این تمرین چون

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} \ln \frac{n}{n+۱} = \ln \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+۱} = \ln۱=۰$$

آزمون واگرایی به کار نمی‌آید.

۷. چون $\frac{۱}{۲} (\frac{۱}{۴n-۳}-\frac{۱}{۴n+۱}) = \frac{۲}{(۴n-۳)(۴n+۱)}$،

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۲}{(۴n-۳)(۴n+۱)} =\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{۲} (\frac{۱}{۴n-۳}-\frac{۱}{۴n+۱})$$
$$= \frac{۱}{۲} (۱-\frac{۱}{۵}) + \frac{۱}{۲} (\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۹}) +...$$

در نتیجه
$$S_۱=\frac{۱}{۲}(۱-\frac{۱}{۵})= \frac{۲}{۵}$$
$$S_۲= \frac{۱}{۲}(۱-\frac{۱}{۵}) + \frac{۱}{۲} (\frac{۱}{۵} - \frac{۱}{۹})= \frac{۱}{۲} (۱-\frac{۱}{۹})= \frac{۴}{۹}$$
$$S_۳= \frac{۱}{۲}(۱-\frac{۱}{۵}) + \frac{۱}{۲} (\frac{۱}{۵} - \frac{۱}{۹})+ \frac{۱}{۲} (\frac{۱}{۹} -\frac{۱}{۱۳})= \frac{۱}{۲} (۱- \frac{۱}{۱۳}) =\frac{۶}{۱۳}$$

به همین ترتیب
$$S_n= \frac{۱}{۲} [(۱-\frac{۱}{۵}) + (\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۹}) +...+ (\frac{۱}{۴n-۳} - \frac{۱}{۴n+۱})$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{4n+1}\right) = \frac{2n}{4n+1}$$

چون
$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{4n+1}\right) = \frac{1}{2}(1-0) = \frac{1}{2}$$

سری داده شده به $\frac{1}{2}$ همگراست.

۸. داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^3}-\frac{1}{(n+1)^3}\right) = \left(1-\frac{1}{2^3}\right)+\left(\frac{1}{2^3}-\frac{1}{3^3}\right)+ \dots$$

پس
$$S_1 = 1-\frac{1}{2^3} = 1-\frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

$$S_2 = \left(1-\frac{1}{2^3}\right)+\left(\frac{1}{2^3}-\frac{1}{3^3}\right) = 1-\frac{1}{3^3} = \frac{26}{27}$$

$$S_3 = \left(1-\frac{1}{2^3}\right)+\left(\frac{1}{2^3}-\frac{1}{3^3}\right)+\left(\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^3}\right)$$

$$= 1-\frac{1}{4^3} = 1-\frac{1}{64} = \frac{63}{64}$$

به همین ترتیب $S_n = 1-\frac{1}{(n+1)^3}$ در نتیجه

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{(n+1)^3}\right) = 1$$

بنابراین سری داده شده همگرا و مجموع آن ۱ است.

۹. چون بنابر مثال ۹.۱.۲،

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{-1}{5}\right)^n = 0$$

آزمون واگرایی به کار نمی‌آید. یعنی با استفاده از این آزمون نمی‌توان گفت که سری داده شده واگراست یا همگراست. البته این سری عبارت است از

$$\sum_{n=۱}^{\infty}(\frac{-۱}{۵})^n = -\frac{۱}{۵} + (\frac{۱}{۵})^۲-(\frac{۱}{۵})^۳ + ...$$

که یک سری هندسی با $a=-\frac{۱}{۵}$ و $r=-\frac{۱}{۵}$ است که همگراست و مجموع آن عبارت است از

$$S=\frac{-\frac{۱}{۵}}{۱-(-\frac{۱}{۵})}=\frac{-\frac{۱}{۵}}{\frac{۶}{۵}}=-\frac{۱}{۶}$$

۱۰. چون $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}(۲+\frac{۱}{n}) = ۲\neq ۰$، به یقین می‌توان گفت که سری داده شده واگراست.

۱۱. داریم

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{۱}{۱+(۰/۲)^n} = \frac{۱}{۱+۰} = ۱\neq ۰$$

در نتیجه، سری داده شده واگراست.

۱۲. چون $\lim\limits_{x\to\infty} x=\infty$ و $\lim\limits_{x\to\infty}\ln(x+۱)=\infty$، بنا به دستور هوپیتال داریم

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\ln(x+۱)} = \lim_{x\to\infty}\frac{۱}{\frac{۱}{x+۱}} = \lim_{x\to\infty}(x+۱)=\infty$$

در نتیجه $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\ln(n+۱)}\neq ۰$ و سری داده شده واگراست.

۱۳. چون به ازای هر عدد طبیعی n، $\sin n\pi=۰$،

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\sin n\pi=۰$$

پس نمی‌توان گفت که سری داده شده واگراست یا همگراست. البته چون

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\sin n\pi= ۰+۰+ ...+۰+...$$

پس در واقع سری داده شده همگراست و مجموع آن صفر است.

۱۴. اگر $x\to\infty$ آنگاه $t=\frac{۱}{x}$ به صفر میل می‌کند. در نتیجه

$$\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{۱}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{۱}{x}}{\frac{۱}{x}}=\lim_{t\to ۰}\frac{\sin t}{t}=۱$$

بنابراین $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{۱}{n}=۱\neq ۰$ و در نتیجه سری داده شده واگراست.

۱۵. چون $\sqrt{۲}>۱$، $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{۲})^n=\infty$ ؛ پس این حد مخالف صفر است. در نتیجه بنابر آزمون واگرایی، سری داده شده واگراست.

۱۶. چون $\lim_{n\to\infty}(۱+\frac{۱}{n})=۱$ و بنابر پیوسته بودن تابع لگاریتمی در $x=۱$، داریم

$$\lim_{n\to\infty}\ln(۱+\frac{۱}{n})=\ln\lim_{n\to\infty}(۱+\frac{۱}{n})=\ln ۱=۰$$

پس

$$\lim_{n\to\infty}(۱+\frac{۱}{n})\ln(۱+\frac{۱}{n})=۱.۰=۰$$

در نتیجه آزمون واگرایی به کار نمی‌آید و نمی‌توان گفت که سری داده شده واگراست.

۱۷. این سری عبارت است از

$$\sum_{n=۱}^{\infty} ۵(\frac{۳}{۷})^n=۵(\frac{۳}{۷})+۵(\frac{۳}{۷})^۲+\dots$$

که یک سری هندسی با $a=\frac{۱۵}{۷}$ و $r=\frac{۳}{۷}$ است. چون $r<۱$، این سری هندسی همگراست و مجموع آن برابر است با

$$S=a\frac{۱}{۱-r}=\frac{\frac{۱۵}{۷}}{۱-\frac{۳}{۷}}=\frac{۱۵}{۴}$$

۱۸. این سری به صورت زیر است.

$$\sum_{n=۱}^{\infty}(\frac{۷}{۳})^n=\frac{۷}{۳}+(\frac{۷}{۳})^۲+(\frac{۷}{۳})^۳+\dots$$

که یک سری هندسی با $a=\frac{۷}{۳}$ و $r=\frac{۷}{۳}$ است. چون $r>۱$، سری داده شده واگراست.

۱۹. این سری مجموع دوسری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ است. سری اول عبارت است از

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{4} + (\frac{1}{4})^2 + (\frac{1}{4})^3 + \dots$$

که یک سری هندسی با $a=\frac{1}{4}$ و $r=\frac{1}{4}$ است. در نتیجه این سری همگراست و مجموع آن برابر است با

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

همچنین در مثال ۵.۲.۲ نشان دادیم که

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

در نتیجه، بنابر قضیهٔ ۲۱.۲.۲ (الف)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{4^n} + \frac{1}{n(n+1)}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$$

۲۰. در حل تمرین ۱۹ دیدیم که سری هندسی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}$ همگراست. از آنجا که سری همساز $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ واگراست، بنابر قضیهٔ ۲۴.۲.۲ (الف)، سری داده شده واگراست.

۲۱. داریم

$$\frac{2^n+5^n}{2^n5^n} = \frac{2^n}{2^n5^n} + \frac{5^n}{2^n5^n} = \frac{1}{5^n} + \frac{1}{2^n}$$

در سری هندسی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$، $a=1$ و $r=\frac{1}{5}$. پس این سری همگراست و

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{5}{4}$$

به همین ترتیب

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

در نتیجه

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+5^n}{2^n5^n}=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}=\frac{5}{4}+2=\frac{13}{4}$$

۲۲. داریم

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}(-1)^n \frac{5^n}{2^{n+2}}=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{5}{2}\right)^n$$

که بنابر مثال ۹.۱.۲ این حد وجود ندارد. در نتیجه بنابر آزمون واگرایی، سری داده شده واگراست.

۲۳. می‌نویسیم

$$0.999\ldots=0.9+0.09+0.009+\ldots+\frac{9}{10^n}+\ldots$$

که یک سری هندسی با $a=0.9$ و $r=0.1$ است. چون $r<1$، این سری همگراست و مجموع آن برابر است با

$$S=\frac{a}{1-r}=\frac{0.9}{1-0.1}=\frac{0.9}{0.9}=1$$

در نتیجه $0.999\ldots=1$.

۲۴. می‌نویسیم

$$0.727272\ldots=0.72+0.0072+\ldots+\frac{72}{100^n}+\ldots$$

که یک سری هندسی با $a=0.72$ و $r=\frac{1}{100}$ است. مجموع این سری هندسی همگرا برابر است با

$$S=\frac{a}{1-r}=\frac{0.72}{1-0.01}=\frac{0.72}{0.99}=\frac{8}{11}$$

۲۵. چون $1.999\ldots=1+0.999\ldots$، و بنابر حل تمرین ۲۳، $0.999\ldots=1$، پس $1.999\ldots=1+1=2$.

۲۶. می‌نویسیم $12.02727\ldots=12+0.02727\ldots$. حال

$$0.02727\ldots=0.027+0.00027+\ldots$$

که یک سری هندسی با $a=۰/۰۲۷$ و $r=۰/۰۱$ است. در نتیجه

$$۰/۰۲۷۲۷...=\frac{۰/۰۲۷}{۱-۰/۰۱}=\frac{۲۷}{۹۹۰}=\frac{۳}{۱۱۰}$$

بنابراین $۱۲/۰۲۷۲۷...=۱۲+\frac{۳}{۱۱۰}=\frac{۱۳۲۳}{۱۱۰}$

۲۷. می‌نویسیم $۲/۵۶۱۲۳۱۲۳...=۲/۵۶+۰/۰۰۱۲۳۱۲۳...$. ولی

$$۰/۰۰۱۲۳۱۲۳...=۰/۰۰۱۲۳+۰/۰۰۰۰۰۱۲۳+...$$

که یک سری هندسی با $a=۰/۰۰۱۲۳$ و $r=۰/۰۰۱$ است. در نتیجه مجموع این سری همگرا برابر است با

$$\frac{a}{۱-r}=\frac{۰/۰۰۱۲۳}{۱-۰/۰۰۱}=\frac{۱۲۳}{۹۹۹۰۰}=\frac{۴۱}{۳۳۳۰۰}$$

بنابراین عدد داده شده برابر است با

$$۲+\frac{۵۶}{۱۰۰}+\frac{۴۱}{۳۳۳۰۰}=\frac{۸۵۲۸۹}{۳۳۳۰۰}$$

۲۸. داریم $\frac{۵۲۱}{۱۰۰۰}=۰/۵۲۱۰۰۰...$.

۲۹. سری داده شده عبارت است از

$$\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n t^n=۱-t+t^۲-t^۳+...$$

که یک سری هندسی با $a=۱$ و $r=-t$ است. چون بنابه فرض مسأله $|r|=|-t|=|t|<۱$ ، سری داده شده همگراست و

$$\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n t^n=\frac{a}{۱-r}=\frac{۱}{۱-(-t)}=\frac{۱}{۱+t}$$

۳۰. این سری عبارت است از

$$\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n t^{۲n}=۱-t^۲+t^۴-t^۶+...$$

که یک سری هندسی با $a=۱$ و $r=-t^۲$ است. چون بنابه فرض مسأله، $-۱<t<۱$ و در نتیجه $t^۲<۱$، پس $|r|=t^۲<۱$. در نتیجه سری داده شده همگراست و

$$\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n t^{۲n}=\frac{a}{۱-r}=\frac{۱}{۱-(-t^۲)}=\frac{۱}{۱+t^۲}$$

تمرینهای ۳.۲

۱. فرض می‌کنیم $f(x)=\frac{۱}{(x+۱)^۳}$. تابع f به ازای $x\geq ۱$ مثبت است و چون

$$f'(x)=\frac{۳}{(x+۱)^۴}<۰$$

پس f کاهشی نیز هست. همچنین، چون به ازای $x\geq ۱$، $f'(x)$ وجود دارد، f پیوسته است. حال

$$\int_{۱}^{\infty}f(x)dx=\lim_{t\to\infty}\int_{۱}^{t}(x+۱)^{-۳}dx=\lim_{t\to\infty}\left[-\frac{۱}{۲}(x+۱)^{-۲}\right]_{۱}^{t}$$

$$=-\frac{۱}{۲}\lim_{t\to\infty}\left[\frac{۱}{(t+۱)^۲}-\frac{۱}{۴}\right]=-\frac{۱}{۲}(-\frac{۱}{۴})=\frac{۱}{۸}$$

یعنی $\int_{۲}^{\infty}f(x)dx$ همگراست. در نتیجه بنابر آزمون انتگرال، سری

$$\sum_{n=۱}^{\infty}f(n)=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{(n+۱)^۳}$$

نیز همگراست.

همگرایی این سری را می‌توان با مقایسه با سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۳}$ نیز ثابت کرد. سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۳}$ که یک سری p با $p=۳>۱$ است، همگراست. چون به ازای $n\geq ۱$، $\frac{۱}{(n+۱)^۳}<\frac{۱}{n^۳}$، بنابر آزمون مقایسه نتیجه می‌گیریم که سری داده شده نیز همگراست.

۲. فرض می‌کنیم که $f(x)=\frac{۱}{(۳+۲x)^۲}$ و مانند حل تمرین ۱، آزمون انتگرال را به‌کار می‌بریم. البته این سری را می‌توانیم با سری p، $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۲}$ که همگراست مقایسه کنیم. چون به ازای $n\geq ۱$، $\frac{۱}{(۳+۲n)^۲}<\frac{۱}{n^۲}$، سری داده شده نیز همگراست.

۳. این سری را با سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^{۳/۲}}$ مقایسه می‌کنیم. این سری یک سری p با $p=\frac{۳}{۲}>۱$ است و

در نتیجه همگراست. چون به ازای $n \geq ۱$

$$\frac{۱}{\sqrt{n^{۳}+۲}} < \frac{۱}{\sqrt{n^{۳}}}$$

بنابر آزمون مقایسه، سری داده شده نیز همگراست.

۴. این سری را با سری (همساز) واگرای $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n}$ مقایسه می‌کنیم. توجه می‌کنیم که چون به ازای $n \geq ۱$، $\frac{۱}{n} < \frac{۱}{۴n+۵}$، آزمون مقایسهٔ اول به کار نمی‌آید. ولی چون

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{۱}{n}}{\frac{۱}{۴n+۵}} \lim_{t\to\infty} \frac{۴n+۵}{n} = ۴ \neq ۰$$

بنابر آزمون مقایسهٔ حدی، سری داده شده نیز واگراست.

حال با استفاده از آزمون انتگرال نیز این سری را حل می‌کنیم. فرض می‌کنیم $f(x) = \frac{۱}{۴x+۵}$. به آسانی بررسی می‌شود که تابع f در شرایط آزمون انتگرال صدق می‌کند. چون

$$\int_{۱}^{\infty} f(x)dx = \lim_{t\to\infty} \int_{۱}^{t} \frac{۱}{۴x+۵}dx$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left[\frac{۱}{۴} \quad \ln(۴x+۵) \right]_{۱}^{t}$$

$$= \frac{۱}{۴} \lim_{t\to\infty} (\ln(۴x+۵) - \ln ۹) = \infty$$

بنابر آزمون انتگرال، سری داده شده نیز واگراست.

۵. می‌خواهیم آزمون انتگرال را به کار ببریم. فرض کنیم $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. تابع f به ازای $x > ۱$ مثبت است. چون به ازای $x \geq ۳$

$$f'(x) = \frac{۱ - \ln x}{x^{۲}} < ۰$$

تابع f در بازهٔ $[۳, \infty)$ کاهشی است. همچنین، چون $f'(x)$ در بازهٔ $[۳, \infty)$ وجود دارد، f در این بازه پیوسته نیز هست. در نتیجه f در بازهٔ $[۳, \infty)$ در شرایط آزمون انتگرال صدق می‌کند. چون

$$\int_{۳}^{\infty} f(x)dx = \lim_{t\to\infty}\int_{۳}^{t}\frac{\ln x}{x}dx$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left[\frac{۱}{۲}(\ln x)^{۲}\right]_{۳}^{t}$$

$$= \frac{۱}{۲}\lim_{t\to\infty}\left[(\ln t)^{۲} - (\ln ۳)^{۲}\right] = \infty$$

(در محاسبهٔ این انتگرال از جانشینی $u=\ln x$ استفاده شده است). بنابر آزمون انتگرال، سری $\sum_{n=۳}^{\infty}\frac{\ln n}{n} = \sum_{n=۳}^{\infty} f(n)$ واگراست. از آنجا که حذف تعدادی متناهی از جمله‌های یک سری در همگرایی یا واگرایی آن مؤثر نیست، سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$ نیز واگراست.

۶. فرض می‌کنیم که $f(x)=\frac{۱}{x\sqrt{\ln x}}$. تابع f به ازای $x\geq ۲$ مثبت است. با مشتقگیری از f ملاحظه می‌کنیم که f به ازای $x\geq ۲$ پیوسته و کاهشی است. چون

$$\int_{۲}^{\infty} f(x)dx = \lim_{t\to\infty}\int_{۲}^{t}\frac{۱}{x\sqrt{\ln x}}dx$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left[\frac{۱}{۲}\sqrt{\ln x}\right]_{۲}^{t} \qquad \text{(جانشینی } u=\ln x\text{)}$$

$$= \frac{۱}{۲}\lim_{t\to\infty}(\sqrt{\ln t} - \sqrt{\ln ۲}) = \infty$$

در نتیجه، بنابر آزمون انتگرال، سری داده شده واگراست.

۷. سری داده شده را با سری هندسی $\sum_{n=۱}^{\infty}(\frac{۱}{e})^{n}$ مقایسه می‌کنیم. چون قدرنسبت سری دوم یعنی $r=\frac{۱}{e}$ کوچکتر از ۱ است، این سری همگراست. حال از آنجا که به ازای $n\geq ۱$،

$$\frac{۱}{e^{n^{۲}}} \leq \frac{۱}{e^{n}}$$

بنابر آزمون مقایسه، سری داده شده نیز همگراست.

۸. فرض کنیم $f(x)=\frac{\operatorname{arctg} x}{۱+x^{۲}}$ روشن است که به ازای $x\geq ۱$، $f(x)$ مثبت است. همچنین داریم

$$f'(x)=\frac{۱-۲x(\operatorname{arctg} x)}{(۱+x^۲)^۲}$$

به ازای $x\geq ۱$، $\operatorname{arctg} x \geq \frac{\pi}{۴}$ ، پس $۲x(\operatorname{arctg} x) \geq \frac{\pi}{۲}$ یا $-۲x(\operatorname{arctg} x) \leq -\frac{\pi}{۲}$ و در نتیجه $۱-۲x(\operatorname{arctg} x) \leq ۱-\frac{\pi}{۲} <۰$. بنابراین، به ازای $x\geq ۱$، $f'(x)<۰$ و تابع f کاهشی است. به علاوه، چون به ازای $x\geq ۱$، $f'(x)$ وجود دارد، f پیوسته است. حال با جانشینی $u=\operatorname{arctg} x$، $du=\frac{۱}{۱+x^۲}dx$ به دست می‌آوریم.

$$\int_۱^\infty f(x)dx=\lim_{t\to\infty}\int_۱^t \frac{\operatorname{arctg} x}{۱+x^۲}dx$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left[\frac{۱}{۲}\operatorname{arctg} x\right]_۱^t$$

$$=\frac{۱}{۲}\lim_{t\to\infty}(\operatorname{arctg} t-\frac{\pi}{۴})=\frac{۱}{۲}(\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۴})=\frac{\pi}{۸}$$

یعنی $\int_۲^\infty f(x)dx$ وجود دارد و در نتیجه، بنابر آزمون انتگرال، سری داده شده همگراست.

۹. چون

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{۱}{x}}{\frac{۱}{x}}=\lim_{t\to\infty}\frac{\sin t}{t}=۱$$

پس $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{۱}{n}}{\frac{۱}{n}}=۱\neq ۰$. از آنجا که سری همساز $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n}$ واگراست، بنابر آزمون مقایسهٔ حدی، سری داده شده نیز واگراست.

۱۰. فرض کنیم $f(x)=xe^{-x}$. روشن است که به ازای $x\geq ۱$، $f(x)$ مثبت است. با مشتقگیری از f ملاحظه می‌کنیم که f در $[۱, \infty)$ پیوسته و کاهشی است. بنابراین تابع f در شرایط آزمون انتگرال صدق می‌کند. حال به روش انتگرالگیری جزء به جزء به دست می‌آوریم

$$\int_۱^\infty f(x)dx=\lim_{t\to\infty}\int_۱^t xe^{-x}dx=\lim_{t\to\infty}\left[-e^{-x}(x+۱)\right]_۱^t$$

$$=-\lim_{t\to\infty}(\frac{t+۱}{e^t}-\frac{۲}{e})=-\lim_{t\to\infty}\frac{t+۱}{e^t}+\frac{۲}{e}$$

$$=۰+\frac{۲}{e}=\frac{۲}{e}$$ (دستور هوپیتال به کار رفته است)

در نتیجه، بنابر آزمون انتگرال، سری داده شده همگراست.

۱۱. روشن است که به ازای $n \geq ۱$، $\frac{۱}{n۳^n} \leq \frac{۱}{۳^n}$. از آنجا که سری هندسی $\sum (\frac{۱}{۳})^n$ همگراست، بنابر آزمون مقایسه، سری داده شده نیز همگراست.

۱۲. به ازای $n \geq ۱$، $\frac{n}{e^n} < \frac{n}{۱۰^n}$. چون بنابر حل تمرین ۱۰، سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{n}{e^n}$ همگراست، بنابر آزمون مقایسه، سری داده شده نیز همگراست.

۱۳. این سری را با سری $\sum_{n=۳}^{\infty} \frac{۴}{n^۲}$ مقایسه می‌کنیم. می‌دانیم که سری اخیر همگراست (چرا؟). حال چون $-۱ \leq \cos n \leq ۱$، به ازای $n \geq ۳$

$$\frac{۳+\cos n}{n^۲+۴} \leq \frac{۴}{n^۲+۴} < \frac{۴}{n^۲}$$

در نتیجه، بنابر آزمون مقایسه، سری داده شده نیز همگراست.

۱۴. این سری را با سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^۵}$، که یک سری p با $p=۵>۱$ و در نتیجه همگراست، مقایسه می‌کنیم. چون به ازای $n \geq ۱$،

$$\frac{۱}{n^۵+n^۲+۳} < \frac{۱}{n^۵}$$

سری داده شده نیز همگراست.

۱۵. این سری را با سری

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^۲} = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{\sqrt{n^۳}}$$

مقایسه می‌کنیم. چون

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{۱}{\sqrt{n^۳}}}{\frac{\sqrt{n}}{n^۲+۴}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^۲+۴}{n^۲} = ۱ \neq ۰$$

و از آنجا که سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{\sqrt{n^۳}}$ همگراست (چرا؟) بنابر آزمون مقایسهٔ حدی، سری داده شده نیز همگراست.

۱۶. با نگهداشتن $۳n^{۵}$ در صورت و $n^{۸}$ در مخرج جملهٔ عمومی سری داده شده، کسر $\frac{۳n^{۵}}{n^{۸}} = \frac{۳}{n^{۳}}$ به دست می‌آید. پس سری داده شده را با سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^{۳}}$ مقایسه می‌کنیم. چون سری اخیر یک سری p با $p = ۳ > ۱$ است، همگراست. حال، چون

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{۳n^{۵}+۳n^{۳}+۲}{n^{۸}-n^{۴}+۲}}{\frac{۱}{n^{۳}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{۳n^{۸}+۳n^{۶}+۲n^{۳}}{n^{۸}-n^{۴}+۲} = ۳ \neq ۰$$

بنابر آزمون مقایسهٔ حدی، سری داده شده نیز همگراست.

۱۷. چون

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\operatorname{arc}tg x}{x^{۲}}}{\frac{۱}{x^{۲}}} = \lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{۲}$$

پس

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\operatorname{arctg} n}{۲}}{\frac{۱}{n^{۲}}} = \frac{\pi}{۲} \neq ۰.$$

از آنجا که سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^{۲}}$ همگراست (چرا؟)، بنابر آزمون مقایسهٔ حدی، سری داده شده نیز همگراست.

۱۸. آزمون انتگرال را برای $f(x) = \frac{۱}{x(\ln x)^{۲}}$ به کار می‌بریم. نشان دهید که تابع f در شرایط آزمون انتگرال صدق می‌کند. حال داریم

$$\int_{۲}^{\infty} f(x)dx = \lim_{t\to\infty} \int_{۲}^{t} \frac{۱}{x(\ln x)^{۲}} dx$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left[-\frac{۱}{\ln x}\right]_{۲}^{t} \qquad (u = \ln x \text{ جانشینی})$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left(-\frac{۱}{\ln t} + \frac{۱}{\ln ۲}\right) = \frac{۱}{\ln ۲}$$

یعنی $\int_{۲}^{\infty} f(x)dx$ همگراست. در نتیجه بنابر آزمون انتگرال، سری داده شده نیز همگراست.

۱۹. این سری را با سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{n^3}}$ مقایسه می‌کنیم. سری اخیر همگراست (چرا؟). حال چون به ازای $n \geq 1$،

$$\frac{\ln n}{n^2} \leq \frac{2\sqrt{n}}{n^2} = \frac{2}{\sqrt{n^3}}$$

سری داده شده نیز همگراست.

توجه کنید که آزمون مقایسهٔ حدی را نیز می‌توان به کار برد. بنابر دستور هوپیتال، داریم

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{\ln x}{x^2}}{\frac{2\sqrt{x}}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{1/x}{1/\sqrt{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

در نتیجه، بنابر آزمون مقایسهٔ حدی، سری داده شده همگراست.

۲۰. باتوجه به راهنمایی تمرین ۱۹، به ازای $n \geq 2$ داریم $\ln n \leq 2\sqrt{n}$ و درنتیجه $(\ln n)^2 \leq 4n$. پس

$$\frac{1}{(\ln n)^2} \geq \frac{1}{4n}$$

حال چون سری همساز $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$، و در نتیجه سری $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{4n}$ واگراست، بنابر آزمون مقایسه، سری داده شده نیز واگراست.

۲۱. چون $2 = 2\ln e = \ln e^2 < \ln 9$، به ازای $n \geq 9$، $\ln n > 2$. از این رو به ازای $n > 9$،

$$\frac{1}{(\ln n)^n} < \frac{1}{2^n}$$

حال چون سری هندسی $\sum_{n=9}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ همگراست، بنابر آزمون مقایسه، سری $\sum_{n=9}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$ و در نتیجه سری داده شده نیز همگراست.

۲۲. داریم

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1/n}{\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1 \neq 0$$

این حد را به صورت زیر محاسبه کرده‌ایم: فرض می‌کنیم $y = x^{\frac{1}{x}}$. پس $\ln y = \frac{1}{x} \ln x$. حال بنابه دستور هوپیتال داریم

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

پس $\lim_{x\to\infty} y = e^0 = 1$ و در نتیجه $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. از این رو، بنابر آزمون مقایسهٔ حدی، چون $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ واگراست، سری داده شده نیز واگراست.

۲۳. چون $\frac{2}{n^3} = \frac{(2n)^3}{(2n^3)^2}$، سری داده شده را با سری همگرای $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ مقایسه می‌کنیم. از آنجا که

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(2n+1)^3}{(2n^3+1)^2}}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3(2n+1)^3}{(2n^3+1)^2} = 2 \neq 0$$

بنابر آزمون مقایسهٔ حدی، سری داده شده نیز همگراست.

۲۴. چون به ازای $n \geq 1$، $\frac{1}{n^n} \leq \frac{1}{n^2}$ و از آنجا که سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ همگراست، بنابر آزمون مقایسه، سری داده شده نیز همگراست.

۲۵. چون $\cos n$ بین ۱ و ۱- است، به‌ازای $n \geq 1$ داریم $3^n - \cos n > 2^n$. ازاین‌رو به ازای $n \geq 1$، $\frac{1}{3^n - \cos n} < \frac{1}{2^n}$. حال چون سری هندسی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ همگراست، بنابر آزمون مقایسه، سری داده شده نیز همگراست.

۲۶. چون $\frac{5}{3^n} = \frac{5n}{n.3^n}$، سری داده شده را با سری هندسی همگرای $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ مقایسه می‌کنیم. چون

$$\lim \frac{\frac{5n+3}{n.3^n}}{\frac{1}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5n+3}{n} = 5 \neq 0$$

بنابر آزمون مقایسهٔ حدی، سری داده شده همگراست.

۲۷. چون به ازای $n \geq 1$، $\frac{|\sin n|}{n^3} \leq \frac{1}{n^3}$ و سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ همگراست (چرا؟)، بنابر آزمون مقایسه، سری داده شده نیز همگراست.

۲۸. چون سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ یک سری p با $p = \frac{1}{2} < 1$ است، واگراست. حال به ازای $n \geq 1$ داریم

$$\frac{|\operatorname{cosec} n|}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

پس بنابر آزمون مقایسه، سری داده شده نیز واگراست.

۲۹. چون سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}}$ همگراست (چرا؟) و به ازای $n \geq 1$،

$$\frac{\cos^2 n}{\sqrt{n^3}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^3}}$$

بنابر آزمون مقایسه، سری داده شده نیز همگراست.

۳۰. فرض می‌کنیم که $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^p}$. در این صورت اگر $x \geq 2$ آنگاه

$$f'(x) = -\frac{(\ln x)^p + p(\ln x)^{p-1}}{x^2(\ln x)^{2p}} < 0$$

بنابراین تابع f به ازای $x \geq 3$ مثبت، کاهشی، و پیوسته است. اگر $p \neq 1$ آنگاه

$$\begin{aligned}\int_2^{\infty} f(x)dx &= \lim_{t\to\infty} \int_2^t \frac{1}{x(\ln x)^p}\, dx \\ &= \lim_{t\to\infty} \left[\frac{-1}{(p-1)(\ln x)^{p-1}}\right]_2^t \\ &= \lim_{t\to\infty} \left[\frac{-1}{(p-1)(\ln t)^{p-1}} + \frac{-1}{(p-1)(\ln 2)^{p-1}}\right]\end{aligned}$$

چون به ازای $p > 1$، $\lim_{t\to\infty} \frac{-1}{(p-1)(\ln t)^{p-1}} = 0$ و به ازای $p < 1$،

$$\lim_{t\to\infty} \frac{-1}{(p-1)(\ln t)^{p-1}} = \lim_{t\to\infty} \frac{(\ln t)^{1-p}}{1-p} = \infty$$

پس $\int_2^{\infty} f(x)dx$ به ازای $p > 1$ همگرا و به ازای $p < 1$ واگراست. در نتیجه بنابر آزمون انتگرال، سری داده شده، به ازای $p > 1$ همگرا و به ازای $p < 1$ واگراست. حال فرض کنیم $p = 1$. دراین صورت داریم

$$\int_{۲}^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{t\to\infty} \left[\ln(\ln x)\right]_{۲}^{t}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left[\ln(\ln t) - \ln(\ln ۲)\right] = \infty$$

یعنی سری داده شده به ازای $p = ۱$ نیز واگراست.

تمرینهای ۴.۲

۱. چون $\lim_{n\to\infty} \frac{۱}{۲n+۱} = ۰$ و به ازای هر $n \geq ۱$،

$$\frac{۱}{۲(n+۱)+۱} < \frac{۱}{۲n+۱}$$

دنبالهٔ $\left(\frac{۱}{۲n+۱}\right)$ کاهشی است و در نتیجه بنابر آزمون سریهای متناوب، سری داده شده همگراست.

۲. چون $\lim_{n\to\infty} \frac{۲n+۱}{۵n+۱} = \frac{۲}{۵} \neq ۰$ ، بنابر آزمون واگرایی، سری داده شده واگراست.

۳. چون $\lim_{n\to\infty} \frac{n+۲}{n^{۲}+۳n+۵} = ۰$ و به ازای $n \geq ۱$،

$$\frac{a_{n+۱}}{a_n} = \frac{\frac{n+۳}{(n+۱)^{۲}+۳(n+۱)+۵}}{\frac{n+۲}{n^{۲}+۳n+۵}} = \frac{n^{۳}+۶n^{۲}+۱۴n+۱۵}{n^{۳}+۷n^{۲}+۱۹n+۱۸} < ۱$$

دنبالهٔ $\left(\frac{۲n+۱}{۵n+۱}\right)$ کاهشی است و در نتیجه بنابر آزمون سریهای متناوب، سری داده شده همگراست.

۴. داریم $\lim_{n\to\infty} \frac{۱}{\sqrt{۲n+۱}} = ۰$. روشن است که به ازای هر $n \geq ۱$،

$$a_{n+۱} = \frac{۱}{\sqrt{۲(n+۱)+۱}} = \frac{۱}{\sqrt{۲n+۳}} < \frac{۱}{\sqrt{۲n+۱}} = a_n$$

در نتیجه سری داده شده بنابر آزمون سریهای متناوب همگراست.

۵. فرض می‌کنیم که $f(x) = \frac{x}{\ln x}$. بنابه دستور هوپیتال، داریم

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\ln x} = \lim_{x\to\infty} \frac{۱}{\frac{۱}{x}} = \lim_{x\to\infty} x = \infty$$

پس $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\ln n} = \infty$ و در نتیجه سری داده شده واگراست.

۶. فرض می‌کنیم $f(x)=\frac{e^x}{x^۴}$ و با چهاربار به کار بردن دستور هوپیتال نتیجه می‌گیریم که $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^۴}=\infty$. در نتیجه $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^x}{n^۴}\neq ۰$ و سری داده شده واگراست.

۷. فرض می‌کنیم که $f(x)=\frac{\ln x}{x}$. بنابه دستور هوپیتال، داریم

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{۱}{x}}{۱}=۰$$

همچنین چون به ازای $x\geq ۳$

$$f'(x)=\frac{۱-\ln x}{x^۲}<۰$$

پس به ازای $x\geq ۳$، $f(x)$کاهشی است. یعنی به ازای هر $n\geq ۳$، دنبالهٔ $\left(\frac{\ln n}{n}\right)$کاهشی است.

درنتیجه، بنابر آزمون سریهای متناوب، سری $\sum\limits_{n=۳}^{\infty}(-۱)^n\frac{\ln n}{n}$ و بنابراین سری داده شده همگراست.

۸. به آسانی دیده می‌شود که $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[۳]{n}}{۲n+۵}=۰$ ، حال فرض می‌کنیم که $f(x)=\frac{\sqrt[۳]{x}}{۲x+۵}$ داریم

$$f'(x)=\frac{\frac{۱}{۳}x^{-\frac{۲}{۳}}(۲x+۵)-۲\sqrt[۳]{x}}{(۲x+۵)^۲}=\frac{۵-۴x}{۳(۲x+۵)^۲}$$

که به ازای $x\geq ۲$ منفی است. در نتیجه دنبالهٔ $\left(\frac{\sqrt[۳]{n}}{۲n+۵}\right)$ کاهشی است. بنابراین سری متناوب $\sum\limits_{n=۲}^{\infty}(-۱)^n\frac{\sqrt[۳]{n}}{۲n+۵}$ و در نتیجه سری داده شده همگراست.

۹. قرار می‌دهیم $f(x)=\frac{۱+۴^x}{۱+۳^x}$. بنابه دستور هوپیتال داریم

$$\lim_{x\to\infty}\frac{۱+۴^x}{۱+۳^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln ۴)۴^x}{(\ln ۳)۳^x}$$
$$=\frac{\ln ۴}{\ln ۳}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{۴}{۳}\right)^x=\infty$$

در نتیجه سری داده شده واگراست.

۱۰. چون بنابه دستور هوپیتال

$$\lim_{x\to\infty}\frac{۳^x}{x^۲}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln ۳)۳^x}{۲x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln ۳)^۲ ۳^x}{۲}=\infty$$

سری داده شده واگراست.

۱۱. به آسانی می‌توان نشان داد که سری متناوب داده شده همگراست. بنابه قضیهٔ ۶.۴.۲، مجموع این سری با خطای کمتر از ۰/۰۱ برابر S_n است اگر $a_{n+۱}<۰/۰۱$، یعنی اگر

$$a_{n+۱}=\frac{۱}{[۲(n+۱)]\,!}=\frac{۱}{(۲n+۲)!}<۰/۰۱$$

اگر قرار دهیم $n=۲$ آنگاه $a_۳=\frac{۱}{۶!}=\frac{۱}{۷۲۰}=۰/۰۰۱<۰/۰۱$ و در نتیجه تقریب خواسته شده برابر است با

$$\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n+۱}\frac{۱}{(۲n)!}\approx S_۲=\frac{۱}{۲!}-\frac{۱}{۴!}\approx ۰/۴۵۸۳$$

۱۲. سری متناوب داده شده همگراست. مجموع آن با خطای کمتر از ۰/۰۱ برابر با S_n است اگر

$$a_{n+۱}=\frac{۱}{(n+۱)^۵}<۰/۰۱$$

اگر قرار دهیم $n=۲$، تقریب خواسته شده برابر است با

$$S_۲=\frac{۱}{۱^۵}-\frac{۱}{۲^۵}=۱-\frac{۱}{۳۲}\approx ۰/۹۶۸۷۵$$

۱۳. تقریب خواسته شده برابر است با S_n اگر

$$a_{n+۱}=\frac{۸}{۱۰^{n+۱}+۱}<۰/۰۱$$

که معادل است با

$$\frac{۱۰^{n+۱}+۱}{۸}>۱۰۰ \quad \text{یا} \quad ۱۰^{n+۱}>۷۹۹$$

اگر قرار دهیم $n=۲$ تقریب موردنظر برابر است با

$$S_۲ = \frac{۸}{۱۰+۱} - \frac{۸}{۱۰۰+۱} \approx ۰/۶۴۸$$

۱۴. در اینجا تقریب خواسته شده برابر با S_n است اگر

$$a_{n+۱} = \frac{n+۱}{۵^n} < ۰/۰۱$$

اگر قرار دهیم $n=۳$ تقریب موردنظر برابر است با

$$S_۳ = \frac{۲}{۵} - \frac{۳}{۲۵} + \frac{۴}{۱۲۵} \approx ۰/۳۱۲$$

تمرینهای ۵.۲

۱. با استفاده از آزمون انتگرال می‌توان نشان داد که سری

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \left| (-۱)^{n+۱} \frac{۱}{۳n+۲} \right| = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{۳n+۲}$$

واگراست. از طرفی بنابر آزمون سریهای متناوب، سری متناوب داده شده همگراست. در نتیجه سری داده شده همگرای مشروط است.

۲. چون

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+۱}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{۲^n(۳n+۴)}{۲^{n+۱}(۳n+۱)} = \frac{۱}{۲} < ۱$$

بنابر آزمون نسبت، سری داده شده همگرای مطلق است.

۳. داریم

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+۱}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n۵^{n+۱}۳^{n+۱}}{(n+۱)۵^n ۳^{n+۲}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{۵n}{۳(n+۱)} = \frac{۵}{۳} > ۱$$

در نتیجه، بنابر آزمون نسبت، سری داده شده واگراست.

۴. در اینجا

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+۱}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+۱}{۳^{n+۱}} \cdot \frac{۳^n}{n} = \frac{۱}{۳} < ۱$$

و در نتیجه، بنابر آزمون نسبت، سری داده شده همگرای مطلق است.

۵. چون

$$\left|\frac{\sin n}{n^{2}+1}\right| = \frac{|\sin n|}{n^{2}+1} \le \frac{1}{n^{2}+1} < \frac{1}{n^{2}}$$

و سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2}}$ همگراست (چرا؟)، بنابر آزمون مقایسه، سری داده شده همگرای مطلق است.

۶. بنابر حل تمرین ۳۰ از بخش ۳.۲، یا به طور مستقیم با استفاده از آزمون انتگرال، سری $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{2}}$ همگراست. در نتیجه سری داده شده همگرای مطلق است.

۷. فرض می‌کنیم که $y = \frac{1}{x^{\frac{1}{x}}} = x^{-\frac{1}{x}}$. در نتیجه $\ln y = -\frac{1}{x}\ln x$. چون، بنابه دستور هوپیتال،

$$\lim_{x\to\infty} -\frac{1}{x}\ln x = -\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} = -\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

پس $\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty} x^{-\frac{1}{x}} = e^{0} = 1 \neq 0$. در نتیجه، بنابر آزمون واگرایی، سری داده شده واگراست.

۸. قرار می‌دهیم $y = (\ln x)^{-\frac{1}{x}}$ و مشابه حل تمرین ۷ عمل می‌کنیم. نتیجه می‌گیریم که $\lim_{x\to\infty} (\ln x)^{-\frac{1}{x}} = 1 \neq 0$. در نتیجه، بنابر آزمون واگرایی، سری داده شده واگراست.

۹. چون به ازای $n \ge 1$، $\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{n^{2}+2n} < \frac{1}{n^{2}}$، و سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2}}$ همگراست، سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ نیز همگراست. یعنی سری داده شده همگرای مطلق است.

۱۰. آزمون نسبت را به کار می‌بریم. داریم

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1.3.5\ldots(2n+1)(2n+3)}{2.5.8\ldots(3n+2)(3n+5)}\cdot\frac{2.5.8\ldots(3n+2)}{1.3.5\ldots(2n+1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{3n+5} = \frac{2}{3} < 1$$

در نتیجه سری داده شده همگرای مطلق است.

۱۱. چون

$$\left|\frac{\cos n}{n^{3}}\right| = \frac{|\cos n|}{n^{3}} \le \frac{1}{n^{3}}$$

و سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3}}$ همگراست (چرا؟)، بنابر آزمون مقایسه، سری داده شده همگرای مطلق است.

۱۲. آزمون نسبت را به کار می‌بریم. چون

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{2^{n+2}}\cdot\frac{2^{n+1}}{n!}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2} = \infty$$

سری داده شده واگراست.

۱۳. چون به ازای هر عدد طبیعی n، $\sin \pi n = 0$، سری داده شده یک سری صفر است و در نتیجه همگرا (ی مطلق) است.

۱۴. چون به ازای هر $n\geq 1$، $|1-2\sin n|\leq 3$،

$$\left|(-1)^n\frac{1-2\sin n}{n^3}\right| \leq \frac{3}{n^3}$$

چون سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n^3}$ همگراست (چرا؟)، سری داده شده همگرای مطلق است.

۱۵. در اینجا داریم

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^n(n+1)}{(n+1)^n(n+1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = e^{-1} = \frac{1}{e} < 1$$

بنابراین، با توجه به نتیجهٔ ۱۷.۵.۲، $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n} = 0$

۱۶. داریم

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+2}}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{x^{2n}}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^2.n^n}{(n+1)^n(n+1)}\right|$$

$$= x^2\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\cdot\frac{1}{n+1}\right]$$

چون

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}=e^{-1}$$

و $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$، پس

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}\cdot\frac{1}{n+1}=0$$

و در نتیجه به ازای هر x،

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=0<1$$

بنابراین، باتوجه به نتیجهٔ ۱۷.۵.۲ ، به ازای هر x

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n}}{n^n}=0$$

۱۷. چون

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^n}{x^n}\right|=\frac{|x|}{3}$$

بنابر نتیجهٔ ۱۷.۵.۲ ، $\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{3^n}=0$ اگر داشته باشیم

$$\frac{|x|}{3}<1 \quad \text{یا} \quad |x|<3$$

۱۸. چون

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)^2}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{(n+1)^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)^2}{(n+1)^3}=0<1$$

بنابر نتیجهٔ ۱۷.۵.۲، $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n!}=0$

تمرینهای فصل ۳

تمرینهای ۱.۳

۱. داریم

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{n+5}\cdot\frac{n+4}{x^n}\right|=|x|$$

در نتیجه سری داده شده همگرا (ی مطلق) است اگر $|x|<1$ و واگراست اگر $|x|>1$. یعنی شعاع همگرایی این سری برابر با $r=1$ است. همگرایی سری را به ازای مقادیر $x=\pm1$ می‌آزماییم. اگر $x=1$ آنگاه

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+4}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\dots$$

که از حذف سه جملهٔ اول سری همساز $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ به دست می‌آید. در نتیجه، چون سری همساز واگراست، این سری نیز واگراست. اگر $x=-1$ آنگاه

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+4}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+4}$$

که از حذف سه جملهٔ اول سری همساز متناوب به دست می‌آید و در نتیجه همگراست. بنابراین بازهٔ همگرایی این سری داده شده برابر با $[-1,1)$ است.

۲. داریم

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\cdot\frac{n^2}{x^n}\right|=|x|$$

در نتیجه سری داده شده همگرای مطلق است اگر $|x|<1$ و واگراست اگر $|x|>1$. یعنی شعاع همگرایی آن برابر با $r=1$ است. حال همگرایی سری را به ازای مقادیر انتهایی یعنی $x=\pm1$

می‌آزماییم. اگر $x = ۱$ آنگاه

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{x^n}{n^۲} = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^۲}$$

که یک سری p با $p = ۲ > ۱$ و در نتیجه همگراست. اگر $x = -۱$ آنگاه

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{x^n}{n^۲} = \sum_{n=۱}^{\infty} (-۱)^n \frac{۱}{n^۲}$$

چون سری قدر مطلقهای جمله‌های این سری یعنی سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^۲}$ همگراست، این سری همگرا (ی مطلق) است. بنابراین بازهٔ همگرایی سری توانی داده شده برابر با $[-۱, ۱]$ است.

۳. داریم

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+۱)^۲ x^{n+۱}}{۲^{n+۱}} \cdot \frac{۲^n}{n^۲ x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+۱)^۲ . |x|}{n^۲ . ۲} = \frac{|x|}{۲}$$

در نتیجه سری داده شده همگرای مطلق است اگر $\frac{|x|}{۲} < ۱$ یا $|x| < ۲$ و واگراست اگر $|x| > ۲$.
پس شعاع همگرایی این سری برابر است با $r = ۲$. حال همگرایی این سری را به ازای $x = \pm ۲$ می‌آزماییم. با قرار دادن این مقادیر x در سری توانی داده شده، سریهای

$$\sum_{n=۱}^{\infty} (-۱)^n n^۲ \quad , \quad \sum_{n=۱}^{\infty} n^۲$$

به دست می‌آیند. چون جمله‌های عمومی این دو سری به صفر میل نمی‌کنند، هر دو سری واگرا هستند. بنابراین بازهٔ همگرایی سری توانی داده شده برابر با $(-۲, ۲)$ است.

۴. داریم

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+۱}}{\sqrt{n+۱}\ ۳^{n+۱}} \cdot \frac{\sqrt{n}\ ۳^n}{x^n} \right| = \frac{|x|}{۳}$$

پس سری داده شده همگرای مطلق است اگر $\frac{|x|}{۳} < ۱$ یا $|x| < ۳$ و واگراست اگر $|x| > ۳$.
درنتیجه شعاع همگرایی این سری توانی برابر با $r = ۳$ است. حال مقادیر $x = ۳$ و $x = -۳$ را درنظر می‌گیریم. اگر $x = ۳$ آنگاه

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}\ ۳^n} = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{\sqrt{n}}$$

که واگراست (چرا؟). اگر $x = -۳$ آنگاه

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}\ ۳^n} = \sum_{n=۱}^{\infty} (-۱)^n \frac{۱}{\sqrt{n}}$$

که بنابر آزمون سریهای متناوب همگراست. بنابراین بازهٔ همگرایی سری توانی داده شده برابر با $(-3, 3)$ است.

۵. داریم

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n}{(-1)^{n-1}}\cdot\frac{x^{n+1}}{\sqrt{n+1}}\cdot\frac{\sqrt{n}}{x^n}\right| = |x|$$

در نتیجه سری داده شده همگرای مطلق است اگر $|x|<1$ و واگراست اگر $|x|>1$. یعنی شعاع همگرایی این سری برابر با $r=1$ است. حال همگرایی سری را به ازای $x=\pm 1$ می‌آزماییم. اگر $x=1$ آنگاه

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

که بنابر آزمون سریهای متناوب همگراست. اگر $x=-1$ را در نظر بگیریم، داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

که واگراست (چرا؟). در نتیجه بازهٔ همگرایی سری توانی داده شده برابر با $(-1, 1]$ است.

۶. داریم

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{(-1)^n}\cdot\frac{x^{2(n+1)}}{n+2}\cdot\frac{n+1}{x^{2n}}\right| = |x^2| = x^2$$

در نتیجه سری داده شده همگرای مطلق است اگر $x^2<1$ یا $-1<x<1$ و واگراست اگر $x^2>1$ یا $|x|>1$. حال همگرایی سری را به ازای مقادیر انتهایی $x=\pm 1$ می‌آزماییم. اگر $x=1$ یا $x=-1$ آنگاه

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}$$

که سری همساز متناوب است و در نتیجه همگراست. بنابراین بازهٔ همگرایی سری توانی داده شده برابر است با $[-1, 1]$.

۷. چون

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!\,x^{n+1}}{100^{n+1}}\cdot\frac{100^n}{n!\,x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)\,x}{100}\right| = \infty$$

سری توانی داده شده به ازای $x=0$ همگرا و در غیر این صورت واگراست.

۸. داریم

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-۱)^{n+۱}}{(-۱)^{n}}\cdot\frac{x^{n+۲}}{۲(n+۱)-۱}\cdot\frac{۲n-۱}{x^{n+۱}}\right| = \lim_{x\to\infty}\frac{۲n-۱}{۲n+۱}\,|x| = |x|$$

در نتیجه سری داده شده همگرای مطلق است اگر $|x|<۱$ و واگراست اگر $|x|>۱$. حال مقادیر $x=\pm۱$ را در نظر می‌گیریم. اگر $x=۱$ آنگاه

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n}}{۲n-۱}x^{n+۱} = \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n}}{۲n-۱}$$

که بنابر آزمون سریهای متناوب همگراست. اگر $x=-۱$ آنگاه

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n}}{۲n-۱}x^{n+۱} = \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n}}{۲n-۱}(-۱)$$
$$= -\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{۲n-۱}$$

چون به ازای هر $n\geq۱$، $\frac{۱}{۲n-۱}\geq\frac{۱}{۲n}$ و سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{۲n}=\frac{۱}{۲}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n}$ واگراست، سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{۲n-۱}$ و در نتیجه سری $\sum-\frac{۱}{۲n-۱}$ نیز واگراست. بنابراین بازهٔ همگرایی سری توانی داده شده برابر با $(-۱,۱]$ است.

۹. در اینجا داریم

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{۲(n+۱)+۱}}{(-۴)^{n+۱}}\cdot\frac{(-۴)^{n}}{x^{۲n+۱}}\right| = \frac{x^{۲}}{۴}$$

در نتیجه سری داده شده همگرای مطلق است اگر $\frac{x^{۲}}{۴}<۱$ یا $x^{۲}<۴$ که معادل است با $-۲<x<۲$، و واگراست اگر $|x|>۲$. پس شعاع همگرایی این سری برابر است با $r=۲$. حال همگرایی سری را به ازای مقادیر $x=\pm۲$ می‌آزماییم. اگر $x=۲$ یا $x=-۲$ آنگاه به ترتیب سریهای زیر به دست می‌آیند:

$$\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{x^{۲n+۱}}{(-۴)^{n}} = \sum_{n=۰}^{\infty}\frac{۲^{۲n+۱}}{(-۴)^{n}} = \sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^{n}.۲$$

$$\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{x^{۲n+۱}}{(-۴)^{n}} = \sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(-۲)^{۲n+۱}}{(-۴)^{n}} = -\sum_{n=۰}^{\infty}۲$$

این دو سری واگرا هستند زیرا حد جملهٔ عمومی آنها صفر نیست. در نتیجه بازهٔ همگرایی سری توانی داده شده برابر با $(-2, 2)$ است.

۱۰. آزمون ریشه را به کار می‌بریم. به ازای هر x داریم

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n x^n}{n^n}\right|} = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n} = 0<1$$

در نتیجه سری توانی داده شده به ازای هر مقدار x همگرا (ی مطلق) است. یعنی بازهٔ همگرایی این سری برابر با $(-\infty, \infty)$ است.

۱۱. آزمون نسبت را به کار می‌بریم. چون

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}x^{2(n+1)}}{[2(n+1)]!}\cdot\frac{(2n)!}{2^n x^{2n}}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2(2n)!}{(2n+2)!}x^2\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2(2n)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!}x^2\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2x^2}{(2n+2)(2n+1)}\right| = 0<1\end{aligned}$$

سری توانی داده شده به ازای هر x همگرا (ی مطلق) است. یعنی بازهٔ همگرایی آن برابر با $(-\infty, \infty)$ است.

۱۲. چون

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!\,x^{n+1}}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n)!}{n!\,x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{(2n+2)(2n+1)}x\right| = 0<1$$

سری داده شده به ازای هر x همگرای مطلق است. یعنی بازهٔ همگرایی این سری $(-\infty, \infty)$ است.

۱۳. در اینجا داریم

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^{2(n+1)}(x-2)^{n+1}}{n+2}\cdot\frac{n+1}{3^{2n}(x-2)^n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{9(n+1)}{n+2}(x-2)\right| \\ &= 9\,|x-2|\end{aligned}$$

در نتیجه سری توانی داده شده همگرای مطلق است اگر $9|x-2|<1$ یا $|x-2|<\frac{1}{9}$ که معادل است با $\frac{17}{9}<x<\frac{19}{9}$، و واگراست اگر $|x-2|>\frac{1}{9}$. بنابراین شعاع همگرایی این سری برابر است با $r=\frac{1}{9}$. حال همگرایی سری را به ازای مقادیر انتهایی $x=\frac{19}{9}$ و $x=\frac{17}{9}$ می‌آزماییم.

اگر $x = \frac{۱۹}{۹}$ آنگاه

$$\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۳^{۲n}(x-۲)^n}{n+۱} = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۳^{۲n}.۳^{-۲n}}{n+۱} = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۱}{n+۱}$$

که واگراست (چرا؟). اگر $x = \frac{۱۷}{۹}$ آنگاه

$$\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۳^{۲n}(x-۲)^n}{n+۱} = \sum_{n=۰}^{\infty} (-۱)^n \frac{۱}{n+۱}$$

که همگراست (چرا؟). بنابراین بازهٔ همگرایی سری توانی داده شده برابر با $(\frac{۱۹}{۹}$ و $\frac{۱۷}{۹}]$ است.

۱۴. چون

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{۲^{n+۱}x^{n+۲}}{(n+۱)۳^{n+۳}} \cdot \frac{n\cdot ۳^{n+۲}}{۲^n\cdot x^{n+۱}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{۲n}{۳(n+۱)} x \right| = \frac{۲}{۳}\,|x|$$

سری داده شده همگرای مطلق است اگر $۱ > |x| \frac{۲}{۳}$ یا $\frac{۳}{۲} > |x|$، و واگراست اگر $\frac{۳}{۲} < |x|$. در نتیجه شعاع همگرایی این سری برابر با $r = \frac{۳}{۲}$ است. حال مقادیر $x = \pm\frac{۳}{۲}$ را در نظر می‌گیریم. اگر $x = \frac{۳}{۲}$ آنگاه

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۲^n}{n\cdot ۳^{n+۲}} x^{n+۱} = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۲^n}{n\cdot ۳^{n+۲}} (\frac{۳}{۲})^{n+۱}$$

$$= \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۲^n.۳^{n+۱}}{۲^{n+۱}.n.۳^{n+۲}} = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{۶n}$$

که واگراست. اگر $x = -\frac{۳}{۲}$ آنگاه سری $\sum_{n=۱}^{\infty} (-۱)^n \frac{۱}{۶n}$ بـه دست مـی‌آید کـه، بـنابر آزمـون سریهای متناوب، همگراست. در نتیجه بازهٔ همگرایی سری توانی داده شده برابر با $(\frac{۳}{۲}$ و $-\frac{۳}{۲}]$ است.

۱۵. در اینجا داریم

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+۱)^۲(x+۴)^{n+۱}}{۲^۳(n+۱)} \cdot \frac{۲^{۳n}}{n^۲(x+۴)^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+۱)^۲}{n^۲} \cdot \frac{x+۴}{۸} \right|$$

$$= \frac{|x+۴|}{۸}$$

در نتیجه سری داده شده همگرای مطلق است اگر $1 > \frac{|x+4|}{8}$ یا $|x+4|<8$ که معادل است با $-12< x<4$، و واگراست اگر $|x+4|>8$. بنابراین شعاع همگرایی این سری برابر با $r = 8$ است. حال همگرایی سری را به ازای مقادیر انتهایی $x = 4$ و $x = -12$ می‌آزماییم. اگر $x = 4$ یا $x = -12$ آنگاه به ترتیب سریهای زیر را داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 (x+4)^n}{2^{3n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 \cdot 8^n}{2^{3n}} = \sum_{n=0}^{\infty} n^2$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 (x+4)^n}{2^{3n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 (-8)^n}{2^{3n}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot n^2$$

چون حد جملهٔ عمومی هر دو سری ناصفر است، هر دو واگرا هستند. بنابراین بازهٔ همگرایی سری توانی داده شده برابر با $(-12 \text{ و } 4)$ است.

۱۶. داریم

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\ln(n+1) \cdot x^{n+1}}{\ln n \cdot x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\ln(n+1)}{\ln n} x \right| = |x|$$

زیرا بنابه دستور هوپیتال

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+1} = 1$$

در نتیجه سری داده شده همگرای مطلق است اگر $|x|<1$ و واگراست اگر $|x|>1$. حال مقادیر $x = \pm 1$ را در نظر می‌گیریم. اگر این مقادیر را در سری قرار دهیم سریهای

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \ln n \quad \text{و} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \ln n$$

به دست می‌آیند که هر دو واگرا هستند (چرا؟). بنابراین بازهٔ همگرایی سری توانی داده شده $(-1,1)$ است.

۱۷. چون

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\ln(n+1) \cdot (x-e)^{n+1}}{e^{n+1}} \cdot \frac{e^n}{\ln n \cdot (x-e)^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \frac{|x-e|}{e}$$

$$= \frac{|x-e|}{e}$$

سری داده شده به ازای $\frac{|x-e|}{e}<1$ یا $|x-e|<e$ که معادل است با $0<x<2e$ همگرای مطلق است و به ازای $|x-e|>e$ واگراست. پس شعاع همگرایی سری برابر با $r=e$ است. حال مقادیر $x=2e$ و $x=0$ را در نظر می‌گیریم. اگر $x=2e$ آنگاه

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{e^n}(x-e)^n=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n.e^n}{e^n}=\sum_{n=2}^{\infty}\ln n$$

واگر $x=0$ آنگاه سری توانی داده شده‌به صورت $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\ln n$ به دست می‌آید. این دو سری واگرا هستند (چرا؟). در نتیجه بازهٔ همگرایی سری توانی داده شده برابر با $(0,2e)$ است.

۱۸. داریم

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\ln(n+1)\cdot x^{n+1}}{(n+1)^2}\cdot\frac{n^2}{\ln n\cdot x^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\cdot\frac{n^2}{(n+1)^2}\right|$$
$$=|x|$$

در نتیجه این سری همگرایی مطلق است اگر $|x|<1$ و واگراست اگر $|x|>1$. به ازای $x=1$ داریم

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln 2}{n^2}x^n=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln 2}{n^2}$$

که، با مقایسه با سری همگرای $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{\sqrt{n^3}}$، همگراست (تمرین ۱۹ از بخش ۳.۲ را ببینید). به همین ترتیب، با قراردادن $x=-1$ در سری توانی داده شده، سری همگرای $\sum(-1)^n\frac{\ln n}{n^2}$ به دست می‌آید (چرا این سری همگراست؟) بنابراین بازهٔ همگرایی سری توانی داده شده برابر با $[-1\ و\ 1]$ است.

۱۹. چون

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{(-1)^n}\cdot\frac{(2x-1)^{n+1}}{(n+1).6^{n+1}}\cdot\frac{n.6^n}{(2x-1)^n}\right|=\frac{|2x-1|}{6}$$

سری داده شده همگرای مطلق است اگر $|2x-1|<6$ یا $-\frac{5}{2}<x<\frac{7}{2}$ و واگراست اگر $|2x-1|>6$. شعاع همگرایی این سری $r=3$ است. حال مقادیر $x=\frac{7}{2}$ و $x=-\frac{5}{2}$ را در نظر می‌گیریم. اگر $x=\frac{7}{2}$ آنگاه

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x-1)^n}{n\cdot6^n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{6^n}{n\cdot6^n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$$

که همگراست (چرا؟). اگر $x = -\frac{۵}{۲}$ آنگاه

$$\sum_{n=۱}^{\infty} -(-۱)^n \frac{(۲x-۱)^n}{n.۶^n} = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{۱n}$$

که واگراست. در نتیجه بازهٔ همگرایی سری توانی داده شده برابر است با $[\frac{۷}{۲}، -\frac{۵}{۲})$.

۲۰. آزمون ریشه را به کار می‌بریم. چون بنابر مثال ۹.۱.۲ و حل آن، اگر $x \neq \pm ۱$ آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x^{n^۲}|} = \lim_{n\to\infty} |x|^n = \begin{cases} ۰ & , \ |x| < ۱ \text{ اگر } \\ \infty & , \ |x| > ۱ \text{ اگر } \end{cases}$$

پس، بنابر آزمون ریشه، سری داده شده به ازای $|x| < ۱$ همگرای مطلق است و اگر $|x| > ۱$ واگراست. اگر مقادیر $x = \pm ۱$ را در سری قرار دهیم. سری $\sum_{n=۰}^{\infty} ۱$ بـــه دست مـــی‌آید کـــه واگراست. بنابراین بازهٔ همگرایی سری توانی داده شده $(۱ \text{ و } -۱)$ است.

تمرینهای ۲.۳

۱. فرض کنیم

$$f(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{n+۱} x^n$$
$$= ۱ - \frac{۱}{۲}x + \frac{۱}{۳}x^۲ - \dots + \frac{(-۱)^n}{n+۱}x^n + \dots$$

با مشتقگیری و انتگرالگیری جمله به جمله از این سری، داریم

$$f'(x) = -\frac{۱}{۲} + \frac{۲}{۳}x - \frac{۳}{۴}x^۲ + \dots + (-۱)^n \frac{n}{n+۱}x^{n-۱} + \dots$$
$$= \sum_{n=۱}^{\infty} (-۱)^n \frac{n}{n+۱} x^{n-۱}$$

$$\int_۰^x f(t)\,dt = x - \frac{۱}{۲}\,\frac{x^۲}{۲} + \frac{۱}{۳}\,\frac{x^۳}{۳} - \dots + \frac{(-۱)^n}{n+۱}\cdot\frac{۱}{n+۱}x^{n+۱} + \dots$$
$$= \sum_{n=۰}^{\infty} (-۱)^n \frac{۱}{(n+۱)^۲} x^{n+۱}$$

۲. در اینجا

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}x^{n+1}=x+\frac{1}{1+1}x^2+\frac{1}{2^2+1}x^3+\dots$$

$$f'(x)=1+\frac{2}{1+1}x+\frac{3}{2^2+1}x^2+\dots+\frac{n+1}{n^2+1}x^n+\dots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+1}x^n$$

$$\int_0^x f(t)dt=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{1+1}\cdot\frac{1}{3}x^3+\dots+\frac{1}{n^2+1}\cdot\frac{1}{n+2}x^{n+2}+\dots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{(n^2+1)(n+2)}$$

۳. با مشتقگیری و انتگرالگیری جمله به جمله از سری

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n=2x+3x^2+4x^3+\dots+(n+1)x^n+\dots$$

داریم

$$f'(x)=2+2.3x+3.4x^2+\dots+n(n+1)x^{n-1}+\dots$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^{n-1}$$

$$\int^x f(t)\,dt=x^2+x^3+x^4+\dots+x^{n+1}+\dots$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1}$$

.۴

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{n}x^{n^2}$$

$$=5x+\frac{5}{2}x^4+\frac{5}{3}x^9+\dots+\frac{5}{n}x^{n^2}+\dots$$

$$f'(x)=5+\frac{5}{2}.4x^3+\frac{5}{3}.9x^8+\dots+\frac{5}{n}.n^2x^{n^2-1}+\dots$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}5nx^{n^2-1}$$

۵. می‌دانیم که به ازای هر x

$$e^x = \sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = ۱ + x + \frac{۱}{۲!}x^۲ + \frac{۱}{۳!}x^۳ + \cdots + \frac{۱}{n!}x^n + \cdots$$

$$e^{-x} = \sum_{n=\circ}^{\infty} (-۱)^n \frac{x^n}{n!} = ۱ - x + \frac{۱}{۲!}x^۲ - \frac{۱}{۳!}x^۳ + \ldots + \frac{(-۱)^n}{n!}x^n + \ldots$$

همچنین $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{۲}$. در نتیجه، با استفاده از دو سری بالا، داریم

$$\cosh x = \frac{۱+۱}{۲} + \frac{x-x}{۲} + \frac{\frac{۱}{۲!}x^۲ + \frac{۱}{۲!}x^۲}{۲} + \frac{\frac{۱}{۳!}x^۳ - \frac{۱}{۳!}x^۳}{۲}$$

$$+ \cdots + \frac{\frac{۱}{n!}x^n + \frac{(-۱)^n}{n!}x^n}{۲} + \cdots$$

$$= ۱ + \frac{۱}{۲!}x^۲ + \frac{۱}{۴!}x^۴ + \ldots + \frac{۱}{(۲n)!}x^{۲n} + \ldots$$

$$= \sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{۱}{(۲n)!}x^{۲n}$$

۶. مانند حل تمرین ۵ عمل می‌کنیم. در اینجا به دست می‌آوریم

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{۲} = \sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{۱}{(۲n+۱)!}x^{۲n+۱}$$

۷. با استفاده از سری نمایشگر e^x نتیجه می‌گیریم که

$$e^x - ۱ = x + \frac{x^۲}{۲!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

$$\frac{e^x - ۱}{x} = ۱ + \frac{۱}{۲!}x + \ldots + \frac{۱}{n!}x^{n-۱} + \ldots$$

$$= ۱ + \sum_{n=۲}^{\infty} \frac{۱}{n!}x^{n-۱}$$

چون وقتی x به صفر میل می‌کند، سری $\sum_{n=۲}^{\infty} \frac{۱}{n!}x^{n-۱}$ نیز به صفر میل می‌کند، پس

$$\lim_{x\to\circ} \frac{e^x - ۱}{x} = ۱ + \circ = ۱$$

۸. (الف) چون اگر $|x| < ۱$ آنگاه

$$\frac{۱}{۱-x}=\sum_{n=۰}^{\infty} x^n$$

با قراردادن $-t^{۴}$ به جای x در این سری، نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{۱}{۱+t^{۴}}=\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱^{۴})^n=\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)t^{۴n}$$
$$=۱-t^{۴}+t^{۸}-\cdots+(-۱)^n t^{۴n}+\cdots$$

بنابراین اگر $|-t^{۴}|<۱$ یا $-۱<t<۱$ آنگاه

$$\frac{t^{۲}}{۱+t^{۴}}=t^{۲}-t^{۴+۲}+t^{۸+۲}-\cdots+(-۱)^n t^{۴n+۲}+\cdots$$
$$=\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n t^{۴n+۲}$$

(ب) بنابر قضیهٔ انتگرالگیری سریهای توانی، داریم

$$\int_{۰}^{x}\frac{t^{۲}}{۱+t^{۴}}dt=\int_{۰}^{x}\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n t^{۴n+۲}dt$$
$$=\sum_{n=۰}^{\infty}\left(\int_{۰}^{x}(-۱)^n t^{۴n+۲}dt\right)$$
$$=\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n\frac{۱}{۴n+۳}t^{۴n+۳}$$

حال با قراردادن $x=\frac{۱}{۲}$ در این سری، نتیجه می‌گیریم که

$$\int_{۰}^{\frac{۱}{۲}}\frac{t^{۲}}{۱+t^{۴}}dt=\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n\frac{۱}{۴n+۳}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۴n+۳}$$

۹. با قراردادن $t^{۴}$ به جای x در سری

$$\frac{۱}{۱+x}=\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n x^n$$

نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{1}{1+t^{6}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}t^{6n}$$

حال با استفاده از قضیهٔ انتگرالگیری سریهای توانی، داریم

$$\int_{0}^{x}\frac{1}{1+t^{6}}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{6n+1}x^{6n+1}$$

با قراردادن $x=\frac{1}{3}$ در این سری، داریم

$$\int_{0}^{\frac{1}{3}}\frac{dx}{1+x^{6}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{6n+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{6n+1}$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^{7}}+\cdots$$

در نتیجه

$$\int_{0}^{\frac{1}{3}}\frac{dx}{1+x^{6}}\approx\frac{1}{3}-\frac{1}{15309}=\frac{5102}{15309}\approx 0/33326$$

۱۰. با توجه به حل مسألهٔ نمونه‌ای ۳. ۲. ۱۱، داریم

$$\operatorname{tg}^{-1}t=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{2n+1}t^{2n+1}\quad(|x|<1)$$

در نتیجه

$$\frac{\operatorname{tg}^{-1}t}{t}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{2n+1}t^{2n}=1-\frac{1}{3}t^{2}+\cdots$$

حال با انتگرالگیری جمله به جمله از این سری، داریم

$$\int_{0}^{x}\frac{\operatorname{tg}^{-1}t}{t}dt=x-\frac{1}{9}x^{3}+\cdots$$

در نتیجه

$$\int_{0}^{0/1}\frac{\operatorname{tg}^{-1}x}{x}\,dx\approx 0/1-\frac{0/001}{9}=\frac{899}{9000}=0/099$$

تمرینهای ۳.۳

۱. جدول مشتقهای $\sin x$ در $x=\frac{\pi}{۶}$ را تشکیل می‌دهیم:

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(\frac{\pi}{۶})$
۰	$\sin x$	$\frac{۱}{۲}$
۱	$\cos x$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
۲	$-\sin x$	$-\frac{۱}{۲}$
۳	$-\cos x$	$-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
۴	$\sin x$	$\frac{۱}{۲}$

و به طور کلی داریم

$$f^{(۴n)}(\frac{\pi}{۶})=\frac{۱}{۲}\ ,f^{(۴n+۱)}(\frac{\pi}{۶})=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$f^{(۴n+۲)}(\frac{\pi}{۶})=-\frac{۱}{۲},f^{(۴n+۳)}(\frac{\pi}{۶})=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

بنابراین

$$f(x)=f(\frac{\pi}{۶})+\frac{۱}{۱!}f'(\frac{\pi}{۶})(x-\frac{\pi}{۶})+\frac{۱}{۲!}f''(\frac{\pi}{۶})(x-\frac{\pi}{۶})^{۲}+\cdots$$

$$=\frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}(x-\frac{\pi}{۶})-\frac{۱}{۲}\cdot\frac{۱}{۲!}(x-\frac{\pi}{۶})^{۲}-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\cdot\frac{۱}{۳!}(x-\frac{\pi}{۶})^{۳}+\cdots$$

$$=\frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}(x-\frac{\pi}{۶})-\frac{۱}{۴}(x-\frac{\pi}{۶})^{۲}-\frac{\sqrt{۳}}{۱۲}(x-\frac{\pi}{۶})^{۳}+\cdots$$

که نمایش فشردهٔ آن عبارت است از

$$f(x)=\frac{۱}{۲}\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^{n}\left[\frac{۱}{(۲n)!}(x-\frac{\pi}{۶})^{۲n}+\frac{\sqrt{۳}}{(۲n+۱)!}(x-\frac{\pi}{۶})^{۲n+۱}\right]$$

برای‌اینکه نشان دهیم به ازای هر x، مجموع این سری برابر با مقدار $f(x)$ است. نشان می‌دهیم که $\lim\limits_{n\to\infty} r_n=۰$. با توجه به اینکه $|\sin\alpha|\leq ۱$ و $|\cos\alpha|\leq ۱$، برای هر مقدار z بین x و $\frac{\pi}{۶}$ داریم

$$|r_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+۱)}(z)}{(n+۱)!}(x-\frac{\pi}{۶})^{n+۱}\right| \leq \left|\frac{\left(x-\frac{\pi}{۶}\right)^{n+۱}}{(n+۱)!}\right|$$

حال با استفاده از تذکر ۳. ۳. ۴، داریم

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(x-\frac{\pi}{۶}\right)^{n+۱}}{(n+۱)!}\right| = ۰$$

و در نتیجه‌به ازای هر x، $\lim_{n\to\infty} r_n(x)=۰$.

۲. داریم

$$f(x) = \cos x \qquad f(\frac{\pi}{۳}) = \frac{۱}{۲}$$

$$f'(x) = -\sin x \qquad f'(\frac{\pi}{۳}) = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$f''(x) = -\cos x \qquad f''(\frac{\pi}{۳}) = -\frac{۱}{۲}$$

$$f^{(۳)}(x) = \sin x \qquad f^{(۳)}(\frac{\pi}{۳}) = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$f^{(۴)}(x) = \cos x \qquad f^{(۴)}(\frac{\pi}{۳}) = \frac{۱}{۲}$$

و به طور کلی داریم

$$f^{(۴n)}(\frac{\pi}{۳}) = \frac{۱}{۲} \qquad f^{(۴n+۱)}(\frac{\pi}{۳}) = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$f^{(۴n+۲)}(\frac{\pi}{۳}) = -\frac{۱}{۲} \qquad f^{(۴n+۳)}(\frac{\pi}{۳}) = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

بنابراین، با توجه به فرمول سری تیلور در $x = \frac{\pi}{۳}$، داریم

$$f(x)=\frac{۱}{۲}-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\left(x-\frac{\pi}{۳}\right)-\frac{۱}{۲}\cdot\frac{۱}{۲!}\left(x-\frac{\pi}{۳}\right)^{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}\frac{۱}{۳!}\left(x-\frac{\pi}{۳}\right)^{۳}+\ldots$$

$$=\frac{۱}{۲}-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\left(x-\frac{\pi}{۳}\right)-\frac{۱}{۴}\left(x-\frac{\pi}{۳}\right)^{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۱۲}\left(x-\frac{\pi}{۳}\right)^{۳}+\ldots$$

اثبات $\lim\limits_{n\to\infty} r_n \mid x \mid = ۰$ مشابه اثبات آن در حل تمرین ۱ است.

۳. داریم

$$f(x) = e^{۲x} \qquad f(۰) = ۱$$
$$f'(x) = ۲e^{۲x} \qquad f'(۰) = ۲$$
$$f''(x) = ۲^۲e^{۲x} \qquad f''(۰) = ۲^۲$$

و به طور کلی $f^{(n)}(x) = ۲^n e^{۲x}$ و $f^{(n)}(۰) = ۲^n$. بنابراین، با جایگذاری در فرمول سری تیلور در $x = ۰$، داریم

$$f(x) = e^{۲x} = ۱ + ۲x + \frac{۲^۲}{۲!}x^۲ + \frac{۲^۳}{۳!}x^۳ + \cdots = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۲^n}{n!}x^n$$

برای اثبات اینکه سری به دست آمده به ازای هر x نمایشگر $e^{۲x}$ است، نشان می‌دهیم که $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = ۰$. داریم

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+۱)}(z)}{(n+۱)!}x^{n+۱}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{۲^{n+۱}e^{۲z}}{(n+۱)!}x^{n+۱}$$

که در آن z بین x و ۰ است. مانند مثال ۳. ۳. ۶، می‌توان نشان داد که این حد صفر است.

۴. روشن است که به ازای هر n، $f^{(n)}(x) = e^x$ و در نتیجه $f^{(n)}(-۲) = e^{-۲}$. بنابراین

$$f(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{f^{(n)}_{(-۲)}}{n!}(x+۲)^n$$
$$= \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{e^{-۲}}{n!}(x+۲)^n$$

۵. چون، $e^x = \sum\limits_{n=۰}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ داریم

$$x^۲ e^x = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{x^{n+۲}}{n!}$$

برای تعیین شعاع همگرایی، از آزمون نسبت استفاده می‌کنیم. داریم

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+۳}}{(n+۱)!}\cdot\frac{n!}{x^{n+۲}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{n+۱}\right| = ۰ < ۱$$

در نتیجه سری به دست آمده به ازای هر x همگراست. یعنی شعاع همگرایی این سری ∞ است.

۶. با قراردادن $-۲x$ به جای x در $e^x = \sum_{n=۰}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$، نتیجه می‌گیریم که

$$e^{-۲x} = \sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(-۲x)^n}{n!} = \sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n\frac{۲^n x^n}{n!}$$

در نتیجه

$$xe^{-۲x} = \sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n\ \frac{۲^n x^{n+۱}}{n!}$$

برای پیدا کردن شعاع همگرایی، آزمون نسبت را به کار می‌بریم. داریم

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{۲^{n+۱}x^{n+۲}}{(n+۱)!}\cdot\frac{n!}{۲^n x^{n+۱}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{۲x}{n+۱}\right| = ۰ < ۱$$

و در نتیجه شعاع همگرایی این سری ∞ است.

۷. با قراردادن $\frac{x}{۲}$ به جای x در سری $\frac{۱}{۱+x} = \sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n x^n$ و ضرب کردن آن در $\frac{۱}{۲}$، داریم

$$\frac{۱}{۲+x} = \frac{۱}{۲}\cdot\frac{۱}{۱+\frac{x}{۲}} = \frac{۱}{۲}\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n\left(\frac{x}{۲}\right)^n$$

$$= \sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n\frac{x^n}{۲^{n+۱}}$$

حال شعاع همگرایی این سری را پیدا می‌کنیم. داریم

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-۱)^{n+۱}x^{n+۱}}{۲^{n+۲}}\cdot\frac{۲^{n+۱}}{(-۱)^n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{۲}\right| = \frac{|x|}{۲}$$

در نتیجه سری فوق همگرای مطلق است اگر $\frac{|x|}{۲} < ۱$ یا $|x| < ۲$، یعنی شعاع همگرایی آن برابر با $r = ۲$ است.

۸. با قراردادن $2x$ به جای x درسری $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{1}{1-2x}=\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}2^n x^n$$

حال چون

$$\ln(1-2x)=\int_0^x \frac{-2dt}{1-2t}\ ,$$

بنابه قضیهٔ انتگرالگیری سریهای توانی،

$$\ln(1-2x)=\int_0^x\left(-2\sum_{n=0}^{\infty}2^n t^n\right)dt$$

$$=-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n+1}x^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{2^{n+1}}{n+1}x^{n+1}$$

حال شعاع همگرایی سری به دست آمده را تعیین می‌کنیم. داریم

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{-2^{n+2}x^{n+2}}{n+2}\cdot\frac{n+1}{-2^{n+1}x^{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2(n+1)x}{n+2}\right|=2\,|\,x\,|$$

در نتیجه این سری همگرای مطلق است اگر $2|x|<1$ یا $|x|<\frac{1}{2}$. بنابراین شعاع همگرایی سری فوق برابر با $r=\frac{1}{2}$ است.

۹. با قراردادن $2x$ به جای x در سری $\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$، داریم

$$\cos 2x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(2x)^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!}x^{2n}$$

بنابراین سری نمایشگر $\cos^2 x$ عبارت است از

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!}x^{2n}$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}$$

حال چون

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-۱)^{n+۱}۲^{۲(n+۱)-۱}x^{۲(n+۱)}}{(۲n+۲)!}\cdot\frac{(۲n)!}{(-۱)^n۲^{۲n-۱}x^{۲n}}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{۴x^۲}{(۲n+۲)(۲n+۱)}\right|=۰<۱$$

شعاع همگرایی سری به دست آمده است ∞ است.

۱۰. چون به ازای هر x داریم

$$\sin x=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{(۲n+۱)!}x^{۲n+۱}$$

در نتیجه اگر $x\neq ۰$ آنگاه

$$\frac{\sin x}{x}=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{(۲n+۱)!}x^{۲n}$$

از آنجا که به ازای $x=۰$، $\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{(۲n+۱)!}x^{۲n}=۱$ پس

$$f(x)=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{(۲n+۱)!}x^{۲n}$$

برای تعیین شعاع همگرایی این سری، آزمون نسبت را به کار می‌بریم. داریم

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-۱)^{n+۱}x^{۲n+۲}}{[۲(n+۱)+۱]!}\cdot\frac{(۲n+۱)!}{(-۱)^nx^{۲n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^۲}{(۲n+۳)(۲n+۲)}\right|=۰<۱$$

در نتیجه شعاع همگرایی سری به دست آمده ∞ است.

تمرینهای ۴.۳

۱. قضیهٔ دو جمله‌ای را با $k=\frac{۱}{۲}$ به کار می‌بریم. داریم

$$(۱+x)^{\frac{۱}{۲}} = ۱+\frac{۱}{۲}x+\frac{\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲}-۱)}{۲!}x^{۲}+\frac{\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲}-۱)(\frac{۱}{۲}-۲)}{۳!}x^{۳}+\cdots$$

$$+\frac{\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲}-۱)\cdots(\frac{۱}{۲}-n+۱)}{n\,!}x^{n}+\cdots$$

$$=۱+\frac{۱}{۲}x-\frac{۱}{۲^{۲}.۲!}x^{۲}+\frac{۱.۳}{۲^{۳}.۳!}x^{۳}+\ldots+(-۱)^{n+۱}\frac{۱.۳.۵\ldots(۲n-۳)}{۲^{n}.n!}x^{n}+\ldots$$

$$=۱+\frac{۱}{۲}x+\sum_{n=۲}^{\infty}(-۱)^{n-۱}\frac{۱.۳.۵\ldots(۲n-۳)}{۲^{n}.n!}x^{n}$$

شعاع همگرایی این سری $r = ۱$ به دست می‌آید.

۲. با قراردادن $-x^{۳}$ به جای x در سری

$$\sqrt{۱+x}=۱+\frac{۱}{۲}x+\sum_{n=۲}^{\infty}(-۱)^{n-۱}\frac{۱.۳.۵\ldots(۲n-۳)}{۲^{n}.n!}x^{n}$$

نتیجه می‌گیریم که

$$\sqrt{۱-x^{۳}}=۱+\frac{۱}{۲}(-x^{۳})+\sum_{n=۲}^{\infty}(-۱)^{n-۱}\frac{۱.۳.۵\ldots(۲n-۳)}{۲^{n}.n!}(-x^{۳})^{n}$$

$$=۱-\frac{۱}{۲}x^{۳}-\sum_{n=۲}^{\infty}\frac{۱.۳.۵\ldots(۲n-۳)}{۲^{n}.n!}x^{۳n}$$

شعاع همگرایی این سری برابر با $r = ۱$ به دست می‌آید.

۳. با توجه به مسألهٔ نمونه‌ای ۳. ۴. ۳، داریم

$$\frac{۱}{\sqrt{۱+x}}=۱-\frac{۱}{۲}x+\frac{۱.۳}{۲^{۲}.۲!}x^{۲}-\frac{۱.۳.۵}{۲^{۳}.۳!}x^{۳}+\ldots+(-۱)^{n}\frac{۱.۳.۵\ldots(۲n-۱)}{۲^{n}.n!}x^{n}+\ldots$$

با قراردادن $-x^{۲}$ به جای x در این سری، نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{۱}{\sqrt{۱-x^{۲}}}=۱+\frac{۱}{۲}x^{۲}+\frac{۱.۳}{۲^{۲}.۲!}x^{۴}+\frac{۱.۳.۵}{۲^{۳}.۳!}x^{۶}+\ldots+\frac{۱.۳.۵\ldots(۲n-۱)}{۲^{n}.n!}x^{۲n}+\ldots$$

که در آن $|x| < ۱$

۴. با به کاربردن قضیهٔ دوجمله‌ای با $k = -\frac{۸}{۵}$، داریم

$$(۱+x)^{-\frac{۸}{۵}} = ۱ - \frac{۸}{۵}x + \frac{-\frac{۸}{۵}(-\frac{۸}{۵}-۱)}{۲!}x^۲ + \frac{-\frac{۸}{۵}(-\frac{۸}{۵}-۲)}{۳!}x^۳ + \dots$$

$$+ \frac{-\frac{۸}{۵}(-\frac{۸}{۵}-۱)\dots(-\frac{۸}{۵}-n+۱)}{n!}x^n + \dots$$

$$= ۱ - \frac{۸}{۵}x + \frac{(-\frac{۸}{۵})(-\frac{۱۳}{۵})}{۲!}x^۲ + \frac{(-\frac{۸}{۵})(-\frac{۱۳}{۵})(-\frac{۱۸}{۵})}{۳!}x^۳ + \cdots$$

$$+ \frac{(-\frac{۸}{۵})(-\frac{۱۳}{۵})\cdots(-\frac{۵n-۳}{۵})}{n!}x^n + \cdots$$

$$= ۱ + \sum_{n=۱}^{\infty} (-۱)^n \frac{۸.۱۳....(۵n+۳)}{۵^n.n!}x^n$$

که در آن $|x| < ۱$.

۵. بنابر حل تمرین ۳ فوق، داریم

$$\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}} = ۱ + \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱.۳...(۲n-۱)}{۲^n.n!}x^{۲n} \quad (|x| < ۱)$$

در نتیجه

$$\frac{x}{\sqrt{۱-x^۲}} = x + \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱.۳....(۲n-۱)}{۲^n.n!}x^{۲n+۱}$$

که در آن $|x| < ۱$.

۶. بنابر مسألهٔ نمونه‌ای ۳. ۴. ۳، داریم

$$\frac{۱}{\sqrt{۱+x}} = ۱ + \sum_{n=۲}^{\infty} (-۱)^n \frac{۱.۳.۵...(۲n-۱)}{۲^n.n!}x^n$$

در نتیجه

$$\frac{x^۲}{\sqrt{۱+x}} = x^۲ + \sum_{n=۱}^{\infty} (-۱)^n \frac{۱.۳.۵...(۲n-۱)}{۲^n.n!}x^{n+۲}$$

که در آن $|x| < ۱$.

۷. بنابر حل تمرین ۱، داریم

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2^n.n!}x^n$$

با قراردادن $-t^3$ به جای x در سری فوق، نتیجه می‌گیریم که

$$\sqrt{1-t^3}=1+\frac{1}{2}(-t^3)+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2^n.n!}(-t^3)^n$$
$$=1-\frac{1}{2}t^3-\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2^n.n!}t^{3n}$$

از این رو، بنا بر قضیهٔ انتگرالگیری سریهای توانی، داریم

$$\int_0^x\sqrt{1-t^3}\,dt=x-\frac{1}{8}x^4-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2^n.n!(3n+1)}x^{3n+1}$$

که در آن $|x|<1$.

۸. می‌نویسیم $\sqrt[3]{28}=\sqrt[3]{27+1}=3\sqrt[3]{1+\frac{1}{27}}$. حال، چون بنابر مثال ۲.۴.۳، به ازای $|x|<1$ داریم

$$\sqrt[3]{1+x}=1+\frac{1}{3}x-\frac{2}{3^2.2!}x^2+\ldots$$

در نتیجه

$$3\sqrt[3]{1+\frac{1}{27}}\approx 3\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{27}\right)-\frac{2}{3^2.2!}\left(\frac{1}{27}\right)^2\right]$$
$$=3\left(1+\frac{1}{81}-\frac{1}{6561}\right)\approx 3/03$$

تمرینهای فصل ۴

تمرینهای ۱.۴

.۱

$$۴\vec{a}+۵\vec{b}=(۸,-۱۲)+(۵,۲۰)=(۱۳,۸)$$
$$۴\vec{a}-۵\vec{b}=(۸,-۱۲)-(۵,۲۰)=(۳,-۳۲)$$

.۲

$$۴\vec{a}+۵\vec{b}=(۴,۸,۴)+(۰,۵,۵\sqrt{۲})$$
$$=(۴,۱۳,۴+۵\sqrt{۲})$$
$$۴\vec{a}-۵\vec{b}=(۴,۸,۴)-(۰,۵,۵\sqrt{۲})$$
$$=(۴,۳,۴-۵\sqrt{۲})$$

.۳

$$۴\vec{a}+۵\vec{b}=(۲۰\vec{i}-۸\vec{j})+(۱۵\vec{i}+۵\sqrt{۲}\,\vec{j})$$
$$=۳۵\vec{i}+(۵\sqrt{۲}-۸)\vec{j}$$
$$۴\vec{a}-۵\vec{b}=(۲۰\vec{i}-۸\vec{j})-(۱۵\vec{i}+۵\sqrt{۲}\,\vec{j})$$
$$=۵\vec{i}-(۸+۵\sqrt{۲})\vec{j}$$

.۴

$$۴\vec{a}+۵\vec{b}=(۳۲\vec{i}+۴\vec{j})+(۵\vec{i}-۱۰\vec{k})$$
$$=۳۷\vec{i}+۴\vec{j}-۱۰\vec{k}$$
$$۴\vec{a}-۵\vec{b}=(۳۲\vec{i}+۴\vec{j})-(۵\vec{i}-۱۰\vec{k})$$
$$=۲۷\vec{i}+۴\vec{j}+۱۰\vec{k}$$

۵. بردار نمایشگر $\overrightarrow{PQ}$ برابر است با$(۴,۴) = ((-۴) - ۰\ ,\ ۱ - ۵)$.

پس اندازهٔ آن برابر است با $\sqrt{۱۶+۱۶}=\sqrt{۳۲}=۴\sqrt{۲}$.

۶. بردار نمایشگر $\overrightarrow{PQ}$ برابر است با $(۰-۲,۱-۲,-۱-۱)=(-۲,-۱,-۲)$.
در نتیجه اندازهٔ آن برابر است با

$$\sqrt{(-۲)^۲+(-۱)^۲+(-۲)^۲}=\sqrt{۴+۱+۴}=\sqrt{۹}=۳$$

۷. چون $|\vec{a}|=\sqrt{۱+۱+۱}=\sqrt{۳}$، بردار واحد هم جهت با $\vec{a}$ عبارت است از

$$\vec{u}=\frac{۱}{|\vec{a}|}\vec{a}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}\vec{a}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}\vec{i}+\frac{۱}{\sqrt{۳}}\vec{j}-\frac{۱}{\sqrt{۳}}\vec{k}$$

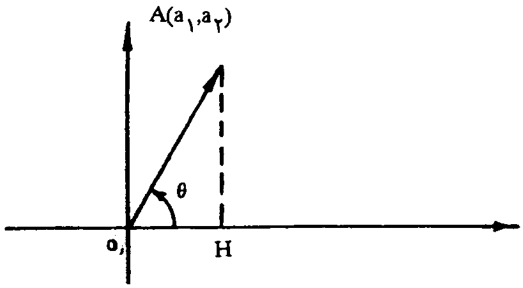
۸. داریم

$$\begin{aligned}|\vec{b}| &=\sqrt{۷^۲+(۱۲\sqrt{۲})^۲+(-۱۲\sqrt{۲})^۲}\\ &=\sqrt{۴۹+۲۸۸+۲۸۸}=\sqrt{۶۲۵}=۲۵\end{aligned}$$

در نتیجه بردار واحد هم جهت با $\vec{b}$ برابر است با

$$\vec{u}=\frac{۱}{|\vec{b}|}\vec{b}=\frac{۱}{۲۵}\vec{b}=\frac{۷}{۲۵}\vec{i}+\frac{۱۲\sqrt{۲}}{۲۵}\vec{j}-\frac{۱۲\sqrt{۲}}{۲۵}\vec{k}$$

۹. نمودار زیر را در نظر می‌گیریم



اگر $\vec{a}=(a_۱,a_۲)$، آنگاه با توجه به مثلث قائم الزاویهٔ OAH، داریم
$a_۱=OH=OA\cos\theta=|\vec{a}|\cos\theta$ و $a_۲=AH=OA\sin\theta=|\vec{a}|\sin\theta$. پس،

$$\begin{aligned}\vec{a}=(a_۱,a_۲)&=a_۱\vec{i}+a_۲\vec{j}\\ &=|\vec{a}|\cos\theta\vec{i}+|\vec{a}|\sin\theta\vec{j}\\ &=|\vec{a}|(\cos\theta\,\vec{i}+\sin\theta\,\vec{j})\end{aligned}$$

۱۰. اگر $\vec{u}$ یک بردار واحد باشد، آنگاه $|\vec{u}|=۱$. بنابر تمرین ۹، داریم

$$\vec{u}=|\vec{u}|(\cos\theta\,\vec{i}+\sin\theta\,\vec{j})=\cos\theta\,\vec{i}+\sin\theta\,\vec{j}$$

تمرینهای ۲.۴

.۱

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}=\frac{۲-۳-۴}{\sqrt{۱+۱+۱}\sqrt{۴+۹+۱۶}}=\frac{-۵}{\sqrt{۸۷}}$$

.۲

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}=\frac{-۲-۴\sqrt{۳}+۲\sqrt{۳}}{\sqrt{۲+۱۶+۳}\sqrt{۲+۳+۴}}=\frac{-۲-۲\sqrt{۳}}{۳\sqrt{۲۱}}$$

۳. چون

$$\vec{a}.\vec{b}=(۲,۱,-۱).(۳,۷,۱۳)=۶+۷-۱۳=۰$$
$$\vec{a}.\vec{c}=(۲,۱,-۱).(۲۰,-۲۹,۱۱)=۴۰-۲۹-۱۱=۰$$
$$\vec{b}.\vec{c}=(۳,۷,۱۳).(۲۰,-۲۹,۱۱)=۶۰-۲۰۳+۱۴۳=۰$$

پس $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ دو به دو بر هم عمود هستند.

۴. چون $\vec{a}.\vec{b}=۲+۰+۰=۲$ و $|a|=\sqrt{۴+۱+۴}=۳$ ،

$$pr_{\vec{a}}\,\vec{b}=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|^۲}\vec{a}=\frac{۲}{۹}(۲,۱,-۱)=(\frac{۴}{۹},\frac{۲}{۹},-\frac{۲}{۹})$$

۵. داریم $\vec{i}.\vec{j}=(۱,۰,۰).(۰,۱,۰)=۰$ و $\vec{j}.\vec{k}=(۱,۰,۰).(۰,۰,۱)$ ولی $\vec{j}\neq\vec{k}$.

۶. چون $|\cos\theta|\leq ۱$ ، پس

$$|\vec{a}.\vec{b}|=|\,|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta|=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\,|\cos\theta|$$
$$\leq|\vec{a}|\,|\vec{b}|$$

۷. اگر $\vec{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)$ و $\vec{b}=(b_۱,b_۲,b_۳)$ ، آنگاه بنابر نامساوی کوشی ـ شوارتس، داریم $|\vec{a}.\vec{b}|^۲\leq|\vec{a}|^۲|\vec{b}|^۲$. در نتیجه

$$(a_۱b_۱+a_۲b_۲+a_۳b_۳)^۲\leq(a_۱^۲+a_۲^۲+a_۳^۲)(b_۱^۲+b_۲^۲+b_۳^۲)$$

۸. با قراردادن $b_۱=b_۲=b_۳=۱$ در نامساوی تمرین ۷، داریم $(a_۱+a_۲+a_۳)^۲\leq(a_۱^۲+a_۲^۲+a_۳^۲)(۳)$ و در نتیجه

$$\left(\frac{a_۱+a_۲+a_۳}{۳}\right)^۲\leq\frac{a_۱^۲+a_۲^۲+a_۳^۲}{۳}$$

۹. داریم

$$\begin{aligned}|\vec{a}+\vec{b}|^{2}&=(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}+\vec{b})\\&=\vec{a}.\vec{a}+\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{a}+\vec{b}.\vec{b}\\&=|\vec{a}|^{2}+2\vec{a}.\vec{b}+|\vec{b}|^{2}\\&\leq|\vec{a}|^{2}+2|\vec{a}|\,|\vec{b}|+|\vec{b}|^{2}\qquad\text{(کوشی - شوارتس)}\\&=(|\vec{a}|+|\vec{b}|)^{2}\end{aligned}$$

در نتیجه $|\vec{a}+\vec{b}|\leq|\vec{a}|+|\vec{b}|$.

۱۰. چون

$$\begin{aligned}|\vec{a}+\vec{b}|^{2}=(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}+\vec{b})&=\vec{a}.\vec{a}+2\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{b}\\&=|\vec{a}|^{2}+2\vec{a}.\vec{b}+|\vec{b}|^{2}\\|\vec{a}-\vec{b}|=(\vec{a}-\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b})&=\vec{a}.\vec{a}-\vec{a}.\vec{b}-\vec{b}.\vec{a}+\vec{b}.\vec{b}\\&=|\vec{a}|^{2}-2\vec{a}.\vec{b}+|\vec{b}|^{2}\end{aligned}$$

در نتیجه $|\vec{a}+\vec{b}|+|\vec{a}-\vec{b}|=2|\vec{a}|^{2}+2|\vec{b}|^{2}$.

۱۱. چون

$$\begin{aligned}|\vec{a}+\vec{b}|^{2}&=|\vec{a}|^{2}+2\vec{a}.\vec{b}+|\vec{b}|^{2}\\|\vec{a}-\vec{b}|^{2}&=|\vec{a}|^{2}-2\vec{a}.\vec{b}+|\vec{b}|^{2}\end{aligned}$$

پس $|\vec{a}+\vec{b}|^{2}-|\vec{a}-\vec{b}|^{2}=4\vec{a}.\vec{b}$.

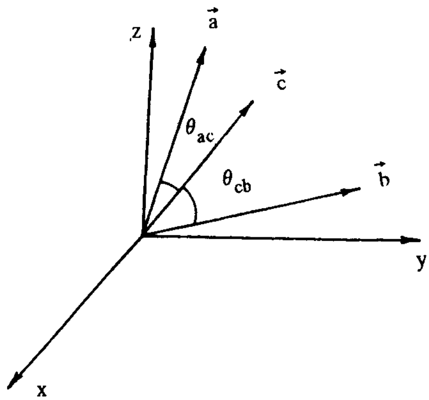
۱۲. اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو ضلع یک متوازی الاضلاع باشند، آنگاه با توجه به شکل ۴.۲.۴ متن کتاب $|\vec{a}+\vec{b}|$ و $|\vec{a}-\vec{b}|$ اندازهٔ دو قطر این متوازی‌الاضلاع هستند. چون $|\vec{a}+\vec{b}|^{2}-|\vec{a}-\vec{b}|^{2}=4\vec{a}.\vec{b}$ پس $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$ اگر و تنها اگر $\vec{a}.\vec{b}=0$. یعنی اگر و تنها اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمود باشند.

۱۳. داریم

$$\begin{aligned}(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b})&=\vec{a}.\vec{a}-\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{a}-\vec{b}.\vec{b}\\&=|\vec{a}|^{2}-|\vec{b}|^{2}\end{aligned}$$

۱۴. فرض کنیم $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو ضلع یک لوزی باشند. در این صورت $\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{a}-\vec{b}$ دو قطر آن هستند (شکل ۴.۲.۴ متن کتاب را ببینید)، چون $|\vec{b}|=|\vec{a}|$، پس $(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^{2}-|\vec{b}|^{2}=0$ درنتیجه دو قطر لوزی بر هم عمود هستند.

۱۵. فرض کنیم θ_{ac} و θ_{cb} به ترتیب زاویهٔ بین $\vec{a}$ و $\vec{c}$ و زاویهٔ بین $\vec{c}$ و $\vec{b}$ باشند (شکل ۲.۱.۴ را ببینید).



شکل ۲.۱.۴

چون

$$\begin{aligned}\vec{a}.\vec{c} &= \vec{a}.(|\vec{b}|\vec{a}+|\vec{a}|\vec{b})\\ &= |\vec{b}|\vec{a}.\vec{a}+|\vec{a}|\vec{a}.\vec{b}\\ &= |\vec{b}|\ |\vec{a}|^{۲}+|\vec{a}|\vec{a}.\vec{b}\\ &= |\vec{a}|(|\vec{a}|\ |\vec{b}|+\vec{a}.\vec{b})\end{aligned}$$

و به همین ترتیب $\vec{b}.\vec{c}=|\vec{b}|(\vec{a}.\vec{b}+|\vec{a}|\ |\vec{b}|)$، داریم

$$\begin{aligned}\cos\theta_{ac} &= \frac{\vec{a}.\vec{c}}{|\vec{a}|\ |\vec{c}|}=\frac{|\vec{a}|(|\vec{a}|\ |\vec{b}|+\vec{a}.\vec{b})}{|\vec{a}|\ |\vec{c}|}\\ &= \frac{|\vec{a}|\ |\vec{b}|+\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{c}|}\\ \cos\theta_{cb} &= \frac{\vec{b}.\vec{c}}{|\vec{b}|\ |\vec{c}|}=\frac{|\vec{b}|(\vec{a}.\vec{b}+|\vec{a}|\ |\vec{b}|)}{|\vec{b}|\ |\vec{c}|}\\ &= \frac{\vec{a}.\vec{b}+|\vec{a}|\ |\vec{b}|}{|\vec{c}|}\\ &= \cos\theta_{ac}\end{aligned}$$

چون θ_{ac} و θ_{cb} در بازهٔ $[\circ,\pi]$ قرار دارند، پس $\theta_{ac}=\theta_{cb}$.

۱۶. داریم

$$\cos\alpha=\frac{a_{۱}}{|\vec{a}|}،\quad \cos\beta=\frac{a_{۲}}{|\vec{a}|}،\quad \cos\gamma=\frac{a_{۳}}{|\vec{a}|}$$

پس

$$\cos^{۲}\alpha+\cos^{۲}\beta+\cos^{۲}\gamma=\frac{a_{۱}^{۲}}{|\vec{a}|^{۲}}+\frac{a_{۲}^{۲}}{|\vec{a}|^{۲}}+\frac{a_{۳}^{۲}}{|\vec{a}|^{۲}}$$

$$=\frac{a_{۱}^{۲}+a_{۲}^{۲}+a_{۳}^{۲}}{|\vec{a}|^{۲}}=\frac{|\vec{a}|^{۲}}{|\vec{a}|^{۲}}=۱$$

تمرینهای ۳.۴

.۱

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ ۱&۱&۰\\ ۰&۱&۱\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}۱&۰\\ ۱&۱\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}۱&۰\\ ۰&۱\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}۱&۱\\ ۰&۱\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$$

$$\vec{c}.(\vec{a}\times\vec{b})=(-۱,-۳,۴).(۱,-۱,۱)=-۱+۳+۴=۶$$

.۲

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ ۱&۱&۱\\ ۱&۰&-۱\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}۱&۱\\ ۰&-۱\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}۱&۱\\ ۱&-۱\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}۱&۱\\ ۱&۰\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=-\vec{i}+۲\vec{j}-\vec{k}$$

$$\vec{c}.(\vec{a}\times\vec{b})=(۱,۱,-۱).(-۱,۲,-۱)=-۱+۲+۱=۲$$

.۳

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ ۳&۴&۱۲\\ ۳&۴&-۱۲\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}۴&۱۲\\ ۴&-۱۲\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}۳&۱۲\\ ۳&-۱۲\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}۳&۴\\ ۳&۴\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=-۹۶\vec{i}+۷۲\vec{j}$$

$$\vec{c}.(\vec{a}\times\vec{b})=(\frac{۱}{۸},-\frac{۱}{۱۲},\frac{۱}{۱۶}).(-۹۶,۷۲,۰)=-۱۲-۶+۰=-۱۸$$

.۴

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ ۳&۴&۱۲\\ ۳&۴&۱۲\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}۴&۱۲\\ ۴&۱۲\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}۳&۱۲\\ ۳&۱۲\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}۲&۴\\ ۳&۴\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=(۰,۰,۰)$$

$$\vec{c}.(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{c}.\vec{۰}=۰$$

۵. چون $|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\theta_{ab}$ پس

$$\sin\theta_{ab}=\frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}=\frac{|-\vec{i}+۲\vec{j}-\vec{k}|}{|\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}|\,|\vec{i}-\vec{k}|}$$

$$=\frac{\sqrt{۱+۴+۱}}{\sqrt{۱+۱+۱}\sqrt{۱+۰+۱}}=\frac{\sqrt{۶}}{\sqrt{۶}}=۱$$

۶. به آسانی دیده می‌شود که

$$\begin{vmatrix} x_۱ & x_۲ \\ y_۱ & y_۲ \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} y_۱ & y_۲ \\ x_۱ & x_۲ \end{vmatrix}$$

پس اگر $\vec{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)$ و $\vec{b}=(b_۱,b_۲,b_۳)$، آنگاه

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_۱ & a_۲ & a_۳ \\ b_۱ & b_۲ & b_۳ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_۲ & a_۳ \\ b_۲ & b_۳ \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} a_۱ & a_۳ \\ b_۱ & b_۳ \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a_۱ & a_۲ \\ b_۱ & b_۲ \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=-\begin{vmatrix} b_۲ & b_۳ \\ a_۲ & a_۳ \end{vmatrix}\vec{i} + \begin{vmatrix} b_۱ & b_۳ \\ a_۱ & a_۳ \end{vmatrix}\vec{j} - \begin{vmatrix} b_۱ & b_۲ \\ a_۱ & a_۲ \end{vmatrix}\vec{k} = -\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_۱ & b_۲ & b_۳ \\ a_۱ & a_۲ & a_۳ \end{vmatrix} = -(\vec{b}\times\vec{a})$$

۷. فرض کنیم $\vec{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)$، $\vec{b}=(b_۱,b_۲,b_۳)$ و $\vec{c}=(c_۱,c_۲,c_۳)$. داریم

$$\vec{b}\times\vec{c}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_۱ & b_۲ & b_۳ \\ c_۱ & c_۲ & c_۳ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_۲ & b_۳ \\ c_۲ & c_۳ \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} b_۱ & b_۳ \\ c_۱ & c_۳ \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} b_۱ & b_۲ \\ c_۱ & c_۲ \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=(b_۲c_۳-c_۲b_۳)\vec{i}-(b_۱c_۳-c_۱b_۳)\vec{j}+(b_۱c_۲-c_۱b_۲)\vec{k}$$

مؤلفهٔ اول $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ برابر است با

$$\begin{vmatrix} a_۲ & a_۳ \\ c_۱b_۳-b_۱c_۳ & b_۱c_۲-c_۱b_۲ \end{vmatrix} = a_۲b_۱c_۲-a_۲c_۱b_۲-a_۳c_۱b_۳+a_۳b_۱c_۳$$

و مؤلفهٔ اول $(\vec{a}.\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}.\vec{b})\vec{c}$ برابر است با

$$(a_۱c_۱+a_۲c_۲+a_۳c_۳)b_۱-(a_۱b_۱+a_۲b_۲+a_۳b_۳)c_۱=a_۲c_۲b_۱+a_۳c_۳b_۱-a_۲b_۲c_۱-a_۳b_۳c_۱$$

که همان مؤلفهٔ اول $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ است. به همین ترتیب می‌توان نشان داد که مؤلفه‌های دوم و سوم این دو بردار یکسان هستند.

۸. داریم

$$\begin{aligned}(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})&=(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{a}-(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{b}\\&=(\vec{a}\times\vec{a})+(\vec{b}\times\vec{a})-(\vec{a}\times\vec{b})-(\vec{b}\times\vec{b})\\&=(\vec{b}\times\vec{a})+(\vec{b}\times\vec{a})\\&=۲(\vec{b}\times\vec{a})=۲\vec{b}\times\vec{a}\end{aligned}$$

۹. فرض کنیم $\vec{a}=(۱,۰,۰)$، $\vec{b}=(۰,۱,۰)$ و $\vec{c}=(۱,۱,۰)$. در این صورت

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\۱&۰&۰\\۰&۱&۰\end{vmatrix}=\vec{k}،\vec{a}\times\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\۱&۰&۰\\۱&۱&۰\end{vmatrix}=\vec{k}$$

ولی $\vec{b}\neq\vec{c}$.

۱۰. با توجه به تمرین ۷، داریم

$$\begin{aligned}\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})&=(\vec{a}.\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}.\vec{b})\vec{c}\\&+(\vec{b}.\vec{a})\vec{c}-(\vec{b}.\vec{c})\vec{a}+(\vec{c}.\vec{b})\vec{a}-(\vec{c}.\vec{a})\vec{b}=۰\end{aligned}$$

زیرا $\vec{x}\,.\,\vec{y}=\vec{y}\,.\,\vec{x}$.

۱۱. (الف) بردار $\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}$ عمود بر صفحهٔ داده شده است. چون $\overrightarrow{PQ}=(-۱,۴,-۳)$ و $\overrightarrow{PR}=(۲,-۳,-۱)$، پس

$$\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-۱&۴&-۳\\۲&-۳&-۱\end{vmatrix}=-۱۳\vec{i}-۷\vec{j}-۵\vec{k}$$

(ب) مساحت مثلث PQR برابر است با

$$\frac{|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}|}{۲}=\frac{\sqrt{۱۶۹+۴۹+۲۵}}{۲}=\frac{\sqrt{۲۴۳}}{۲}=\frac{۹\sqrt{۳}}{۲}$$

۱۲.با توجه به مسألهٔ نمونه‌ای ۱۱.۳.۴، چون

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}.(\overrightarrow{OQ}\times\overrightarrow{OR})&=(۱,-۱,۲).[(۰,۳,-۱)\times(۳,-۴,۱)]\\&=(۱,-۱,۲).\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\۰&۳&-۱\\۳&-۴&۱\end{vmatrix}\\&=۱\begin{vmatrix}۳&-۱\\-۴&۱\end{vmatrix}-(-۱)\begin{vmatrix}۰&-۱\\۳&۱\end{vmatrix}+۲\begin{vmatrix}۰&۳\\۳&-۴\end{vmatrix}\\&=-۱+۳-۱۸=-۱۶\end{aligned}$$

پس حجم این متوازی السطوح برابر با ۱۶ است.

تمرینهای ۴.۴

۱. معادلات پارامتری این خط عبارت‌اند از:

$$x = -۲ + ۳t \, , \, y = ۱ - t \, , \, z = ۵t$$

و معادلات متقارن آن به صورت زیر هستند

$$\frac{x+۲}{۳} = \frac{y-۱}{-۱} = \frac{z}{۵}$$

۲. این معادلات به ترتیب عبارت‌اند از:

$$x = ۱۱t \, , \, y = -۱۳t \, , \, z = -۱۵t$$

$$\frac{x}{۱۱} = \frac{y}{-۱۳} = \frac{z}{-۱۵}$$

۳. معادلات مورد نظر به ترتیب عبارت‌اند از:

$$x = -۳ + t \, , \, y = ۶ - t \, , \, z = ۲$$

$$x + ۳ = \frac{y-۶}{-۱} \, , \, z = ۲$$

۴. این معادلات به ترتیب عبارت‌اند از:

$$x = ۲ \, , \, y = ۲t \, , \, z = ۵ + ۳t$$

$$x = ۲ \, , \, \frac{y}{۲} = \frac{z-۵}{۳}$$

۵. این خط از نقطهٔ $P_۱$ می‌گذرد و با بردار $\overrightarrow{P_۱P_۲}=(-۳,۸,-۳)$ موازی است. در نتیجه معادلات پارامتری و متقارن آن به ترتیب عبارت‌اند از:

$$x = ۵ - ۳t \, , \, y = -۲ + ۸t \, , \, z = ۴ - ۳t$$

$$\frac{x-۵}{-۳} = \frac{y+۲}{۸} = \frac{z-۴}{-۳}$$

۶. این خط از نقطهٔ $P_۱$ $(-۱,۱,۰)$ می‌گذرد و با بردار $\overrightarrow{P_۱P_۲}=(۰,۴,۷)$ موازی است. بنابراین معادلات متقارن آن به صورت زیر هستند.

$$x = -۱ \, , \, \frac{y-۱}{۴} = \frac{z}{۷}$$

۷. این خط موازی با بردار $\vec{a}=(۴,۲,۱)$ است. پس معادلات متقارن آن به صورت زیر هستند.

$$\frac{x-۳}{۴} = \frac{y+۱}{۲} = z - ۲$$

۸. خطی که از دو نقطهٔ $P_1(0,0,5)$ ، $P_2(1,-1,4)$ می‌گذرد با بردار $\overrightarrow{P_1P_2}=(1,-1,-1)$ موازی است. خط $\frac{x}{7}=\frac{y-3}{4}=\frac{z+9}{3}$ با بردار $\vec{a}=(7,4,3)$ موازی است. چون

$$\vec{a}.\overrightarrow{P_1P_2}=(7,4,3).(1,-1,-1)=7-4-3=0$$

این دو خط بر هم عمود هستند.

۹. بردار $\vec{a}=(-3,8,-3)$ موازی با خط داده شده در تمرین ۵ است. چون $\overrightarrow{P_1P_0}=(5,0,-4)-(5,-2,4)=(0,2,-8)$ ، داریم

$$\vec{a}\times\overrightarrow{P_1P_0}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-3&8&-3\\0&2&-8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}8&-3\\2&-8\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-3&-3\\0&-8\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-3&8\\0&2\end{vmatrix}k$$

$$=-58\vec{i}-24\vec{j}-6\vec{k}$$

در نتیجه

$$d=\frac{|\vec{a}\times\overrightarrow{P_1P_0}|}{|\vec{a}|}=\frac{\sqrt{3364+576+36}}{\sqrt{9+64+9}}=\frac{\sqrt{3976}}{\sqrt{82}}=\frac{2\sqrt{497}}{\sqrt{41}}$$

۱۰. بردار $\vec{a}=(0,1,1)$ موازی با این خط است و نقطهٔ $P_0(-2,-1,0)$ روی خط قرار دارد. چون $\overrightarrow{P_0P_1}=(4,2,0)$ ، داریم

$$\vec{a}\times\overrightarrow{P_0P_1}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\0&1&1\\4&2&0\end{vmatrix}=-2\vec{i}+4\vec{j}-4\vec{k}$$

در نتیجه

$$d=\frac{|\vec{a}\times\overrightarrow{P_0P_1}|}{|\vec{a}|}=\frac{\sqrt{4+16+16}}{\sqrt{0+1+1}}=\frac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$$

۱۱. این دو خط وقتی یکدیگر را قطع می‌کنند که دستگاه سه معادلهٔ دو مجهولی

$$\begin{cases}1+2t=4-s\\1-4t=-1+6s\\5-t=4+s\end{cases}$$

دارای جواب باشد. با حل کردن دستگاه دو معادلهٔ اول نتیجه می‌گیریم که $t=2$ و $s=-1$. چون این مقادیر در معادلهٔ سوم نیز صدق می‌کنند، پس جواب این دستگاه هستند. با قرار دادن $t=2$ در معادلات پارامتری خط اول، نقطهٔ مشترک این دو خط برابر $(5,-7,3)$ به دست می‌آید.

۱۲. این دو خط وقتی متقاطع هستند که دستگاه

$$\begin{cases} ۳+t=۴-s \\ ۳+۲t=۳+s \\ t=-۲+۳s \end{cases}$$

جواب داشته باشد. با حل کردن دستگاه دو معادلهٔ اول، مقادیر $t=\frac{۱}{۳}$ و $s=\frac{۲}{۳}$ به دست می‌آیند. چون این مقادیر در معادلهٔ سوم صدق نمی‌کنند، دستگاه فوق جواب ندارد. در نتیجه دو خط داده شده متقاطع نیستند.

۱۳. بردارهای $\vec{a}=(۲,-۴,-۱)$ و $\vec{b}=(-۱,۶,۱)$ به ترتیب موازی با دو خط داده شده هستند. پس کسینوس زاویهٔ بین این دو خط برابر است با

$$\cos\theta_{ab}=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}=\frac{-۲-۲۴-۱}{\sqrt{۴+۱۶+۱}\sqrt{۱+۳۶+۱}}=\frac{-۲۷}{\sqrt{۷۹۸}}$$

۱۴. بردارهای $\vec{a}=(۱,۲,۱)$ و $\vec{b}=(-۱,۱,۳)$ به ترتیب موازی با این دو خط هستند. پس

$$\cos\theta_{ab}=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}=\frac{-۱+۲+۳}{\sqrt{۱+۴+۱}\sqrt{۱+۱+۹}}=\frac{۴}{\sqrt{۶۶}}$$

تمرینهای ۵.۴

۱. معادلهٔ این صفحه عبارت است از $-۴(x+۱)+۱۵(y-۲)-\frac{۱}{۲}(z-۳)=۰$ یا $-۴x+۱۵y-\frac{۱}{۲}z-۳۲\frac{۱}{۲}=۰$ یا $۸x-۳۰y+z+۶۵=۰$.

۲. معادلهٔ این صفحه به صورت زیر است:

$۲(x-\pi)+۳(y-۰)-۴(z+\pi)=۰$ یا $۲x+۳y-۴z=۶\pi$.

۳. داریم $\overrightarrow{P_۰P_۱}=(۳,۴,۱)$ و $\overrightarrow{P_۰P_۲}=(۰,۵,-۱)$ و در نتیجه

$$\vec{N}=\overrightarrow{P_۰P_۱}\times\overrightarrow{P_۰P_۲}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ ۳ & ۴ & ۱ \\ ۰ & ۵ & -۱ \end{vmatrix}=-۹\vec{i}+۳\vec{j}+۱۵\vec{k}$$

پس معادلهٔ این صفحه عبارت است از $-۹(x-۲)+۳(y+۱)+۱۵(z-۴)=۰$ یا $۹x-۳y-۱۵z+۳۹=۰$.

۴. خط داده شده با بردار $\vec{a}=(۱,۱,۲)$ موازی است و از نقطهٔ $P_۱(-۲,-۱,-۵)$ می‌گذرد. در نتیجه بردار $\vec{N}=\vec{a}\times\overrightarrow{P_۰P_۱}$ قائم بر صفحهٔ مورد نظر است. چون $\overrightarrow{P_۰P_۱}=(-۳,۰,-۷)$ و در نتیجه

$$\overrightarrow{N}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ ۱ & ۱ & ۲ \\ -۳ & ۰ & -۷ \end{vmatrix}=-۷\vec{i}+\vec{j}+۳k$$

معادلهٔ این صفحه عبارت است از $-۷(x-۱)+(y+۱)+۳(z-۲)=۰$ یا $۷x-y-۳z=۲$.

۵. بردار $\overrightarrow{N}=(۲,۵,۹)$ که با خط داده شده موازی است، قائم بر صفحهٔ مورد نظر است. بنابراین معادله این صفحه عبارت است از $۲(x-۲)+۵(y-\frac{۱}{۲})+۹(z-\frac{۱}{۳})=۰$ یا $۴x+۱۰y+۱۸z=۱۹$.

۶. خط مورد نظر با بردار قائم $\overrightarrow{N_۲}=(۲,-۳,۴)$ بر صفحهٔ داده شده، موازی است. در نتیجه معادلات پارامتری این خط عبارت‌اند از:

$$x=۲+۲t\,,\ y=-۱-۳t\,,\ z=۴t$$

۷. با قرار دادن $z=۰$ در معادلات دو صفحهٔ داده شده، نقطهٔ $(۱,۰,۰)$ از خط l به دست می‌آید. بردارهای قائم بر این دو صفحه به ترتیب عبارت‌اند از $\overrightarrow{N_۱}=(۱,۰,-۱)$ و $\overrightarrow{N_۲}=(۲,-۳,۴)$. خط l با بردار

$$\overrightarrow{N_۱}\times\overrightarrow{N_۲}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ ۱ & ۰ & -۱ \\ ۲ & -۳ & ۴ \end{vmatrix}=-۳\vec{i}-۶\vec{j}-۳\vec{k}$$

موازی است. در نتیجه معادلات پارامتری l عبارت‌اند از:

$$x=۱-۳t\,,\ y=-۶t\,,\ z=-۳t$$

۸. معادلات پارامتری خط داده شده عبارت‌اند از:

$$x=-۱+۲t\,,\ y=-۳+۳t\,,\ z=-t$$

این عبارتها را به جای x، y و z در معادلهٔ $۲x-۳y+۴z=۲$ قرار می‌دهیم و آن را نسبت به t حل می‌کنیم. داریم $۲(-۱+۲t)-۳(-۳+۳t)-۴t=۲$ و در نتیجه $t=\frac{۵}{۹}$. پس نقطهٔ تلاقی این خط و صفحه برابر $(\frac{۱}{۹},-\frac{۴}{۳},-\frac{۵}{۹})$ است.

۹. فاصلهٔ نقطهٔ P از صفحهٔ داده شده برابر است با

$$h=\frac{|۶+۱+۴-۵|}{\sqrt{۹+۱+۴}}=\frac{۶}{\sqrt{۱۴}}=\frac{۳\sqrt{۱۴}}{۷}$$

۱۰. دو بردار قائم بر این دو صفحه به ترتیب عبارت‌اند از $\overrightarrow{N_۱}=(۲,-۳,۴)$ و $\overrightarrow{N_۲}=(۴,-۶,۸)$. چون $\overrightarrow{N_۲}=۲\overrightarrow{N_۱}$، این دو بردار، و در نتیجه دو صفحهٔ داده شده، موازی یکدیگر هستند.

۱۱. با حل کردن دستگاه

$$\begin{cases} x+y=۱ \\ y+z=۲ \\ x+z=۳ \end{cases}$$

نقطهٔ تلاقی این سه صفحه برابر با $(۱,۰,۲)$ به دست می‌آید.

تمرینهای فصل ۵

تمرینهای ۱.۵

۱. داریم

$$\begin{aligned}۳w &= v+۲u\\ &=(۱,۲,۰,-۱)+۲(۲,۰,۱,۰)\\ &=(۱,۲,۰,-۱)+(۴,۰,۲,۰)=(۵,۲,۲,-۱)\end{aligned}$$

در نتیجه

$$w=\frac{۱}{۳}(۵,۲,۲,-۱)=\left(\frac{۵}{۳},\frac{۲}{۳},\frac{۲}{۳},-\frac{۱}{۳}\right)$$

۲.

$$\begin{aligned}|u| &= |(۲,۰,۱,۰)| =\sqrt{۴+۰+۱+۰}=\sqrt{۵}\\ |v| &= |(۱,۲,۰,-۱)| =\sqrt{۱+۴+۰+۱}=\sqrt{۶}\\ |u+v| &= |(۲,۰,۱,۰)+(۱,۲,۰,-۱)|\\ &= |(۳,۲,۱,-۱)| =\sqrt{۹+۴+۱+۱}=\sqrt{۱۵}\end{aligned}$$

۳. فرض کنیم $u = (a_۱, a_۲,\ldots, a_n)$. در این صورت

$$\begin{aligned}|\alpha u| &= |\alpha(a_۱,a_۲,\ldots,a_n)|\\ &= |(\alpha a_۱,\alpha a_۲,\ldots,\alpha a_n)| =\sqrt{\alpha^۲a_۱^۲+\alpha^۲a_۲^۲+\ldots+\alpha^۲a_n^۲}\\ &=\sqrt{\alpha^۲(a_۱^۲+a_۲^۲+\ldots+a_n^۲)}\\ &=|\alpha|\sqrt{a_۱^۲+a_۱^۲+\ldots.+a_n^۲}=|\alpha|\ |u|\end{aligned}$$

۴. فرض کنیم $\alpha u = \theta$ و $\alpha \neq ۰$. در این صورت $۱/\alpha$ وجود دارد و

$$\frac{۱}{\alpha}(\alpha u)=\frac{۱}{\alpha}\theta$$
$$\left(-\frac{۱}{\alpha}\alpha\right) u=\theta$$
$$۱u=\theta$$
$$u=\theta$$

تمرینهای ۲.۵

۱. بنابه تعریف تساوی دو ماتریس، داریم $۲x + ۱ = ۲$ ، $y = y$، $z = ۸$، پس اگر $x = \frac{۱}{۲}$، $z = ۸$ و y هر عدد حقیقی باشد، آنگاه دو ماتریس داده شده برابر هستند.

۲. بنابر تعریف تساوی دو ماتریس، داریم $۲a+۳=a-۵$ ، $۲b-۲=b+۱$ ، $c+۱=۲c+۳$، $a = -۸$ و $۲d = d$. معادلهٔ $۲d = d$ نشان می‌دهد که $d = ۰$. معادلات $۲a + ۳ = a - ۵$ و $a = -۸$ نشان می‌دهند که $a = -۸$. با حل کردن معادلات دیگر، $b = ۳$ و $c = -۲$ به دست می‌آیند.

۳.

$$A+B=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -۱ & ۳ & ۰ \\ ۲ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲-۱ & -۱+۳ & ۳+۰ \\ ۰+۲ & ۱-۱ & ۲+۱ \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$$

$$۲A+۳B=۲\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}+۳\begin{bmatrix} -۱ & ۳ & ۰ \\ ۲ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} ۴ & -۲ & ۶ \\ ۰ & ۲ & ۴ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -۳ & ۹ & ۰ \\ ۶ & -۳ & ۳ \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} ۱ & ۷ & ۶ \\ ۶ & -۱ & ۷ \end{bmatrix}$$

$$۳A-۲B=\begin{bmatrix} ۶ & -۳ & ۹ \\ ۰ & ۳ & ۶ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} +۲ & -۶ & ۰ \\ -۴ & +۲ & -۱ \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} ۸ & -۹ & ۹ \\ -۴ & ۵ & ۵ \end{bmatrix}$$

$$A+2(B-A)=A+2B-2A=2B-A$$
$$=2\begin{bmatrix}-1 & 3 & 0\\ 2 & -1 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}-2 & 6 & 0\\ 4 & -2 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 1 & -3\\ 0 & -1 & -2\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}0 & 7 & -3\\ 4 & -3 & 0\end{bmatrix}$$

۴. داریم

$$2C=\begin{bmatrix}1 & 4 & 5\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}0 & 3 & 4\\ -2 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

پس

$$C=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & 3 & 4\\ -2 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \frac{3}{2} & 2\\ -1 & 1 & 0\\ 1/2 & -1/2 & 1/2\end{bmatrix}$$

۵. روشن است که

$$2(-A+3B)+3D=A\Rightarrow -2A+6B+3D=A$$
$$\Rightarrow 3D=A+2A-6B=3A-6B$$
$$\Rightarrow D=A-2B$$

پس

$$D=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}-1 & 3 & 0\\ 2 & -1 & 1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & -6 & 0\\ -4 & 2 & -2\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}4 & -7 & 3\\ -4 & 3 & 0\end{bmatrix}$$

.۶

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & ۵ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰.۰+۱.۱ & ۰.۰+۱.۵ \\ ۲.۰+۳.۱ & ۲.۰+۳.۵ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ۱ & ۵ \\ ۳ & ۱۵ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۵ & -۲ \\ ۰ & \sqrt{۲} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۵+۰ & -۲+۲\sqrt{۲} \\ ۱۵+۰ & -۶+\sqrt{۲} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ۵ & -۲+۲\sqrt{۲} \\ ۱۵ & -۶+\sqrt{۲} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۳ \\ -۲ \\ ۰ \end{bmatrix}\cdot[۲ \quad ۱ \quad ۳]=\begin{bmatrix} ۳.۲ & ۳.۱ & ۳.۳ \\ -۲.۲ & -۲.۱ & -۲.۳ \\ ۰.۲ & ۰.۱ & ۰.۳ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ۶ & ۳ & ۹ \\ -۴ & -۲ & -۶ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۰ \\ ۳ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱+۰+۰ & ۰+۰+۱ & ۱+۰+۰ \\ ۰+۱+۰ & ۰+۰+۰ & ۲+۱+۰ \\ ۰+۱+۰ & ۰+۰+۰ & ۳+۱+۰ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۳ \\ ۱ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$$

.۷

$$A(B+C)=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ ۶ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۶-۶ & -۴-۱ \\ ۰+۶ & ۰+۱ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ۵ & -۵ \\ ۶ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$(AB)C=\left(\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} -۱ & -۴ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱۳ & ۵ \\ ۱۲ & -۵ \end{bmatrix}$$

$$(AC)^T=C^TA^T=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix}^T\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}^T$$
$$=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix}$$

$$A^T(BC)=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}^T\left(\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix}\right)$$
$$=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۱۲ & -۵ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۲ & ۰ \\ ۱۳ & -۵ \end{bmatrix}$$

۸. ازمعادلهٔ ماتریسی داده شده، دستگاه معادلات

$$\begin{aligned} x + ۵y &= ۱ \\ ۲x + ۵y &= ۴ \end{aligned}$$

به دست می‌آید. چون $x = ۳$، $y = -\frac{۲}{۵}$ جواب این دستگاه است، پس

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ \\ -\frac{۲}{۵} \end{bmatrix}$$

جواب معادلهٔ ماتریسی داده شده است.

۹. داریم

$$x^۲=\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ -۲ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ -۲ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۷ & ۳ \\ -۶ & -۲ \end{bmatrix}$$

در نتیجه

$$x^{۲}-۳x+۲I=\begin{bmatrix} ۷ & ۳ \\ -۶ & -۲ \end{bmatrix} -۳\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ -۲ & ۰ \end{bmatrix} +۲\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ۷ & ۳ \\ -۶ & -۲ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۹ & -۳ \\ ۶ & ۰ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ۷-۹+۲ & ۳-۳+۰ \\ -۶+۶+۰ & -۲+۰+۲ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس داده شدهٔ X در معادلهٔ $X^۲ - ۳X + ۲I = ۰$ صدق می‌کند.

۱۰. داریم

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱-۱ \\ -۱+۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱-۱ \\ -۱+۱ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

۱۱. داریم

$$AB=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۲ & ۵ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۵ & ۳ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۵+۶ \\ -۱۰+۱۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۳-۳ \\ ۶-۵ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = I$$

به همین ترتیب

$$BA=\begin{bmatrix} -۵ & ۳ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۲ & ۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = I$$

۱۲. چون $(AA^T)^T=(AT)^TA^T=AA^T$ پس AA^T متقارن است.

۱۳. چون

$$AA^T=\begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & \frac{\sqrt{۳}}{۲} \\ -\frac{\sqrt{۳}}{۲} & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & -\frac{\sqrt{۳}}{۲} \\ \frac{\sqrt{۳}}{۲} & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{۱}{۴}+\frac{۳}{۴} & -\frac{\sqrt{۳}}{۴}+\frac{\sqrt{۳}}{۴} \\ -\frac{\sqrt{۳}}{۴}+\frac{\sqrt{۳}}{۴} & \frac{۳}{۴}+\frac{۱}{۴} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

پس A متعامد است. همچنین

$$BB^T=\begin{bmatrix} \frac{۱}{\sqrt{۲}} & -\frac{۱}{\sqrt{۲}} \\ \frac{۱}{\sqrt{۲}} & \frac{۱}{\sqrt{۲}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{۱}{\sqrt{۲}} & \frac{۱}{\sqrt{۲}} \\ -\frac{۱}{\sqrt{۲}} & \frac{۱}{\sqrt{۲}} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

در نتیجه B متعامد است. همچنین، چون

$$CC^T=\begin{bmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha & -\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha \\ -\sin\alpha\cos\alpha+\sin\alpha\cos\alpha & \cos^۲\alpha+\sin^۲\alpha \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

C متعامد است. چون

$$DD^T=\begin{bmatrix} ۲/۳ & -۲/۳ & -۱/۳ \\ ۱/۳ & ۲/۳ & -۲/۳ \\ ۲/۳ & ۱/۳ & ۲/۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲/۳ & ۱/۳ & ۲/۳ \\ -۲/۳ & ۲/۳ & ۱/۳ \\ -۱/۳ & -۲/۳ & ۲/۳ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ۴/۹+۴/۹+۱/۹ & ۲/۹-۴/۹+۲/۹ & ۴/۹-۲/۹-۲/۹ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}=I$$

پس D نیز متعامد است. درپایان، چون $II^T=II=I$، ماتریس‌همانی I یک ماتریس متعامد است.

۱۴. می‌دانیم که A متعامد است اگر و تنها اگر $AA^T=I$؛ یعنی اگر و تنها اگر

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^۲+b^۲ & ac+bd \\ ac+bd & c^۲+d^۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

پس A متعامد اگر و تنها اگر $a^۲+b^۲=c^۲+d^۲=۱$ و $ac+bd=۰$.

تمرینهای ۳.۵

۱. احکام قضیهٔ ۹.۳.۵ برای ماتریسهای ۲×۲ را در مورد سطرهای آن ثابت می‌کنیم. اثبات این احکام در مورد ستونهای ماتریسهای ۲×۲ نیز به همین ترتیب انجام می‌شود.

(۱)
$$\begin{vmatrix} a & b \\ ۰ & ۰ \end{vmatrix} = a.۰-b.۰=۰$$

(۲) فرض کنیم α یک اسکالر باشد، در این صورت

$$\begin{vmatrix} aa & ab \\ c & d \end{vmatrix} = aad-abc=a(ad-bc)$$
$$=a\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

(۳) اگر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$، آنگاه

$$\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = cb-ad=-(ad-bc)=-\det A$$

(۴)
$$\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = ab-ba=۰$$

(۵) فرض کنیم $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و α یک اسکالر باشد. در این صورت

$$\begin{vmatrix} a+\alpha c & b+\alpha d \\ c & d \end{vmatrix} = (a+\alpha c)d-c(b+\alpha d)$$
$$=ad+\alpha cd-bc-\alpha cd$$
$$=ad-bc=\det A$$

(۶) فرض کنیم

$$B=\begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} \qquad A=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$$

در این صورت، چون

$$AB=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1b_1+a_2b_3 & a_1b_2+a_2b_4 \\ a_3b_1+a_4b_3 & a_3b_2+a_4b_4 \end{bmatrix}$$

پس

$$|AB|=(a_1b_1+a_2b_3)(a_3b_2+a_4b_4)-(a_1b_2+a_2b_4)(a_3b_1+a_4b_3)$$
$$=a_1b_1a_4b_4+a_2b_3a_3b_2-a_1b_2a_4b_3-a_2b_4a_3b_1$$

که برابر است با

$$(a_1a_4-a_2a_3)(b_1b_4-b_2b_3)=|A|\ |B|$$

(۷)
$$\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix}=ab-0.0=ab$$

(۸) فرض کنیم $A=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$. در این صورت

(۹) روشن است که
$$|A^T|=\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}=ad-bc=|A|$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1$$

۲. (الف)
$$\begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=8.1-0.2=8$$

(ب)
$$\begin{vmatrix} a-b & 0 \\ 1 & c-d \end{vmatrix}=(a-b)(c-d)$$

۳. چون

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۳ \\ x & -۲ \end{vmatrix} = -۲-۳x=۰$$

پس $x = -\frac{۲}{۳}$.

۴. داریم

$$\begin{vmatrix} x & ۲ \\ ۸ & x \end{vmatrix} = x^۲-۱۶$$

باحل کردن نامعادلهٔ $x^۲-۱۶>۰$ نتیجه می‌گیریم که $x>۴$ یا $x<-۴$.

۵. چون

$$A+B=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & ۵ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۱ & ۶ \end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & ۵ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}$$

پس $|AB| = ۳$ و $|A+B|=۱۲$.

۶. چون

$$xI-A=\begin{bmatrix} x & ۰ \\ ۰ & x \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x-a & -b \\ -c & x-d \end{bmatrix}$$

پس

$$|xI-A|=(x-a)(x-d)-bc=x^۲-(a+d)x+(ad-bc)$$

۷. با توجه به حل تمرین ۶، داریم

$$\begin{aligned} \det(xI-A) &= x^۲-(۱+۳)x+(-۳+۳) \\ &= x^۲-۴x \end{aligned}$$

ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-۴x=۰$ عبارت‌اند از $x=۰$ و $x=۴$.

۸.

$$\begin{vmatrix} ۴ & ۲ & ۱ \\ ۳ & -۱ & ۲ \\ ۱ & ۰ & ۲ \end{vmatrix} \overset{R_۱+۲R_۲}{=} \begin{vmatrix} ۱۰ & ۰ & ۵ \\ ۳ & -۱ & ۲ \\ ۱ & ۰ & ۲ \end{vmatrix} = -۱(-۱)^{۲+۲}\begin{vmatrix} ۱۰ & ۵ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix}$$

$$=-(۲۰-۵)=-۱۵$$

$$\begin{vmatrix} -۱ & ۳ & ۲ \\ ۱ & ۰ & ۴ \\ ۹ & ۵ & ۳ \end{vmatrix} \underset{R_۳+۹R_۱}{\overset{R_۲+R_۱}{=}} \begin{vmatrix} -۱ & ۳ & ۲ \\ ۰ & ۳ & ۶ \\ ۰ & ۳۲ & ۲۱ \end{vmatrix} = -۱ \begin{vmatrix} ۳ & ۶ \\ ۳۲ & ۲۱ \end{vmatrix}$$

$$= -۱(۶۳-۱۹۲) = ۱۲۹$$

۹. بنابر مسألهٔ نمونه‌ای ۱۱.۳.۴، حجم این متوازی السطوح برابر است با $|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})|$. چون

$$\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c}) = a_۱ \begin{vmatrix} b_۲ & b_۳ \\ c_۲ & c_۳ \end{vmatrix} - a_۲ \begin{vmatrix} b_۱ & b_۳ \\ c_۱ & c_۳ \end{vmatrix} + a_۳ \begin{vmatrix} b_۱ & b_۲ \\ c_۱ & c_۲ \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_۱ & a_۲ & a_۳ \\ b_۱ & b_۲ & b_۳ \\ c_۱ & c_۲ & c_۳ \end{vmatrix}$$

پس حکم مسأله اثبات شده است.

۱۰. با توجه به حل تمرین ۹، داریم

$$\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_۱ & a_۲ & a_۳ \\ b_۱ & b_۲ & b_۳ \\ c_۱ & c_۲ & c_۳ \end{vmatrix}$$

$$(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{c} = \vec{c}.(\vec{a}\times\vec{b}) = \begin{vmatrix} c_۱ & c_۲ & c_۳ \\ a_۱ & a_۲ & a_۳ \\ b_۱ & b_۲ & b_۳ \end{vmatrix}$$

$$R_۱ \leftrightarrow R_۲ = - \begin{vmatrix} a_۱ & a_۲ & a_۳ \\ c_۱ & c_۲ & c_۳ \\ b_۱ & b_۲ & b_۳ \end{vmatrix}$$ (تعویض سطر اول با سطر دوم)

$R_۲ \leftrightarrow R_۳$ (تعویض سطر دوم با سطر سوم)

$$= -(-۱) \begin{vmatrix} a_۱ & a_۲ & a_۳ \\ b_۱ & b_۲ & b_۳ \\ c_۱ & c_۲ & c_۳ \end{vmatrix}$$

$$= \vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})$$

۱۱. اگر دترمینان داده شده را نسبت به ستون سوم بسط دهیم، عبارت مورد نظر به دست می‌آید.

۱۲. چون

$$ADEC \text{ مساحت } = \frac{۱}{۲}(EC+AD)DE = \frac{۱}{۲}(c_۲+a_۲)(c_۱-a_۱)$$

$$CEFB \text{ مساحت } = \frac{۱}{۲}(b_۲+c_۲)(b_۱-c_۱)$$

$$ADFB \text{ مساحت } = \frac{۱}{۲}(b_۲+a_۲)(b_۱-a_۱)$$

پس مساحت مثلث ABCبرابر است با قدر مطلق عبارت زیر

$$\begin{aligned}
&\frac{۱}{۲}(c_۲+a_۲)(c_۱-a_۱)+\frac{۱}{۲}(b_۲+c_۲)(b_۱-c_۱)-\frac{۱}{۲}(b_۲+a_۲)(b_۱-a_۱)\\
&= -\frac{۱}{۲}(a_۱c_۲-a_۲c_۱)+\frac{۱}{۲}(b_۱c_۲-b_۲c_۱)+\frac{۱}{۲}(a_۱b_۲-a_۲b_۱)\\
&= -\frac{۱}{۲}\begin{vmatrix} a_۱ & a_۲ \\ c_۱ & c_۲ \end{vmatrix}+\frac{۱}{۲}\begin{vmatrix} b_۱ & b_۲ \\ c_۱ & c_۲ \end{vmatrix}+\frac{۱}{۲}\begin{vmatrix} a_۱ & a_۲ \\ b_۱ & b_۲ \end{vmatrix}\\
&= \frac{۱}{۲}\begin{vmatrix} a_۱ & a_۲ & ۱ \\ b_۱ & b_۲ & ۱ \\ c_۱ & c_۲ & ۱ \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

۱۳. با توجه به تمرین ۱۲، چون

$$\begin{vmatrix} ۲ & ۳ & ۱ \\ ۵ & ۴ & ۱ \\ ۴ & ۷ & ۱ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۵ & ۴ \\ ۴ & ۷ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ ۴ & ۷ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ ۵ & ۴ \end{vmatrix}$$

$$=(۳۵-۱۶)-(۱۴-۱۲)+(۸-۱۵)$$
$$=۱۹-۲-۷=۱۰$$

مساحت مثلث داده شده برابر است با $۵ = \frac{۱۰}{۲}$.

۱۴. مساحت این مثلث برابر است با قدر مطلق عبارت

$$\frac{۱}{۲}\begin{vmatrix} x & y & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۱ \\ ۳ & ۱ & ۱ \end{vmatrix} = \frac{۱}{۲}\left(\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۱ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & y \\ ۳ & ۱ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix} \right)$$

$$= \frac{۱}{۲}[(۱-۶)-(x-۳y)+(۲x-y)]$$

$$= \frac{۱}{۲}(-۵-x+۳y+۲x-y)$$

$$= \frac{۱}{۲}(x+۲y-۵)$$

۱۵. با توجه به حل تمرین ۱۴، معادلهٔ خط مورد نظر عبارت است از $\frac{۱}{۲}(x+۲y-۵)=۰$ یا $x+۲y=۵$.

۱۶. چون

$$\begin{vmatrix} a_۱ & b_۱ & c_۱ \\ a_۲ & b_۲ & c_۲ \\ a_۳ & b_۳ & c_۳ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ & -۲ & -۳ \\ ۳ & -۱ & ۱ \\ ۵ & -۲ & ۱ \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -۱ & ۱ \\ -۲ & ۱ \end{vmatrix} + ۲\begin{vmatrix} ۳ & ۱ \\ ۵ & ۱ \end{vmatrix} - ۳\begin{vmatrix} ۳ & -۱ \\ ۵ & -۲ \end{vmatrix}$$

$$=(-۱+۲)+۲(۳-۵)-۳(-۶+۵)$$

$$=۱-۴+۳=۰$$

سه خط داده شده از یک نقطه می‌گذرند.

۱۷. داریم

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۵ \\ ۱ & x & ۵ \\ ۳ & -۱ & ۲ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & ۵ \\ -۱ & ۲ \end{vmatrix} - ۲\begin{vmatrix} ۱ & ۵ \\ ۳ & ۲ \end{vmatrix} + ۵\begin{vmatrix} ۱ & x \\ ۳ & -۱ \end{vmatrix}$$

$$=۲x+۵-۲(۲-۱۵)+۵(-۱-۳x)$$

$$=۲x+۵+۲۶-۵-۱۵x$$

$$=-۱۳x+۲۶$$

جواب معادلهٔ $-۱۳x+۲۶=۰$ برابر است با $x=۲$.

۱۸. داریم

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & -۳ \\ ۱ & x & ۵ \\ ۳ & -۱ & ۲ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & -۳ \\ -۱ & ۲ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} ۲ & -۳ \\ ۴ & -۸ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ۲ & -۳ \\ x & -۳ \end{vmatrix}$$

$$=(x^{۲}+۱۲)-(-۱۶+۱۲)+(-۶+۳x)$$

$$=-x^{۲}+۳x+۱۰$$

جوابهای معادلهٔ $-x^{۲}+۳x+۱۰=۰$ عبارت‌اند از $x=-۲$ و $x=۵$.

.۱۹

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۵ \\ ۰ & ۲ & ۱ & ۱ \\ -۱ & ۱ & ۲ & ۰ \\ ۴ & ۰ & ۱ & ۲ \end{vmatrix} \underset{R_{۴}-۴R_{۱}}{\overset{R_{۳}+R_{۱}}{=}} \begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۵ \\ ۰ & ۲ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۳ & ۵ & ۵ \\ ۰ & -۸ & -۱۱ & -۱۸ \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ ۳ & ۵ & ۵ \\ -۸ & -۱۱ & -۱۸ \end{vmatrix} \overset{R_{۲}-۵R_{۱}}{=} \begin{vmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ -۷ & ۰ & ۰ \\ -۸ & -۱۱ & -۱۸ \end{vmatrix}$$

$$=-۷(-۱)^{۲+۱} \begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱۱ & -۱۸ \end{vmatrix} = ۷(-۱۸+۱۱)=-۴۹$$

۲۰. چون ستون اول دترمینان داده شده با ستون سوم آن برابر است، این دترمینان صفر است.

تمرینهای ۴.۵

۱. روش تحویل سطری:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} ۱ & ۲ & ۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۰ & ۱ \end{array}\right] \xrightarrow{R_{۲}-۲R_{۱}} \left[\begin{array}{cc|cc} ۱ & ۲ & ۱ & ۰ \\ ۰ & -۳ & -۲ & ۱ \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{۱}{۳}R_{۲}} \left[\begin{array}{cc|cc} ۱ & ۲ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۲/۳ & -۱/۳ \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_{۱}-۲R_{۲}} \left[\begin{array}{cc|cc} ۱ & ۰ & -۱/۳ & ۲/۳ \\ ۰ & ۱ & ۲/۳ & -۱/۳ \end{array}\right]$$

در نتیجه

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}^{-۱} = \begin{bmatrix} -۱/۳ & ۲/۳ \\ ۲/۳ & -۱/۳ \end{bmatrix}$$

روش الحاقی: ماتریس همسازه‌های A برابر است با

$$B = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

پس ماتریس الحاقی ماتریس A برابر است با ترانهادهٔ B، یعنی

$$\mathrm{adj}A = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

در نتیجه

$$A^{-۱} = \frac{۱}{|A|}\,\mathrm{adj}A = \frac{۱}{-۳}\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{۱}{۳} & \frac{۲}{۳} \\ ۲/۳ & -۱/۳ \end{bmatrix}$$

۲. روش تحویل سطری:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} -۱ & ۲ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۳ & ۰ & ۱ \end{array}\right] \xrightarrow{-R_۱} \left[\begin{array}{cc|cc} ۱ & -۲ & -۱ & ۰ \\ ۱ & ۳ & ۰ & ۱ \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_۲-R_۱} \left[\begin{array}{cc|cc} ۱ & -۲ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۵ & ۱ & ۱ \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{۱}{۵}R_۲} \left[\begin{array}{cc|cc} ۱ & -۲ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱/۵ & ۱/۵ \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_۱+۲R_۲} \left[\begin{array}{cc|cc} ۱ & ۰ & -۳/۵ & ۲/۵ \\ ۰ & ۱ & ۱/۵ & ۱/۵ \end{array}\right]$$

در نتیجه

$$A^{-۱} = \begin{bmatrix} -۳/۵ & ۲/۵ \\ ۱/۵ & ۱/۵ \end{bmatrix}$$

روش الحاقی: ماتریس همسازه‌ها برابر است با

$$\begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ -۲ & -۱ \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$A^{-۱}=\frac{۱}{|A|}\operatorname{adj}A=\frac{۱}{-۵}\begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{۳}{۵} & \frac{۲}{۵} \\ ۱/۵ & ۱/۵ \end{bmatrix}$$

۳. روشن است که هر دو عدد $\cos\theta$ و $\sin\theta$ همزمان صفر نیستند. فرض می‌کنیم $\cos\theta\neq ۰$. داریم

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \cos\theta & -\sin\theta & ۱ & ۰ \\ -\sin\theta & -\cos\theta & ۰ & ۱ \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{۱}{\cos\theta}R_۱} \left[\begin{array}{cc|cc} ۱ & -\mathrm{tg}\theta & ۱/\cos\theta & ۰ \\ -\sin\theta & -\cos\theta & ۰ & ۱ \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_۲+\sin\theta R_۱} \left[\begin{array}{cc|cc} ۱ & -\mathrm{tg}\theta & ۱/\cos\theta & ۰ \\ ۰ & -۱/\cos\theta & \mathrm{tg}\theta & ۱ \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-\cos\theta R_۲} \left[\begin{array}{cc|cc} ۱ & -\mathrm{tg}\theta & ۱/\cos\theta & ۰ \\ ۰ & ۱ & -\sin\theta & -\cos\theta \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_۱+\mathrm{tg}\theta R_۲} \left[\begin{array}{cc|cc} ۱ & ۰ & \cos\theta & -\sin\theta \\ ۰ & ۱ & -\sin\theta & -\cos\theta \end{array}\right]$$

در نتیجه

$$A^{-۱}=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$$

روش الحاقی: ماتریس همسازه‌های A برابر است با

$$\begin{bmatrix} -\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

در نتیجه

$$A^{-۱}=\frac{۱}{|A|}\operatorname{adj}A=\frac{۱}{-۱}\begin{bmatrix} -\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$$

۴. روش تحویل سطری:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۲ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & -۱ & ۲ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۰ & ۰ & ۱ \end{array}\right] \xrightarrow[R_۳-R_۱]{R_۲-R_۱} \left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۲ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۳ & ۲ & -۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ & -۱ & ۰ & ۱ \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{۱}{۳} R_۳} \left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۲ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۳ & ۲ & -۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & -۱/۳ & ۰ & ۱/۳ \end{array}\right] \xrightarrow{R_۲-۲R_۳} \left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۲ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۳ & ۰ & -۱/۳ & ۱ & -۲/۳ \\ ۰ & ۰ & ۱ & -۱/۳ & ۰ & ۱/۳ \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{۱}{۳} R_۲} \left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۲ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱/۹ & -۱/۳ & ۲/۹ \\ ۰ & ۰ & ۱ & -۱/۳ & ۰ & ۱/۳ \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_۱-۲R_۱} \left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۰ & ۰ & ۷/۹ & ۲/۳ & -\frac{۴}{۹} \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱/۹ & -۱/۳ & ۲/۹ \\ ۰ & ۰ & ۱ & -۱/۳ & ۰ & ۱/۳ \end{array}\right]$$

در نتیجه

$$A^{-۱} = -\frac{۱}{۹} \begin{bmatrix} -۷ & -۶ & ۴ \\ -۱ & ۳ & -۲ \\ ۳ & ۰ & -۳ \end{bmatrix}$$

روش الحاقی: ماتریس همسازه‌های A برابر است با

$$\begin{bmatrix} -۷ & -۱ & ۳ \\ -۶ & ۳ & ۰ \\ ۴ & -۲ & -۳ \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$A^{-۱} = \frac{۱}{|A|} \operatorname{adj} A = -\frac{۱}{۹} \begin{bmatrix} -۷ & -۶ & ۴ \\ -۱ & ۳ & -۲ \\ ۳ & ۰ & -۳ \end{bmatrix}$$

۵. روش تحویل سطری:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_4-R_1} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_4+R_2]{R_1-R_2} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3-R_4} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

در نتیجه

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

روش الحاقی: ماتریس همسازه‌های A برابر است با

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

پس

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\,\mathrm{adj}A=\frac{1}{1}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

۶. روش تحویل سطری:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۱ & ۲ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \end{array}\right] \xrightarrow[R_۲-۲R_۱]{R_۲-R_۱} \left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۱ & ۲ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -۱ & -۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ & -۳ & -۲ & ۰ & ۱ \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_۳+R_۲]{R_۱-R_۲} \left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۰ & ۳ & ۲ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -۱ & -۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۴ & -۳ & ۱ & ۱ \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{۱}{۴}R_۳} \left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۰ & ۳ & ۲ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -۱ & -۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۳/۴ & -۱/۴ & -۱/۴ \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_۲+R_۳]{R_۱-۳R_۳} \left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۰ & ۰ & -۱/۴ & -۱/۴ & ۳/۴ \\ ۰ & ۱ & ۰ & -۱/۴ & ۳/۴ & -۱/۴ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۳/۴ & -۱/۴ & -۱/۴ \end{array}\right]$$

در نتیجه

$$A^{-۱}=-\frac{۱}{۴}\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & -۳ \\ ۱ & -۳ & ۱ \\ -۳ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

روش الحاقی: ماتریس همسازه‌های A برابر است با

$$B=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & -۳ \\ ۱ & -۳ & ۱ \\ -۳ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$A^{-۱}=\frac{۱}{|A|}\operatorname{adj}A=-\frac{۱}{۴}\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & -۳ \\ ۱ & -۳ & ۱ \\ -۳ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

توجه کنید که چون B متقارن است، ترانهاده‌اش با خودش برابر است.

۷. ماتریس A وارونپذیر است اگر و تنها اگر $|A|\neq ۰$. چون

$$|A| = \begin{vmatrix} ۱ & x \\ x & ۴ \end{vmatrix} = ۴-x^۲$$

پس A وارونپذیر است اگر و تنها اگر $x\neq \pm ۲$. به همین ترتیب چون

$$|B|=\begin{vmatrix} x & -۱ & ۰ \\ -۱ & x & -۱ \\ ۰ & -۱ & x \end{vmatrix}=x\begin{vmatrix} x & -۱ \\ -۱ & x \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -۱ & -۱ \\ ۰ & x \end{vmatrix}=x(x^{۲}-۱)-x$$

$$=x(x^{۲}-۲)$$

پس B وارونپذیر است اگر و تنها اگر $x\neq ۰$، $x\neq\pm\sqrt{۲}$.

۸. روش تحویل سطری:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۳ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \end{array}\right]\xrightarrow[R_۳-۳R_۱]{R_۲-۲R_۱}\left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -۲ & -۲ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -۲ & -۳ & ۰ & ۱ \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_۳-R_۲}\left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -۲ & -۲ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۱ & -۱ & ۱ \end{array}\right]$$

چون یک سطر صفر در نیمهٔ چپ ماتریس مرکب فوق به دست آمد، پس این نیمه به ماتریس همانی تبدیل نخواهد شد. بنابراین وارون A وجود ندارد.

روش دوم این است که نشان دهیم $|A|=۰$. داریم

$$|A|=\begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۰ \\ ۳ & ۱ & ۱ \end{vmatrix}=۱\begin{vmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{vmatrix}+۱\begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & ۱ \end{vmatrix}=۱+(۲-۳)=۰$$

در نتیجه A وارونپذیر نیست.

۹. داریم

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}^{-۱}=\begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ ۱ & -۲ \end{bmatrix}$$

حال این ماتریس را از سمت چپ به دو طرف معادلهٔ داده شده ضرب می‌کنیم. داریم

$$\begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ ۱ & -۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}X=\begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ ۱ & -۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۵ & ۱۰ \end{bmatrix}$$

$$IX=\begin{bmatrix} ۱۴ & ۲۸ \\ -۹ & -۱۸ \end{bmatrix}$$

در نتیجه

$$X=\begin{bmatrix} ۱۴ & ۲۸ \\ -۹ & -۱۸ \end{bmatrix}$$

۱۰. مانند تمرین قبل عمل می‌کنیم. داریم

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ ۱ & -۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۶ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱۷ \\ -۱۱ \end{bmatrix}$$

تمرینهای ۵.۵

۱. ماتریس مرکب حاصل از ماتریس ضرایب این دستگاه و ماتریس ستونی اعداد طرف دیگر معادلات را تشکیل می‌دهیم. سپس روش حذفی گاوسی را به کار می‌بریم. داریم

$$\left[\begin{array}{ccc|c} ۲ & ۴ & ۱ & ۱ \\ ۵ & ۱۳ & ۷ & ۱ \\ ۳ & ۵ & ۰ & ۱ \end{array}\right] \xrightarrow{R_۲-۷R_۱} \left[\begin{array}{ccc|c} ۲ & ۴ & ۱ & ۱ \\ -۹ & -۱۵ & ۰ & -۷ \\ ۳ & ۵ & ۰ & ۱ \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_۲+۳R_۳} \left[\begin{array}{ccc|c} ۲ & ۴ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۴ \\ ۳ & ۵ & ۰ & ۱ \end{array}\right]$$

سطر دوم به این معنی است که $۰x_۱+۰x_۲+۰x_۳=-۴$ یعنی $-۴=۰$ که یک تناقض است. پس این دستگاه جوابی ندارد.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۱ & -۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۱ & ۶ \\ ۱ & ۳ & -۷ & -۷ \end{array}\right] \xrightarrow[R_۳-R_۱]{R_۲-۲R_۱} \left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۱ & -۱ & ۱ \\ ۰ & -۱ & ۳ & ۴ \\ ۰ & ۲ & -۶ & -۸ \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\frac{۱}{۲}R_۳]{-R_۲} \left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۱ & -۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & -۳ & -۴ \\ ۰ & ۱ & -۳ & -۴ \end{array}\right] \xrightarrow[R_۳-R_۲]{R_۱-R_۲} \left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۰ & ۲ & ۵ \\ ۰ & ۱ & -۳ & -۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{array}\right]$$

چون همهٔ سطرها، بجز سطر سوم که به صفر تبدیل شده است، به کار رفته‌اند، عملیات متوقف می‌شود. دستگاه زیر به دست می‌آید

$$x_۱+۲x_۳=۵$$

$$x_۲-۳x_۳=-۴$$

که در آن $x_۳$ هر عدد طبیعی را اختیار می‌کند؛ یعنی $x_۳$ یک مجهول آزاد است. بنابراین مجموعهٔ جوابهای این دستگاه برابر است با

$$\{(x_۱,x_۲,x_۳)\,|\,x_۱=-۲x_۳+۵,\, x_۲=۳x_۳-۴,\, x_۳\in \boldsymbol{R}\} = \{(-۲x_۳+۵\,,\, ۳x_۳-۴\,,\, x_۳)\,|\,x_۳\in \boldsymbol{R}\}$$

به عنوان مثال

$$x_۳=۰\,،\, x_۱=۵\,،\, x_۲=-۴\,؛\, x_۳=۱\,،\, x_۱=۳\,،\, x_۲=-۱$$

دو جواب این دستگاه هستند.

۳.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۰ & -۱ \\ ۳ & ۲ & ۱ & ۰ \end{array}\right] \xrightarrow{R_۳-R_۱} \left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۰ & -۱ \\ ۲ & ۱ & ۰ & -۱ \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_۱-R_۲]{R_۳-R_۲} \left[\begin{array}{ccc|c} -۱ & ۰ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{array}\right]$$

سطرهای اول و دوم به کار رفته‌اند و ضرایب $x_۲$ و $x_۳$ به‌جز در یک سطر به صفر تبدیل شده‌اند مشاهده می‌کنیم که سطر سوم قابل استفاده نیست. پس دستگاه معادلات زیر به دست می‌آید که در آن $x_۱$ مجهول آزاد است.

$$-x_۱+x_۳=۲$$
$$۲x_۱+x_۲=-۱$$

مجموعهٔ جوابهای دستگاه داده شده برابر است با

$$\{(x_۱,x_۲,x_۳)\,|\,x_۳=x_۱+۲,\, x_۲=-۲x_۱-۱,\, x_۱\in \boldsymbol{R}\}=\{(x_۱,\, x_۱+۲\,,\, -۲x_۱-۱)\,|\,x_۱\in \boldsymbol{R}\}$$

۴.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۳ \\ ۱ & ۲ & ۱ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۳ & ۲ & ۳ & ۴ \end{array}\right] \xrightarrow[R_۳-۲R_۱]{R_۲-R_۱} \left[\begin{array}{cccc|c} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & -۲ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & -۲ \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_۳-R_۲]{R_۱-R_۲} \left[\begin{array}{cccc|c} ۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۵ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & -۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{array}\right]$$

چون سطری بدون استفاده باقی نمانده است، عملیات متوقف می‌شود. ضرایب مجهولهای $x_۱$ و $x_۲$ را پاک کردیم، پس $x_۳$ و $x_۴$ هر دو مجهول آزاد هستند. به این ترتیب دستگاه

زیر به دست می‌آید.

$$x_۱+x_۳=۵$$
$$x_۲+x_۴=-۲$$

در نتیجه، مجموعهٔ جوابهای دستگاه داده شده برابر است با

$$\{(x_۱,x_۲,x_۳,x_۴)\,|\,x_۱=۵-x_۳,\ x_۲=-۲-x_۴,x_۳,\ x_۴\in \boldsymbol{R}\}$$
$$=\{(۵-x_۳\ ,\ -۲-x_۴\ ,\ x_۳,\ x_۴)\,|\,x_۳\ ,\ x_۴\in \boldsymbol{R}\ \}$$

به عنوان مثال

$$x_۱=۵\ ،x_۲=-۲\ ،x_۳=۰\ ،x_۴=۰$$

یک جواب دستگاه داده شده است.

۵. وارون ماتریس ضرایب دستگاه را پیدا می‌کنیم.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \end{array}\right] \xrightarrow{R_۲-R_۱} \left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ & -۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_۲\leftrightarrow R_۳} \left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & -۱ & -۱ & ۱ & ۰ \end{array}\right] \xrightarrow[-R_۳]{R_۱-R_۲} \left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & -۱ & ۰ \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_۲-R_۱} \left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & -۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & -۱ & ۰ \end{array}\right]$$

پس وارون ماتریس ضرایب برابر است با

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۱ \\ -۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۱ \\ -۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۲ \\ -۱ \end{bmatrix}$$

یعنی $x_۱=۰$، $x_۲=۲$، $x_۳=-۱$ جواب منحصربه فرد دستگاه داده شده است.

۶. (الف) ماتریس ضرایب این دستگاه برابر است با

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}$$

در نتیجه، بنابه دستور کرامر، داریم

$$x_۱=\frac{|B_۱|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۵ & -۱ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & -۱ \end{vmatrix}}=\frac{-۱۱}{-۵}=\frac{۱۱}{۵}$$

$$x_۲=\frac{|B_۲|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۲ & ۵ \end{vmatrix}}{-۵}=-\frac{۳}{۵}$$

(ب) ماتریس ضرایب این دستگاه برابر است با

$$A=\begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

در نتیجه

$$x_۱=\frac{|B_۱|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix} ۰ & ۱ \\ ۳ & ۱ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ \end{vmatrix}}=\frac{-۳}{-۳}=۱$$

$$x_۲=\frac{|B_۲|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix} -۱ & ۰ \\ ۲ & ۳ \end{vmatrix}}{-۳}=\frac{-۳}{-۳}=۱$$

۷. روش حذفی گاوسی را به کار می‌بریم. داریم

$$\left[\begin{array}{cc|c} ۲ & ۴ & a \\ ۱ & ۲ & b \end{array}\right] \xrightarrow{R_۱-۲R_۲} \left[\begin{array}{cc|c} ۰ & ۰ & a-۲b \\ ۱ & ۲ & b \end{array}\right]$$

این دستگاه وقتی دارای جواب است که $a-۲b=۰$. به عبارت دیگر دستگاه داده شده به ازای مقادیری از a و b جواب دارد که در معادلهٔ $a=۲b$ صدق کنند. به عنوان مثال به ازای $a=۰$ و $b=۰$ یا $a=۲$ و $b=۱$، دستگاه فوق دارای جواب است.

۸. مانند تمرین ۷ عمل می‌کنیم.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} ۲ & ۴ & ۱ & a \\ ۵ & ۱۳ & ۷ & b \\ ۳ & ۵ & ۰ & c \end{array}\right] \xrightarrow{R_۲-۷R_۱} \left[\begin{array}{ccc|c} ۲ & ۴ & ۱ & a \\ -۹ & -۱۵ & ۰ & b-۷a \\ ۳ & ۵ & ۰ & c \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_۱-\frac{۳}{۲}R_۳]{R_۲-۳R_۳} \left[\begin{array}{ccc|c} ۰ & -۷/۲ & ۱ & a-\frac{۳}{۲}c \\ ۰ & ۰ & ۰ & b-۷a-۳c \\ ۳ & ۵ & ۰ & c \end{array}\right]$$

در نتیجه این دستگاه به ازای مقادیری از a، b و c جواب دارد که در مـعادلهٔ $b-۷a-۳c=۰$ صدق کنند.

۹. داریم

$$\left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۱ & ۱ & a \\ ۲ & ۱ & ۱ & b \\ ۱ & ۳ & -۷ & c \end{array}\right] \xrightarrow[R_۳-R_۱]{R_۲-۲R_۱} \left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۱ & ۱ & a \\ ۰ & -۱ & -۱ & b-۲a \\ ۰ & ۲ & -۸ & c-a \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_۳+۲R_۲]{R_۱+R_۲} \left[\begin{array}{ccc|c} ۰ & ۰ & ۰ & b-a \\ ۰ & -۱ & ۱ & ۲a-b \\ ۰ & ۰ & -۱۰ & c+۲b-۵a \end{array}\right]$$

پس دستگاه داده شده به ازای مقادیری از a، b و c دارای جـواب است کـه $b-a=۰$. بنابراین c هر مقداری را می‌تواند اختیار کند.

تمرینهای ۶.۵

۱. فرض کنیم

$$x_۱(۱,۲,۳)+x_۲(۱,۰,۲)+x_۳(۲,۲,۵)=(۰,۰,۰)$$

پس دستگاه زیر را به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} &x_۱+x_۲+۲x_۳=۰ \\ &۲x_۱+۲x_۳=۰ \\ &۳x_۱+۲x_۲+۵x_۳=۰ \end{aligned}$$

چون دترمینان ماتریس ضرایب این دستگاه برابر است با

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۰ & ۲ \\ ۳ & ۲ & ۵ \end{vmatrix} = ۰$$

این دستگاه معادلات بیش از یک جواب دارد. چون $x_۱=x_۲=x_۳=۰$ یک جواب آن است، پس

جواب ناصفر نیز دارد. بنابراین مجموعهٔ A دارای وابستگی خطی است. حال مجموعهٔ B را می‌آزماییم. فرض کنیم

$$x_۱(۱,۲,۳)+x_۲(۱,۰,۲)=(۰,۰,۰)$$

در نتیجه دستگاه زیر را داریم

$$\begin{aligned} &x_۱+x_۲=۰\\ &۲x_۱=۰\\ &۳x_۱+۲x_۲=۰ \end{aligned}$$

از معادلهٔ دوم نتیجه می‌گیریم که $x_۱=۰$. با قرار دادن این مقدار $x_۱$ در دو معادلهٔ دیگر به دست می‌آوریم $x_۲=۰$. پس تنها جواب این دستگاه جواب صفر است. بنابراین مجموعهٔ B استقلال خطی دارد.

۲. با توجه به مثالهای حل شده، نتیجه می‌گیریم که به طور کلی یک مجموعهٔ n عضوی در فضای R^n تشکیل پایه‌ای برای R^n می‌دهد اگر و تنها اگر دترمینان ماتریس A که سطرهای آن بردارهای داده شده هستند، ناصفر باشد. چون

$$\begin{vmatrix} ۲ & ۲ \\ -۲ & ۳ \end{vmatrix}=۱۰\neq۰$$

A پایه‌ای برای $R^۲$ است. همچنین، چون

$$\begin{vmatrix} ۳ & ۱ \\ ۳ & ۴ \end{vmatrix}=۹\neq۰$$

B نیز پایه‌ای برای $R^۲$ تشکیل می‌دهد.

۳. چون این مجموعه در فضای دو بعدی $R^۲$ دارای سه عضو است، وابستگی خطی دارد و در نتیجه نمی‌تواند پایه‌ای برای $R^۲$ تشکیل دهد.

۴. چون

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۳ & -۳ \end{bmatrix}=۰$$

مجموعهٔ داده شده پایه‌ای برای $R^۲$ تشکیل نمی‌دهد.

۵. چون دترمینان ماتریس حاصل از بردارهای داده شده، یعنی

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۲ \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} ۰ & ۲ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix}=-۲-(۱)=-۳$$

ناصفر است، مجموعهٔ داده شده پایه‌ای برای $R^۳$ تشکیل می‌دهد.

۶. چون

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۲ & ۰ & ۲ \\ ۱ & ۳ & ۰ \end{vmatrix} = ۰$$

این مجموعهٔ پایه‌ای برای $\boldsymbol{R}^۳$ تشکیل نمی‌دهد.

۷. ماتریس تغییر مختصات ماتریسی است که ستونهای آن بردارهای داده شده در پایهٔ جدید هستند، یعنی

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & -۲ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$$

چون

$$A^{-۱} = \frac{۱}{۱۰} \begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ -۲ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x'_۱ \\ x'_۲ \end{bmatrix} = \frac{۱}{۱۰} \begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ -۲ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

$$= \frac{۱}{۱۰} \begin{bmatrix} ۵ \\ ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱/۲ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

پس لذا مختصات نقطهٔ (۱,۱) نسبت به پایهٔ جدید برابرند با $x'_۱ = \frac{۱}{۲}$، $x'_۲ = ۰$.

۸. با توجه به تمرین ۷، چون

$$\begin{bmatrix} x'_۱ \\ x'_۲ \end{bmatrix} = \frac{۱}{۱۰} \begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ -۲ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۱ \\ ۲ \end{bmatrix} = \frac{۱}{۱۰} \begin{bmatrix} ۱ \\ ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱/۱۰ \\ ۲/۵ \end{bmatrix}$$

پس مختصات نقطهٔ (−۱,۲) نسبت به پایهٔ جدید برابرند با $x' = \frac{۱}{۱۰}$ و $x'_۲ = ۲/۵$.

۹. ماتریس تغییر مختصات و وارون آن عبارت‌اند از

$$A^{-۱} = \frac{۱}{۳} \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & -۲ \\ ۲ & -۲ & ۱ \\ -۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} \quad ، \quad A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

چون

$$\begin{bmatrix} x'_۱ \\ x'_۲ \\ x'_۳ \end{bmatrix} = \frac{۱}{۳} \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & -۲ \\ ۲ & -۲ & ۱ \\ -۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{bmatrix} = \frac{۱}{۳} \begin{bmatrix} -۲ \\ ۱ \\ ۴ \end{bmatrix}$$

مختصات بردار (۱,۲,۳) نسبت به پایهٔ جدید برابرند با $x'_1=-۲/۳$، $x'_2=\frac{۱}{۳}$ و $x'_3=\frac{۴}{۳}$.

۱۰. با توجه به تمرین ۹، چون

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \frac{۱}{۳}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & -۲ \\ ۲ & -۲ & ۱ \\ -۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} = \frac{۱}{۳}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱/۳ \\ ۱/۳ \\ ۱/۳ \end{bmatrix}$$

مختصات جدید نقطهٔ (۱,۱,۱) عبارت‌اند از $x'_1=۱/۳$، $x'_2=۱/۳$ و $x'_3=۱/۳$.

۱۱. این مجموعهٔ تشکیل پایه‌ای برای $\boldsymbol{R}^۳$ می‌دهد اگر

$$\begin{vmatrix} ۰ & x & ۱ \\ x & ۱ & x \\ ۱ & x & ۰ \end{vmatrix} \neq ۰$$

ولی به ازای هر مقدار x، داریم

$$\begin{vmatrix} ۰ & x & ۱ \\ x & ۱ & x \\ ۱ & x & ۰ \end{vmatrix} = -x\begin{vmatrix} x & ۱ \\ x & ۰ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & ۱ \\ ۱ & x \end{vmatrix}$$

$$= -x(-x)+(x^۲-۱) = -۱$$

که ناصفر است. بنابراین مجموعهٔ داده شده به ازای هر مقدار x پایه‌ای برای $\boldsymbol{R}^۳$ تشکیل می‌دهد.

۱۲.

$$\begin{bmatrix} x & x & ۰ \\ x & ۰ & x \\ ۰ & x & x \end{bmatrix} = x\begin{vmatrix} ۰ & x \\ x & x \end{vmatrix} - x\begin{vmatrix} x & x \\ ۰ & x \end{vmatrix}$$

$$= -x^۳ - x^۳ = -۲x^۳$$

مجموعه داده شده وقتی یک پایه برای $\boldsymbol{R}^۳$ است که $-۲x^۳ \neq ۰$، یعنی اگر $x \neq ۰$.

تمرینهای ۷.۵

۱. چون

$$T\left(\begin{bmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{bmatrix}\right)=T\begin{bmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\\z_1+z_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1+x_2+y_1+y_2\\y_1+y_2+z_1+z_2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}x_1+y_1\\y_1+z_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x_2+y_2\\y_2+z_2\end{bmatrix}=T\begin{bmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{bmatrix}+T\begin{bmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{bmatrix}$$

$$T\left(\alpha\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right)=T\begin{bmatrix}\alpha x\\\alpha y\\\alpha z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha x+\alpha y\\\alpha y+\alpha z\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}x+y\\y+z\end{bmatrix}=\alpha.T\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$$

پس T یک تبدیل خطی است. حال ماتریس نمایشگر T را پیدا می‌کنیم. چون

$$T\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\ ،\quad T\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\quad ،\ T\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

ماتریس نمایشگر T برابر است با

$$A=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$$

مشاهده می‌کنیم که

$$A\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+y\\y+z\end{bmatrix}$$

این مطلب درستی جواب به دست آمده را تأیید می‌کند.

$$T\left(\begin{bmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{bmatrix}\right)=T\begin{bmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\\z_1+z_2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}a_{11}(x_1+x_2)+a_{12}(y_1+y_2)+a_{13}(z_1+z_2)\\a_{21}(x_1+x_2)+a_{22}(y_1+y_2)+a_{23}(z_1+z_2)\\a_{31}(x_1+x_2)+a_{32}(y_1+y_2)+a_{33}(z_1+z_2)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}a_{11}x_1+a_{12}y_1+a_{13}z_1\\a_{21}x_1+a_{22}y_1+a_{23}z_1\\a_{31}x_1+a_{32}y_1+a_{33}z_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a_{11}x_2+a_{12}y_2+a_{13}z_2\\a_{21}x_2+a_{22}y_2+a_{23}z_2\\a_{31}x_2+a_{32}y_2+a_{33}z_2\end{bmatrix}$$

$$=T\begin{bmatrix} x_{۱} \\ y_{۱} \\ z_{۱} \end{bmatrix} + T\begin{bmatrix} x_{۲} \\ y_{۲} \\ z_{۲} \end{bmatrix}$$

$$T\left(\alpha\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = T\begin{bmatrix} \alpha x \\ \alpha y \\ \alpha z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{۱۱}\alpha x + a_{۱۲}\alpha y + a_{۱۳}\alpha z \\ a_{۲۱}\alpha x + a_{۲۲}\alpha y + a_{۲۳}\alpha z \\ a_{۳۱}\alpha x + a_{۳۲}\alpha y + a_{۳۳}\alpha z \end{bmatrix}$$

$$=\alpha\begin{bmatrix} a_{۱۱}x + a_{۱۲}y + a_{۱۳}z \\ a_{۲۱}x + a_{۲۲}y + a_{۲۳}z \\ a_{۳۱}x + a_{۳۲}y + a_{۳۳}z \end{bmatrix} = \alpha T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

پس T یک تبدیل خطی است. برای پیداکردن ماتریس نمایشگر T، می‌نویسیم

$$T\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{۱۱} \\ a_{۲۱} \\ a_{۳۱} \end{bmatrix} ، \quad T\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{۱۲} \\ a_{۲۲} \\ a_{۳۲} \end{bmatrix} ، \quad T\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{۱۳} \\ a_{۲۳} \\ a_{۳۳} \end{bmatrix}$$

در نتیجه ماتریس نمایشگر T برابر است با

$$A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix}$$

۳. این تبدیل خطی به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + z \\ ۲x + y + z \end{bmatrix}$$

۴. داریم

$$|xI - A| = \begin{vmatrix} x-۳ & -۱ \\ ۲ & x-۲ \end{vmatrix} = (x-۳)(x-۲) + ۲ = x^{۲} - ۵x + ۸$$

چون معادلهٔ $x^{۲} - ۵x + ۸$ هیچ ریشه‌ای در $\boldsymbol{R}$ ندارد، ماتریس A دارای مقدار ویژه‌ای در $\boldsymbol{R}$ نیست.

به همین ترتیب، داریم

$$|xI - B| = \begin{vmatrix} x-۲ & ۰ \\ ۰ & x-۱ \end{vmatrix} = (x-۲)(x-۱)$$

مقادیر ویژهٔ این ماتریس ریشه‌های معادلهٔ $(x-۱)(x-۲)=۰$ ، یعنی $x=۱$ و $x=۲$، هستند.

۵. چون

$$|xI-A| = \begin{vmatrix} x-۱ & -۱ & -۱ \\ ۰ & x-۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ & x-۲ \end{vmatrix} = (x-۱)^۲(x-۲)$$

در نتیجه مقادیر ویژهٔ ماتریس A عبارت‌اند از $x=۱$ و $x=۲$.

۶. برای پیدا کردن فضای ویژهٔ مربوط به $\lambda=۱$ معادلهٔ

$$\left(\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

یعنی

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

را حل کنیم. از این معادلهٔ دستگاه معادلات خطی

$$۱x+ ۰y=۰$$
$$۰x+۰y=۰$$

به دست می‌آید. مشاهده می‌کنیم که این دستگاه معادل است با $x=۰$ و y مجهول آزاد آن است.
پس فضای ویژهٔ B متناظر با $\lambda=۱$ برابر است با $\{(۰,y)|y\in \boldsymbol{R}\}$.

برای پیدا کردن فضای ویژهٔ متناظر با $\lambda=۲$، معادلهٔ

$$\left(\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} -۲\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

یعنی

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

را حل می‌کنیم. از این معادله فضای ویژهٔ $\lambda=۲$ برابر با $\{(x,۰)|x\in \boldsymbol{R}\}$ به دست می‌آید.

۷. مقادیر ویژهٔ A عبارت‌اند از $\lambda=۱$ (که دو بار تکرار شده است) و $\lambda=۲$. برای پیدا کردن فضای متناظر با $\lambda=۱$، معادلهٔ

$$\left(\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

یعنی

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

را حل می‌کنیم. از این معادله دستگاه معادلات خطی

$$\begin{aligned} y+z&=۰ \\ z&=۰ \\ z&=۰ \end{aligned}$$

به دست می‌آید. مشاهده می‌کنیم که $z=۰$، $y=۰$ و x مجهول آزاد این دستگاه است. در نتیجه فضای ویژهٔ متناظر با $\lambda=۱$ برابر است با $\{(x, ۰, ۰) | x \in \boldsymbol{R}\}$.

برای پیدا کردن فضای ویژهٔ متناظر با $\lambda=۲$، معادلهٔ

$$\left(\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix} - ۲\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

یعنی

$$\begin{bmatrix} -۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & -۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

را حل می‌کنیم. از این معادله، دستگاه معادلات خطی

$$\begin{aligned} -x+y+z&=۰ \\ -y+z&=۰ \end{aligned}$$

به دست می‌آید. این دستگاه با استفاده از روش حذفی گاوس، به صورت

$$\begin{aligned} -x+۲z&=۰ \\ -y+z&=۰ \end{aligned}$$

تحویل می‌یابد. در این دستگاه، z مجهول آزاد است و در نتیجه فضای ویژهٔ متناظر با $\lambda=۲$ برابر است با $\{(۲z, z, z) | z \in \boldsymbol{R}\}$.

۸. چون

$$xI-A = \begin{bmatrix} x & ۰ \\ ۰ & x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-a & -b \\ -c & x-d \end{bmatrix}$$

پس

$$f(x)=\begin{vmatrix} x-a & -b \\ -c & x-d \end{vmatrix}=(x-a)(x-d)-bc$$

$$=x^{٢}-(a+d)x+(ad-bc)$$

$$=x^{٢}-(a+d)x+\det A$$

تمرینهای فصل ۶

تمرینهای ۱.۶

۱. (الف) چون $f_1(t)=\sqrt{t-1}$ در $(\infty ,1]$، $f_2(t)=\sqrt{2-t}$ در $[2, -\infty)$، پیوسته هستند، پس $\vec{F}$ در اشتراک این دو بازه یعنی $[1,2]$ پیوسته است.

(ب)
$$\vec{F}'(t)=\frac{1}{2}(t-1)^{-1/2}\vec{i}-\frac{1}{2}(2-t)^{-1/2}\vec{j}$$

$$\vec{F}''(t)=-\frac{1}{4}(t-1)^{-3/2}\vec{i}-\frac{1}{4}(2-t)^{-\frac{3}{2}}\vec{j}$$

۲. (الف) دامنهٔ F مجموعهٔ اعداد حقیقی ناصفر است.

(ب)
$$\vec{F}'(t)=-\frac{1}{t^2}\vec{i}+3\cos 3t\,\vec{j}$$

$$\vec{F}''(t)=-\frac{2}{t^3}\vec{i}-9\sin 3t\,\vec{j}$$

۳. (الف) دامنهٔ $\vec{F}$ برابراست با $\{t\in\mathbf{R}\,|\,t\neq\pi/2+k\pi\}$

و $\vec{F}$ در دامنه‌اش پیوسته است.

(ب)

$$\vec{F}'(t)=(\sec^2 t,\ 2t+8,\ -4)$$

$$\vec{F}''(t)=(2\sec^2 t\ \operatorname{tg} t,\ 2,\ 0)$$

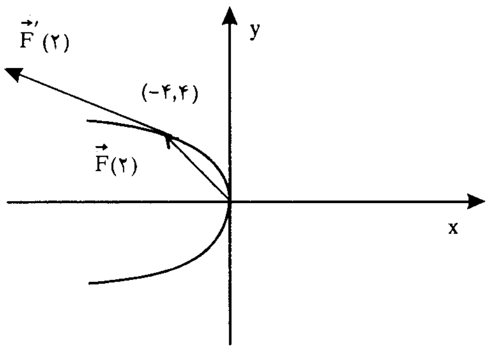
۴. (الف) این تابع در دامنه‌اش $\{t\in\mathbf{R}\,|\,t\neq 0\}$ پیوسته است.

(ب)

$$\vec{F}'(t) = (۲te^{t^۲}, \frac{t\cos t - \sin t}{t^۲}, ۱)$$

$$\vec{F}''(t) = (۲e^{۲t} + ۴t^۲e^{t^۲}, \frac{-t^۲\sin t - ۲t\cos t + ۲\sin t}{t^۳}, ۰)$$

۵. توابع پارامتری حاصل از $\vec{F}(t)=(-t^۴/۴, t^۲)$ عبارت‌اند از $x = -\frac{t^۴}{۴}$ و $y = t^۲$. با حذف t از این معادلات، معادلهٔ $y^۲ = -۴x$ به دست می‌آید. نمودار این معادله در صفحهٔ xy سهمی شکل ۱.۱.۶ است.



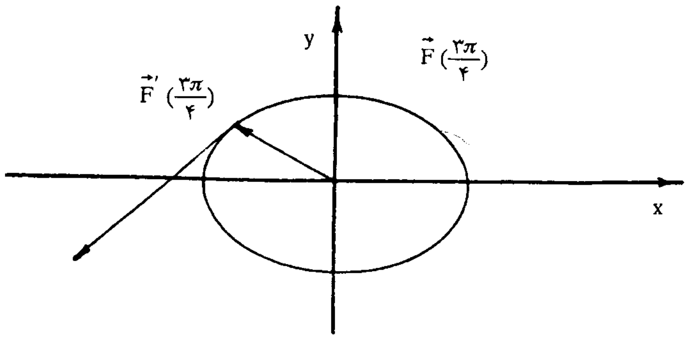
شکل ۱.۱.۶

چون $\vec{F}'(t) = (-t^۳, ۲t)$ و $F'(۲) = (-۸, ۴)$ همچنین $\vec{F}(۲) = (-۴,۴)$ این بردارها در شکل بالا نشان داده شده‌اند. بردار $\vec{F}'(۲)$ را از نقطهٔ $(-۴, ۴)$ رسم کرده‌ایم تا مماس بودن آن بر نمودار نشان داده شود.

۶. توابع پارامتری حاصل از $\vec{F}(t) = ۴\cos t\vec{i} + ۲\sin t\vec{j}$ عبارت‌اند از $x = ۴\cos t$ و $y = ۲\sin t$. حرف t را به صورت زیر از این معادلات حذف می‌کنیم: داریم $x^۲ = ۱۶\cos^۲ t$ و $y^۲ = ۴\sin^۲ t$. چون $\cos^۲ t + \sin^۲ t = ۱$،

$$\frac{x^۲}{۱۶} + \frac{y^۲}{۴} = ۱$$

که معادلهٔ یک بیضی است (شکل ۲.۱.۶ را ببینید).



شکل ۲.۱.۶

حال

$$\vec{F}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 4\cos\frac{3\pi}{4}\vec{i} + 2\sin\frac{3\pi}{4}\vec{j}$$
$$= -2\sqrt{2}\,\vec{i} + \sqrt{2}\,\vec{j}$$

همچنین، چون

$$\vec{F}'(t) = -4\sin t\,\vec{i} + 2\cos t\,\vec{j}$$

پس

$$F'\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -4\sin\frac{3\pi}{4}\vec{i} + 2\cos\frac{3\pi}{4}\vec{j} = -2\sqrt{2}\,\vec{i} - \sqrt{2}\,\vec{j}$$

این دو بردار در نمودار فوق نشان داده شده‌اند.

۷. (الف) فرض کنیم $\vec{F}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ و $\vec{G}(t) = (g_1(t), g_2(t), g_3 t_1)$.
داریم

$$\left[\lim_{t\to a}\left[\vec{F}(t) + \vec{G}(t)\right]\right] = \lim_{t\to a} f_1(t)+g_1(t), f_2(t)+g_2(t), f_3(t)+g_3(t)\Big]$$

$$\lim_{t\to a}(f_1(t)+g_1(t)) \quad \lim_{t\to a}(f_2(t)+g_2(t)) \quad \lim_{t\to a}(f_3(t)+g_3(t))$$

$$= \left(\lim_{t\to a} f_1(t), \lim_{t\to a} f_2(t), \lim_{t\to a} f_3(t)\right) + \left(\lim_{t\to a} g_1(t), \lim_{t\to a} g_2(t), \lim_{t\to a} g_3(t)\right)$$

$$= \lim_{t\to a}\vec{F}(t) + \lim_{t\to a} G(t)$$

(ب) اثبات این حکم مانند حکم (الف) است.

(پ)

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to a} f(t)\vec{F}(t) &= \lim_{t\to a} f(t)\left[f_1(t), f_2(t), f_3(t)\right]\\
&= \lim_{t\to a}\left[f(t)f_1(t), f(t)f_2(t), f(t)f_3(t)\right]\\
&= \left[\lim_{t\to a} f(t)f_1(t), \lim_{t\to a} f(t)f_2(t), \lim_{t\to a} f(t)f_3(t)\right]\\
&= \left[\lim_{t\to a} f(t)\lim_{t\to a} f_1(t), \lim_{t\to a} f(t)\lim_{t\to a} f_2(t), \lim_{t\to a} f(t)\lim_{t\to a} f_3(t)\right]\\
&= \lim_{t\to a} f(t)\left(\lim_{t\to a} f_1(t), \lim_{t\to a} f_2(t), \lim_{t\to a} f_3(t)\right)\\
&= \lim_{t\to a} f(t)\lim_{t\to a}\vec{F}(t)
\end{aligned}$$

(ت) اثبات این حکم در قضیهٔ ۶.۱.۶ داده شده است.

(ث) چون حد مجموع و حاصلضرب توابع حقیقی برابر با مجموع و حاصلضرب حدهای آن توابع است.

$$\lim_{t\to a}\left[\vec{F}(t)\times\vec{G}(t)\right] = \lim_{t\to a}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ f_1(t) & f_2(t) & f_3(t)\\ g_1(t) & g_2(t) & g_3(t)\end{vmatrix}$$

$$= \lim_{t\to a}\begin{vmatrix} f_2(t) & f_3(t)\\ g_2(t) & g_3(t)\end{vmatrix}\vec{i} - \lim_{t\to a}\begin{vmatrix} f_1(t) & f_3(t)\\ g_1(t) & g_3(t)\end{vmatrix}\vec{j}$$

$$+ \lim_{t\to a}\begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t)\\ g_1(t) & g_2(t)\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= \begin{vmatrix}\lim_{t\to a} f_1(t) & \lim_{t\to a} f_3(t)\\ \lim_{t\to a} g_1(t) & \lim_{t\to a} g_3(t)\end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix}\lim_{t\to a} f_1(t) & \lim_{t\to a} f_3(t)\\ \lim_{t\to a} g_1(t) & \lim_{t\to a} g_3(t)\end{vmatrix}\vec{j}$$

$$+ \begin{vmatrix}\lim_{t\to a} f_1(t) & \lim_{t\to a} f_2(t)\\ \lim_{t\to a} g_1(t) & \lim_{t\to a} g_2(t)\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \lim\limits_{t\to a} f_1(t)\,, & \lim\limits_{t\to a} f_2(t)\,, & \lim\limits_{t\to a} f_3(t) \\ \lim\limits_{t\to a} g_1(t)\,, & \lim\limits_{t\to a} g_2(t)\,, & \lim\limits_{t\to a} g_3(t) \end{vmatrix}$$

$$= \left(\lim_{t\to a} f_1(t), \lim_{t\to a} f_2(t), \lim_{t\to a} f_3(t)\right) \times \left(\lim_{t\to a} g_1(t), \lim_{t\to a} g_2(t), \lim_{t\to a} g_3(t)\right)$$

$$= \lim_{t\to a}\vec{F}(t) \times \lim_{t\to a}\vec{G}(t)$$

۸. چون

$$\vec{F}'(t) = (e^t \cos t - e^t \sin t)\,\vec{i} - (e^t \sin t + e^t \cos t)\,\vec{k}$$

$$\vec{G}'(t) = 3\vec{i} - 2t\vec{j} + 4\,sect\,\mathrm{tg}t\,\vec{k}$$

پس، بنابه قضیهٔ ۱۴.۱.۶ (ت) و (ث)، داریم

$$(\vec{F}(t)\cdot\vec{G}(t))' = \vec{F}'(t)\cdot\vec{G}(t) + \vec{F}(t)\cdot\vec{G}'(t)$$

$$= (e^t \cos t - e^t \sin t)\vec{i} - (e^t \sin t + e^t \cos t)\vec{k}\cdot(3t\vec{i} - t^2\vec{j} + 4\sec t\vec{k})$$

$$+ (e^t \cos t\,\vec{i} - e^t \sin t\,\vec{k})\cdot(3\vec{i} - 2t\vec{j} + 4\sec t\,\mathrm{tg} t\vec{k})$$

$$= 3te^t \cos t - 3te^t \sin t - 0 - 4e^t\mathrm{tg}t - 4e^t + 3e^t \cos t - 0 + 4e^t\mathrm{tg}^2 t$$

$$= e^t(3t\cos t - 3t\sin t - 4\mathrm{tg}t - 4 + 3\cos t - 4\mathrm{tg}^2\ t)$$

این مشتق را به روش زیر نیز می‌توانیم پیدا کنیم: چون

$$\vec{F}(t)\cdot\vec{G}(t) = (e^t \cos t\,\vec{i} - e^t \sin t\,\vec{k})\cdot(3t\vec{i} - t^2\vec{j} + 4\,sect\,\vec{k})$$

$$= 3t\,e^t \cos t - 4e^t\,tgt$$

پس

$$[\vec{F}(t)\cdot\vec{G}(t)]' = 3e^t \cos t + 3te^t \cos t - 3te^t \sin t - 4e^t\,tgt - 4e^t(1 + tg^2 t)$$

$$= e^t(3\cos t + 3t\cos t - 3t\sin t - 4\,tgt - 4 - 4\,tg^2 t)$$

همچنین، داریم

$$[\vec{F}(t)\times\vec{G}(t)]' = \vec{F}'(t)\times\vec{G}(t) + \vec{F}(t)\times\vec{G}'(t)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & k \\ e^t \cos t - e^t \sin t & 0 & -(e^t \sin t + e^t \cos t) \\ 3t & -t^2 & 4\,sect \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & k \\ e^t \cos t & 0 & -e^t \sin t \\ 3 & -2t & 4\,sect\,\mathrm{tg}t \end{vmatrix}$$

$$=(-t^{۲}e^{t}\sin t-t^{۲}e^{t}\cos t)\vec{i}-(۴e^{t}-۴e^{t}\operatorname{tg}t+۳te^{t}\sin t+۳te^{t}\cos t)\vec{j}$$
$$+(-t^{۲}e^{t}\cos t+t^{۲}e^{t}\sin t)\vec{k}+(-۲te^{t}\sin t)\vec{i}$$
$$-(۴e^{t}\operatorname{tg}t+۳e^{t}\sin t)\vec{j}+(-۲te^{t}\cos t)\vec{k}$$
$$=-te^{t}(t\sin t+t\cos t+۲\sin t)\vec{i}-e^{t}(۴+۳t\sin t+۳t\cos t+۳\sin t)\vec{j}$$
$$+te^{t}(-t\cos t+t\sin t-۲\cos t)\vec{k}$$

۹. این تمرین را به دو روش حل می‌کنیم.

(۱) داریم
$$\vec{F}(u(t))=\ln\sqrt{t}\,\vec{i}-۴e^{۲\sqrt{t}}\vec{j}+\frac{\sqrt{t}-۱}{\sqrt{t}}\vec{k}$$
پس
$$\frac{d\vec{F}}{dt}=\frac{۱}{۲t}\vec{i}-\frac{۴}{\sqrt{t}}e^{۲\sqrt{t}}\vec{j}+\frac{۱}{۲t\sqrt{t}}\vec{k}$$

(۲) چون
$$\vec{F}(u)=\ln u\,\vec{i}-۴e^{۲u}\vec{j}+\frac{u-۱}{u}\vec{k}$$

بنابه قضیهٔ ۱۴.۱.۶ (ج)، داریم
$$\frac{d\vec{F}}{dt}=\frac{du}{dt}\frac{d\vec{F}}{du}$$
$$=\frac{۱}{۲\sqrt{t}}\left(\frac{۱}{u}\vec{i}-۸e^{۲u}\vec{j}+\frac{۱}{u^{۲}}\vec{k}\right)$$
$$=\frac{۱}{۲\sqrt{t}}\left(\frac{۱}{\sqrt{t}}\vec{i}-۸e^{۲\sqrt{t}}\vec{j}+\frac{۱}{t}\vec{k}\right)$$
$$=\frac{۱}{۲t}\vec{i}-\frac{۴}{\sqrt{t}}\;e^{۲\sqrt{t}}\vec{j}+\frac{۱}{۲t\sqrt{t}}\vec{k}$$

۱۰. این تمرین را نیز به دو روش حل می‌کنیم.

(۱) چون
$$\vec{F}(u(t))=\cos^{۳}t\vec{i}-\sqrt{۳}\cos t\vec{j}+\sec^{۲}t\vec{k}$$
پس
$$\frac{d\vec{F}}{dt}=-۳\sin t\cos^{۲}t\,\vec{i}+\sqrt{۳}\sin t\,\vec{j}+۲\sec^{۲}+t\operatorname{tg}t\,\vec{k}$$

(۲) چون
$$F(u)=u^{۳}\vec{i}-\sqrt{۳}u\vec{j}+\frac{۱}{u^{۲}}\vec{k}$$

پس

$$\frac{d\vec{F}}{dt}=\frac{du}{dt}\frac{d\vec{F}}{du}=-\sin t\,(۳u^{۲}\vec{i}-\sqrt{۳}\vec{j}-\frac{۲}{u^{۳}}\vec{k})$$
$$=-\sin t\,(۳\cos^{۲}t\vec{i}-\sqrt{۳}\vec{j}-۲۸\sec^{۳}t\,\vec{k})$$
$$=-۳\sin t\cos^{۲}t\,\vec{i}+\sqrt{۳}\sin t\,\vec{j}+۲۸\sec^{۲}t\,\mathrm{tg}\,t\,\vec{k}$$

.۱۱

$$\int(t^{۲}\vec{i}-(۳t-۱)\vec{j}-\frac{۱}{t^{۳}}\vec{k})dt=\left(\int t^{۲}dt\right)\vec{i}-\left(\int(۳t-۱)dt\right)\vec{j}-\left(\int\frac{۱}{t^{۳}}dt\right)\vec{k}$$
$$=\frac{t^{۳}}{۳}\vec{i}-(\frac{۳}{۲}t^{۲}-t)\vec{j}+\frac{۱}{۲}t^{-۲}\vec{k}+\vec{c}$$

که در آن $\vec{c}$ یک بردار ثابت است.

۱۲. با به‌کاربردن روش جزء به جزء، داریم

$$\int t\cos t\,dt=t\sin t+\cos t \text{ و } \int t\sin t\,dt=-t\cos t+\sin t$$

همچنین $\int ۳t^{۴}\,dt=\frac{۳}{۵}t^{۵}$. در نتیجه

$$\int(t\cos t\,\vec{i}+t\sin t\,\vec{j}+۳t^{۴}k)dt=(t\sin t+\cos t)\vec{i}$$
$$+(\sin t-t\cos t)\vec{j}+\frac{۳}{۵}t^{۵}\vec{k}+\vec{c}$$

که در آن $\vec{c}$ یک بردار ثابت است.

.۱۳

$$\int_{۰}^{۱}(e^{t}\vec{i}+e^{-t}\vec{j}+۲t\vec{k})dt=(e^{t}\vec{i}-e^{-t}\vec{j}+t^{۲}\vec{k})\Big|_{۰}^{۱}$$
$$=(e\vec{i}-e^{-۱}\vec{j}+\vec{K})-(\vec{i}-\vec{j}+۰\vec{K})$$
$$=(e-۱)\vec{j}-(e^{-۱}-۱)\vec{j}+\vec{K}$$

.۱۴

$$\int_{-1}^{1}[(1+t)^{3/2}\vec{i}-(1-t)^{3/2}\vec{j}]dt$$

$$=\left[\frac{2}{5}(1+t)^{5/2}\vec{i}-\frac{2}{5}(1-t)^{5/2}\vec{j}\right]_{-1}^{1}$$

$$=(\frac{2}{5}\cdot 2^{5/2}\vec{i}-0\vec{j})-(0\vec{i}-\frac{2}{5}\cdot 2^{5/2}\vec{j})$$

$$=\frac{8\sqrt{2}}{5}\vec{i}+\frac{8\sqrt{2}}{5}\vec{j}$$

.۱۵ داریم

$$\vec{F}''(t)=-\sin t\vec{i}+\cos t\vec{j}\ ,\ \vec{F}'(t)=\cos t\vec{i}+\sin t\vec{j}$$

مشاهده می‌کنیم که، $\vec{F}''(t)=-\vec{F}(t)$. پس به ازای هر t، دو بردار $\vec{F}''(t),\vec{F}(t)$ موازی با (و در خلاف جهت) یکدیگر هستند.

.۱۶ داریم

$$\vec{F}''(t)=4e^{-2t}\vec{i}+4e^{2t}\vec{k} \quad \text{و} \quad \vec{F}'(t)=-2e^{-2t}\vec{i}+2e^{2t}\vec{k}$$

چون $\vec{F}''(t)=4\vec{F}(t)$، به ازای هر t، دوبردار $\vec{F}(t)$ و $\vec{F}''(t)$ موازی با (و در جهت) یکدیگر هستند.

.۱۷ با توجه به قضیهٔ مشتقگیری، داریم

$$\frac{d}{dt}(\vec{F}(t)\times\vec{F}'(t))=\vec{F}'(t)\times\vec{F}'(t)+\vec{F}(t)\times\vec{F}''(t)$$

$$=0+\vec{F}(t)\times\vec{F}''(t)=\vec{F}(t)\times\vec{F}''(t)$$

.۱۸ چون به ازای هر t، $\vec{F}(t)$ موازی $\vec{F}''(t)$ است، اسکالر c وجود دارد به طوری که $\vec{F}''(t)=c\vec{F}(t)$ حال با توجه به حل تمرین ۱۷، داریم

$$\frac{d}{dt}(\vec{F}(t)\times\vec{F}'(t))=\vec{F}(t)\times\vec{F}''(t)=\vec{F}(t)\times c\vec{F}(t)=c(\vec{F}(t)\times\vec{F}(t))=0$$

در نتیجه $\vec{F}(t)\times\vec{F}'(t)$ یک بردار ثابت است.

.۱۹ داریم $\vec{F}(t)=\int\vec{F}'(t)dt+\vec{c}$ که در آن $\vec{c}$ یک‌بردار ثابت است. پس

$$\vec{F}(t)=\int(t^2\vec{i}+(6t+1)\vec{j}+8t^3\vec{k})dt=\frac{t^3}{3}\vec{i}+(3t^2+t)\vec{j}+2t^4\vec{k}+\vec{c}$$

چون $\vec{F}(\circ)=\text{۲}\vec{i}-\text{۳}\vec{j}+\vec{k}$ ، پس $\text{۲}\vec{i}-\text{۳}\vec{j}+\vec{k}=\vec{c}$ و در نتیجه

$$\vec{F}(t)=(\frac{t^{\text{۳}}}{\text{۳}}+\text{۲})\vec{i}+(\text{۳}t^{\text{۲}}+t-\text{۳})\vec{j}+(\text{۲}t^{\text{۴}}+\text{۱})\vec{k}$$

۲۰. داریم

$$\vec{F}'(t)=\int\vec{F}''(t)dt=\int(\text{۶}t\vec{i}-\text{۱۲}t^{\text{۲}}\vec{j}+\vec{k})dt$$
$$=\text{۳}t^{\text{۲}}\vec{i}-\text{۴}t^{\text{۳}}\vec{j}+t\vec{k}+\vec{c}$$

چون $\vec{F}'(\circ)=\vec{i}+\text{۲}\vec{j}-\text{۳}\vec{k}$ ، $\vec{c}=\vec{i}+\text{۲}\vec{j}-\text{۳}\vec{k}$ و در نتیجه

$$F'(t)=(\text{۳}t^{\text{۲}}-\text{۱})\vec{i}-(\text{۴}t^{\text{۳}}-\text{۲})\vec{j}+(t-\text{۳})\vec{k}$$

بنابراین

$$\vec{F}(t)=\int\vec{F}'(t)dt=\int[(\text{۳}t^{\text{۲}}-\text{۱})\vec{i}-(\text{۴}t^{\text{۳}}-\text{۲})\vec{j}+(t-\text{۳})\vec{k}]dt$$
$$=(t^{\text{۳}}-t)\vec{i}-(t^{\text{۴}}-\text{۲}t)\vec{j}+(\frac{t^{\text{۲}}}{\text{۲}}-\text{۳}t)\vec{k}+\vec{c}$$

چون $\vec{F}'(\circ)=\text{۷}\vec{i}+\vec{k}$ ، $\vec{c}=\text{۷}\vec{i}+\vec{k}$ و در نتیجه

$$\vec{F}(t)=(t^{\text{۳}}-t+\text{۷})\vec{i}-(t^{\text{۴}}-\text{۲}t)\vec{j}+(t^{\text{۲}}/_{\text{۲}}-\text{۳}t+\text{۱})\vec{k}$$

تمرینهای ۶.۲

۱. (الف) با توجه به حل مثال ۶.۲.۶ داریم $\vec{A}(t)=g\vec{j}$

$$\vec{V}(t)=v_{\circ}\cos a\,\vec{i}+(v_{\circ}\sin\alpha-gt)\vec{j}$$
$$=\text{۵}\circ\circ\cos\frac{\pi}{\text{۶}}\vec{i}+(\text{۵}\circ\circ\sin\frac{\pi}{\text{۶}}-gt)\vec{j}$$
$$=\text{۲۵}\circ\sqrt{\text{۳}}\,\vec{i}+(\text{۲۵}\circ-gt)\vec{j}$$
$$\vec{R}(t)=tv_{\circ}\cos\alpha\vec{i}+(tv_{\circ}\sin\alpha-\frac{\text{۱}}{\text{۲}}gt^{\text{۲}})\vec{j}$$
$$=\text{۲۵}\circ\sqrt{\text{۳}}t\vec{i}+(\text{۲۵}\circ t-\frac{\text{۱}}{\text{۲}}gt^{\text{۲}})\vec{j}$$

(ب) با توجه به حل مثال ۷.۲.۶ (ب)، داریم

$$t=\frac{\text{۲}v_{\circ}\sin\alpha}{g}=\frac{\text{۲}(\text{۵}\circ\circ)\sin\frac{\pi}{\text{۶}}}{g}\approx\text{۵۱}\mathrm{s}$$

(پ) با توجه به مثال ۷.۲.۶ (الف) برد موشک برابر است با

$$x=\frac{v_{\circ}^{۲}\sin ۲\alpha}{g}=\frac{(۵۰۰)^{۲}\sin\frac{\pi}{۳}}{g}$$
$$\approx ۲۲۰۷۰\ \mathrm{m}$$

(ت) بنابر مثال ۷.۲.۶ (پ) ماکسیمم ارتفاع موشک برابر است با

$$y=\frac{v_{\circ}^{۲}\sin^{۲}\alpha}{۲g}=\frac{(۵۰۰)^{۲}(\sin\frac{\pi}{۶})^{۲}}{۲g}$$
$$\approx ۳۱۸۹\ \mathrm{m}$$

(ث) بنابر قسمت (ث) در مثال ۷.۲.۶ بردار سرعت موشک در لحظهٔ برخورد به زمین عبارت است از

$$\begin{aligned}\vec{V}(t)&=v_{\circ}\cos\alpha\vec{i}-v_{\circ}\sin\alpha\vec{j}\\&=۵۰۰\cos\frac{\pi}{۶}\vec{i}-۵۰۰\sin\frac{\pi}{۶}\vec{j}\\&=۲۵۰\sqrt{۳}\vec{i}-۲۵۰\vec{j}\end{aligned}$$

(ج) به ازای $t=۲$، داریم

$$\begin{aligned}\vec{R}(۲)&=۲(۵۰۰)\cos\frac{\pi}{۶}\vec{i}+(۲(۵۰۰)\sin\frac{\pi}{۶}-\frac{۱}{۲}g(۲)^{۲})\vec{j}\\&=۵۰۰\sqrt{۳}\vec{i}+(۵۰۰-۲g)\vec{j}\\\vec{V}(۲)&=v_{\circ}\cos\alpha\vec{i}+(v_{\circ}\sin\alpha-gt)\vec{j}\\&=۵۰۰\cos\frac{\pi}{۶}\vec{i}+(۵۰۰\sin\frac{\pi}{۶}-۲g)\vec{j}\\&=۲۵۰\sqrt{۳}\vec{i}+(۲۵۰-۲g)\vec{j}\end{aligned}$$

پس سرعت موشک در لحظهٔ $t=۲$ برابر است با

$$|\vec{V}(۲)|=\sqrt{(۲۵۰)^{۲}\cdot ۳+(۲۵۰-۲g)^{۲}}$$
$$\approx ۴۹۰\ \mathrm{m/s}$$

۲. این تمرین مانند تمرین ۱ حل می‌شود. جواب سئوالات مورد نظر به صورت زیر هستند:

(الف) $\vec{V}(t)=۲۵۰\vec{i}+(۲۵۰\sqrt{۳}-gt)\vec{j}$

$\vec{R}(t)=۲۵۰t\vec{i}+(۲۵۰\sqrt{۳}t-\frac{۱}{۲}gt^{۲})\vec{j}$

(ب) $t\approx ۸۸\ \mathrm{s}$

(پ) $x\approx ۲۲۰۹۲\ \mathrm{m}$

(ت) $y\approx ۱۱۰۴۶\ \mathrm{m}$

(ث)
$$\vec{V}(t) = ۲۵۰\vec{i} - ۲۵۰\sqrt{۳}\vec{j}$$

(ج)
$$\vec{R}(۲) = ۵۰۰\vec{i} + (۵۰۰\sqrt{۳} - ۲g)\vec{j}$$
$$\vec{V}(۲) = ۲۵۰\vec{i} + (۲۵۰\sqrt{۳} - ۲g)\vec{j}$$
$$\left|\vec{V}(۲)\right| \approx ۴۸۳\text{m/s}$$

۳. بنابر حل قسمت (الف) از مثال ۷.۲.۶، بردتوپ برابر است با

$$x = \frac{v_\circ^۲ \sin ۲\alpha}{g}$$

پس

$$۸۰ = \frac{v_\circ^۲ \sin \frac{\pi}{۲}}{g}$$

و در نتیجه

$$v_\circ \sqrt{۸۰ g} \approx ۲۸ \text{ m/s}$$

۴. بنابر مثال ۶.۲.۶ بردار سرعت به ازای $\alpha = ۰$ برابر است با

$$\vec{V}(t) = v_\circ \cos ۰\,\vec{i} + (v_\circ \sin ۰ - gt)\vec{j}$$
$$= v_\circ \vec{i} - gt\vec{j}$$

پس بردار مکانی موشک برابر است با

$$\vec{R}(t) = \int \vec{V}(t) = v_\circ t\vec{i} - \frac{۱}{۲}gt^۲\vec{j} + \vec{D}$$

که در آن $\vec{D}$ بردار ثابت انتگرالگیری است. چون

$\vec{R}(۰) = ۳۰۰\vec{j}$، پس $\vec{D} = ۳۰۰\vec{j}$

در نتیجه

$$\vec{R}(t) = v_\circ t\vec{i} + (۳۰۰ - \frac{۱}{۲}gt^۲)\vec{j}$$

و به ازای $v_\circ = ۶۰۰$، داریم

$$\vec{R}(t) = ۶۰۰t\vec{i} + (۳۰۰ - \frac{۱}{۲}gt^۲)\vec{j}$$

مؤلفه‌های $\vec{R}(t)$ عبارت‌اند از $x = ۶۰۰\,t$ و $y = ۳۰۰ - \frac{۱}{۲}gt^۲$. موشک وقتی به زمین برخورد می‌کند که $y = ۰$، یعنی $۳۰۰ - \frac{۱}{۲}gt^۲ = ۰$. در نتیجه پس از $t = \sqrt{\frac{۶۰۰}{g}} \approx ۷/۸$ ثانیه موشک به زمین می‌رسد. بنابراین، برد موشک برابر است با

$$x = ۶۰۰\,t \approx ۶۰۰\,(۷/۸) = ۴۶۸۰\text{ m}$$

۵. داریم

$$\vec{V}(t) = \vec{R}'(t) = ۳\vec{i} + ۲\vec{j} - ۳۲t\vec{k}$$
$$\vec{A}(t) = \vec{V}'(t) = -۳۲\vec{k}$$

$$v=\left|\vec{V}(t)\right|=\sqrt{۹+۴+(۳۲t)^{۲}}$$
$$=\sqrt{۱۳+۱۰۲۴t^{۲}}$$

۶. در اینجا داریم

$$\vec{V}(t)=\vec{R}'(t)=-\sin t\vec{i}+\cos t\vec{j}-۳۲t\vec{k}$$
$$\vec{A}(t)=\vec{V}'(t)=-\cos t\vec{i}-\sin t\vec{j}-۳۲\vec{k}$$

$$v=\left|\vec{V}(t)\right|=\sqrt{\sin^{۲}t+\cos^{۲}t+(۳۲t)^{۲}}$$
$$=\sqrt{۱+۱۰۲۴t^{۲}}$$

۷.

$$\vec{V}(t)=\vec{R}'(t)=-e^{-t}\vec{i}-e^{-t}\vec{j}$$
$$\vec{A}(t)=\vec{V}'(t)=e^{-t}i+e^{-t}\vec{j}$$
$$v=\left|\vec{V}(t)\right|=\sqrt{e^{۲t}+e^{۲t}}=\sqrt{۲}e^{t}$$

۸.

$$\vec{V}(t)=\vec{R}'(t)=(e^{t}\sin t+e^{t}\cos t)\vec{i}+(e^{t}\cos t-e^{t}\sin t)\vec{j}+\vec{e}^{t}\vec{k}$$
$$=e^{t}(\sin t+\cos t)\vec{i}+e^{t}(\cos t-\sin t)\vec{j}+e^{t}\vec{k}$$
$$\vec{A}(t)=\vec{V}'(t)=\left[e^{t}(\sin t+\cos t)+e^{t}(\cos t-\sin t)\right]\vec{i}$$
$$+\left[e^{t}(\cos t-\sin t)+e^{t}(-\sin t-\cos t)\right]\vec{j}+e^{t}\vec{k}$$
$$=۲e^{t}\cos t\vec{i}-۲e^{t}\sin t\vec{j}+e^{t}\vec{k}$$

همچنین

$$v=\left|\vec{V}(t)\right|=\sqrt{e^{۲t}(\sin t+\cos t)^{۲}+e^{۲t}(\cos t-\sin t)^{۲}+e^{۲t}}$$
$$=\sqrt{۳}e^{t}$$

۹. می‌دانیم

$$\vec{R}'(t)=\vec{V}(t) \quad ، \quad \vec{V}'(t)=\vec{A}(t)$$
$$\vec{V}(t)=\int\vec{A}(t)dt$$
$$=\int(-g\vec{k})dt=-gt\vec{k}+\vec{c}$$

که در آن $\vec{D}$ بردار ثابت انتگرالگیری است. چون $\vec{V}_{۰}=\vec{۰}$، پس $\vec{G}=۰$ و در نتیجه

$$\vec{V}(t) = -gt\vec{k}$$
$$v = |\vec{V}(t)| = \sqrt{g^{۲}t^{۲}} = gt$$

همچنین، داریم

$$\vec{R}(t) = \int \vec{V}(t)dt$$
$$= \int (-gt\vec{k})dt = -\frac{g}{۲}t^{۲}\vec{k} + \vec{D}$$

که در آن $\vec{D}$ بردار ثابت انتگرالگیری است. چون $\vec{R}_{۰} = \vec{۰}$، پس $\vec{D} = \vec{۰}$ و $\vec{R}(t) = -\frac{g}{۲}t^{۲}\vec{k}$

۱۰. مانند تمرین ۹ عمل می‌کنیم. داریم

$$\vec{V}(t) = \int \vec{A}(t)dt$$
$$= \int -g\vec{k} = -gt\vec{k} + \vec{c}$$

که در آن $\vec{C}$ بردار ثابت انتگرالگیری است. چون $\vec{V}_{۰} = ۳\vec{i} - ۲\vec{j} + \vec{k}$، پس $\vec{c} = ۳\vec{i} - ۲\vec{j} + \vec{k}$ و در نتیجه $\vec{V}(t) = ۳\vec{i} - ۲\vec{j} + (۱ - gt)\vec{k}$ و

$$v = |\vec{V}(t)| = \sqrt{۹ + ۴ + (۱ - gt)^{۲}} = \sqrt{۱۴ - ۲gt + g^{۲}t^{۲}}$$

حال، داریم

$$\vec{R}(t) = \int \vec{V}(t)dt$$
$$= \int [۳\vec{i} - ۲\vec{j} + (۱ - gt)\vec{k}]dt$$
$$= ۳t\vec{i} - ۲t\vec{j} + (t - \frac{g}{۲}t^{۲})\vec{k} + \vec{D}$$

که در آن $\vec{D}$ بردار ثابت انتگرالگیری است. چون $\vec{R}_{۰} = ۵\vec{j} + ۲\vec{k}$، پس $\vec{D} = ۵\vec{j} + ۲\vec{k}$ و در نتیجه

$$\vec{R}(t) = ۳t\vec{i} + (۵ - ۲t)\vec{j} + (۲ + t - \frac{g}{۲}t^{۲})\vec{k}$$

۱۱. در اینجا

$$\vec{V}(t)=\int \vec{A}(t)dt$$
$$=\int (e^{t} i+e^{-t}\vec{j})dt$$
$$=e^{t}\vec{i}-e^{-t}\vec{j}+\vec{C}$$

که در آن $\vec{C}$ بردار ثابت انتگرالگیری است. چون $\vec{V}_{\circ}=\vec{i}-\vec{j}+\sqrt{۲}\vec{k}$، پس $\vec{i}-\vec{j}+\sqrt{۲}k=\vec{i}-\vec{j}+\vec{c}$ و در نتیجه $\vec{C}=\sqrt{۲}\vec{k}$. بنابراین $\vec{V}(t)=e^{t}\vec{i}-e^{-t}\vec{j}+\sqrt{۲}\vec{k}$

$$v=\left|\vec{V}(t)\right|=\sqrt{e^{۲t}+e^{-۲t}+۲}=\sqrt{\frac{e^{۴t}+۱+۲e^{۲t}}{e^{۲t}}}$$
$$=\sqrt{\frac{(۱+e^{۲t})^{۲}}{e^{۲t}}}=\frac{۱+e^{۲t}}{e^{t}}=e^{-t}+e^{t}$$

حال، داریم

$$\vec{R}(t)=\int \vec{V}(t)dt$$
$$=\int (e^{۲}\vec{i}-e^{-t}\vec{j}+\sqrt{۲}\vec{k})dt$$
$$=e^{t}\vec{i}+e^{-t}\vec{j}+\sqrt{۲}t\vec{k}+\vec{D}$$

که در آن $\vec{D}$ بردار ثابت انتگرالگیری است. چون $\vec{R}_{\circ}=\vec{i}+\vec{j}$، پس $\vec{i}+\vec{j}=\vec{i}+\vec{j}+\circ\vec{k}+\vec{D}$ و در نتیجه $\vec{D}=\vec{\circ}$. بنابراین $\vec{R}(t)=e^{t}\vec{i}+e^{-t}\vec{j}+\sqrt{۲}t\vec{k}$.

۱۲. داریم

$$\vec{V}(t)=\int (-\cos t\vec{i}-\sin t\vec{j})dt$$
$$=-\sin t\vec{i}+\cos t\vec{j}+\vec{C}$$

که در آن $\vec{C}$ بردار ثابت‌انتگرالگیری‌است. چون $\vec{V}_{\circ}=\vec{k}$، پس $\vec{k}=-\sin\circ\vec{i}+\cos\circ\vec{j}+\vec{C}$ و در نتیجه $\vec{C}=-\vec{j}+\vec{k}$. بنابراین

$$\vec{V}(t)=-\sin t\vec{i}+(\cos t-۱)\vec{j}+\vec{k}$$
$$V=\left|\vec{V}(t)\right|=\sqrt{\sin^{۲}t+(\cos t-۱)^{۲}+۱}=\sqrt{۳-۲\cos t}$$
$$\vec{R}(t)=\int V(t)dt$$

حال، داریم

$$= \cos t\,\vec{i} + (\sin t - t)\,\vec{j} + t\,\vec{k} + \vec{D}$$

که در آن $\vec{D}$ بردار ثابت انتگرالگیری است. چون $\vec{R}_\circ = \vec{i}$، پس

$$\vec{i} = \cos \circ\,\vec{i} + (\sin \circ - \circ)\,\vec{j} + \circ\,\vec{k} + \vec{D}$$

و در نتیجه $\vec{D} = \vec{\circ}$. بنابراین

$$\vec{R}(t) = \cos t\,\vec{i} + (\sin t - t)\,\vec{j} + t\,\vec{k}$$

تمرینهای ۳.۶

۱. بنابه تعریف، داریم

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{R}'(t)}{|\vec{R}'(t)|} = \frac{۲t\vec{i} + ۲\vec{j}}{\sqrt{۴t^۲ + ۴}} = \frac{t}{\sqrt{t^۲ + ۱}}\vec{i} + \frac{۱}{\sqrt{t^۲ + ۱}}\vec{j}$$

چون

$$\vec{T}'(t) = \frac{\sqrt{t^۲ + ۱} - \dfrac{t^۲}{\sqrt{t^۲ + ۱}}}{t^۲ + ۱}\vec{i} - \frac{t}{(t^۲ + ۱)^{۳/۲}}\vec{j}$$

$$= \frac{۱}{(t^۲ + ۱)^{۳/۲}}\vec{i} - \frac{t}{(t^۲ + ۱)^{۳/۲}}\vec{j}$$

$$|\vec{T}'(t)| = \sqrt{\frac{۱}{(t^۲ + ۱)^۳} + \frac{t^۲}{(t^۲ + ۱)^۳}}$$

$$= \frac{۱}{t^۲ + ۱}$$

بنابراین

$$\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{|T'(t)|} = \frac{۱}{\sqrt{t^۲ + ۱}}\vec{i} - \frac{t}{\sqrt{t^۲ + ۱}}\vec{j}$$

۲. بنابه تعریف، داریم

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{R}'(t)}{|R'(t)|} = \frac{۲\vec{i} + ۲t\vec{j} + t^۲\vec{k}}{\sqrt{۴ + ۴t^۲ + t^۴}}$$

$$= \frac{۲}{t^۲ + ۲}\vec{i} + \frac{۲t}{t^۲ + ۲}\vec{j} + \frac{t^۲}{t^۲ + ۲}\vec{k}$$

چون

$$\vec{T}'(t) = \frac{-۴t}{(t^۲ + ۲)^۲}\vec{i} + \frac{۴ - ۲t^۲}{(t^۲ + ۲)^۲}\vec{j} + \frac{۴t}{(t^۲ + ۲)^۲}\vec{k}$$

$$\left|\vec{T}'(t)\right| = \sqrt{\frac{16t^2}{(t^2+2)^4} + \frac{(4-2t^2)^2}{(t^2+2)^4} + \frac{16t^2}{(t^2+2)^4}}$$
$$= \frac{2}{t^2+2}$$

در نتیجه

$$\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{\left|\vec{T}'(t)\right|} = \frac{-2t}{2+t^2}\vec{i} + \frac{2-t^2}{2+t^2}j + \frac{2t}{2+t^2}\vec{k}$$

۳. داریم

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{R}'(t)}{\left|\vec{R}'(t)\right|} = \frac{2\vec{i} + (e^t - e^{-t})\vec{j}}{\sqrt{4 + (e^t - e^{-t})^2}}$$
$$= \frac{2}{e^t + e^{-t}}\vec{i} + \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}\vec{j}$$

چون

$$\vec{T}'(t) = -\frac{2(e^t - e^{-t})}{(e^t + e^{-t})^2}\vec{i} + \frac{(e^t + e^{-t})^2 - (e^t - e^{-t})^2}{(e^t + e^{-t})^2}\vec{j}$$
$$= -\frac{2(e^t - e^{-t})}{(e^t + e^{-t})^2}\vec{i} + \frac{4}{(e^t + e^{-t})^2}\vec{j}$$

$$\left|\vec{T}'(t)\right| = \sqrt{\frac{4(e^t - e^{-t})^2}{(e^t + e^{-t})^4} + \frac{16}{(e^t + e^{-t})^2}}$$
$$= \sqrt{\frac{4(e^t + e^{-t})^2}{(e^t + e^{-t})^4}} = \frac{2}{e^t + e^{-t}}$$

در نتیجه، بردار قائم برابر است با

$$\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{\left|\vec{T}'(t)\right|} = -\frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}\vec{i} + \frac{2}{e^t + e^{-t}}\vec{j}$$

۴. در اینجا، داریم

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{R}'(t)}{\left|\vec{R}'(t)\right|} = \frac{-\sin t\,\vec{i} - \sin t\,\vec{j} + \sqrt{2}\cos t\,\vec{k}}{\sqrt{\sin^2 t + \sin^2 t + 2\cos^2 t}}$$
$$= -\frac{\sin t}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{\sin t}{\sqrt{2}}\vec{j} + \cos t\,\vec{k}$$

$$\vec{N}(t)=\frac{\vec{T}'(t)}{|\vec{T}'(t)|}=\frac{-\frac{\cos t}{\sqrt{۲}}\vec{i}-\frac{\cos t}{\sqrt{۲}}\vec{j}-\sin t\,\vec{k}}{\sqrt{\frac{\cos^{۲} t}{۲}+\frac{\cos^{۲} t}{۲}+\sin^{۲} t}}$$

$$=-\frac{\cos t}{\sqrt{۲}}\vec{i}-\frac{\cos t}{\sqrt{۲}}\vec{j}-\sin t\,\vec{k}$$

۵. بردار مماس برابر است با

$$\vec{T}(t)=\frac{\vec{R}'(t)}{|\vec{R}'(t)|}=\frac{\frac{۱}{۲}(۱+t)^{۱/۲}\vec{i}-\frac{۱}{۲}(۱-t)^{۱/۲}\vec{j}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}\vec{k}}{\sqrt{\frac{۱}{۴}(۱+t)+\frac{۱}{۴}(۱-t)+\frac{۱}{۲}}}$$

$$=\frac{۱}{۲}(۱+t)^{۱/۲}\vec{i}-\frac{۱}{۲}(۱-t)^{۱/۲}\vec{j}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}\vec{k}$$

بردار قائم برابر است با

$$\vec{N}(t)=\frac{\vec{T}'(t)}{|\vec{T}'(t)|}=\frac{\frac{۱}{۴}(۱+t)^{۱/۲}\vec{i}+\frac{۱}{۴}(۱-t)^{۱/۲}\vec{j}}{\sqrt{\frac{۱}{۱۶}(۱+t)^{-۱}+\frac{۱}{۱۶}(۱-t)^{-۱}}}$$

$$=\frac{\sqrt{۲}(۱-t)^{۱/۲}}{۲}\vec{i}+\frac{\sqrt{۲}(۱+t)^{۱/۲}}{۲}\vec{j}$$

۶.

$$\vec{T}(t)=\frac{\vec{R}'(t)}{|\vec{R}'(t)|}=\frac{e^{t}\vec{i}-e^{-t}\vec{j}+\sqrt{۲}\vec{k}}{\sqrt{e^{۲t}+e^{-۲t}+۲}}$$

$$=\frac{e^{t}}{e^{t}+e^{-t}}\vec{i}-\frac{e^{-t}}{e^{t}+e^{-t}}\vec{j}-\frac{\sqrt{۲}}{e^{t}+e^{-t}}\vec{k}$$

همچنین، چون

$$\vec{T}'(t)=\frac{e^{t}(e^{t}+e^{-t})-e^{t}(e^{t}-e^{-t})}{(e^{t}+e^{-t})^{۲}}\vec{i}-\frac{-e^{-t}(e^{t}+e^{-t})-e^{-t}(e^{t}-e^{-t})}{(e^{t}+e^{-t})^{۲}}\vec{j}$$
$$+\frac{-\sqrt{۲}(e^{t}-e^{-t})}{e^{t}+e^{-t}}\vec{K}$$

$$=\frac{۲}{(e^{t}+e^{-t})^{۲}}\vec{i}+\frac{۲}{(e^{t}+e^{-t})^{۲}}\vec{j}-\frac{\sqrt{۲}(e^{t}-e^{-t})}{(e^{t}+e^{-t})}\vec{k}$$

$$\left|\vec{T}'(t)\right| = \sqrt{\frac{۴}{(e^t+e^{-t})^۴}+\frac{۴}{(e^t+e^{-t})^۴}+\frac{۲(e^t-e^{-t})^۲}{(e^t+e^{-t})^۴}}$$
$$=\frac{\sqrt{۲}}{e^t+e^{-t}}$$

بنابراین، بردار قائم بر منحنی برابر است با

$$\vec{N}(t)=\frac{\vec{T}'(t)}{\left|\vec{T}'(t)\right|}=\frac{\sqrt{۲}}{e^t+e^{-t}}\vec{i}+\frac{\sqrt{۲}}{e^t+e^{-t}}\vec{j}-\frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}\vec{k}$$

۷. چون

$$\vec{V}(t)=\vec{R}'(t)=a(۱-\cos t)\vec{i}+a\sin t\vec{j}$$

پس

$$v(t)=\left|\vec{V}(t)\right|=\sqrt{a^۲(۱-\cos t)^۲+a^۲\sin^۲ t}$$
$$=\sqrt{۲}a\sqrt{۱-\cos t}$$

$$A_T=\frac{dv(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\sqrt{۲}a\sqrt{۱-\cos t}=\frac{a\sqrt{۲}\sin t}{۲\sqrt{۱-\cos t}}$$

$$\vec{A}(t)=\vec{V}'(t)=a\sin t\vec{i}+a\cos t\vec{j}$$

همچنین، چون

$$\left|\vec{A}(t)\right|=\sqrt{a^۲\sin^۲ t+a^۲\cos^۲ t}=a$$

در نتیجه

$$A_N=\sqrt{|A|^۲-A_T^۲}$$
$$=\sqrt{a^۲-\frac{۲a^۲\sin^۲ t}{۴(۱-\cos t)}}=a\sqrt{\frac{۲-۲\cos t-\sin^۲ t}{۲(۱-\cos t)}}$$
$$=a\sqrt{\frac{۲-۲\cos t-(۱-\cos^۲ t)}{۲(۱-\cos t)}}=\frac{a\sqrt{۱-\cos t}}{\sqrt{۲}}$$

۸. چون

$$\vec{V}(t)=\vec{R}'(t)=-۲\sin t\vec{i}+۳\cos t\vec{j}$$
$$v(t)=\left|\vec{V}(t)\right|=\sqrt{۴\sin^۲ t+۹\cos^۲ t}$$
$$=\sqrt{۵\cos^۲ t+۴}$$

پس، مؤلفه مماسی شتاب برابر است با

$$A_T=\frac{dv(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\sqrt{۵\cos^۲ t+۴}$$
$$=\frac{-۵\sin t\cos t}{\sqrt{۵\cos^۲ t+۴}}$$

همچنین، چون $\vec{A}(t)=\vec{V}'(t)=-۲\cos t\,\vec{i}-۳\sin t\,\vec{j}$

$$|A(t)|=\sqrt{۴\cos^۲ t+۹\sin^۲ t}=\sqrt{۵\sin^۲ t+۴}$$

بنابراین مؤلفه قائم شتاب برابر است با

$$A_N=\sqrt{|A|^۲-A_T^۲}$$
$$=\sqrt{۵\sin^۲ t+۴-\frac{۲۵\sin^۲ t\cos^۲ t}{۵\cos^۲ t+۴}}$$
$$=\sqrt{\frac{۲۰\cos^۲ t+۲۰\sin^۲ t+۱۶}{۵\cos^۲ t+۴}}=\frac{۶}{\sqrt{۵\cos^۲ t+۴}}$$

۹.چون

$$\vec{V}(t)=\vec{R}'(t)=۲\vec{i}+۲t\vec{j}+t^۲\vec{k}$$

$$|\vec{V}(t)|=\sqrt{۴+۴t^۲+t^۴}=۲+t^۳$$

بنابراین، مؤلفه مماسی برابر است با

$$A_T=\frac{dv(t)}{dt}=\frac{d}{dt}(۲+t^۲)=۲t$$

همچنین، چون

$$\vec{A}(t)=\vec{V}'(t)=۲\vec{j}+۲t\vec{k}$$

$$|\vec{A}(t)|=\sqrt{۴+۴t^۲}=۲\sqrt{۱+t^۲}$$

پس، مؤلفه قائم شتاب برابر است با

$$A_N=\sqrt{|A|^۲-A_T^۲}=\sqrt{۴+۴t^۲-۴t^۲}=۲$$

۱۰. از آنجا که

$$\vec{V}(t)=\vec{R}'(t)=e^{t}\vec{i}-e^{-t}\vec{j}+\sqrt{۲}\vec{k}$$

$$\left|\vec{V}(t)\right|=\sqrt{e^{۲t}+e^{-۲t}+۲}=\sqrt{(e^{t}+e^{-t})^{۲}}$$
$$=e^{t}+e^{-t}$$

پس، مؤلفهٔ مماسی شتاب برابر است با

$$A_T=\frac{d\,v(t)}{dt}=\frac{d}{dt}(e^{t}+e^{-t})=e^{t}-e^{-t}$$

همچنین، داریم

$$\vec{A}(t)=\vec{V}'(t)=e^{t}\vec{i}+e^{-t}\vec{j}$$

$$\left|\vec{A}(t)\right|=\sqrt{e^{۲t}+e^{-۲t}}$$

بنابراین، مؤلفهٔ قائم شتاب برابر است با

$$A_N=\sqrt{|A|^{۲}-A_T^{۲}}$$
$$=\sqrt{e^{۲t}+e^{-۲t}-(e^{t}-e^{-t})^{۲}}=\sqrt{۲}$$

تمرینهای ۴.۶

۱. داریم $y'=m$ و $y''=۰$. پس

$$k=\frac{|y''|}{\left[۱+(y')^{۲}\right]^{۳/۲}}=\frac{۰}{\left[۱+m^{۲}\right]^{۳/۲}}=۰$$

۲. در اینجا $y'=۲x+۲$ و $y''=۲$. پس

$$k=\frac{|y''|}{\left[۱+(y')^{۲}\right]^{۳/۲}}=\frac{۲}{\left[۱+(۲x+۲)^{۲}\right]^{۳/۲}}=\frac{۱}{(۴x^{۲}+۸x+۵)^{۳/۲}}$$

۳. چون $y'=e^{x}$ و $y''=e^{x}$،

$$k=\frac{|y''|}{\left[۱+(y')^{۲}\right]^{۳/۲}}=\frac{e^{x}}{(۱+e^{۲x})^{۳/۲}}$$

۴. در اینجا $y' = ۲x$ و $y'' = ۲$. پس

$$k=\frac{|y''|}{\left[۱+(y')^{۲}\right]^{۳/۲}}=\frac{۲}{(۱+۴x^{۲})^{۳/۲}}=\frac{۲}{(۱+۴y)^{۳/۲}}$$

۵. چون

$$y'= a \sin t،\quad x' = a\,(۱ - \cos t)$$
$$y'' = a \cos t،\quad x'' = a \sin t$$

پس

$$k=\frac{|x'y''-y'x''|}{\left[(x')^{۲}+(y')^{۲}\right]^{۳/۲}}=\frac{|a^{۲}\cos t\,(۱-\cos t)-a^{۲}\sin^{۲}t|}{\left[a^{۲}(۱-\cos t)^{۲}+a^{۲}\sin^{۲}t\right]^{۳/۲}}$$
$$=\frac{a^{۲}\,|\cos t-۱|}{a^{۳}\,۲^{۳/۲}(۱-\cos t)^{۳/۲}}$$
$$=\frac{۱}{۴a\,\left|\sin(t/۲)\right|}$$

[توجه $\cos t = ۱ - ۲\sin^{۲}(t/۲)$]

۶. در اینجا، داریم

$$y' = b\,\theta\sin\theta \qquad x' = b\,\theta\cos\theta$$
$$y'' = b(\sin\theta + \theta\cos\theta) \qquad x'' = b(\cos\theta - \theta\sin\theta)$$

در نتیجه

$$k=\frac{b^{۲}\theta\cos\theta(\sin\theta+\theta\cos\theta)-b^{۲}\theta\sin\theta(\cos\theta-\theta\sin\theta)}{(b^{۲}\theta^{۲}\cos^{۲}\theta+b^{۲}\theta^{۲}\sin^{۲}\theta)^{۳/۲}}$$
$$=\frac{b^{۲}\theta^{۲}}{(b^{۲}\theta^{۲})^{۳/۲}}=\frac{۱}{b\,|\theta|}$$

۷. چون $y'= -\frac{۱}{۲}x^{-۱/۲}$ و $y''=\frac{۱}{۴}xx^{-۳/۲}$،

$$k=\frac{|y''|}{\left[۱+(y')^{۲}\right]^{۳/۲}}=\frac{\left|\frac{۱}{۴}x^{-۳/۲}\right|}{۱+\frac{۱}{۴x})^{۳/۲}}=\frac{۲}{(۴x+۱)^{۳/۲}}$$

در نتیجه خمیدگی منحنی در نقطهٔ $p(۱, -۱)$ برابر است با $k=\frac{۲}{۵\sqrt{۵}}$.

۸. چون $y' = \frac{x}{2}$ و $y'' = \frac{1}{2}$، به ازای هر x،

$$k = \frac{|y''|}{\left[1+(y')^2\right]^{3/2}} = \frac{1/2}{(1+\frac{x^2}{4})^{3/2}}$$

$$= \frac{4}{(4+x^2)^{3/2}}$$

برای پیداکردن مقدار x که به ازای آن مقدار k ماکسیمم است، معادلهٔ $\frac{dk}{dx} = 0$ را حل می‌کنیم:

$$\frac{dk}{dx} = \frac{-12x}{(4+x^2)^{5/2}} = 0$$

به آسانی دیده می‌شود که در نقطهٔ $(0 ، 0)$ مقدار k ماکسیمم است.این مقدار ماکسیمم برابر است با

$$k = \frac{4}{(4+0)^{3/2}} = \frac{1}{2}$$

۹. چون $y' = \frac{1}{x}$ و $y'' = -\frac{1}{x^2}$، پس به ازای هر x داریم

$$k = \frac{|y''|}{\left[1+(y')^2\right]^{3/2}} = \frac{1/x^2}{(1+\frac{1}{x^2})^{3/2}}$$

$$= \frac{|x|}{(x^2+1)^{3/2}}$$

برای پیداکردن ماکسیمم k، معادلهٔ $\frac{dK}{dx} = 0$ را حل می‌کنیم:

$$\frac{dk}{dx} = \frac{1-2x^2}{(x^2+1)^{5/2}} = 0$$

به آسانی دیده می‌شود که به ازای $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$، k ماکسیمم است. این مقدار ماکسیمم برابر است با

$$k = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{(\frac{1}{2}+1)^{3/2}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

۱۰. در اینجا $y' = e^x$ و $y'' = e^x$، و در نتیجه

$$k = \frac{e^x}{(1+e^{2x})^{3/2}}$$

بنابراین، با مشتق‌گیری از K نسبت به x و پس از ساده‌کردن، داریم

$$\frac{dK}{dx} = \frac{e^{x} - ۲e^{۳x}}{(۱ + e^{۲x})^{۵/۲}}$$

به آسانی دیده می‌شود که به ازای $x = -\frac{\ln ۲}{۲}$ مقدار k ماکسیمم است. این مقدار ماکسیمم برابر است با

$$k = \frac{e^{-\frac{\ln ۲}{۲}}}{(۱ + e^{-\ln ۲})^{۳/۲}} = \frac{\sqrt{۲}/۲}{(۱ + \frac{۱}{۲})^{۳/۲}} = \frac{۲\sqrt{۳}}{۹}$$

۱۱. عبارتهای زیر را داریم

$$\vec{R}(t) = e^{t}\sin t\vec{i} + e^{t}\cos t\vec{j} + t\vec{k}$$

$$\vec{V}(t) = \vec{R}'(t) = (e^{t}\sin t + e^{t}\cos t)\vec{i} + (e^{t}\cos t - e^{t}\sin t)\vec{j} + \vec{k}$$

$$|\vec{V}(t)| = \sqrt{e^{۲t}(\sin t + \cos t)^{۲} + e^{۲t}(\cos t - \sin t)^{۲} + ۱}$$
$$= \sqrt{۲e^{۲t} + ۱}$$

$$\vec{A}(t) = \vec{V}'(t) = ۲e^{t}\cos t\vec{i} - ۲e^{t}\sin t\vec{j}$$

در نتیجه

$$\vec{V} x \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ e^{t}(\sin t + \cos t) & e^{t}(\cos t - \sin t) & ۱ \\ ۲e^{t}\cos t & -۲e^{t}\sin t & ۰ \end{vmatrix}$$
$$= ۲e^{t}\sin t\vec{i} + ۲e^{t}\cos t\vec{j} - ۲e^{۲t}\vec{k}$$

$$|\vec{V} x \vec{A}| = \sqrt{۴e^{۲t}\sin^{۲} t + ۴e^{۲t}\cos^{۲} t + ۴e^{۴t}} = ۲e^{t}\sqrt{۱ + e^{۲t}}$$

بنابراین، انحنای منحنی برابر است با

$$k = \frac{|\vec{V} x \vec{A}|}{|\vec{V}|^{۳}} = \frac{۲e^{t}(۱ + e^{۲t})^{۱/۲}}{(۲e^{۲t} + ۱)^{۳/۲}}$$

۱۲. عبارتهای زیر را محاسبه می‌کنیم.

$$\vec{R}(t)=\sin t\,\vec{i}+\cos t\,\vec{j}+\frac{۲}{۳}t^{۳/۲}\vec{k}$$

$$\vec{V}(t)=\vec{R}'(t)=\cos t\,\vec{i}-\sin t\,\vec{j}+t^{۱/۲}\vec{k}$$

$$|\vec{V}(t)|=\sqrt{\cos^{۲}t+\sin^{۲}t+t}=\sqrt{۱+t}$$

$$\vec{A}(t)=\vec{V}'(t)=-\sin t\vec{i}-\cos t\vec{j}+\frac{۱}{۲}t^{-۱/۲}\vec{k}$$

$$\vec{V}\times\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \cos t & -\sin t & t^{۱/۲}\\ -\sin t & -\cos t & \frac{۱}{۲}t^{-۱/۲}\end{vmatrix}$$

$$=(-\frac{۱}{۲}t^{-۱/۲}\sin t+t^{۱/۲}\cos t)\,\vec{i}-(\frac{۱}{۲}t^{-۱/۲}\cos t+t^{۱/۲}\sin t)\vec{j}-\vec{k}$$

$$|\vec{V}\times\vec{A}|=\frac{۲t+۱}{۲\sqrt{t}}$$

بنابراین

$$k=\frac{|\vec{V}\times\vec{A}|}{|\vec{V}|^{۳}}=\frac{۲t+۱/۲\sqrt{t}}{(۱+t)^{۳/۲}}=\frac{۲t+۱}{۲\sqrt{t}(۱+t)^{۳/۲}}$$

۱۳. عبارتهای زیر را داریم

$$\vec{R}(t)=\frac{۱}{۳}(t^{۲}-۱)^{۳/۲}\vec{i}+\frac{\sqrt{۲}}{۴}-t^{۲}\vec{j}+\frac{\sqrt{۲}}{۴}t^{۲}\vec{k}$$

$$\vec{V}(t)=\vec{R}'(t)=t(t^{۲}-۱)^{۱/۲}\vec{i}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}t\vec{j}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}t\vec{k}$$

$$|\vec{V}(t)|=\sqrt{t^{۲}(t^{۲}-۱)+\frac{۱}{۲}t^{۲}+\frac{۱}{۲}t^{۲}}=t^{۲}$$

$$\vec{A}(t)=\vec{V}'(t)=\frac{۲t^{۲}-۱}{\sqrt{t^{۲}-۱}}\vec{i}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}\vec{j}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}\vec{k}$$

$$\vec{V}\times\vec{A}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ t(t^{۲}-۱)^{۱/۲} & \frac{\sqrt{۲}}{۲}t & \frac{\sqrt{۲}}{۲}t \\ \frac{۲t^{۲}-۱}{\sqrt{t^{۲}-۱}} & \frac{\sqrt{۲}}{۲} & \frac{\sqrt{۲}}{۲} \end{vmatrix}$$

$$=\frac{\sqrt{۲}t^{۳}}{۲\sqrt{t^{۲}-۱}}\vec{j}-\frac{\sqrt{۲}t^{۳}}{۲\sqrt{t^{۲}-۱}}\vec{k}$$

$$|\vec{V}\times\vec{A}|=\frac{t^{۳}}{\sqrt{t^{۲}-۱}}$$

$$|\vec{V}\times\vec{A}|=\frac{t^{۳}}{\sqrt{t^{۲}-۱}}$$

بنابراین، انحنای منحنی برابر است با

$$k=\frac{|\vec{v}\times\vec{A}|}{|\vec{V}|^{۳}}=\frac{t^{۳}/\sqrt{t^{۲}-۱}}{t^{۶}}=\frac{۱}{t^{۳}\sqrt{t^{۲}-۱}}$$

۱۴. در اینجا، داریم

$$\vec{R}(t)=e^{t}\vec{i}+e^{-t}\vec{j}+\sqrt{۲}t\vec{k}$$

$$\vec{V}(t)=\vec{R}'(t)=e^{t}\vec{i}-e^{-t}\vec{j}+\sqrt{۲}\vec{k}$$

$$|\vec{V}(t)|=\sqrt{e^{۲t}+e^{-۲t}+۲}=\sqrt{(e^{t}+e^{-t})^{۲}}=e^{t}+e^{t}$$

$$\vec{A}(t)=e^{t}\vec{i}+e^{-t}\vec{j}$$

$$\vec{V}\times\vec{A}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ e^{t} & -e^{-t} & \sqrt{۲} \\ e^{t} & e^{-t} & ۰ \end{vmatrix}=-\sqrt{۲}e^{-t}\vec{i}+\sqrt{۲}e^{t}\vec{j}+۲\vec{k}$$

$$|\vec{V}\times\vec{A}|=\sqrt{۲e^{-۲t}+۲e^{۲t}+۴}=\sqrt{۲}\sqrt{(e^{t}+e^{t})^{۲}}-\sqrt{۲}(e^{t}+e^{-t})$$

بنابراین، انحنای منحنی برابر است با

$$k=\frac{|\vec{V}\times\vec{A}|}{|\vec{V}|^{۳}}=\frac{\sqrt{۲}(e^{t}+e^{-t})}{(e^{t}+e^{-t})^{۳}}=\frac{\sqrt{۲}}{(e^{t}+e^{-t})^{۲}}$$

تمرینهای فصل ۷

تمرینهای ۱.۷

۱. دامنهٔ f برابر است با مجموعهٔ همهٔ نقاط (x, y) به طوری که $x \geq 0$ و $y \geq 0$؛ یعنی $\{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0\}$.

۲. $\{(x, y) \mid x \neq 0, y \neq 0\}$.

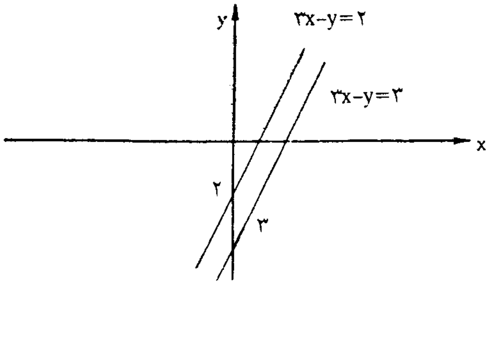
۳. دامنهٔ این تابع مجموعهٔ همه نقاط (x, y) است به طوری که $x^2 + y^2 - 25 \geq 0$ یا $x^2 + y^2 \geq 25$؛ یعنی همهٔ نقاط واقع بر دایرهٔ $x^2 + y^2 = 25$ و خارج از این دایره.

۴. دامنهٔ f برابر است با مجموعهٔ همهٔ نقاط (x, y) به طوری که $x+y \neq 0$ یا $x \neq -y$؛ یعنی $\{(x, y) \mid x \neq -y\}$.

۵. دامنهٔ این تابع مجموعهٔ همه نقاط (x, y, z) است به طوری که $1 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0$ یا $x^2 + y^2 + z^2 \neq 1$ یعنی مجموعهٔ نقاطی که توسط کرهٔ به مرکز مبدأ و شعاع ۱ محدود می‌شوند؛ $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

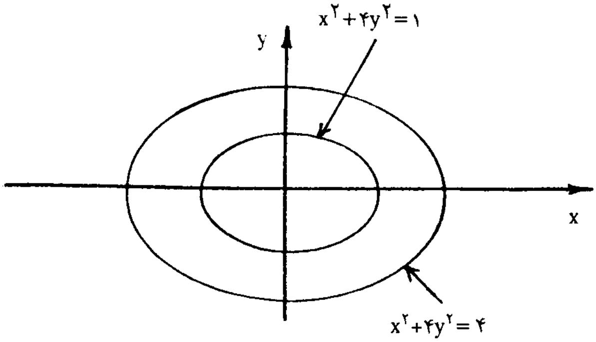
۶. $\{(x, y, z) \mid x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0\}$.

۷. منحنیهای تراز این تابع نمودار خطهای $3x - y = c$ هستند. نمودارهای این منحنیهای تراز به ازای $c = 2, 3$ در شکل ۱.۱.۷ رسم شده‌اند.



شکل ۱.۱.۷

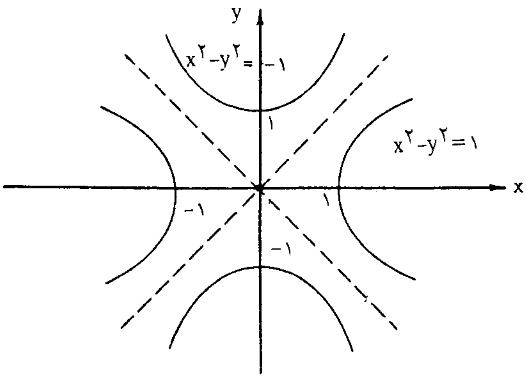
۸. معادلات منحنیهای تراز داده شده عبارت‌اند از $x^{۲} + ۴y^{۲} = ۱$ و $x^{۲} + ۴y^{۲} = ۴$. این بیضیها در شکل ۲.۱.۷ رسم شده‌اند.



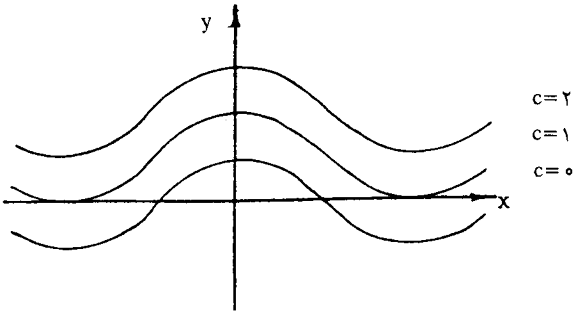
شکل ۲.۱.۷

۹. معادلات این منحنیهای تراز عبارت‌اند از $x^{۲} - y^{۲} = ۰$، $x^{۲} - y^{۲} = ۱$ و $x^{۲} - y^{۲} = -۱$. منحنی اول تنها شامل نقطهٔ $(۰,۰)$ و دو منحنی دیگر هذلولی هستند. این نمودارها در شکل ۳.۱.۷ رسم شده‌اند.

۱۰. معادلات منحنیهای تراز داده شده عبارت‌اند از $۲y - \cos x = ۰$، $۲y - \cos x = ۱$، $۲y - \cos x = ۲$؛ یعنی $y = \frac{۱}{۲}\cos x$، $y = \frac{۱}{۲}\cos x + \frac{۱}{۲}$، $y = \frac{۱}{۲}\cos x + ۱$. نمودار این توابع در شکل ۴.۱.۷ رسم شده‌اند.



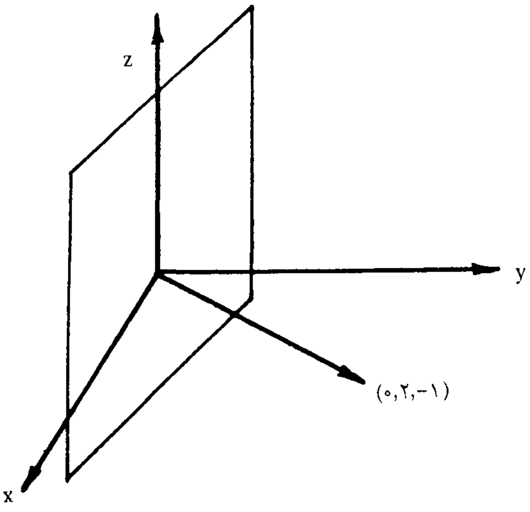
شکل ۳.۱.۷



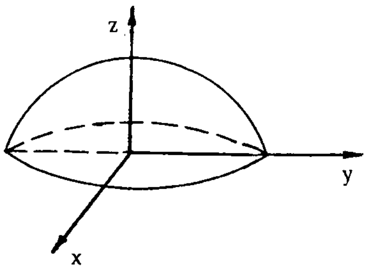
شکل ۴.۱.۷

۱۱. نمودار تابع $z = x + ۲y$ یا $x + ۲y - z = ۰$ صفحه‌ای است که از مبدأ می‌گذرد و بر بردار $\vec{a} = (۰, ۲, -۱)$ قائم است (شکل ۵.۱.۷ را ببینید).

۱۲. قرار می‌دهیم $z = f(x, y)$ معادلهٔ $z=\sqrt{۴-x^{۲}-y^{۲}}$ را به دست می‌آوریم. اگر دو طرف این معادله را مربع کنیم، معادلهٔ $z^{۲} = ۴ - x^{۲} - y^{۲}$ یا $x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} = ۱$ به دست می‌آید که معادلهٔ کرهٔ به مرکز مبدأ و شعاع ۱ است. پس نمودار $z=\sqrt{۴-x^{۲}-y^{۲}}$ نیمهٔ بالایی این کره است (شکل ۶.۱.۷ را ببینید).

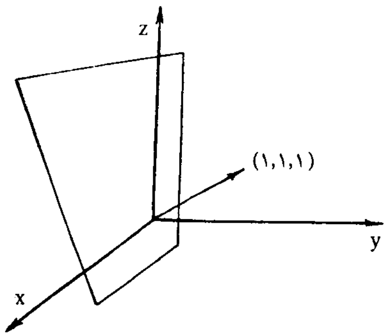


شکل ۵.۱.۷



شکل ۶.۱.۷

۱۳. سطوح تراز تابع f نمودارهای معادلات $x + y + z = c$ هستند. این سطوح صفحه‌هایی قائم بر $\vec{a} = (1, 1, 1)$ هستند (شکل ۷.۱.۷ را ببینید).



شکل ۷.۱.۷

۱۴. هر یک از این سطوح تراز نمودار معادلهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = c$ هستند. اگر $c < 0$، این سطح تهی است؛ اگر $c = 0$ تنها شامل نقطهٔ $(0, 0, 0)$، واگر $c > 0$ یک کره به مرکز مبدأ و شعاع $\sqrt{c}$ است.

۱۵. معادلات سطوح تراز این تابع به صورت $x + 2y = c$ هستند که صفحه‌های با بردار قائم $(1, 2, 0)$ هستند.

۱۶. این سطوح تراز، نمودارهای صفحه‌های $z = c$ هستند.

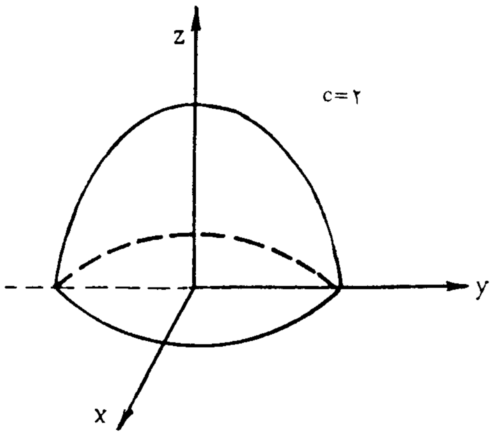
۱۷. معادلهٔ این سطوح تراز به صورت $x^2 + y^2 + z = c$ یا $x^2 + y^2 = \frac{z - c}{-1}$ است. نمودار این سطح، سهمیوار مدوری به رأس $(0, 0, c)$ است که روبه پایین باز می‌شود (معادلهٔ ۹.۱.۷ (۴)

متن کتاب را ببینید).

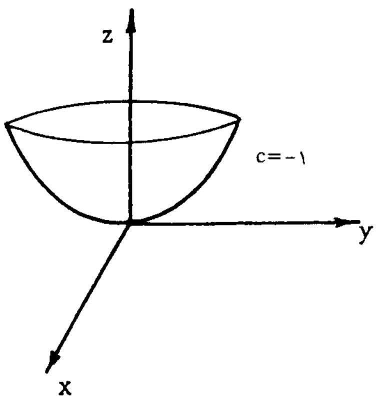
۱۸. معادلهٔ سطوح تراز این تابع به صورت $c = z - ۱ - x^{۲} - y^{۲}$ یا $x^{۲} + y^{۲} = z - ۱ - c$ است که معادلهٔ یک سهمیوار مدور به رأس $(۰, ۰, ۱ + c)$ است و روبه بالا باز می‌شود (معادلهٔ ۹.۱.۷ (۴) متن کتاب را ببینید).

۱۹. معادلهٔ داده شده سهمیوار بیضوی زیر است.

$$\frac{x^{۲}}{(\frac{۱}{۲})^{۲}} + \frac{y^{۲}}{(\frac{۱}{۳})^{۲}} = ۳۶z$$



شکل ۸.۱.۷



شکل ۹.۱.۷

رأس این سهمیوار مبدأ مختصات است و روبه‌بالا باز می‌شود (معادلهٔ ۹.۱.۷ (۴) متن کتاب را ببینید).

۲۰. این سطح، ورق هذلولیوار

$$\frac{x^۲}{۵^۲}+\frac{y^۲}{۲^۲}-\frac{z^۲}{۴^۲}=۱$$

است (معادلهٔ ۹.۱.۷ (۸) متن کتاب را ببینید).

۲۱. این سطح هذلولیوار دوپارچه

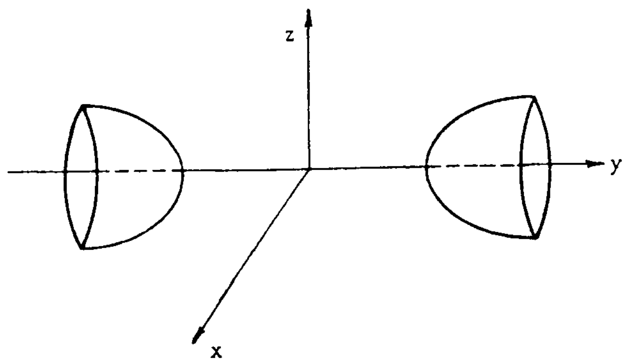
$$\frac{x^۲}{۲^۲}-\frac{y^۲}{(\sqrt{۳})^۲}-\frac{z^۲}{(\sqrt{۱۲})^۲}=۱$$

است. محور تقارن این هذلولیوار محور xاست (معادلهٔ ۹.۱.۷ (۹) متن کتاب را ببینید).

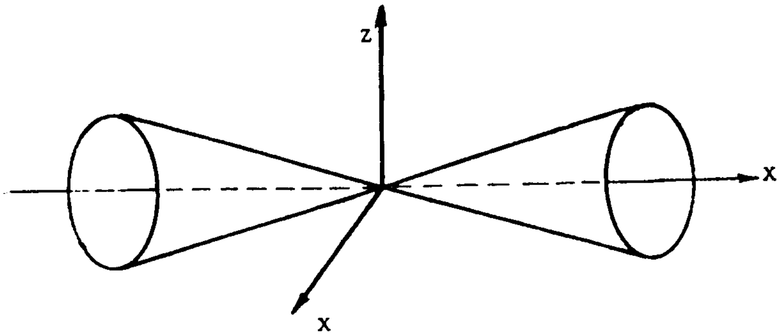
۲۲. این معادله به صورت

$$\frac{z^۲}{(\frac{۱}{۲})^۲}+\frac{y^۲}{(\frac{۱}{۴})^۲}-\frac{x^۲}{۱}=۰$$

است. نمودار آن یک مخروط دو پارچه بیضوی با محور تقارن xاست(معادلهٔ ۹.۱.۷ (۳) متن کتاب را ببینید).



شکل ۱۰.۱.۷

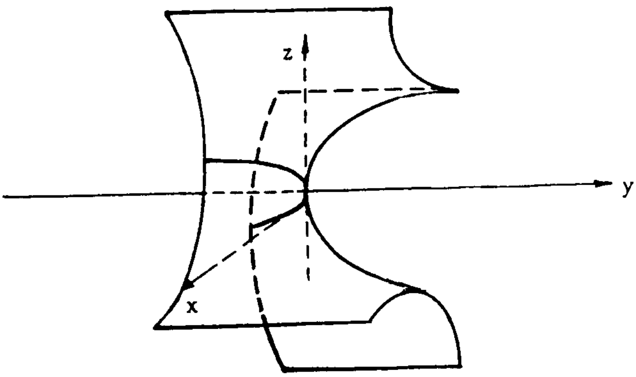


شکل ۱۱.۱.۷

۲۳. این معادله به صورت

$$\frac{x^۲}{۴^۲}+\frac{y^۲}{۳^۲}+\frac{z^۲}{۶^۲}=۱$$

است. نمودار این معادله یک بیضیوار است (معادلهٔ ۹.۱.۷ (۱) متن‌کتاب را ببینید).
۲۴. نمودار این معادله یک سهمیوار هذلولی است (معادلهٔ ۹.۱.۷ (۶) متن کتاب را ببینید).



شکل ۱۲.۱.۷

تمرینهای ۲.۷

۱.
$$\lim_{(x,y)\to(۲,۴)}\left(x+\frac{۱}{۲}\right)=\lim_{(x,y)\to(۲,۴)} x+\lim_{(x,y)\to(۲,۴)}\frac{۱}{۲}$$
$$=۲+\frac{۱}{۲}=\frac{۵}{۲}$$

۲. چون $f(x, y) = ۲x^۳ - ۴xy + ۵y^۲$ یک تابع چند جمله‌ای است، پس

$$\lim_{(x,y)\to(۱,-۲)}(۲x^۳-۴xy+۵y^۲)=۲(۱)^۳-۴(۱)(-۲)+۵(-۲)^۲=۳۰$$

۳. چون $\lim_{(x,y)\to(۱,۰)}(x^۲-xy+۱)=۲$ ، $\lim_{(x,y)\to(۱,-۲)} x^۲+y^۲=۱\neq ۰$

$$\lim_{(x,y)\to(۱,۰)}\frac{x^۲-xy+۱}{x^۲+y^۲}=\frac{۲}{۱}=۲$$

۴.
$$\lim_{(x,y,z)\to(۱,۲,۰)}(x^۲+۳y-۴z^۲+۲)=۱+۳(۲)-۴(۰)+۲=۹$$

۵. چون $\lim_{(x,y)\to(-۱,۱)}(x+y^۲)=۰$ ، نمی‌توانیم از قضیهٔ حدی خارج قسمت استفاده کنیم. ولی، داریم

$$\lim_{(x,y)\to(-۱,۱)}\frac{x^۲+۲xy^۲+y^۴}{x+y^۲}=\lim_{(x,y)\to(-۱,۱)}\frac{(x+y^۲)^۲}{x+y^۲}$$
$$=\lim_{(x,y)\to(-۱,۱)}(x+y^۲)=۰$$

۶. چون $\lim_{(x,y)\to(\ln ۲,۰)}(۲x+y^۲)=۲\ln ۲$ و تابع $g(t) = e^t$ پیوسته است،

$$\lim_{(x,y)\to(\ln ۲,۰)} e^{۲x+y^۲}=e^{۲\ln ۲}=e^{\ln ۴}=۴$$

۷. چون تابع $g(t)=\cos t$ پیوسته است،

$$\lim_{(x,y,z)\to(\pi/۲,-\pi/۲,۰)}\cos(x+y+z)=\cos\left[\lim_{(x,y,z)\to(\frac{\pi}{۲},-\frac{\pi}{۲},۰)}(x+y+z)\right]$$
$$=\cos(\pi/۲-\pi/۲+۰)=۱$$

۸. چون

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1 \quad , \quad \lim_{(x,\, y)\to(0,\, 0)} xy=0$$

$$\lim_{(x,\, y)\to(0,\, 0)} \frac{\sin xy}{xy}=1$$

۹. با توجه به مثال ۱۳.۲.۷، داریم

$$\lim_{(x,y)\to(0,\,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2}=0$$

در نتیجه

$$\lim_{(x,\, y)\to(0,\, 0)} \frac{yx^3}{x^2+y^2}=\lim_{(x,\, y)\to(0,\, 0)} y.\lim_{(x,\, y)\to(0,\, 0)} \frac{x^3}{x^2+y^2}=0$$

به همین ترتیب می‌توان نشان داد که

$$\lim_{(x,y)\to(0,\,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^2}=0$$

در نتیجه

$$\lim_{(x,y)\to(0,\,0)} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,\,0)} \frac{yx^3}{x^2+y^2}-\lim_{(x,y)\to(0,\,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^2}=0-0=0$$

۱۰. داریم

$$\lim_{(x,\, y)\to(2,\, 1)} \frac{x^3+2x^2y-xy-2y^2}{x+2y}=\lim_{(x,\, y)\to(2,\, 1)} \frac{(x+2y)(x^2-y)}{x+2y}$$

$$=\lim_{(x,\, y)\to(2,\, 1)} (x^2-y)=4-(-1)=5$$

۱۱. حد مورد نظر را روی خط $y = mx$، با $m \neq 0$ پیدا می‌کنیم. داریم

$$\lim_{(x\ y)\to(0,\,0)} \frac{y}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{mx}{x}=m \qquad (\text{روی } y = mx)$$

چون این حد به مقدار m بستگی دارد، یعنی به ازای دو مقدار متفاوت، مثلاً $m=1, -1$، یکسان نیست، پس $\lim_{(x\ y)\to(0,\,0)} \frac{y}{x}$ وجود ندارد.

۱۲. داریم

$$\lim_{x \to ۰} \left[\lim_{y \to ۰} \frac{۲x^۲ + y^۲}{x^۲ - ۲y^۲} \right] = \lim_{x \to ۰} \frac{۲x^۲ + ۰}{x^۲ - ۰} = ۲$$

$$\lim_{y \to ۰} \left[\lim_{x \to ۰} \frac{۲x^۲ + y^۲}{x^۲ - ۲y^۲} \right] = \lim_{y \to ۰} \frac{۰ + y^۲}{۰ - ۲y^۲} = -\frac{۱}{۲}$$

چون این دو حد برابر نیستند، حد وجود ندارد.

۱۳. چون $x^۲ + y^۲ \neq ۰$، پس

$$\frac{x^۲ + y^۲}{x^۴ - y^۴} = \frac{x^۲ + y^۲}{(x^۲ - y^۲)(x^۲ - y^۲)} = \frac{۱}{x^۲ - y^۲}$$

و از آنجاکه $\lim_{(x,y) \to (۰,۰)} (x^۲ - y^۲) = ۰$ ، $\lim_{(x,y) \to (۰,۰)} \frac{x^۲ + y^۲}{x^۴ - y^۴}$ وجود ندارد.

۱۴. چون مقدار

$$\lim_{(x,y) \to (۰,۰)} \frac{xy}{x^۲ - y^۲} = \lim_{x \to ۰} \frac{mx^۲}{x^۲ - m^۲x^۲} = \frac{m}{۱ - m^۲}$$ (روی $y = mx$)

به m بستگی دارد ، $\lim_{(x,y) \to (۰,۰)} \frac{xy}{x^۲ - y^۲} = ۰$ وجود ندارد.

۱۵. چون این تابع یک تابع چند جمله‌ای است، در هر نقطهٔ (x, y) پیوسته است.

۱۶. این تابع یک تابع گویاست، پس در هر نقطه از دامنه‌اش یعنی

$$\{(x, y) \mid x^۲ - y^۲ \neq ۰\} = \{(x, y) \mid x \neq \pm y\}$$

پیوسته است.

۱۷. این تابع یک تابع گویاست، پس در هر نقطه از دامنه‌اش یعنی

$$\{(x, y, z) \mid x^۲ + y^۲ \neq z^۲\}$$

پیوسته است.

۱۸. تابع f در هر نقطه از دامنه‌اش یعنی

$$\{(x, y) \mid x^۲ + y^۲ \neq ۱\}$$

پیوسته است.

۱۹. چون تابع چند جمله‌ای $h(x, y, z) = xyz - ۱$ و تابع $g(t) = \sin t$ پیوسته هستند، پس $f = gh$ در هر نقطهٔ (x, y, z) پیوسته است.
۲۰. این تابع در نقطه‌های (x, y, z) پیوسته است اگر $e^x + e^{yx} > ۰$ یا $x > yz$
۲۱. این تابع در هر (x, y)، به جز احتمالاً در $(۰, ۰)$ پیوسته است. ادعا می‌کنیم که

$$\lim_{(x,y)\to(۰,۰)} \frac{x^۲y^۲}{x^۲+y^۲} = ۰$$

فرض کنیم $\varepsilon > ۰$ داده شده است. چون

$$\left| \frac{x^۲y^۲}{x^۲+y^۲} - ۰ \right| = \frac{x^۲y^۲}{x^۲+y^۲} \leq \frac{(x^۲+y^۲)(x^۲+y^۲)}{x^۲+y^۲} = x^۲+y^۲$$

پس اگر قرار دهیم $\delta = \sqrt{\varepsilon}$، آنگاه

$$\sqrt{x^۲+y^۲} < \delta \Rightarrow x^۲+y^۲ < \varepsilon$$
$$\Rightarrow \left| \frac{x^۲y^۲}{x^۲+y^۲} \right| < \varepsilon$$

این مطلب درستی ادعای ما را ثابت می‌کند. چون $f(۰،۰) = ۰$، پس f در $(۰, ۰)$ نیز پیوسته است.
۲۲. تابع f در هر (x, y)، به جز احتمالاً در $(۰،۰)$ پیوسته است. چون مقدار

روی $(y = mx)$ $$\lim_{(x,y)\to(۰,۰)} \frac{xy^۲}{x^۳+y^۳} = \lim_{x\to۰} \frac{m^۲x^۳}{x^۳+m^۳x^۳} = \frac{m^۲}{۱+m^۳}$$

به m بستگی دارد، پس $\lim_{(x, y)\to(۰,۰)} f(x, y)$ وجود ندارد. در نتیجه f در $(۰, ۰)$ پیوسته نیست.
۲۳. داریم

روی $(y = mx)$ $$\lim_{(x,y)\to(۰,۰)} f(x, y) = \lim_{x\to۰} f(x, mx)$$

$$= \lim_{x\to۰} \frac{\sin mx^۲}{x^۲+m^۲x^۲} = \lim_{x\to۰} \frac{\sin mx^۲}{x^۲(۱+m^۲)}$$

$$= \lim_{x\to۰} \frac{\sin mx^۲}{mx^۲} \cdot \frac{m}{۱+m^۲}$$

$$= ۱\times \frac{m}{۱+m^۲} = \frac{m}{۱+m^۲}$$

چون حد f در $(\circ \text{،} \circ)$ روی خط $y = mx$ به مقدار m بستگی دارد، پس $\lim\limits_{(x,y)\to(\circ,\circ)} f(x,y)$ وجود ندارد و در نتیجه f در $(\circ,\circ)$ پیوسته نیست.

۲۴. چون

روی $(y = mx)$

$$\lim_{(x,y)\to(\circ,\circ)} f(x,y) = \lim_{x\to\circ} f(x, mx) = \lim_{x\to\circ} \frac{m^{۳}x^{۶}}{x^{۱۲}+m^{۴}x^{۴}} = \lim_{x\to\circ} \frac{m^{۳}x^{۲}}{x^{۸}+m^{۴}} = \circ$$

روی $(y = x^{۳})$

$$\lim_{(x,y)\to(\circ,\circ)} f(x,y) = \lim_{x\to\circ} f(x,x^{۳}) = \lim_{x\to\circ} \frac{x^{۱۲}}{x^{۱۲}+x^{۱۲}} = \frac{۱}{۲}$$

چون برای دو مسیر متفاوت $y = x$ و $y = x^{۳}$ حدود به دست آمده برابر نیستند ، $\lim\limits_{(x,y)\to(\circ,\circ)} f(x,y)$ وجود ندارد و در نتیجه f در $(\circ,\circ)$ پیوسته نیست.

تمرینهای ۳.۷

۱.
$$f_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{۲}{۳}\cdot\frac{۳}{۲}x^{۱/۲} = x^{۱/۲}$$
$$f_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y} = \circ$$

۲. $\frac{\partial f}{\partial x} = ۲$ و $\frac{\partial f}{\partial y} = -۶y$.

۳. $\frac{\partial f}{\partial x} = ۴x^{۳}e^{۲y}$ و $\frac{\partial f}{\partial y} = ۲x^{۴}e^{۲y}$.

۴.
$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{۳u^{۲}(u^{۲}+v^{۲}) - ۲u(u^{۳}+v^{۳})}{(u^{۲}+v^{۲})^{۲}} = \frac{u^{۴}+۳u^{۲}v^{۲}-۲uv^{۳}}{(u^{۲}+v^{۲})^{۲}}$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{۳v^۲(u^۲+v^۲) - ۲v(u^۳+v^۳)}{(u^۲+v^۲)^۲}$$
$$= \frac{v^۴ + ۳v^۲u^۲ - ۲vu^۳}{(u^۲+v^۲)^۲}$$

۵. $\frac{\partial f}{\partial x} = e^y + y\cos x$ و $\frac{\partial f}{\partial y} = xe^y + \sin x$

۶. چون

$$f(t,v) = \ln\left(\frac{t+v}{t-v}\right)^{\frac{۱}{۲}} = \frac{۱}{۲}[\ln(t+v) - \ln(t-v)]$$

بنابراین

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{۱}{۲}\left[\frac{۱}{t+v} - t\,\frac{۱}{t-v}\right]$$
$$= \frac{-V}{t^۲ - v^۲}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{۱}{۲}\left[\frac{۱}{t+v} - \frac{-۱}{t-v}\right]$$
$$= \frac{t}{t^۲ - v^۲}$$

۷. $\frac{\partial f}{\partial x} = e^z - ye^x$ ، $\frac{\partial f}{\partial y} = -e^x - ze^{-y}$ ، $\frac{\partial f}{\partial z} = xe^z + e^{-y}$

۸.

$$\frac{\partial f}{\partial r} = ۳r^۲\,\mathrm{tg}\,s \quad \frac{\partial f}{\partial s} = r^۳\sec s + \frac{۱}{\sqrt{s}}e^{v^۲}$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = ۲v\sin ۲u \quad \frac{\partial f}{\partial v} = ۲v\sqrt{s}\,e^{u^۲} - \cos ۲u$$

۹. با توجه به فرمول مشتقگیری از تابع $\sin^{-۱}u$ ، داریم

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y/۲\sqrt{xy}}{\sqrt{۱-xy}} + y\cos xy = \frac{y}{۲\sqrt{xy}\sqrt{۱-xy}} + y\cos xy$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{۲\sqrt{xy}\sqrt{۱-xy}} + x\cos xy$$

۱۰. بنابه فرمول مشتقگیری از تابع $\operatorname{tg}^{-۱} t$، داریم

$$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{۱/v}{۱+\frac{u^{۲}}{v^{۲}}}=\frac{v}{v^{۲}+u^{۲}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}=\frac{-u/_{v^{۲}}}{۱+\frac{u^{۲}}{v^{۲}}}=\frac{-u}{v^{۲}+u^{۲}}$$

۱۱. داریم $\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-۱}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=(\ln x)\,x^{y}$.

.۱۲

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{-yz^{۲}/(۱+xyz^{۲})^{۲}}{\sqrt{۱-\frac{۱}{(۱+xyz^{۲})^{۲}}}}$$

$$=\frac{-yz^{۲}}{(۱+xyz^{۲})^{۲}\sqrt{۱-\frac{۱}{(۱+xyz^{۲})^{۲}}}}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{-xz^{۲}}{(۱+xyz^{۲})^{۲}\sqrt{۱-\frac{۱}{(۱+xyz^{۲})^{۲}}}}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{-۲xyz}{(۱+xyz^{۲})^{۲}\sqrt{۱-\frac{۱}{(۱+xyz^{۲})^{۲}}}}$$

۱۳. بنابه تعریف، داریم

$$f_x(۰,۰)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(h,۰)-f(۰,۰)}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{\frac{h^{۳}+۰}{h^{۲}+۰}-۰}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{h^{۳}}{h^{۳}}=۱$$

$$f_y(\circ,\circ)=\lim_{h\to\circ}\frac{f(\circ,h)-f(\circ,\circ)}{h}$$

$$=\lim_{h\to\circ}\frac{\frac{\circ+h^{۳}}{\circ+h^{۲}}-\circ}{h}=\lim_{h\to\circ}\frac{h^{۳}}{h^{۳}}=۱$$

۱۴. بنا به تعریف، داریم

$$f_x(\circ,\circ)=\lim_{h\to\circ}\frac{f(h,\circ)-f(\circ,\circ)}{h}$$

$$=\lim_{h\to\circ}\frac{\frac{\circ}{h^{۲}+\circ}-\circ}{h}=\lim_{h\to\circ}\frac{\circ}{h^{۳}}=\lim_{h\to\circ}\circ=\circ$$

$$f_y(\circ,\circ)=\lim_{h\to\circ}\frac{f(\circ,h)-f(\circ,\circ)}{h}$$

$$=\lim_{h\to\circ}\frac{\frac{\circ}{\circ+۴h^{۳}}-\circ}{h}=\lim_{h\to\circ}\frac{\circ}{۴h^{۴}}=\lim_{h\to\circ}\circ=\circ$$

۱۵. بنا بر قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال، داریم

$$f_x(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\int_{۱}^{x}p(t)\,dt+\frac{\partial}{\partial x}\int_{۱}^{y}q(t)\,dt$$

$$=p(x)$$

$$f_y(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\int_{۱}^{x}p(t)\,dt+\frac{\partial}{\partial y}\int_{۱}^{y}q(t)\,dt$$

$$=q(y)$$

۱۶. فرض کنیم $F(t)=\int\sin t^{۲}\,dt$ در نتیجه $F'(t)=\sin t^{۲}$ و

$$f(x,y)=F(t)\Big|_{\pi}^{x^{۲}+y^{۲}}$$

$$=F(x^{۲}+y^{۲})-F(\pi)$$

بنابراین

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left[F(x^2+y^2)-F(\pi)\right]$$
$$=2xF'(x^2+y^2)=2x\sin(x^2+y^2)^2$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[F(x^2+y^2)-F(\pi)\right]$$
$$=2yF'(x^2+y^2)=2y\sin(x^2+y^2)^2$$

۱۷. مشتقهای جزئی اول f عبارت‌اند از

$$f_x(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}(3x^2-\sqrt{2}xy^2+y^5-2)=6x-\sqrt{2}y^2$$
$$f_y(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}(3x^2-\sqrt{2}xy^2+y^5-2)=-2\sqrt{2}xy+5y^4$$

بنابراین

$$f_{xy}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$
$$=\frac{\partial}{\partial y}(6x-\sqrt{2}y^2)=-2\sqrt{2}y$$
$$f_{yx}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$
$$=\frac{\partial}{\partial x}(-2\sqrt{2}xy+5y^4)=-2\sqrt{2}y$$

۱۸. داریم

$$f_x(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)$$
$$=\frac{2x(x^2+y^2)-2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$
$$f_y(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)$$
$$=\frac{-2y(x^2+y^2)-2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{-4yx^2}{(x^2+y^2)^2}$$

بنابراین، f_{xy} ، f_{yx}عبارت‌اند از

$$f_{xy}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}f_x=\frac{\partial}{\partial y}\frac{۴xy^{۲}}{(x^{۲}+y^{۲})^{۲}}$$

$$=\frac{۸xy(x^{۲}+y^{۲})^{۲}-۱۶xy^{۳}(x^{۲}+y^{۲})}{(x^{۲}+y^{۲})^{۴}}=\frac{۸(x^{۳}y-xy^{۳})}{(x^{۲}+y^{۲})^{۳}}$$

$$f_{yx}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}f_y=\frac{\partial}{\partial x}\frac{-۴yx^{۲}}{(x^{۲}+y^{۲})^{۲}}$$

$$=\frac{-۸yx(x^{۲}+y^{۲})^{۲}+۱۶yx^{۳}(x^{۲}+y^{۲})}{(x^{۲}+y^{۲})^{۴}}$$

$$=\frac{۸(x^{۳}y-xy^{۳})}{(x^{۲}+y^{۲})^{۳}}$$

۱۹. مشتقهای جزئی f_x و f_yعبارت‌اند از

$$f_x(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial x}(x^{۴}-۲x^{۲}y\sqrt{z}+۳yz^{۴}+۲)=۴x^{۳}-۴xy\sqrt{z}$$

$$f_y(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial y}(x^{۴}-۲x^{۲}y\sqrt{z}+۳yz^{۴}+۲)=-۲x^{۲}\sqrt{z}+۳z^{۴}$$

بنابراین، f_{xy}و f_{yx}برابرند با

$$f_{xy}(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial y}f_x=\frac{\partial}{\partial y}(۴x^{۳}-۴xy\sqrt{z})=-۴x\sqrt{z}$$

$$f_{yx}(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial x}f_y=\frac{\partial}{\partial x}(-۲x^{۲}\sqrt{z}+۳z^{۴})=-۴x\sqrt{z}$$

۲۰. توابع f_xو f_yبرابرند با

$$f_x(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial x}(z\cos xy)=-yz\sin xy$$

$$f_y(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial y}(z\cos xy)=-xz\sin xy$$

بنابراین f_{xy} و f_{yx}عبارت‌اند از

$$f_{xy}(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial y}f_x=\frac{\partial}{\partial y}(-yz\sin xy)$$

$$=-z\sin xy-xyz\cos xy$$

$$f_{yx}(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial x}f_y=\frac{\partial}{\partial x}(-xy\sin xy)$$
$$=-z\sin xy-xyz\cos xy$$

۲۱. (الف) چون $f(x,y)=\ln(x^۲+y^۲)^{۱/۲}=\frac{۱}{۲}\ln(x^۲+y^۲)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{۱}{۲}\frac{\partial}{\partial x}\ln(x^۲+y^۲)=\frac{۱}{۲}\frac{۲x}{x^۲+y^۲}=\frac{x}{x^۲+y^۲}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{۱}{۲}\frac{\partial}{\partial y}\ln(x^۲+y^۲)=\frac{y}{x^۲+y^۲}$$

$$\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{x^۲+y^۲}$$
$$=\frac{x^۲+y^۲-۲x^۲}{(x^۲+y^۲)^۲}=\frac{y^۲-x^۲}{(x^۲+y^۲)^۲}$$

$$\frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{x^۲+y^۲}$$
$$=\frac{x^۲+y^۲-۲y^۲}{(x^۲+y^۲)^۲}=\frac{x^۲-y^۲}{(x^۲+y^۲)^۲}$$

بنابراین

$$\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}+\frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲}=\frac{y^۲-x^۲}{(x^۲+y^۲)^۲}+\frac{x^۲-y^۲}{(x^۲+y^۲)^۲}=۰$$

(ب) داریم

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{-y/x^۲}{۱+\frac{y^۲}{x^۲}}=\frac{-y}{x^۲+y^۲}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{۱/x}{۱+\frac{y^۲}{x^۲}}=\frac{x}{x^۲+y^۲}$$

$$\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-y}{x^۲+y^۲}\right)$$
$$=\frac{۲xy}{(x^۲+y^۲)^۲}$$

$$\frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^۲+y^۲}\right)$$
$$= \frac{-۲xy}{(x^۲+y^۲)^۲}$$

بنابراین

$$\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲} = \frac{۲xy}{(x^۲+y^۲)^۲} + \frac{-۲xy}{(x^۲+y^۲)^۲} = ۰$$

۲۲. در حل تمرین ۲۲ از بخش ۲.۷، نشان دادیم که این تابع در نقطهٔ $(۰, ۰)$ ناپیوسته است. حال $f_x(۰, ۰)$ و $f_y(۰, ۰)$را محاسبه می‌کنیم. بنابه تعریف، داریم

$$f_x(۰, ۰) = \lim_{h \to ۰} \frac{f(h, ۰) - f(۰, ۰)}{h}$$
$$= \lim_{h \to ۰} \frac{\frac{۰}{h^۳+۰} - ۰}{h} = \lim_{h \to ۰} \frac{۰}{h^۴} = \lim_{h \to ۰} ۰ = ۰$$

$$f_y(۰, ۰) = \lim_{h \to ۰} \frac{f(۰, h) - f(۰, ۰)}{h}$$
$$= \lim_{h \to ۰} \frac{\frac{۰}{۰+h^۳} - ۰}{h} = \lim_{h \to ۰} \frac{۰}{h^۴} = ۰$$

۲۳. داریم

$$x_r = \frac{\partial x}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}(r \cos \theta) = \cos \theta$$

$$x_\theta = \frac{\partial x}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}(r \cos \theta) = -r \sin \theta$$

$$y_r = \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} = (r \sin \theta) = \sin \theta$$

$$y_\theta = \frac{\partial y}{\partial_\theta} = \frac{\partial}{\partial_\theta} = (r \sin \theta) = r \cos \theta$$

$$r_x = \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^۲ + y^۲} = \frac{x}{\sqrt{x^۲ + y^۲}}$$

$$r_y = \frac{\partial r}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\sqrt{x^۲ + y^۲} = \frac{y}{\sqrt{x^۲ + y^۲}}$$

$$\theta_x = \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} tg^{-۱}\frac{y}{x}$$

$$= \frac{-y/x^۲}{۱ + y^۲/x^۲} = \frac{-y}{x^۲ + y^۲}$$

$$\theta_y = \frac{\partial_\theta}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\,\mathrm{tg}^{-۱}\frac{y}{x}$$

$$= \frac{۱/x}{۱ + y^۲/x^۲} = \frac{x}{x^۲ + y^۲}$$

۲۴. داریم

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[\cos(x-y) + \ln(x+y)] = -\sin(x-y) + \frac{۱}{x+y}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[\cos(x-y) + \ln(x+y)] = \sin(x-y) + \frac{۱}{x+y}$$

$$\frac{\partial^۲ \omega}{\partial x^۲} = \frac{\partial}{\partial x}[-\sin(x-y) + \frac{۱}{x+y}] = -\cos(x-y) - \frac{۱}{(x+y)^۲}$$

$$\frac{\partial^۲ \omega}{\partial y^۲} = \frac{\partial}{\partial y}[\sin(x-y) + \frac{۱}{x+y}] = -\cos(x-y) - \frac{۱}{(x+y)^۲}$$

بنابراین

$$\frac{\partial^۲ \omega}{\partial x^۲} - \frac{\partial^۲ \omega}{\partial y^۲} = -\cos(x-y) - \frac{۱}{(x+y)^۲} + \cos(x-y) + \frac{۱}{(x+y)^۲} = ۰$$

۲۵. داریم

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} = \left[(y-۲x)^۳ - \sqrt{y-۲x}\right]$$

$$= -۶(y-۲x)^۲ + \frac{۱}{\sqrt{y-۲x}}$$

$$\frac{\partial^۲\omega}{\partial x^۲} = \frac{\partial}{\partial x}\left[-۶\ (y-۲x)^۲ + (y-۲x)^{-۱/۲}\right]$$

$$= ۲۴(y-۲x) + \frac{۱}{(y-۲x)^{۳/۲}}$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} = \left[(y-۲x)^۳ - \sqrt{y-۲x}\right]$$

$$= ۳(y-۲x)^۲ + \frac{۱}{۲\sqrt{y-۲x}}$$

$$\frac{\partial^۲\omega}{\partial y^۲} = \frac{\partial}{\partial y}\left[۳\ (y-۲x)^۲ - \frac{۱}{۲}(y-۲x)^{-۱/۲}\right]$$

$$= ۶(y-۲x) + \frac{۱}{۴(y-۲x)^{۳/۲}}$$

بنابراین

$$\frac{\partial^۲\omega}{\partial x^۲} - ۴\frac{\partial^۲\omega}{\partial y^۲} = ۲۴(y-۲x) + \frac{۱}{(y-۲x)^{۳/۲}} - ۲۴(y-۲x) - \frac{۱}{(y-۲x)^{۳/۲}} = ۰$$

۲۶. توابع ω_x، ω_y، ω_z عبارت‌اند از

$$\omega_x = \frac{\partial}{\partial x}\left[e^{x^۲}\sin yz + \ln\ (x^۲+y^۲+z^۲)\right]$$

$$= ۲xe^{x^۲}\sin yz + \frac{۲x}{x^۲+y^۲+z^۲}$$

$$\omega_y = \frac{\partial}{\partial y}\left[e^{x^۲}\sin yz + \ln\ (x^۲+y^۲+z^۲)\right]$$

$$= ze^{x^۲}\cos yz + \frac{۲y}{x^۲+y^۲+z^۲}$$

$$\omega_z = \frac{\partial}{\partial z}\left[e^{x^۲}\sin yz + \ln(x^۲+y^۲+z^۲)\right]$$

$$= ye^{x^۲}\cos yz + \frac{۲z}{x^۲+y^۲+z^۲}$$

بنابراین، ω_{xx}، ω_{xy}، ω_{xz}، ω_{yy}، ω_{yx}، ω_{yz}، ω_{zz}، ω_{zx}، ω_{zy} عبارت‌اند از

$$\omega_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left[2xe^{x^2}\sin yz + \frac{2x}{x^2+y^2+z^2}\right]$$

$$= 2e^{x^2}\sin yz + 4x^2e^{x^2}\sin yz + \frac{2(x^2+y^2+z^2) - 4x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$= 2e^{x^2}\sin yz\,(1 + 2x^2) + \frac{2(-x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$\omega_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left[2xe^{x^2}\sin yz + \frac{2x}{x^2+y^2+z^2}\right]$$

$$= 2xze^{x^2}\cos yz - \frac{4xy}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$\omega_{xz} = \frac{\partial}{\partial z}\left[2xe^{x^2}\sin yz + \frac{2x}{x^2+y^2+z^2}\right]$$

$$= 2xye^{x^2}\cos yz - \frac{4xz}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$\omega_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left[ze^{x^2}\cos yz + \frac{2y}{x^2+y^2+z^2}\right]$$

$$= -z^2e^{x^2}\sin yz - \frac{4y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$\omega_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left[ze^{x^2}\cos yz + \frac{2y}{x^2+y^2+z^2}\right]$$

$$= 2xe^{x^2}\cos yze^{x^2} - \frac{4xy}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$\omega_{yz} = \frac{\partial}{\partial z}\left[ze^{x^2}\cos yz + \frac{2y}{x^2+y^2+z^2}\right]$$

$$= e^{x^2}\cos yz - yze^{x^2}\sin yz - \frac{4yz}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$= e^{x^2}\cos yz\,(1 - yz) - \frac{4yz}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$\omega_{zz} = \frac{\partial}{\partial z}\left[ye^{x^2}\cos yz + \frac{2z}{x^2+y^2+z^2}\right]$$

$$= -y^2e^{x^2}\sin yz - \frac{4z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$\omega_{zx}=\frac{\partial}{\partial x}\,[ye^{x^۲}\cos yz+\frac{۲z}{x^۲+y^۲+z^۲}]$$

$$=۲xye^{x^۲}\cos yz-\frac{۴xz}{(x^۲+y^۲+z^۲)^۲}$$

$$\omega_{zy}=\frac{\partial}{\partial y}\,[ye^{x^۲}\cos yz+\frac{۲z}{x^۲+y^۲+z^۲}]$$

$$=e^{x^۲}\cos yz\,(۱-yz)-\frac{۴yz}{(x^۲+y^۲+z^۲)^۲}$$

۲۷. داریم

$$f_x\,(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\,(۱-x)=-۱$$

$$f_y\,(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\,(۱-x)=۰$$

بنابراین

$$\sqrt{f_x^۲+f_y^۲+۱}=\sqrt{۱+۰+۱}=\sqrt{۲}$$

۲۸. چون $f_x\,(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\,(۴-y^۲)=۰$ و $f_y\,(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\,(۴-y^۲)=-۲y$

پس

$$\sqrt{f_x^۲+f_y^۲+۱}=\sqrt{۰+۴y^۲+۱}=\sqrt{۴y^۲+۱}$$

۲۹. چون

$$f_x\,(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^۲+y^۲}=\frac{x}{\sqrt{x^۲+y^۲}}$$

$$f_y\,(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\sqrt{x^۲+y^۲}=\frac{y}{\sqrt{x^۲+y^۲}}$$

پس

$$\sqrt{f_x^۲+f_y^۲+۱}=\sqrt{\frac{x^۲}{x^۲+y^۲}+\frac{y^۲}{\sqrt{x^۲+y^۲}}+۱}$$

$$=\sqrt{۲}$$

۳۰. داریم

$$f_x(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{1-x^2-y^2}=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$f_y(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\sqrt{1-x^2-y^2}=\frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

بنابراین

$$\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}=\sqrt{\frac{x^2}{1-x^2-y^2}+\frac{y^2}{1-x^2-y^2}+1}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

۳۱. داریم

$$u_x=\frac{\partial}{\partial x}(x^2-y^2)=2x\,,\ u_y=\frac{\partial}{\partial y}(x^2-y^2)=-2y$$

$$v_x=\frac{\partial}{\partial x}(2xy)=2y\,,\ v_y=\frac{\partial}{\partial y}(2xy)=2x$$

چون $u_x=2x=v_y$ و $u_y=-2y=-v_x$، پس u و v در معادلات کوشی صدق می‌کنند.

۳۲. چون

$$u_x=\frac{\partial}{\partial x}(e^x\cos y)=e^x\cos y\ ،u_y=\frac{\partial}{\partial y}(e^x\cos y)=-e^x\sin y$$

$$v_x=\frac{\partial}{\partial x}(e^x\sin y)=e^x\sin y\ ،v_y=\frac{\partial}{\partial y}(e^x\sin y)=e^x\cos y$$

پس u و v در معادلات کوشی ریمان صدق می‌کنند.

۳۳. با توجه به حل مثال ۷. ۳. ۱۵، برای تابع

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2} & ,\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

به ازای $(x,y)\neq(0,0)$، داریم

$$f_x(x,y)=\frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}$$

و در نتیجه $f_x(x, 0) = 0$. بنابراین،

$$f_{xy}(x,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_x(x,h) - f_x(x,0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{x^4h + 4x^2h^3 - h^5}{(x^2+h^2)^2} - 0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^4h^2 + 4x^2h^4 - h^6}{(x^2+h^2)^2} = 0$$

در نتیجه

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_{xy}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 = 0 \qquad (y=0 \text{ روی})$$

در حالی که، بنابر حل مثال ۷. ۳. ۱۵، $f_{xy}(0, 0) = -1$. چون

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_{xy}(x,y) \neq f_{xy}(0,0)$$

تابع $f_{xy}(x, 0)$ در $(0, 0)$ پیوسته نیست. از این رو، این مثال در شرایط قضیهٔ ۷. ۳. ۱۶ صدق نمی‌کند و در نتیجه ناقض این قضیه نیست.

۳۴. داریم

$$\frac{\partial u}{\partial t} = b\frac{\partial}{\partial t}(\sin ax \sin bt) = \sin ax \cos bt$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\sin ax \sin bt) = a \cos ax \sin bt$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}(b\sin ax \cos bt) = -b^2 \sin ax \sin bt$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(a \cos ax \sin bt) = -a^2 \sin ax \sin bt$$

بنابراین

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -a^2\sin ax \sin bt = \frac{a^2}{b^2} -b^2\sin ax \sin bt)$$

$$= \left(\frac{a}{b}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

۳۵. چون

$$\frac{\partial t}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} e^{ax+bt} = be^{ax+bt}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} e^{ax+bt} = ae^{ax+bt}$$

$$\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} = \frac{\partial}{\partial x} ae^{ax+bt} = a^۲ e^{ax+bt}$$

پس

$$\frac{\partial u}{\partial t} = be^{ax+bt} = \frac{b}{a^۲}(a^۲ e^{ax+bt})$$

$$= \frac{b}{a^۲}\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}$$

۳۶. آهنگ تغییر T در نقطهٔ (۱,۲) در جهت محور x، یعنی روی خط ۲ = y، برابر است با

$$\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{(۱,۲)} = ۴۰x(x^۲+y^۲)\Big|_{(۱,۲)}$$

$$= ۴۰(۱)(۱+۴) = ۲۰۰$$

به همین ترتیب آهنگ تغییر T در نقطهٔ (۲ ,۱) در جهت محور y، یعنی روی خط ۱ = xبرابر است با

$$\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{(۱,۲)} = ۴۰y(x^۲+y^۲)\Big|_{(۱,۲)}$$

$$= ۴۰\,(۱)\,(۱+۴) = ۴۰۰$$

۳۷. آهنگهای تغییر v در نقطهٔ (۱ و ۱- و ۲) در جهتهای خواسته شده، به ترتیب برابرند با

$$\frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{(۲,-۱,۱)} = \frac{-۲۰۰x}{(x^۲+y^۲+z^۲)^۲}\Big|_{(۲,-۱,۱)}$$

$$= \frac{-۲۰۰(۲)}{(۴+۱+۱)^۲} = -\frac{۱۰۰}{۹}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}\Big|_{(۲,-۱,۱)}=\frac{-۲۰۰y}{(x^{۲}+y^{۲}+z^{۲})^{۲}}\Big|_{(۲,-۱,۱)}$$

$$=\frac{-۲۰۰(-۱)}{۶^{۲}}=\frac{۵۰}{۹}$$

$$\frac{\partial v}{\partial z}\Big|_{(۲,-۱,۱)}=\frac{-۲۰۰z}{(x^{۲}+y^{۲}+z^{۲})^{۲}}\Big|_{(۲,-۱,۱)}$$

$$=\frac{-۲۰۰(-۱)}{۶^{۲}}=-\frac{۵۰}{۹}$$

۳۸. اثر سطح $z=f(x,y)=۹-x^{۲}-y^{۲}$ در صفحهٔ $x=۱$، منحنی $z=f(۱,y)=۹-۱-y^{۲}+۸-y^{۲}$ است. پس $\frac{\partial z}{\partial y}$ را در $(۱,۲)$ پیدا می‌کنیم. داریم

$$f_x(۱,\ ۲)=\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(۱,\ ۲)}=\frac{\partial}{\partial y}(۹-x^{۲}-y^{۲})\Big|_{(۱,\ ۲)}$$
$$=-۲y\Big|_{(۱,\ ۲)}=-۴$$

پس معادلات متقارن خط مماس مورد نظر عبارت‌اند از

$$x=۱,\ y-۲=\frac{z-f(۱,۲)}{f_y(۱,۲)}=\frac{z-۴}{-۴}$$

یا

$$x=۱\quad,\quad y=\frac{z-۱۲}{-۴}$$

۳۹. منحنی C نمودار معادلهٔ

$$z=f(x,۲)=\sqrt{۳۶-۹x^{۲}-۱۶}$$
$$=\sqrt{۲۰-۹x^{۲}}$$

است. چون

$$f_x(x,y)=\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{۳۶-۹x^{۲}-۴y^{۲}}$$
$$=\frac{-۹x}{\sqrt{۳۶-۹x^{۲}-۴y^{۲}}}$$

پس

$$f_x(۱,۲)=\frac{-۹}{\sqrt{۳۶-۹-۱۶}}=\frac{-۹}{\sqrt{۱۱}}\cdot$$

در نتیجه معادلات خط مماس بر منحنی C عبارت‌اند از

$$y=۲\ ,\ \ x-۱=\frac{z-f(۱,۲)}{f_x(۱,۲)}=\frac{z-\sqrt{۱۱}}{-۹/\sqrt{۱۱}}$$

یا

$$y=۲\ ,\ \ x-۱=\frac{\sqrt{۱۱}\,z-۱۱}{-۹}$$

۴۰. (الف) از معادله داده شده، با استفاده از $\frac{\partial z^n}{\partial x}=nz^{n-۱}\frac{\partial z}{\partial x}$، به‌طور ضمنی نسبت به xمشتق می‌گیریم. داریم $۲x+\circ+۲zz_x-\circ=\circ$. پس $z_x=-\frac{x}{z}$.

به‌همین ترتیب از معادلهٔ داده شده نسبت به yمشتق می‌گیریم. داریم

$$۲y+۲zz_y=\circ\Rightarrow z_y=-\frac{y}{z}$$

(ب) از معادلهٔ داده شده، به ترتیب، نسبت به xو نسبت به yمشتق می‌گیریم. داریم

$$۸x-۸zz_x=\circ\Rightarrow z_x=\frac{x}{z}$$

$$۱۸y-۸zz_y=\circ\Rightarrow z_y=-\frac{۹y}{۴z}$$

(پ) از معادلهٔ داده شده، به ترتیب، نسبت به xو yمشتق می‌گیریم. داریم

$$۱۸x-۷۲zz_x=\circ\Rightarrow z_x=\frac{x}{۴z}$$

$$۸y-۷۲zz_y=\circ\Rightarrow z_y=\frac{y}{۹z}$$

(ت) با مشتقگیری از معادلهٔ داده شده به ترتیب نسبت به xو y، داریم

$$z_x-۲x=\circ\Rightarrow z_x=۲x$$

$$z_y-۸y=\circ\Rightarrow z_y=۸y$$

(ث) از معادلهٔ داده شده، به‌ترتیب ، نسبت به x و y مشتق می‌گیریم. به دست می‌آوریم

$$۳x^۲+۳z^۲z_x - ۳yz - ۳xyz_x = ۰ \Rightarrow z_x = \frac{yz-x^۲}{z^۲-xy}$$

$$۳y^۲+۳z^۲z_y - ۳xz - ۳xyz_y = ۰ \Rightarrow z_y = \frac{xz-y^۲}{z^۲-xy}$$

توجه کنید که در مشتقگیری از عبارت $۳xyz$ از قاعدهٔ حاصلضرب استفاده شده است.

(ج) با مشتقگیری از معادلهٔ داده شده نسبت به x، داریم

$$۳(۲x+ ۲zz_x)\ (x^۲+ y^۲ + z^۲)^۲ - ۵۴zz_x = ۰$$

یا

$$۶x(x^۲+ y^۲ + z^۲)^۲ + ۶zz_x\ (x^۲+ y^۲ + z^۲)^۲ - ۵۴zz_x = ۰$$

بنابراین

$$z_x = \frac{-x(x^۲+ y^۲ + z^۲)^۲}{z(x^۲+ y^۲ + z^۲)^۲-۹z}$$

به همین ترتیب، با مشتقگیری از معادلهٔ داده شده نسبت به y، به‌دست می‌آوریم

$$۳(۲y + ۲zz_y)\ (x^۲+ y^۲ + z^۲)^۲ - ۵۴zz_x = ۰$$

و در نتیجه

$$z_y = \frac{-y(x^۲+ y^۲ + z^۲)^۲}{z(x^۲+ y^۲ + z^۲)^۲-۹z}$$

تمرینهای ۴.۷

.۱
$$d\omega = \frac{\partial\omega}{\partial x}\,dx = (۶x + ۳x^۲)\ dx$$

.۲
$$d\omega = \frac{\partial\omega}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\omega}{\partial y}\,dy$$

$$=(۳x^۲ - ۵y)\ dx + (-۵x + ۳y^۲)\ dy$$

۳. $$d\omega = \frac{\partial \omega}{\partial x} dx + \frac{\partial \omega}{\partial y} dy$$

$$= (۸x^{۳} + ۲xy)\, dx + x^{۲}\, dy$$

۴. $$d\omega = \frac{\partial \omega}{\partial x} dx + \frac{\partial \omega}{\partial y} dy$$

$$= ۳\cos x\, dx + ۵\sin y dy$$

۵. $$d\omega = \frac{\partial \omega}{\partial x} dx + \frac{\partial \omega}{\partial y} dy$$

$$= (\cos y + ۲y^{۲} \sin ۲x)\, dx + (-x\sin y - ۲y \cos ۲x)\, dy$$

۶. $$d\omega = \frac{\partial \omega}{\partial x} dx + \frac{\partial \omega}{\partial y} dy$$

$$= (-۲y\cos xy \sin xy - ۲y\sin xy \cos xy)\, dx$$

$$+ (-۲x\cos xy \sin xy - ۲x\sin xy \cos xy)\, dy$$

$$= -۴y\sin xy \cos xy\, dx - ۴x \sin xy \cos xy\, dy$$

$$= -۲y \sin ۲xy\, dx - ۲x \sin ۲xy\, dy$$

۷. $$d\omega = \frac{\partial \omega}{\partial x} dx + \frac{\partial \omega}{\partial y} dy$$

$$= -\frac{y^{۲}}{xy^{۲}} dx + (۳y^{۲} - \frac{۲xy}{xy^{۲}})\, dy$$

$$= -\frac{۱}{x} dx + (۳y^{۲} - \frac{۲}{y})\, dy$$

۸. $$d\omega = \frac{\partial \omega}{\partial x} dx + \frac{\partial \omega}{\partial y} dy$$

$$= (۲xe^{xy} + x^{۲}ye^{xy})\, dx + (x^{۳} e^{xy} - \frac{۲}{y^{۳}})dy$$

۹. $$d\omega = \frac{\partial \omega}{\partial x} dx + \frac{\partial \omega}{\partial y} dz + \frac{\partial \omega}{\partial z} dz$$

$$= \frac{y^2z + yz^2}{(x+y+z)^2} dx + \frac{x^2z + xz^2}{(x+y+z)^2} dy + \frac{x^2y + xy^2}{(x+y+z)^2} dz$$

۱۰. $$d\omega = \frac{\partial \omega}{\partial x} dx + \frac{\partial \omega}{\partial y} dy + \frac{\partial \omega}{\partial z} dz + \frac{\partial \omega}{\partial t} dt$$

$$= (2xz - z^2t)dx + 4t^3dy + (x^2 - 2xzt)dz + (12yt^2 - xy^2)dt$$

۱۱. $$d\omega = \frac{\partial \omega}{\partial x} dx + \frac{\partial \omega}{\partial y} dy + \frac{\partial \omega}{\partial z} dz$$

$$= (2xy^2z^2 - 2e^{-2x})dx + 2x^2y^2z^2\, dy + 2x^2y^2z dz$$

۱۲. $$d\omega = \frac{\partial \omega}{\partial x} dx + \frac{\partial \omega}{\partial y} dy + \frac{\partial \omega}{\partial z} dz + \frac{\partial \omega}{\partial t} dt + \frac{\partial \omega}{\partial v} dv$$

$$= 2xy^3zt^{-1}v^5\, dx + 3x^2y^2\, zt^{-1}\, v^5\, dy + x^2y^3\, t^{-1}\, v^5\, dz - x^2y^3$$

$$zt^{-2}\, v^5\, dt + 5x^2y^3\, zt^{-1}\, v^4 dv$$

۱۳. چون

$$dz = -\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = 2xdx + 6ydy$$

پس به‌ازای $x = 1$ و $y = 2$، $dx = -0/3$ و $dy = 0/2$ به دست می‌آوریم

$$dz = 2(1)(-0/3) + 6(2)(0/2) = 1/8$$

۱۴. چون

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$
$$= (2x + 2y)\, dx + (2x + 2y)\, dy$$

در نتیجه، به ازای مقادیر داده شده، مقدار dz برابر است با

$$(-4+2)(0/3) + (-4+2)(0/2) = -1$$

۱۵. داریم

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$
$$= (۲x - ۹x^۲y^۲ + ۴)\,dx + (-۶x^۳y - ۶y^۲)\,dy$$

با جایگزینی مقادیر $x = -۲$، $y = ۳$، $dx = -۰/۰۲$ و $dy = ۰/۰۱$ در این رابطه به‌دست می‌آوریم

$$df = (-۴-۳۲۴+۴)(-۰/۰۲) + (۱۴۴-۵۴)\,(۰/۰۱)$$
$$= ۶/۴۸ + ۰/۹ = ۷/۳۸$$

۱۶. داریم

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$
$$= (۲xz^۳ - ۴x^{-۵})\,dx + (-۳z^۲ + \frac{۳}{۲}zy^{-\frac{۱}{۲}})\,dy + (۳x^۲z^۲ - ۶yz + ۳\sqrt{y})\,dz$$

با جایگزینی مقادیر $x = ۱$، $y = ۳$، $z = ۲$، $dx = ۰/۰۲$، $dy = -۰/۰۳$
و $dz = -۰/۰۴$ در این رابطه، به‌دست می‌آوریم

$$df = (۱۶-۴)(۰/۰۲) + (-۱۲ + \frac{۳}{\sqrt{۳}})(-۰/۰۳) + (۱۲-۳۶+۳\sqrt{۳})(-۰/۰۴)$$
$$\approx ۰/۲۴ + ۰/۳ + ۰/۷۵ = ۱/۲۹$$

۱۷. تابع $f(x,y) = \sqrt[۳]{x}\sqrt{y} = x^{\frac{۱}{۳}}y^{\frac{۱}{۲}}$ را در نظر می‌گیریم. داریم

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = \frac{۱}{۳}x^{-۲/۳}y^{۱/۲}\,dx + \frac{۱}{۲}x^{۱/۳}y^{-۱/۲}\,dy$$

با جایگزین کردن مقادیر $x = ۲۷$، $y = ۳۶$، $dx = -۰/۰۲$ و $dy = ۰/۰۴$ در این رابطه، به‌دست می‌آوریم

$$df = \frac{۱}{۳}(۲۷)^{-۲/۳}(۳۶)^{۱/۲}(-۰/۰۲) + \frac{۱}{۲}(۲۷)^{۱/۳}(۳۶)^{-۱/۲}(۰/۰۴)$$
$$= \frac{۱}{۳}\cdot\frac{۱}{۹}\cdot۶(-۰/۰۲) + \frac{۱}{۲}\cdot۳\cdot\frac{۱}{۶}(۰/۰۴) \approx ۰/۰۰۵$$

در نتیجه

$$f(۲۶/۹۸,\ ۳۶/۰۴) - f(۲۷,۳۶) \approx ۰/۰۱۴$$

$$f(۲۶/۹۸,۳۶/۰۴) = \sqrt[۳]{۲۶/۹۸}\ \sqrt{۳۶/۰۴} \approx \sqrt[۳]{۲۷}\ \sqrt{۳۶} + ۰/۰۱۴$$
$$= ۱۸/۰۰۵$$

۱۸. تابع $f(x,y) = \dfrac{x^{\frac{۲}{۵}}}{y^{۴}}$ را در نظر می‌گیریم. داریم

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy$$
$$= \frac{\frac{۲}{۵}x^{-۳/۵}}{y^{۴}}\,dx - \frac{۴x^{۲/۵}}{y^{۵}}\,dy$$

با جایگزینی مقادیر $x = ۳۲$ ، $y = ۲$ ، $dx = ۰/۰۱$ و $dy = ۰/۰۴$ در این رابطه، به‌دست می‌آوریم

$$df = \frac{۲(۰/۰۱)}{۵(۸)(۱۶)} - \frac{۴(۴)(۰/۰۴)}{۳۲} \approx -۰/۰۲$$

بنابراین

$$\frac{(۳۲/۰۱)^{۲/۵}}{(۱/۹۶)^{۴}} \approx \frac{(۳۲)^{۲/۵}}{(۲)^{۴}} - ۰/۰۲ \approx ۰/۲۳$$

۱۹. حجم استوانه برابر است با $v = \pi r^{۲}h$. در نتیجه

$$dv = \frac{\partial v}{\partial r}\,dr + \frac{\partial v}{\partial h}\,dh$$
$$= ۲\pi rh\ dr + \pi r^{۲}dh$$

به‌ازای مقادیر $r = ۶$ ، $h = ۱۵$ ، $dr = ۰/۲$ ، $dh = ۰/۳$ ، داریم

$$dv = ۲\pi\ (۶)\ (۱۵)\ (۰/۲) + \pi(۳۶)\ (۰/۳)$$
$$\approx ۱۴۶/۹۵۲$$

۲۰. حجم مکعب مستطیل به ابعاد x ، y ، z برابر است با $v = xyz$. در نتیجه

$$dv = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz$$
$$= yz\, dx + xzdy + xydz$$

به ازای مقادیر $x = ۹$ ، $y = ۶$ ، $z = ۴$ ، $dx = ۰/۰۲$ و $dy = ۰/۰۳$ و $dz = ۰/۰۱$ داریم

$$dv = ۶(۴)(۰/۰۲) + ۹(۴)(-۰/۰۳) + ۹(۶)(۰/۰۱)$$
$$= ۰/۴۸ - ۱/۰۸ + ۰/۵۴ - ۰/۰۶$$

تمرینهای ۵.۷

۱. بنابر صورت (الف) قاعدهٔ زنجیره‌ای، داریم

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$
$$= ۴x\left(\frac{۱}{۲\sqrt{t}}\right) + (-۱۲y^{۲})(۶te^{۳t^{۲}})$$
$$= \frac{۴\sqrt{t}}{۲\sqrt{t}} - ۷۲e^{۶t^{۲}}te^{۳t^{۲}} = ۲ - ۷۲te^{۹t^{۲}}$$

۲.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$
$$= \frac{۶x}{۳x^{۲}+y^{۳}}(۲e^{۲t}) + \frac{۳y^{۲}}{۳x^{۲}+y^{۳}}\left(\frac{۲}{۳}t^{-۱/۳}\right)$$
$$= \frac{۶e^{۲t}(۲e^{۲t})}{۳e^{۴t} + t^{۲}} + \frac{۳t^{۴/۳}}{۳e^{۴t} + t^{۲}}\left(\frac{۲}{۳}t^{-۱/۳}\right)$$
$$= \frac{۱۲e^{۴t}}{۳e^{۴t} + t^{۲}} + \frac{۲t}{۳e^{۴t} + t^{۲}} = \frac{۱۲e^{۴t} + ۲t}{۳e^{۴t} + t^{۲}}$$

۳.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$
$$= (\cos x - ۲xy \sin x^{۲}y)(۶t^{۲}) + (-x^{۲}\sin x^{۲}y)(۰)$$
$$= ۶t^{۲}\cos ۲t^{۳} - ۱۲۰t^{۵}\sin ۲۰t^{۶}$$

.۴

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$
$$=\frac{۳}{۲\sqrt{۳x-y}}\,\frac{۱}{t}+\frac{-۱}{۲\sqrt{۳x-y}}(-۲t)$$
$$=\frac{۳}{۲t\sqrt{۳\ln t+t^{۲}-۲}}+\frac{t}{۳\ln t+t^{۲}-۲}=\frac{۳+۲t^{۲}}{۲t\sqrt{۳\ln t+t^{۲}-۲}}$$

۵. بنابر صورت (ب) قاعدهٔ زنجیره‌ای، داریم

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$
$$=\frac{۱}{y^{۲}}(۱)+\frac{-۲x}{y^{۳}}(-۱)=\frac{y+۲x}{y^{۳}}$$
$$=\frac{۱-u+v+۲u+۴v}{(۱-u+v)^{۳}}=\frac{۱+u+۵v}{(۱-u+v)^{۳}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$
$$=\frac{۱}{y^{۲}}(۲)+\frac{-۲x}{y^{۳}}(۱)$$
$$=\frac{۲y-۲x}{y^{۳}}=\frac{۲-۲u+۲v-۲u-۴v}{(۱-u+v)^{۳}}=\frac{۲-۴u-۲v}{(۱-u+v)^{۳}}$$

.۶

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$
$$=(-\frac{۱}{x^{۲}y}-\frac{۱}{y})(۴u)+(-\frac{۱}{xy^{۲}}+\frac{x}{y^{۲}})(v^{۲})$$
$$=(-\frac{۱}{۴u^{۵}v^{۲}}-\frac{۱}{uv^{۲}})(۴u)+(-\frac{۱}{۲u^{۴}v^{۴}}+\frac{۲u^{۲}}{u^{۲}v^{۴}})(v^{۲})$$
$$=\frac{-۱-۴u^{۴}}{u^{۴}v^{۲}}+\frac{-۱+۴u^{۴}}{۲u^{۴}v^{۲}}=\frac{-۳-۴u^{۴}}{۲u^{۴}v^{۲}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

$$=\left(\frac{-۱-x^{۲}}{x^{۲}y}\right)(۰)+\left(\frac{-۱+u^{۲}}{xy^{۲}}\right)(۲uv)$$

$$=\frac{-۱+۴u^{۴}}{۲u^{۴}v^{۴}}(۲uv)\ =\frac{۴u^{۴}-۱}{u^{۳}v^{۳}}$$

.۷

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$=\ (-۲x)(\sin\ v)+(-۲y)(-v\sin\ u)$$

$$=\ -۲u\sin^{۲}v+۲v^{۲}\sin\ u\cos\ u$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{dv}$$

$$=\ (-۲x)(u\cos\ v)+(-۲y)(\cos u)$$

$$=\ -۲u^{۲}\sin v\cos v\ -۲v\cos^{۲}u$$

.۸

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$=۲xye^{x^{۲}y}\frac{v}{۲\sqrt{uv}}+x^{۲}e^{x^{۲}y}\left(-\frac{۱}{u^{۲}}\right)$$

$$=(۲\sqrt{uv}\frac{۱}{u}e^{v})\frac{v}{۲\sqrt{uv}}-(uve^{v})\frac{۱}{u^{۲}}$$

$$=\frac{ve^{v}}{u}-\frac{ve^{v}}{u}=۰$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

$$=۲xye^{x^{۲}y}\frac{u}{۲\sqrt{uv}}+x^{۲}e^{x^{۲}y}(۰)$$

$$=(۲\sqrt{uv}\ \frac{e^{v}}{u})\frac{u}{۲\sqrt{uv}}\ =e^{v}$$

.۹

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s}$$

$$=(۲\cos ۲u\cos ۳v)(۲(r+s))+(-۳\sin ۲u\sin ۳v)(۲(r-s))$$

$$=۴(r+s)\cos ۲u\cos ۳v-۶(r-s)\sin ۲u\sin ۳v$$

$$=۴(r+s)\cos ۲(r+s)^{۲}\cos ۳(r-s)^{۲}-۶(r-s)\sin ۲(r+s)^{۲}$$

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s}$$

$$=(۲\cos ۲u\cos ۳v)(۲(r+s))+(-۳\sin ۲u\sin ۳v)(-۲(r-s))$$

$$=۴(r+s)\cos ۲u\cos ۳v+۶(r-s)\sin ۲u\sin ۳v$$

$$=۴(r+s)\cos ۲(r+s)^{۲}\cos ۳(r-s)^{۲}+۶(r-s)\sin ۲(r+s)^{۲}\sin ۳(r-s)^{۲}$$

.۱۰

$$\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial r}$$

$$=\frac{۱}{u}(s\ln ۴\ \ ۴^{rs})+\frac{۱}{v}(\frac{۱}{s}\ \ln ۴\ \ ۴^{r/s})$$

$$=\frac{s۴^{r}\ln ۴}{۴^{rs}}+\frac{۴^{r/s}\ln ۴}{۴^{r/s}s}$$

$$=\frac{\ln ۴(s^{۲}+۱)}{s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s}$$

$$=\frac{۱}{u}(r\ln ۴\ \ ۴^{rs})+\frac{۱}{v}(-\frac{r}{s^{۲}}\ \ln ۴\ \ ۴^{r/s})$$

$$=r\ln ۴-\frac{r\ln ۴}{s^{۲}}=\frac{r\ln\ ۴(s^{۲}-l)}{s^{۲}}$$

.۱۱

$$\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial r}$$

$$=(e^{v}-ve^{-u})\frac{۱}{r}+(ue^{v}+e^{-u})(\frac{s}{r})$$

$$=\frac{e^{s\ln r}-s\ln re^{-\ln r}}{r}+\frac{s(\ln re^{s\ln r}+e^{-\ln r})}{r}$$

$$=\frac{۱}{r}(r^{s}-\frac{s}{r}\ln r)+\frac{s}{r}\ (r^{s}\ln r+\frac{۱}{r})$$

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s}$$

$$=(e^{v}-ve^{-u})(۰)+(ue^{v}+e^{-u})\ln r$$

$$=(\ln re^{s\ln r}+e^{-\ln r})\ln r$$

$$=(r^{s}\ln r+\frac{۱}{r})\ln r$$

.۱۲

$$\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial r}$$

$$=\ln ۲\ ۲^{u-v}\cos\ s+(-\ln ۲\ \ ۲^{u-v})\sin\ s$$

$$=\ln ۲\ \cos s\ ۲^{r\ (\cos s\ -\ \sin s)}-\ln ۲\sin s\ ۲^{r(\cos s\ -\ \sin s)}$$

$$=\ln ۲\ (\cos s-\sin\ s\ )\ ۲^{r(\cos s\ -\ \sin s)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s}$$

$$=\ln ۲\ ۲^{u-v}(-r\sin\ s)+(-\ln ۲\ \ ۲^{u-v})(r\cos s)$$

$$=-r\ln ۲(\sin\ s+\cos s)۲^{r\ (\cos s\ -\ \sin s)}$$

۱۳. بنابر صورت (الف) قاعدهٔ زنجیره‌ای برای توابع با سه متغیر، داریم

$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial\omega}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$$=(\frac{۱}{y}+\frac{z}{x^{۲}})\cos t+(-\frac{x}{y^{۲}})(-\sin t)+(-\frac{۱}{x})\sin^{۲} t$$

$$=(\frac{۱}{\cos t}+\frac{\mathrm{tg}\ t}{\sin^{۲} t})\cos t+\frac{\sin^{۲} t}{\cos^{۲} t}-\frac{\sec^{۲} t}{\sin t}$$

$$=۱+\frac{۱}{\sin t}+\mathrm{tg}^{۲}t-\frac{\sec^{۲}}{\sin t}=۱+\cos ect+\mathrm{tg}^{۲}t-\cos ect\sec^{۲}t$$

.۱۴

$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial\omega}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$$=(-\frac{z}{x^{۲}y^{۲}})(\frac{-۶}{t^{۳}})+(\frac{-۲z}{xy^{۳}})(-۱)+(\frac{۱}{xy^{۲}})(\frac{۱}{۳}t^{-۲/۳})$$

$$=\frac{۶t^{۱/۳}}{۹t^{-۴}t^{۲}t^{۳}}+\frac{۲t^{۱/۳}}{-۳t^{-۲}t^{۳}}+\frac{t^{-۲/۳}}{۳(۳t^{-۲})t^{۲}}$$

$$=\frac{۲}{۳}t^{-۲/۳}-\frac{۲}{۳}t^{-۲/۳}+\frac{۱}{۹}t^{-۲/۳}=\frac{۱}{۹}t^{-۲/۳}$$

.۱۵

$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial\omega}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$$=\frac{x(۲e^{۲t})}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}}}+\frac{y(-۲e^{-۲t})}{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}}+\frac{z(۴t)}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}}}$$

$$=\frac{۲xe^{۲t}-۲ye^{-۲t}+۴tz}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}}}$$

$$=\frac{۲e^{۴t}-۲e^{-۴t}+۸t^{۳}}{\sqrt{e^{۴t}+e^{-۴t}+۴t^{۴}}}$$

.۱۶

$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial\omega}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$$=\frac{x(۳t^{۲})}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}}+\left(\frac{y}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}}-\frac{۳y^{۲}}{۲\sqrt{y^{۳}-z^{۳}}}\right)۲t+\frac{۳z^{۲}}{۲\sqrt{y^{۳}-z^{۳}}}(-۳t^{۲})$$

$$=\frac{۳t^{۵}}{\sqrt{t^{۶}+t^{۴}}}+\left(\frac{t^{۲}}{\sqrt{t^{۶}+t^{۴}}}-\frac{۳t^{۴}}{۲\sqrt{t^{۶}+t^{۹}}}\right)۲t-\frac{۹t^{۸}}{۲\sqrt{t^{۶}+t^{۹}}}$$

$$=\frac{۳t^{۵}+۲t^{۳}}{t^{۲}\sqrt{t^{۲}+۱}}-\frac{۶t^{۵}-۹t^{۸}}{۲\sqrt{t^{۶}+t^{۹}}}=\frac{۳t^{۳}+۲t}{\sqrt{t^{۲}+۱}}-\frac{۶t^{۵}-۹t^{۸}}{۲\sqrt{t^{۲}+۹t^{۹}}}$$

۱۷. فرض می‌کنیم که $F(x, y) = x^{۳} + ۴x^{۲}y-۳xy^{۲} + y^{۳}-۵$. بنابر فرمول مشتقگیری ضمنی به‌دست آمده در بند ۷. ۵. ۸ متن کتاب داریم

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)} = -\frac{۳x^{۲} + ۸xy -۳y^{۲}}{۴x^{۲}- ۶xy + ۳y^{۲}}$$

۱۸. فرض می‌کنیم که $F(x, y) = ۲x^{۲/۳} -۳y^{۲/۳} - ۲$. داریم

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}=-\frac{\frac{۴}{۳}x^{-۱/۳}}{-۲y^{-۱/۳}}=\frac{۲y^{۱/۳}}{۳x^{۱/۳}}$$

۱۹. فرض می‌کنیم $F(x, y) = x^{۱} + y^{۲} + \sin xy^{۲} - ۶$. در این صورت، داریم

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)} = -\frac{۲x + y^{۲}\cos xy^{۲}}{۲y + ۲xy\cos xy^{۲}}$$

۲۰. قرار می‌دهیم $F(x, y) = e^{x/y} + \ln\frac{y}{x} + ۱۰$. در نتیجه داریم

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)} = -\frac{\frac{1}{y}e^{x/y} - \frac{1}{x}}{-\frac{x}{y^2}e^{x/y} + \frac{1}{y}}$$

$$= -\frac{\frac{xe^{x/y} - y}{xy}}{\frac{-xe^{x/y} + y}{y^2}} = \frac{y}{x}$$

۲۱. فرض می‌کنیم که $F(x, y,z) = 2xz^3 - 3yz^2 + x^2y^2 + 4z$. بنابر فرمولهای به دست آمده در بند ۷. ۵. ۱۱ کتاب، داریم

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} = -\frac{2z^3 + 2xy^2}{6xz^2 + 6yz + 4}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} = -\frac{-3z^2 + 2x^2y}{6xz^2 - 6yz + 4}$$

$$= \frac{3z^2 - 2x^2y}{6xz^2 - 6yz + 4}$$

۲۲. فرض می‌کنیم $F(x, y, z) = xz^2 + 2x^2y - 4y^2z + 3y - 2$. در این صورت داریم

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} = -\frac{z^2 + 4xy}{2xz - 4y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} = -\frac{2x^2 - 8yz + 3}{2xz - 4y^2}$$

۲۳. قرار می‌دهیم $F(x, y, z) = x^2z^2 - 2xyz + z^3y^2 - 3$. در این صورت،

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} = -\frac{2xz^2 - 2yz}{2x^2z - 2xy + 3z^2y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} = -\frac{-2xz + 2z^3y}{2x^2z - 2xy + 3z^2y^2}$$

$$= \frac{2xz - 2z^3y}{2x^2z - 2xy + 3z^2y^2}$$

۲۴. قرار می‌دهیم $\frac{1}{2} - \frac{1}{x+y+z} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z} = F(x, y, z)$. داریم

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)} = -\frac{\frac{-1}{(x\,y\,z)^2}}{-\frac{1}{z^2} - \frac{1}{(y+z)^2} - \frac{1}{(x+y+z)^2}}$$

$$= \frac{-z^2(y+z)^2}{(y+z)^2(x+y+z)^2 + z^2(x+y+z)^2 + z^2(y+z)^2}$$

به همین ترتیب، داریم

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{Fy(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} = -\frac{-(y+z)^{-2} - (x+y+z)^{-2}}{-z^{-2} - (y+z)^{-2} - (x+y+z)^{-2}}$$

$$= -\frac{z^2(x+y+z)^2 + z^2(y+z)^2}{(y+z)^2(x+y+z)^2 + z^2(x+y+z)^2 + z^2(y+z)^2}$$

۲۵. فرض می‌کنیم $u = x-y$. پس $z = f(u)$. در نتیجه، داریم

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}(1) = \frac{\partial z}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}(-1) = -\frac{\partial z}{\partial u}$$

بنابراین، $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial z}{\partial y}$.

۲۶. فرض می‌کنیم که $r = x-y$ ، $s = y-z$ ، $t = z-x$. در نتیجه $\omega = f(r,s,t)$. بنابراین، داریم

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\partial \omega}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial \omega}{\partial r}(1) + \frac{\partial \omega}{\partial s}(0) + \frac{\partial \omega}{\partial t}(-1)$$

$$= \frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{\partial \omega}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\partial \omega}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}$$

$$= \frac{\partial \omega}{\partial r}(-۱) + \frac{\partial \omega}{\partial s}(۱) + \frac{\partial \omega}{\partial t}(۰)$$

$$= -\frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{\partial \omega}{\partial s}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial z} = \frac{\partial \omega}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial \omega}{\partial r}(۰) + \frac{\partial \omega}{\partial s}(-۱) + \frac{\partial \omega}{\partial t}(۱)$$

$$= -\frac{\partial \omega}{\partial s} + \frac{\partial \omega}{\partial t}$$

بنابراین

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial z} = \frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{\partial \omega}{\partial t} - \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{\partial \omega}{\partial s} - \frac{\partial \omega}{\partial s} + \frac{\partial \omega}{\partial t}$$
$$= ۰$$

۲۷. فرض می‌کنیم که $u = y+ax$ ، $v= y-ax$. در نتیجه $z = f(u) + g(v) = F(u,v)$.
بنابراین

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= af'(u) - ag'(v)$$

$$\frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲} = \frac{\partial}{\partial u}[af'(u) - ag'(v)]\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}[af'(u) - ag'(v)]\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= a^۲ f''(u) + a^۲ g''(v) = a^۲[f''(u) + g''(v)]$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$= f'(u)(۱) + g'(v)(۱) = f'(u) + g'(v)$$

$$\frac{\partial^۲ z}{\partial y^۲} = \frac{\partial}{\partial u}[f'(u) + g'(v)]\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v}[f'(u) + g'(v)]\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$= f''(u)(۱) + g''(v)(۱) = f''(u) + g''(v)$$

در نتیجه

$$\frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲} = a^۲ \frac{\partial^۲ z}{\partial y^۲}$$

۲۸. (الف) داریم

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x}(-r\sin\theta) + \frac{\partial z}{\partial y}(r\cos\theta)$$

بنابراین

$$\frac{\partial z}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial x} = \cos^۲\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta\cos\theta - \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$(-r\sin\theta)\frac{\sin\theta}{r} - \frac{\partial z}{\partial y}(r\cos\theta)\ \frac{\sin\theta}{r}$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x}(\cos^۲\theta + \sin^۲\theta) = \frac{\partial z}{\partial x}$$

به همین ترتیب

$$\frac{\partial z}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta\sin\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\sin^۲\theta + \frac{\partial z}{\partial x}(-r\sin\theta)\frac{\cos\theta}{r}$$

$$+ \frac{\partial z}{\partial y}(r\cos\theta)\frac{\cos\theta}{r}$$

$$= \frac{\partial z}{\partial y}(\sin^۲\theta + \cos^۲\theta) = \frac{\partial z}{\partial y}$$

(ب) با استفاده از قسمت (الف)، داریم

$$(\frac{\partial z}{\partial x})^۲ + (\frac{\partial z}{\partial y})^۲ = (\frac{\partial z}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r})^۲ + (\frac{\partial z}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r})^۲$$

$$= (\frac{\partial z}{\partial r})^۲\cos^۲\theta + (\frac{\partial z}{\partial \theta})^۲\frac{\sin^۲\theta}{r^۲} - ۲\sin\theta\cos\theta\frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial \theta}$$

$$+ (\frac{\partial z}{\partial r})^۲\sin^۲\theta + (\frac{\partial z}{\partial \theta})^۲\frac{\cos^۲\theta}{r^۲} + ۲\sin\theta\cos\theta\frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial \theta}$$

$$= (\frac{\partial z}{\partial r})^۲ + \frac{۱}{r^۲}(\frac{\partial z}{\partial \theta})^۲$$

۲۹. داریم

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -\ ۸(x-۴t)\ ,\ \frac{\partial z}{\partial x} = ۲(x-۴t)$$

$$\frac{\partial^۲ z}{\partial t^۲} = ۳۲\ \ ,\ \frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲} = ۲$$

بنابراین

$$\frac{\partial^۲ z}{\partial t^۲} = ۱۶ \quad \frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲}$$

۳۰. چون

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -\ ۳A \sin ۳t \sin ۳x$$

$$\frac{\partial^۲ y}{\partial t^۲} = -\ ۹A \cos ۳t \sin ۳x$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = ۳A \cos ۳t \cos ۳x$$

$$\frac{\partial^۲ y}{\partial x^۲} = -\ ۹A \cos ۳t \sin ۳x$$

در نتیجه

$$\frac{\partial^۲ y}{\partial t^۲} - \frac{\partial^۲ y}{\partial x^۲} = ۰$$

تمرینهای ۶.۷

۱. داریم

$$\nabla f(x.y) = f_x\,(x,y)\,\vec{i} + f_y\,(x,y)\,\vec{j}$$
$$= ۳\vec{i} - ۵\vec{j}$$

در نتیجه $\nabla f(۱,۲) = ۳\vec{i} - ۵\vec{j}$ چون $\vec{u} = \vec{a}$ یک بردار واحد است،

$$D_u f(۱,۲) = \nabla f(۱,۲) . \vec{u}$$
$$= (۳\vec{i} - ۵\vec{j}) . (\frac{۱}{\sqrt{۲}}\vec{i} + \frac{۱}{\sqrt{۲}}\vec{j})$$
$$= \frac{۳}{\sqrt{۲}} - \frac{۵}{\sqrt{۲}} = -\sqrt{۲}$$

۲. چون

$$f_x(x, y) = \sin x^۲y + ۲x^۲y\cos x^۲y$$

$$f_y(x, y) = ۲y + x^۳\cos x^۲y$$

پس

$$\nabla f(۱,\pi/۲) = f_x(۱,\pi/۲)\,\vec{i} + f_y(۱,\pi/۲)\vec{j}$$
$$= (۱)\vec{i} + \pi\vec{j} = \vec{i} + \pi\vec{j}$$

چون $\vec{a} = \vec{u}$ یک بردار واحد است، پس

$$D_u f(۱,\pi/۲) = \nabla f(۱,\pi/۲).\vec{u} = (۱,\pi).(\frac{۱}{\sqrt{۳}}, -\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}) = \frac{۱}{\sqrt{۳}} - \frac{\pi\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}$$
$$= \frac{۱-\pi\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}$$

۳. داریم

$$f_x(x,y) = \frac{y(x^۲+y^۲) - ۲x(xy-۱)}{(x^۲+y^۲)^۲} = \frac{y^۳ - yx^۲ + ۲x}{(x^۲+y^۲)^۲}$$
$$f_y(d,y) = \frac{x(x^۲+y^۲) - ۲y(xy-۱)}{(x^۲+y^۲)^۲} = \frac{x^۳ - xy^۲ + ۲y}{(x^۲+y^۲)^۲}$$

در نتیجه

$$\nabla f(-۱,۱) = f_x(-۱,۱)\,\vec{i} + f_y(-۱,۱)\vec{j}$$
$$= -\frac{۱}{۲}\vec{i} + \frac{۱}{۲}\vec{j}$$

چون $\vec{u} = \vec{a}$، یک بردار واحد است، پس

$$\begin{aligned}D_u f(-۱,۱) &= \nabla f(-۱,۱) . \vec{u} \\ &= (-\frac{۱}{۲}\vec{i} + \frac{۱}{۲}\vec{j}) . (\frac{۱}{۲}\vec{i} - \frac{\sqrt{۳}}{۲}\vec{j}) \\ &= -\frac{۱}{۴} - \frac{\sqrt{۳}}{۴} \approx -۰/۶۸\end{aligned}$$

۴. در اینجا چون $f_x(x, y) = ۲x \ln y$ ، $f_y(x, y) = \frac{x^۲}{y}$، داریم

$$\begin{aligned}\nabla f(۵, ۱) &= f_x(۵,۱)\vec{i} + f_y(۵, ۱)\vec{j} \\ &= ۰\vec{i} + ۲۵\vec{j} = ۲۵\vec{j}\end{aligned}$$

چون $\sqrt{۵} = \sqrt{۱+۴} = |\vec{a}|$ ، یک بردار واحد در جهت $\vec{a}$ برابر است با

$$\vec{u} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{۱}{\sqrt{۵}}(\vec{i} + ۲\vec{j})$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}D_u f(۵,۱) &= \nabla f(۵,۱) . \vec{u} \\ &= ۲۵\vec{j} . \frac{۱}{\sqrt{۵}}(\vec{i} + ۲\vec{j}) \\ &= \frac{۱}{\sqrt{۵}}(۰ + ۵۰) = ۱۰\sqrt{۵}\end{aligned}$$

۵. بنابه تعریف داریم

$$\begin{aligned}\nabla f(x,y,z) &= f_x(x,y,z)\vec{i} + f_y(x,y,z)\vec{j} + f_z(x,y,z)\vec{k} \\ &= ۴x\vec{i} - ۲y\vec{j} - ۸z\vec{k}\end{aligned}$$

پس $\nabla f(۱,۱,۱) = ۴\vec{i} - ۲\vec{j} - ۸\vec{k}$. چون بردار واحد در جهت $\vec{a}$ برابر است با

$$\vec{u} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{-۲\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{۴+۱+۱}} = -\frac{۱}{\sqrt{۶}}(۲\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$$

مقدار مشتق سوئی f در نقطهٔ P در جهت $\vec{a}$ برابر است با

$$\begin{aligned} D_u f(۱,۱,۱) &= \nabla f(۱,۱,۱).\vec{u} \\ &= (۴\vec{i} - ۲\vec{j} - ۸\vec{k}) . \frac{-۱}{\sqrt{۶}} (۲\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) \\ &= -\frac{۱}{\sqrt{۶}} (۸-۲-۸) = \frac{\sqrt{۶}}{۳} \approx ۰/۸ \end{aligned}$$

۶. چون

$$f_x(x,y,z) = \frac{-x}{\sqrt{x^۲+y^۲}} ، \quad f_y(x,y,z) = \frac{-y}{\sqrt{x^۲+y^۲}} ، \quad f_z(x,y,z) = ۱$$

داریم

$$\begin{aligned} \nabla f(۳,-۴,۷) &= f_x(۳,-۴,۷)\vec{i} + f_y(۳,-۴,۷)\vec{j} + f_z(۳,-۴,۷)\vec{k} \\ &= -\frac{۳}{۵}\vec{i} + \frac{۴}{۵}\vec{j} + \vec{k} \end{aligned}$$

بردار واحد $\vec{u}$ در جهت $\vec{a}$ برابر است با

$$\vec{u} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{-\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{۱+۱+۱}} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} (-\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$$

در نتیجه مقدار مشتق سوئی f در نقطهٔ P در جهت $\vec{a}$ برابر است با

$$\begin{aligned} D_u f(۳,-۴,۷) &= \nabla f(۳,-۴,۷) .\vec{u} \\ &= (-\frac{۳}{۵}\vec{i} + \frac{۴}{۵}\vec{j} + \vec{k}) . \frac{۱}{\sqrt{۳}} (-\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) \\ &= \frac{۱}{\sqrt{۳}} (\frac{۳}{۵} + \frac{۴}{۵} - ۱) = \frac{۲}{۵\sqrt{۳}} \approx ۰/۲۳ \end{aligned}$$

۷. داریم

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y,z) &= f_x(x,y,z)\vec{i} + f_y(x,y,z)\vec{j} + f_z(x,y,z)\vec{k} \\ &= e^x (\sin y + \sin z)\vec{i} + e^x \cos y\vec{j} + e^x \cos z\vec{k} \end{aligned}$$

در نتیجه گرادیان f درنقطهٔ P برابر است با

$$\nabla f(۱,\pi/۲\ ,\pi/۲) = ۲e\vec{i} + o\vec{j} + o\vec{k} = ۲e\vec{i}$$

بردار واحد $\vec{u}$ درجهت $\vec{a}$ برابر است با

$$\vec{u} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{-۲\vec{i} - ۲\vec{j} - ۲\vec{k}}{\sqrt{۴+۴+۴}} = -\frac{۱}{\sqrt{۳}}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$$

بنابراین، مقدار مشتق سوئی f در نقطهٔ p در جهت $\vec{a}$ برابر است با

$$\begin{aligned} D_u f(۱, \pi/۲\ , \pi/۲) &= \nabla f(۱, \pi/۲,\ \pi/۲).\vec{u} \\ &= ۲e\vec{i}\ .(-\frac{۱}{\sqrt{۳}})(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) \\ &= -\frac{۲e}{\sqrt{۳}} \end{aligned}$$

۸. داریم $f_x(x, y, z) = y+z$ ، $f_y(x, y, z) = y+z+x+y = x+۲y+z$ ، $f_z(x, y, z) = x+y$ ، و در نتیجه گرادیان f در نقطهٔ P برابر است با

$$\begin{aligned} \nabla f(۵,۷,۱) &= f_x(۵,۷,۱)\vec{i} + f_y(۵,۷,۱)\vec{j} + f_z(۵,۷,۱)\vec{k} \\ &= ۸\vec{i} + ۲۵\vec{j} + ۱۲\vec{k} \end{aligned}$$

بردار واحد $\vec{u}$ در جهت $\vec{a}$ برابراست با

$$\vec{u} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{۱+۱+۱}} = \frac{۱}{\sqrt{۳}}(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$$

بنابراین، مقدار مشتق سوئی f در نقطهٔ P در جهت $\vec{a}$ برابر است با

$$\begin{aligned} D_u f(۵,۷,۱) &= \nabla f(۵,۷,\ ۱).\vec{u} \\ &= (۸\vec{i} + ۲۵\vec{j} + ۱۲\vec{k}).\frac{۱}{\sqrt{۳}}(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) \\ &= \frac{۱}{\sqrt{۳}}(۸ - ۲۵ + ۱۲) = \frac{-۵}{\sqrt{۳}} \end{aligned}$$

۹. چون

$$\nabla f(x,y,z) = f_x(x,y,z)\vec{i} + f_y(x,y,z)\vec{j} + f_z(x,y,z)\vec{k}$$
$$= \frac{y\sin z}{۲\sqrt{xy}}\vec{i} + \frac{x\sin z}{۲\sqrt{xy}}\vec{j} + \sqrt{xy}\cos z\vec{k}$$

گرادیان f در نقطه P برابر است با

$$\nabla f(۴,۹,\pi/۴) = \frac{۳\sqrt{۲}}{۸}\vec{i} + \frac{\sqrt{۲}}{۶}\vec{j} + ۳\sqrt{۲}\vec{k}$$

بردار واحد $\vec{u}$ در جهت $\vec{a}$ برابر است با

$$\vec{u} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{-\vec{i}+۳\vec{j}+۲\vec{k}}{\sqrt{۱+۹+۴}} = \frac{۱}{\sqrt{۱۴}}(-\vec{i}+۳\vec{j}+۲\vec{j})$$

بنابراین، مقدار مشتق سوئی f در P در جهت $\vec{a}$ برابر است با

$$D_u f(۴,۹,\pi/۴) = \nabla f(۴,۹,\pi/۴)\cdot\vec{u}$$
$$= \left(\frac{۳\sqrt{۲}}{۸}\vec{i} + \frac{\sqrt{۲}}{۶}\vec{j} + ۳\sqrt{۲}\vec{k}\right)\cdot\frac{۱}{\sqrt{۱۴}}(-\vec{i}+۳\vec{j}+۲\vec{k})$$
$$= \frac{۱}{\sqrt{۱۴}}\left(-\frac{۳\sqrt{۲}}{۸} + \frac{\sqrt{۲}}{۲} + ۶\sqrt{۲}\right) = \frac{۷\sqrt{۷}}{۸}$$

۱۰. چون

$$\nabla f(x,y,z) = f_x(x,y,z)\vec{i} + f_y(x,y,z)\vec{j} + f_z(x,y,z)\vec{k}$$
$$= -۲xy^۳e^{z^۲}\vec{i} - ۳x^۲y^۲e^{z^۲}\vec{j} - ۲x^۲y^۳ze^{z^۲}\vec{k}$$

پس

$$\nabla f(۱,۱,-۱) = -۲e\vec{i} - ۳e\vec{j} + ۲e\vec{k}$$

بردار واحد $\vec{u}$ در جهت $\vec{a}$ برابر است با

$$\vec{u} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{۲\vec{j}-\vec{k}}{\sqrt{۴+۱}} = \frac{۱}{\sqrt{۵}}(۲\vec{j}-\vec{k})$$

بنابراین، مشتق سوئی f در P در جهت بردار $\vec{a}$ برابر است با

$$D_u f(۱,۱,-۱) = \nabla f(۱,۱,-۱) \cdot \vec{u}$$
$$= (-۲e\vec{i} - ۳e\vec{j} + ۲e\vec{j}) \cdot \frac{۱}{\sqrt{۵}}(۲\vec{j} - \vec{k})$$
$$= \frac{۱}{\sqrt{۵}}(۰ - ۶e - ۲e) = -\frac{۸e}{\sqrt{۵}}$$

۱۱. می‌دانیم که آهنگ تغییر f درنقطهٔ P در جهت بردار واحد همسو با گرادیان f در P ماکسیمم است. داریم

$$\nabla f(x,y) = f_x(x,y)\vec{i} + f_y(x,y)\vec{j}$$
$$= e^x(\cos y + \sin y)\vec{i} + e^x(-\sin y + \cos y)\vec{j}$$

در نتیجه

$$\nabla f(۰,۰) = (۱)\vec{i} + (۱)\vec{j} = \vec{i} + \vec{j}$$

بنابراین، آهنگ تغییر f در P در جهت بردار واحد

$$\vec{u} = \frac{\nabla f(۰,۰)}{|\nabla f(۰,۰)|} = \frac{\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{۱+۱}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}(\vec{i} + \vec{j})$$

ماکسیمم است.

۱۲. داریم

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\vec{i} + f_y(x, y)\vec{j}$$
$$= e^x\vec{i} + e^y\vec{j}$$

در نتیجه $\nabla_f(۱,۱) = e\vec{i} + e\vec{j}$. بنابراین، آهنگ تغییر f در جهت بردار واحد

$$\vec{u} = \frac{e\vec{i} + e\vec{j}}{\sqrt{e^۲ + e^۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}(\vec{i} + \vec{j})$$

ماکسیمم است.

۱۳. داریم

$$\nabla f(x,y) = f_x(x,y)\vec{i} + f_y(x,y)\vec{j} = ۲x\vec{i} + ۲y\vec{j}$$
$$\nabla f(-۱,۱) = -۲\vec{i} + ۲\vec{j}$$

بنابراین، آهنگ تغییر f در جهت بردار واحد

$$\vec{u}=\frac{-۲\vec{i}+۲\vec{j}}{\sqrt{۴+۴}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}(-\vec{i}+\vec{j})$$

ماکسیمم است.

۱۴. چون

$$\begin{aligned}\nabla f(x,y,z)&=f_x(x,y,z)\vec{i}+f_y(x,y,z)\vec{j}+f_z(x,y,z)\vec{k}\\&=۲x\vec{i}+۴y\vec{j}-۲z\vec{k}\end{aligned}$$

در نتیجه $\nabla f(۱,-۱,۱)=۲\vec{i}-۴\vec{j}-۲\vec{k}$ بنابراین، آهنگ تغییر f در جهت بردار واحد

$$\vec{u}=\frac{۲\vec{i}-۴\vec{j}-۲\vec{k}}{\sqrt{۴+۱۶+۴}}=\frac{۱}{\sqrt{۶}}(\vec{i}-۲\vec{j}-\vec{k})$$

ماکسیمم است.

۱۵. داریم

$$\begin{aligned}\nabla f(x,\ y,\ z)&=f_x(x,\ y,\ z)\vec{i}+f_y(x,\ y,\ z)\vec{j}+f_z(x,\ y,\ z)\vec{k}\\&=e^x\vec{i}+e^y\vec{j}+۲e^{۲z}\vec{k}\end{aligned}$$

$$\nabla f(۱,\ ۱,\ -۱)=e\vec{i}+e\vec{j}+۲e^{-۲}\vec{k}$$

بنابراین، آهنگ تغییر f در جهت بردار واحد

$$\vec{u}=\frac{e\vec{i}+e\vec{j}+۲e^{-۲}\vec{k}}{\sqrt{e^۲+e^۲+۴e^{-۴}}}=\frac{۱}{\sqrt{۲e^۲+۴e^{-۴}}}(e\vec{i}+e\vec{j}+۲e^{-۲}\vec{k})$$

ماکسیمم است.

۱۶. چون

$$\begin{aligned}\nabla f(x,\ y,\ z)&=f_x(x,\ y,\ z)\vec{i}+f_y(x,\ y,\ z)\vec{j}+f_z(x,\ y,\ z)\vec{k}\\&=(-yz\sin xyz)\vec{i}-(xz\sin xyz)\vec{j}-(xy\sin xyz)\vec{k}\end{aligned}$$

$$\nabla f(۱,\ ۱/۲,\ \pi)=-\frac{\pi}{۲}\vec{i}-\pi\vec{j}-\frac{۱}{۲}\vec{k}$$

بنابراین، آهنگ تغییر f در جهت بردار واحد

$$\vec{u}=\frac{-\pi/۲\vec{i}-\pi\vec{j}-۱/۲\vec{k}}{\sqrt{\frac{\pi^۲}{۴}+\pi^۲+\frac{۱}{۴}}}=\frac{۱}{\sqrt{۵\pi^۲+۱}}(-\pi\vec{i}-۲\pi\vec{j}-\vec{k})$$

ماکسیمم است.

۱۷. بنابه تعریف، داریم

$$\begin{aligned}\nabla(u+v) &= \frac{\partial(u+v)}{\partial x}\,\vec{i} + \frac{\partial(u+v)}{\partial y}\,\vec{j} \\ &= (f_x + g_x)\vec{i} + (f_y + g_y)\vec{j} \\ &= (f_x\vec{i} + f_y\vec{j}) + (g_x\vec{i} + g_y\vec{j}) \\ &= \nabla u + \nabla v\end{aligned}$$

۱۸. بنا به تعریف، داریم

$$\begin{aligned}\nabla(uv) &= \frac{\partial(u+v)}{\partial x}\,\vec{i} + \frac{\partial(uv)}{\partial y}\,\vec{j} \\ &= (u_x v + \circ\, u v_x)\vec{i} + (u_y v + u v_y)\vec{j} \\ &= u(v_x\vec{i} + v_y\vec{j}) + v(u_x\vec{i} + u_y\vec{j}) \\ &= u\nabla v + v\nabla u\end{aligned}$$

۱۹.

$$\begin{aligned}\nabla\left(\frac{u}{v}\right) &= \frac{\partial\left(\frac{u}{v}\right)}{\partial x}\,\vec{i} + \frac{\partial\left(\frac{u}{v}\right)}{\partial y}\,\vec{j} \\ &= \left(\frac{vu_x - uv_x}{v^{۲}}\right)\vec{i} + \left(\frac{vu_y - uv_y}{v^{۲}}\right)\vec{j} \\ &= \frac{v(u_x\vec{i} + u_y\vec{j}) - u(v_x\vec{i} + v_y\vec{j})}{v^{۲}} \\ &= \frac{v\nabla u - u\nabla v}{v^{۲}}\end{aligned}$$

۲۰. به ازای هر عدد حقیقی n، داریم

$$\begin{aligned}\nabla u^n &= \frac{\partial u^n}{x}\,\vec{i} + \frac{\partial u^n}{y}\,\vec{j} \\ &= nu^{n-۱}\frac{\partial u}{\partial x}\,\vec{i} + nu^{n-۱}\frac{\partial u}{\partial y}\,\vec{j} \\ &= nu^{n-۱}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\,\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\,\vec{j}\right) \\ &= nu^{n-۱}\nabla u\end{aligned}$$

تمرینهای ۷.۷

۱. فرض می‌کنیم $F(x, y)= \sin \pi xy - \frac{\sqrt{۳}}{۲}$. چون

$$\nabla F(x,y)=F_x(x,y)\vec{i}+F_y(x,y)\vec{j}$$
$$=y\cos \pi xy\,\vec{i}+\pi x\cos \pi xy\,\vec{j}$$

بنابراین، بردار

$$\nabla F(۱/۶,۲)=۲\pi \quad \cos\frac{\pi}{۳}\vec{i}+\frac{\pi}{۶}\quad\cos\frac{\pi}{۳}\vec{j}$$
$$=\pi\,\vec{i}+\frac{\pi}{۱۲}\vec{j}$$

بر منحنی داده شده در نقطهٔ P قائم است.

۲. فرض می‌کنیم $F(x, y) = e^{x^۲y}-۲$. در این صورت،

$$\nabla F(x,y)=F_x(x,y)\vec{i}+F_y(x,y)\vec{j}$$
$$=۲xy\,\vec{i}+x^۲\vec{j}$$

بنابراین، بردار

$$\nabla F(۱,\ln ۲)=۲\ln ۲e^{\ln ۲}\vec{i}+e^{\ln ۲}\vec{j}$$
$$=۴\ln ۲\,\vec{i}+۲\vec{j}$$

بر منحنی داده شده قائم است.

۳. چون $f_x(x, y) = ۶x$ و $f_y(x, y) = ۸y$، بنابر تذکر ۷.۷.۷، بردار

$$f_x(-۲,۱)\,\vec{i}+f_y+(-۲,۱)\,\vec{j}-\vec{k}=-۱۲\vec{i}+۸\vec{j}-\vec{k}$$

بر سطح داده شده قائم است.

۴. چون $f_x(x, y) = y^۲e^x$ و $f_y(x, y) = ۲ye^x$، بردار

$$f_x(۰,-۳)\,\vec{i}+f_y(۰,-۳)\vec{j}-\vec{k}=۹\vec{i}-۶\vec{j}-\vec{k}$$

بر سطح داده شده قائم است.

۵. چون $f_x(x, y) = y-۱$ ، $f_y(x, y) = x+۱$ ، و در نتیجه $f_x(۰,۲) = ۱$ و $f_y(۰,۲) = ۱$،
بنابر تذکر ۷.۷.۷، معادلهٔ صفحهٔ مماس مورد نظر عبارت است از

$$z = f(۰,۲) + f_x(۰,۲)\,(x-۰) + f_y(۰,۲)(y-۲)$$
$$= ۷+۱(x) + ۱(y-۲)$$

یا $x+y-z+۵ = ۰$.

۶. داریم

$f_x(x, y) = \pi y \cos \pi xy$ ، $f_y(x, y) = \pi x \cos \pi xy$ ، و در نتیجه

$$f_x(-\sqrt{۲},\sqrt{۲}) = \pi\sqrt{۲} \qquad \text{و} \qquad f_y(-\sqrt{۲},\sqrt{۲}) = -\pi\sqrt{۲}$$

معادلهٔ صفحه مماس بر این سطح در نقطهٔ P عبارت است از

$$\begin{aligned} z &= f(-\sqrt{۲},\sqrt{۲}) + f_x(-\sqrt{۲},\sqrt{۲})(x+\sqrt{۲}) + f_y(-\sqrt{۲},\sqrt{۲})(y-\sqrt{۲}) \\ &= ۰ + \pi\sqrt{۲}(x+\sqrt{۲}) - \pi\sqrt{۲}(y-\sqrt{۲}) \end{aligned}$$

یا $\pi\sqrt{۲}x - \pi\sqrt{۲}y - z = -۴\pi$

۷. چون $f_x(x, y) = \dfrac{۲x}{x^۲+y^۲}$ ، $f_y(x, y) = \dfrac{۲y}{x^۲+y^۲}$ ، $f_x(-۱,۰) = -۲$ و $f_y(-۱,۰) = ۰$ ، معادلهٔ صفحهٔ مماس موردنظر عبارت است از

$$\begin{aligned} z &= f(-۱,۰) + f_x(-۱,۰)(x+۱) + f_y(-۱,۰)(y-۰) \\ &= ۰ - ۲(x+۱) + ۰(y-۰) \end{aligned}$$

یا $۲x + z + ۲ = ۰$.

۸. داریم $f_x(x, y) = ۲(۲+x-y)$ ، $f_y(x, y) = -۲(۲+x-y)$ ، $f_x(۳, -۱) = ۱۲$ و $f_y(۳,-۱) = -۱۲$ ، بنابراین، معادلهٔ صفحهٔ مورد نظر عبارت است از

$$\begin{aligned} z &= f(۳,-۱) + f_x(-۱,۰)(x-۳) + f_y(-۱,۰)(y+۱) \\ &= ۳۶ + ۱۲(x-۳) - ۱۲(y+۱) \end{aligned}$$

یا $۱۲x - ۱۲y - z = ۱۲$.

۹. فرض می‌کنیم $F(x, y, z) = x^۲ + y^۲ + z^۲ - ۱$. در این صورت $F_x(x, y, z) = ۲x$ ، $F_y(x, y, z) = ۲y$ ، $F_z(x, y, z) = ۲z$ و در نتیجه

$$F_x\left(\frac{۱}{۲}, -\frac{۱}{۲}, -\frac{۱}{\sqrt{۲}}\right) = ۱ ، \quad F_y\left(\frac{۱}{۲}, -\frac{۱}{۲}, -\frac{۱}{\sqrt{۲}}\right) = -۱ ، \quad F_z\left(\frac{۱}{۲}, -\frac{۱}{۲}, -\frac{۱}{\sqrt{۲}}\right) = -\sqrt{۲}$$

بنابراین، معادلهٔ صفحه مماس بر این سطح در نقطهٔ P عبارت است از

$$۱\left(x - \frac{۱}{۲}\right) - ۱\left(y + \frac{۱}{۲}\right) - \sqrt{۲}\left(z + \frac{۱}{\sqrt{۲}}\right) = ۰$$

یا $x - y - \sqrt{۲}z = ۲$.

۱۰. در اینجا فرض می‌کنیم که $F(x, y, z) = xyz - ۲$.بنابراین، داریم

$F_x(x, y, z) = yz$ ، $F_y(x, y, z) = xz$ ، $F_z(x, y, z) = xy$ و در نتیجه

$$F_x(۱, -۲, -۱) = ۲ ، \quad F_y(۱, -۲, -۱) = -۱ ، \quad F_z(۱, -۲, -۱) = -۲$$

بنابراین، معادلهٔ صفحهٔ مماس بر سطح داده شده عبارت است از

$$۲(x-۱)-۱(y+۲)-۲(z+۱)=۰$$

یا $۲x-y-۲z=۶$.

۱۱. فرض می‌کنیم که $F(x,y,z)=ye^{xy}+z^{۲}$. بنابراین، داریم

$$F_x(x,y,z)=y^{۲}e^{xy}\text{، }F_y(x,y,z)=ye^{xy}+xye^{xy}\text{، }F_z(x,y,z)=۲z$$

در نتیجه

$$F_x(۰,-۱,۱)=۱\text{، }F_y(۰,-۱,۱)=۱\text{، }F_z(۰,-۱,۱)=۲$$

از این رو، معادلهٔ صفحهٔ مماس موردنظر عبارت است از

$$۱(x-۰)+۱(y+۱)+۲(z-۱)=۰$$

یا $x+y+۲z=۱$.

۱۲. فرض می‌کنیم $F(x,y,z)=\ln\sqrt{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}}$. چون

$$F_x(x,y,z)=\frac{x}{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}},F_y(x,y,z)=\frac{y}{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}},F_z(x,y,z)=\frac{z}{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}}$$

در نتیجه

$$F_x(۰,-۱,۰)=۰\text{، }F_y(۰,-۱,۰)=-۱\text{، }F_z(۰,-۱,۰)=۰$$

بنابراین، معادلهٔ صفحه مماس بر سطح داده شده در نقطهٔ P عبارت است از

$$۰(x-۰)-۱(y+۱)+۰(z-۰)=۰$$

یا $y=-۱$.

۱۳. فرض می‌کنیم که $F(x,y,z)=۴x^{۲}-y^{۲}+۳z^{۲}-۱۰$. چون

$$\nabla F(x,y,z)=F_x(x,y,z)\vec{i}+F_y(x,y,z)\vec{j}+F_z(x,y,z)\vec{k}$$
$$=۸x\vec{i}-۲y\vec{j}+۶z\vec{k}$$

یک بردار نرمال بر این سطح برابر است با

$$\nabla F(۲,-۳,۱)=۱۶\vec{j}+۶\vec{j}+۶\vec{k}$$

بنابراین، معادلات پارامتری خط نرمال بر این سطح در نقطهٔ P عبارت‌اند از

$$x = ۲ + ۱۶t \ , \ y = -۳ + ۶t \ , z = ۱ + ۶t$$

و معادلات دکارتی این خط عبارت‌اند از

$$\frac{x-۲}{۱۶} = \frac{y+۳}{۶} = \frac{z-۱}{۶}$$

۱۴. فرض می‌کنیم $F(x, y, z) = ۲e^{-x} \cos y - z$. چون

$$\nabla F(x, y, z) = F_x(x, y, z)\vec{i} + F_y(x, y, z)\vec{j} + F_z(x, y, z)\vec{k}$$
$$= -۲e^{-x} \cos y\, \vec{i} - ۲e^{-x} \sin y\, \vec{j} - \vec{k}$$

یک بردار قائم بر این سطح در نقطهٔ P برابر است با

$$\nabla(۰, \pi/۳, ۱) = \vec{i} - \sqrt{۳}\vec{j} - \vec{k}$$

بنابراین معادلات پارامتری خط قائم مورد نظر عبارت اند از

$$x = -t \quad , \quad y = \frac{t}{۳} - \sqrt{۳}t \quad , \quad z = ۱ - t$$

۱۵. فرض می‌کنیم که $F(x, y, z) = x^۲ - ۲y^۲ - ۴z^۲ - ۱۶$. می‌دانیم که بردار

$$\nabla F(x, y, z) = ۲x\vec{i} - ۴y\vec{j} - ۸z\vec{k}$$

برصفحهٔ مماس بر سطح درنقطهٔ تماس $P(x, y, z)$ قائم است. ازطرفی بردار $\vec{a} = ۴\vec{i} - ۲\vec{j} + ۴\vec{k}$ بر صفحهٔ $۴x - ۲y + ۴z = ۵$، و در نتیجه بر صفحهٔ مماس، عمود است. پس $\vec{a}$ با $\nabla F(x, y, z)$ موازی است. یعنی

$$۲x\vec{i} - ۴y\vec{j} - ۸z\vec{k} = \lambda(۴\vec{i} - ۲\vec{j} + ۴k)$$

یا $x = ۲\lambda$، $y = \frac{۱}{۲}\lambda$، $z = -\frac{۱}{۲}\lambda$. با قرار دادن این عبارتها به جای x، y و z در معادلهٔ سطح داده شده، به‌دست می‌آوریم

$$۴\lambda^۲ - ۲(\frac{\lambda^۲}{۴}) - ۴(\frac{\lambda^۲}{۴}) = ۱۶$$

در نتیجه $\lambda = \pm\frac{۴\sqrt{۲}}{\sqrt{۵}}$. بنابراین نقاط تماس مورد نظر عبارت‌اند از

$$(-\frac{۸\sqrt{۲}}{\sqrt{۵}}, -\frac{۲\sqrt{۲}}{\sqrt{۵}}, \frac{۲\sqrt{۲}}{\sqrt{۵}}), (\frac{۸\sqrt{۲}}{\sqrt{۵}}, \frac{۲\sqrt{۲}}{\sqrt{۵}}, -\frac{۲\sqrt{۲}}{\sqrt{۵}})$$

۱۶. فرض می‌کنیم $F(x, y, z)=۹-۴x^۲-y^۲-z$ و $P(x, y, z)$ یک نقطهٔ تماس مورد نظر باشد. پس

$$\nabla F(x, y, z) = -۸x\vec{i} - ۲y\vec{j} - k$$

یک بردار نرمال بر صفحهٔ مماس در نقطهٔ P است. از طرفی‌بردار $\vec{a} = ۴\vec{j} - \vec{k}$ بر صفحهٔ $۴y - z = ۰$، و در نتیجه بر صفحهٔ مماس، عمود است. بنابراین $\nabla F(x, y, z)$ با $\vec{a}$ موازی است یعنی

$$-۸x\vec{i} - ۲y\vec{j} - k - = \lambda(۴\vec{j} - \vec{k})$$

یا $x = ۰$ ، $y = -۲\lambda$ و $\lambda = ۱$. با قرار دادن این مقادیر در معادلهٔ سطح داده شده، نقطهٔ تماس موردنظر در $P(۰, -۲,۵)$ به‌دست می‌آید.

۱۷. فرض می‌کنیم که $F(x, y, z)=\sqrt{x^۲+y^۲} - z$ و $G(x, y, z) = ۲۵ + x^۲ + y^۲ - ۱۰z$. در نتیجه

$$\nabla F(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{x^۲+y^۲}}\vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^۲+y^۲}}\vec{j} - \vec{k}$$

$$\nabla G(x, y, z) = ۲x\vec{i} + ۲y\vec{j} - ۱۰\vec{k}$$

بنابراین، بردارهای نرمال بر این دو سطح در نقطهٔ مشترک $(۳,۴,۵)$ عبارت‌اند از

$$\nabla G(۳,۴,۵) = ۶\vec{i} + ۸\vec{j} - ۱۰\vec{k} \quad , \quad \nabla F(۳,۴,۵) = \frac{۳}{۵}\vec{i} + \frac{۴}{۵}\vec{j} - \vec{k}$$

این دو بردار موازی یکدیگرند، زیرا

$$\nabla G(۳, ۴, ۵) = ۱۰ \quad F(۳, ۴, ۵)$$

پس دو سطح داده شده یک صفحهٔ مماس مشترک در نقطهٔ $(۳, ۴, ۵)$ دارند.

۱۸. فرض می‌کنیم که $F(x, y, z) = xy - ۲ - z$ و $G(x, y, z) = x^۲ + y^۲ + z^۲ - ۳$. بنابراین

$$\nabla F(x, y, z) = y\vec{i} + x\vec{j} - ۲\vec{k}$$

$$\nabla G(x, y, z) = ۲x\vec{i} + ۲y\vec{j} + ۲z\vec{k}$$

در نتیجه، بردارهای نرمال براین دو سطح در نقطهٔ مشترک $(۱,۱,-۱)$ عبارت‌اند از

$$\nabla G(۱,۱,-۱) = ۲\vec{i} + ۲\vec{j} - ۲\vec{k} \quad \text{و} \quad \nabla F(۱,۱,-۱) = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$$

این دو بردار موازی یکدیگرند، زیرا

$$\nabla G(۱,۱,-۱) = ۲\nabla(۱,۱,-۱)$$

پس دو سطح داده شده یک صفحهٔ مماس مشترک در نقطهٔ $(۱,۱,-۱)$ دارند.

۱۹. فرض می‌کنیم $F(x,y,z) = x^۲ + y^۲ + z^۲ - ۱$. درنتیجه $\nabla F(x,y,z) = ۲x\vec{i} + ۲y\vec{j} + ۲z\vec{k}$.
بنابراین اگر $P(x_۰, y_۰, z_۰)$ نقطه‌ای بر سطح این کره باشد، آنگاه معادلات خط نرمال در P عبارت‌اند از

$$\frac{x-x_۰}{۲x_۰} = -\frac{y-y_۰}{۲y_۰} = \frac{z-z_۰}{۲z_۰}$$

روشن است که مرکز این کره یعنی نقطهٔ $(۰,۰,۰)$ در این معادلات صدق می‌کند. پس خط نرمال بر سطح کره در هر نقطه از مرکز آن می‌گذرد.

۲۰. فرض می‌کنیم $F(x,y,z) = x^۲ + y^۲ + z^۲$. چون $\nabla F(x,y,z) = ۲x\vec{i} + ۲y\vec{j} - ۲z\vec{k}$ ،
اگر $P(x_۰, y_۰, z_۰)$ نقطه‌ای بر سطح این مخروط باشد، آنگاه معادلات خط نرمال در P عبارت‌اند از

$$\frac{x-x_۰}{۲x_۰} = \frac{y-y_۰}{۲y_۰} = \frac{z-z_۰}{}$$

با قرار دادن $x = y = ۰$ در این معادلات، $z = ۲z_۰$ به دست می‌آید. پس این خط محور z را در نقطهٔ $(۰,۰,۲z_۰)$ قطع می‌کند.

تمرینهای ۸.۷

۱. مشتقهای نسبی f عبارت‌اند از

$$f_y(x,y) = ۴y + ۸ \quad ، \quad f_x(x,y) = ۲x - ۶$$

$$f_{xy}(x,y) = ۰ \quad ، \quad f_{yy}(x,y) = ۴ \quad ، \quad f_{xx}(x,y) = ۲$$

جواب دستگاه

$$f_x(x, y) = ۲x - ۶ = ۰$$
$$f_y(x, y) = ۴y + ۸ = ۰$$

برابر است با $(۳, -۲)$. چون

$$D(۳, -۲) = f_{xx}(۳, -۲)\, f_{yy}(۳, -۲) - [f_{xy}(۳, -۲)]^۲$$
$$= (۲)\,(۴) - ۰^۲ = ۸ > ۰$$

و $f_{xx}(۳, ۲) = ۲ > ۰$، f در $(۳, ۲)$ یک مینیمم نسبی برابر با

$$f(۳, ۲) = (۳)^۲ + ۲(-۲)^۲ - ۶(۳) + ۸\,(-۲) - ۱ = -۱۸$$

دارد.

۲. مشتقهای جزئی f را پیدا می‌کنیم.

$$f_x(x, y) = ۲x + ۶y - ۶ \quad ، \quad f_y(x, y) = ۶x + ۴y + ۱۰$$
$$f_{xx}(x, y) = ۲ \quad ، \quad f_{yy}(x, y) = ۴ \quad ، \quad f_{xy}(x, y) = ۶$$

جواب دستگاه

$$f_x(x, y) = ۲x + ۶y - ۶ = ۰$$
$$f_y(x, y) = ۶x + ۴y + ۱۰ = ۰$$

برابر است با $(-۳, ۲)$. چون

$$D(-۳, ۲) = f_{xx}(-۳, ۲) f_{yy}(-۳, ۲)\ [f_{xy}(-۳, ۲)]^۲$$
$$= (۲)\,(۴) - (۶)^۲ = -۲۸ < ۰$$

f در $(-۳, ۲)$ یک نقطهٔ زین اسبی دارد.

۳. مشتقهای جزئی g عبارت‌اند از

$$g_x(x, y) = ۲x + ۲y - ۶ \quad ، \quad g_y(x, y) = ۲x + ۴y + ۱۰$$
$$g_{xx}(x, y) = ۲ \quad ، \quad g_{yy}(x, y) = ۴ \quad ، \quad g_{xy}(x, y) = ۲$$

جواب دستگاه

$$g_x(x, y) = ۲x + ۲y - ۶ = ۰$$
$$g_y(x, y) = ۲x + ۴y + ۱۰ = ۰$$

برابر است با $(۱۱, -۸)$. چون

$$D(۱۱, -۸) = g_{xx}(۱۱, -۸)g_{yy}(۱۱, -۱) - [g_{xy}(۱۱, -۸)]^۲$$
$$= (۲)(۴) - (۲)^۲ = ۴ > ۰$$

و $g_{xx}(۱۱, -۸) = ۲ > ۰$، g در $(۱۱, -۸)$ یک مینیمم نسبی برابر با

$$f(۱۱, -۸) = (۱۱)^۲ + ۲(۱۱)(-۸) + ۲(-۸)^۲ - ۶(۱۱) + ۱۰(-۸) - ۵ = -۷۸$$

دارد.

۴. مشتقهای جزئی g عبارت‌اند از

$$g_x(x, y) = ۲xy - ۲y \quad ، \quad g_y(x, y) = x^۲ - ۲x + ۴y - ۱۵$$
$$g_{xx}(x, y) = ۲y \quad ، \quad g_{yy}(x, y) = ۴ \quad ، \quad g_{xy}(x, y) = ۲x - ۲$$

دستگاه معادلات

$$۲xy - ۲y = ۰$$
$$x^۲ - ۲x + ۴y - ۱۵ = ۰$$

را حل می‌کنیم. معادلهٔ اول نتیجه می‌دهد که $y = ۰$ یا $x = ۱$. با قرار دادن $y = ۰$ در معادلهٔ دوم، معادلهٔ $x^۲ - ۲x - ۱۵ = ۰$ به دست می‌آید که جوابهای آن $x = ۵$ و $x = -۳$ هستند. در نتیجه $(۵, ۰)$ و $(-۳, ۰)$ دو جواب دستگاه بالا هستند. با قرار دادن $x = ۱$ در معادلهٔ دوم، $y = ۴$ به دست می‌آید. پس $(۱, ۴)$ نیز یک جواب این دستگاه است. چون

$$D(۵, ۰) = g_{xx}(۵, ۰)g_{yy}(۵, ۰) - [g_{xy}(۵, ۰)]^۲$$
$$= (۰)(۴) - (۱۰ - ۲)^۲ = -۶۴ < ۰$$

g در $(۵, ۰)$ یک نقطهٔ زین اسبی دارد. همچنین، داریم

$$D(-۳, ۰) = g_{xx}(-۳, ۰)g_{yy}(-۳, ۰) - [g_{xy}(-۳, ۰)]^۲$$
$$= (۰)(۴) - (-۶ - ۲)^۲ = -۶۴ < ۰$$

در نتیجه g در $(-۳, ۰)$ نیز یک نقطهٔ زین اسبی دارد. در پایان، چون

$$D(۱, ۴) = g_{xx}(۱, ۴)g_{yy}(۱, ۴) - [g_{xy}(۱, ۴)]^۲$$
$$= (۸)(۴) - (۲\text{-}۲)^۲ = ۳۲ > ۰$$

و $g_{xx}(۱, ۴) = ۸ > ۰$، g در $(۱, ۴)$ یک مینیمم نسبی دارد.

۵. مشتقهای جزئی f عبارت هستند از

$$f_y(x, y) = -۶xy + ۳y^۲ + ۶y \quad , \quad f_x(x, y) = ۶x - ۳y^۲$$
$$f_{xy}(x, y) = -۶y \quad , \quad f_{yy}(x, y) = -۶x + ۶y + ۶ \quad , \quad f_{xx}(x, y) = ۶$$

نقاط بحرانی f، جوابهای دستگاه

$$f_x(x, y) = ۶x - ۳y^۲ = ۰$$
$$f_y(x, y) = -۶xy + ۳y^۲ + ۶y = ۰$$

هستند. معادلهٔ اول نتیجه می‌دهد که $x = \frac{y^۲}{۲}$. با قرار دادن این عبارت به جای x در معادلهٔ دوم، داریم

$$-۳y(y^۲ - y - ۲) = ۰ \quad \text{یا} \quad -۳y^۳ + ۳y^۲ + ۶y = ۰$$

جوابهای معادلهٔ اخیر عبارت‌اند از $y = ۰$، $y = ۲$ و $y = -۱$. با قرار دادن این مقادیر به جای y در $x + \frac{y^۲}{۲}$، نقاط بحرانی f در $(۰, ۰)$، $(۲, ۲)$ و $(\frac{۱}{۲}, -۱)$ به دست می‌آیند. چون

$$D(۰, ۰) = f_{xx}(۰, ۰)f_{yy}(۰, ۰) - [f_{xy}(۰, ۰)]^۲$$
$$= (۶)(۶) - (۰)^۲ = ۳۶ > ۰$$

و $f_{xx}(۰, ۰) = ۶ > ۰$، f در $(۰, ۰)$ یک مینیمم نسبی دارد. ازآنجا که

$$D(۲, ۲) = f_{xx}(۲, ۲)f_{yy}(۲, ۲) - [f_{xy}(۲, ۲)]^۲$$
$$= (۶)(۶) - (-۱۲)^۲ = -۱۰۸ < ۰$$
$$D(\tfrac{۱}{۲}, -۱) = f_{xx}(\tfrac{۱}{۲}, -۱)f_{yy}(\tfrac{۱}{۲}, -۱) - [f_{xy}(\tfrac{۱}{۲}, -۱)]^۲$$
$$= (۶)(-۳) - (۶)^۲ = -۵۴ < ۰$$

f در $(2, 2)$ و $(-1, \frac{1}{2})$ نقاط زین اسبی دارد.

۶. مشتقهای جزئی f عبارت‌اند از

$$f_x(x, y) = \frac{y}{(x+y)^2} \quad , \quad f_y(x, y) = \frac{-x}{(x+y)^2}$$

$$f_{yy}(x, y) = \frac{-2x}{(x+y)^3} \quad , \quad f_{xy}(x, y) = \frac{x-y}{(x+y)^3}$$

$$f_{xx}(x, y) = \frac{-2y}{(x+y)^3}$$

دستگاه

$$f_x(x, y) = -\frac{y}{(x+y)^2} = 0$$

$$f_y(x, y) = \frac{-x}{(x+y)^2} = 0$$

جوابی ندارد. پس f ماکسیمم نسبی، مینیمم نسبی یا نقطهٔ زین اسبی ندارد.

۷. داریم

$$f_x(x, y) = 4y + 4xy - y^2 \quad , \quad f_y(x, y) = 4x + 2x^2 - 2xy$$

$$f_{yy}(x, y) = -2x \quad , \quad f_{xy}(x, y) = 4 + 4x - 2y$$

$$f_{xx}(x, y) = 4y$$

برای پیدا کردن نقاط بحرانی f، دستگاه

$$\begin{cases} 4y + 4xy - y^2 = 0 \\ 4x + 2x^2 - 2xy = 0 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} y(4 + 4x - y) = 0 \\ 2x(2 + x - y) = 0 \end{cases}$$

را حل می‌کنیم. زوج (x, y) یک جواب این دستگاه است اگر و تنها اگر جواب یکی از چهار دستگاه

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ 2 + x - y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4 + 4x - y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4 + 4x - y = 0 \\ 2 + x - y = 0 \end{cases}$$

باشد. این جوابها عبارت‌اند از $(0, 0)$، $(-2, 0)$، $(0, 4)$ و $(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$. چون

$$D(-\tfrac{۲}{۳}, \tfrac{۴}{۳}) = f_{xx}(-\tfrac{۲}{۳}, \tfrac{۴}{۳}) f_{yy}(-\tfrac{۲}{۳}, \tfrac{۴}{۳}) - [f_{xy}(-\tfrac{۲}{۳}, \tfrac{۴}{۳})]^۲$$
$$= (\tfrac{۱۶}{۳})(\tfrac{۴}{۳})(-\tfrac{۴}{۳})^۲ = \tfrac{۴۸}{۹} > ۰$$

و $۰ < \frac{۱۶}{۳} = f_{xx}(-\frac{۲}{۳}, \frac{۴}{۳})$، f در $(-\frac{۲}{۳}, \frac{۴}{۳})$ یک مینیمم نسبی دارد. چون

$D(۰,۰) = -۱۶ < ۰$ ، $D(-۲,۰) = -۱۶ < ۰$ ، $D(۰,۴) = -۱۶ < ۰$، f در $(۰,۰)$، $(-۲,۰)$، $(۰,۴)$ سه نقطهٔ زین اسبی دارد.

۸. مشتقهای جزئی f عبارت‌اند از

$$f_x(x, y) = -۴x^۳ \quad ، \quad f_y(x, y) = -۹y^۲$$
$$f_{xx}(x, y) = -۱۲x^۲ \quad ، \quad f_{yy}(x, y) = -۱۸y \quad ، \quad f_{xy}(x, y) = ۰$$

تنها جواب دستگاه

$$f_x(x,y) = -۴x^۳ = ۰$$
$$f_y(x,y) = -۹y^۲ = ۰$$

برابر است با $(۰,۰)$. چون

$$D(۰,۰) = f_{xx}(۰,۰) f_{yy}(۰,۰) - [f_{xy}(۰,۰)]^۲ = ۰$$

پس آزمون مشتق دوم به‌کار نمی‌آید. ولی چون

اگر $y < ۰$، $f(۰,y) = ۱ - ۳y^۳ > f(۰,۰) = ۱$

اگر $y > ۰$، $f(۰,y) = ۱ - ۳y^۳ < f(۰,۰) = ۱$

پس f در $(۰,۰)$ ماکسیمم نسبی یا مینیمم نسبی ندارد. یعنی f در $(۰,۰)$ یک نقطهٔ زین اسبی دارد.

۹. مشتقهای جزئی g عبارت‌اند از

$$g_x(x, y) = e^x \sin y \quad ، \quad g_y(x, y) = e^x \cos y$$
$$g_{xx}(x, y) = e^x \sin y \quad ، \quad g_{yy}(x, y) = -e^x \sin y \quad ، \quad g_{xy} = e^x \cos y$$

دستگاه

$$g_x(x, y) = e^x \sin y = ۰ \qquad \sin y = ۰$$
یا
$$g_y(x, y) = e^x \cos y = ۰ \qquad \cos y = ۰$$

جوابی ندارد. بنابراین g دارای ماکسیمم نسبی، مینیمم نسبی یا نقطهٔ زین اسبی نیست.

۱۰. مشتقهای جزئی f را پیدا می‌کنیم:

$$f_v(u,v) = ue^{uv} \quad ، \quad f_u(u,v) = ve^{uv}$$
$$f_{uv}(u,v) = e^{uv} + uve^{uv} \quad ، \quad f_{vv}(u,v) = u^۲e^{uv} \quad ، \quad f_{uu}(u,v) = v^۲e^{uv}$$

تنها جواب دستگاه

$$ve^{uv} = ۰$$
$$ue^{uv} = ۰$$

برابر با $(۰, ۰)$ است. چون

$$D(۰,۰) = f_{uu}(۰,۰)f_{vv}(۰,۰) - [f_{uv}(۰,۰)]^۲$$
$$= (۰)(۰) - (۱)^۲ = -۱ < ۰$$

f در $(۰, ۰)$ یک نقطهٔ زین اسبی دارد.

۱۱. مشتقهای جزئی این تابع عبارت‌اند از

$$f_y(x,y) = \frac{xy^۲ - ۸}{y^۲} \quad ، \quad f_x(x,y) = \frac{x^۲y - ۴}{x^۲}$$
$$f_{xy}(c,y) = ۱ \quad ، \quad f_{yy}(x,y) = \frac{-۱۶}{y^۳} \quad ، \quad f_{xx}(x,y) = \frac{۸}{x^۳}$$

دستگاه $f_x(x,y) = ۰$ ، $f_y(x,y) = ۰$ یعنی

$$x^۲y - ۴ = ۰$$
$$xy^۲ - ۸ = ۰$$

را حل می‌کنیم. معادلهٔ اول نتیجه می‌دهد که $y = \frac{۴}{x^۲}$. با قرار دادن این عبارت به جای y در معادلهٔ دوم، معادلهٔ

$$x^۳ = ۲ \quad \text{یا} \quad x\left(\frac{۱۶}{x^۴}\right) = ۸$$

به دست می‌آید. پس جواب دستگاه بالا زوج $(\sqrt[۳]{۲}, ۲\sqrt[۳]{۲})$ است. چون

$$D(\sqrt[۳]{۲}, ۲\sqrt[۳]{۲}) = f_{xx}(\sqrt[۳]{۲}, ۲\sqrt[۳]{۲})\, f_{yy}(\sqrt[۳]{۲}, ۲\sqrt[۳]{۲}) - [f_{xy}(\sqrt[۳]{۲}, ۲\sqrt[۳]{۲})]^۲$$
$$= (-۴)(-۱) - (۱)^۲ = ۳ > ۰$$

و $f_{xx}(\sqrt[۳]{۲}, ۲\sqrt[۳]{۲}) = ۴ > ۰$ ، f در $(\sqrt[۳]{۲}, ۲\sqrt[۳]{۲})$ یک مینیمم نسبی دارد.

۱۲. مشتقهای جزئی f عبارت‌اند از

$$f_y(x, y) = \cos y \quad ، \quad f_x(x, y) = \cos x$$
$$f_{xy}(x, y) = ۰ \quad ، \quad f_{yy}(x, y) = -\sin y \quad ، \quad f_{xx}(x, y) = -\sin x$$

تنها جواب دستگاه

$$f_x(x, y) = \cos x = ۰$$
$$f_y(x, y) = \cos y = ۰$$

در بازه‌های داده شده عبارت است از $(\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲})$. چون

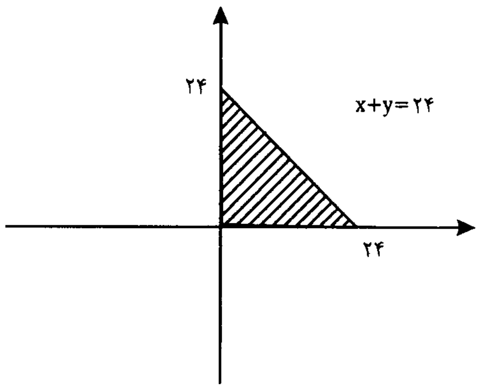
$$D(\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}) = f_{xx}(\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲})f_{yy}(\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲})-[f_{xy}(\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲})]^۲$$
$$= (-۱)(-۱)-(۰)^۲ = ۱>۰$$

و $f_{xx}(\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}) = -۱<۰$ ، f در $(\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲})$ ماکسیمم نسبی دارد.

۱۳. می‌خواهیم سه عدد x، y و z را پیدا کنیم به طوری که $x + y + z = ۲۴$ و $P = xyz$ ماکسیمم باشد. چون این سه عدد مثبت هستند، $z = ۲۴-x-y>۰$ و در نتیجه $x + y<۲۴$. بنابراین، باید ماکسیمم (مطلق) تابع

$$f(x, y) = xy(۲۴-x-y) = ۲۴xy-x^۲y-xy^۲$$

را به ازای (x, y) در ناحیهٔ مثلثی زیر پیدا کنیم:



چون مقدار f روی اضلاع این مثلث برابر با صفر است، ماکسیمم (**مطلق**) f در یک نقطهٔ بحرانی در درون این ناحیهٔ مثلثی رخ می‌دهد. برای پیدا کردن نقاط بحرانی f ، جوابهای دستگاه

$$f_x(x, y) = ۲۴y - ۲xy - y^۲ = ۰ \qquad y(۲۴ - ۲x - y) = ۰$$
یا
$$f_y(x, y) = ۲۴x - x^۲ - ۲xy = ۰ \qquad x(۲۴ - x - ۲y) = ۰$$

را به دست می‌آوریم. چون نقطهٔ بحرانی مورد نظر باید در درون مثلث بالا باشد، پس $x \neq ۰$، $y \neq ۰$. از این رو، دستگاه

$$۲۴ - ۲x - y = ۰$$
$$۲۴ - x - ۲y = ۰$$

را حل می‌کنیم. جواب این دستگاه برابر با $(۸, ۸)$ است. در نتیجه، سه عدد مورد نظر برابرند با $x = ۸$، $y = ۸$ و $z = ۲۴ - ۸ - ۸ = ۸$.

۱۴. می‌خواهیم سه عدد x، y، z را پیدا کنیم به طوری که $xyz = ۲۴$ و $s = x + y + z$ مینیمم باشد. چون $z = \frac{۲۴}{xy}$ تابع

$$f(x, y) = x + y + \frac{۲۴}{xy}$$

را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم مقدار مینیمم مطلق f را روی دامنهٔ آن یعنی

$$\{(x, y) \mid ۰ < x < \infty, \quad ۰ < y < \infty\}$$

پیدا کنیم. چون اگر مقادیر x یا y نزدیک به ۰ یا بسیار بزرگ باشند، مقدار f بسیار بزرگ می‌شود، پس مینیمم مطلق f در یک نقطهٔ بحرانی آن رخ می‌دهد. برای پیدا کردن نقاط بحرانی f، دستگاه

$$f_x(x, y) = ۱ - \frac{۲۴}{x^۲y} = ۰ \qquad x^۲y - ۲۴ = ۰$$
یا
$$f_y(x, y) = ۱ - \frac{۲۴}{xy^۲} = ۰ \qquad xy^۲ - ۲۴ = ۰$$

را حل می‌کنیم. تنها جواب این دستگاه $(۲\sqrt[۳]{۳}, ۲\sqrt[۳]{۳})$ است. پس سه عدد مورد نظر عبارت‌اند از $x = ۲\sqrt[۳]{۳}$، $y = ۲\sqrt[۳]{۳}$ و

$$z = \frac{۲۴}{(۲\sqrt[۳]{۳})(۲\sqrt[۳]{۳})} = ۲\sqrt[۳]{۳}$$

۱۵. فرض کنیم ابعاد این مکعب مستطیل x، y و z باشند، داریم

$$\text{مساحت کل} = ۲z(x + y) + ۲xy = ۴۸$$

می‌خواهیم سه عدد مثبت x، y و z را پیدا کنیم که در معادلهٔ بالا صدق کنند، و $V = xyz$ ماکسیمم باشد. چون $z = \dfrac{۲۴-xy}{x+y}$، تابع

$$f(x, y) = xy\,\frac{۲۴-xy}{x+y} = \frac{۲۴xy-x^{۲}y^{۲}}{x+y}$$

را در نظر می‌گیریم. با بحثی مشابه قبل، نتیجه می‌گیریم که ماکسیمم مطلق f در یک نقطهٔ بحرانی آن رخ می‌دهد. برای پیدا کردن نقاط بحرانی f، مشتقهای جزئی مرتبه اول f را پیدا می‌کنیم. داریم

$$f_x(x, y) = \frac{(۲۴y-۲xy^{۲})(x+y)-(۲۴xy-x^{۲}y^{۲})}{(x+y)^{۲}} = \frac{y^{۲}(۲۴-x^{۲}-۲xy)}{(x+y)^{۲}}$$

$$f_y(x, y) = \frac{(۲۴x-۲x^{۲}y)(x+y)-(۲۴xy-x^{۲}y^{۲})}{(x+y)^{۲}} = \frac{x^{۲}(۲۴-۲xy-y^{۲})}{(x+y)^{۲}}$$

دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی

$$y^{۲}(۲۴-x^{۲}-۲xy) = ۰$$
$$x^{۲}(۲۴-۲xy-y^{۲}) = ۰$$

را حل می‌کنیم. چون $x \neq ۰$ و $y \neq ۰$، دستگاه

$$۲۴-x^{۲}-۲xy = ۰$$
$$۲۴-y^{۲}-۲xy = ۰$$

را حل می‌کنیم. معادلهٔ اول نتیجه می‌دهد که $y = \dfrac{۲۴-x^{۲}}{۲x}$. با قرار دادن این عبارت به جای y در معادلهٔ دوم و پس از ساده کردن، معادلهٔ $۴x^{۴}-(۲۴-x^{۲})^{۲} = ۰$ به دست می‌آید. جواب مثبت این معادله، $x = ۲\sqrt{۲}$ است. پس نقطهٔ بحرانی مورد نظر $(۲\sqrt{۲}, ۲\sqrt{۲})$ است. بنابراین ابعاد این مکعب مستطیل عبارت‌اند از $x = ۲\sqrt{۲}$، $y = ۲\sqrt{۲}$ و

$$z = \frac{۲۴-(۲\sqrt{۲})(۲\sqrt{۲})}{۲\sqrt{۲}+۲\sqrt{۲}} = ۲\sqrt{۲}$$

حجم این مکعب مستطیل برابر است با $V = (۲\sqrt{۲})^{۳} = ۳۲\sqrt{۲}$ واحد حجم.

۱۶. می‌خواهیم نقطه‌ای را چون $(x,\ y,\ z)$ پیدا کنیم به طوری که $x + y + z = ۲۴$، و فاصله‌اش از مبدأ، یعنی

$$d=\sqrt{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}}$$

مینیمم باشد. چون $z = ۲۴-x-y$، تابع

$$f(x,y)=\sqrt{x^{۲}+y^{۲}+(۲۴-x-y)^{۲}}$$

را در نظر می‌گیریم. مینیمم f در یک نقطهٔ بحرانی آن رخ می‌دهد. برای پیدا کردن نقاط بحرانی f، مشتقهای جزئی مرتبه اول آن را پیدا می‌کنیم. داریم

$$f_x(x,y)=\frac{۲x-۲(۲۴-x-y)}{۲\sqrt{x^{۲}+y^{۲}+(۲۴-x-y)^{۲}}}=\frac{۲x+y-۲۴}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}+(۲۴-x-y)^{۲}}}$$

$$f_x(x,y)=\frac{۲y-۲(۲۴-x-y)}{۲\sqrt{x^{۲}+y^{۲}+(۲۴-x-y)^{۲}}}=\frac{۲y+x-۲۴}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}+(۲۴-x-y)^{۲}}}$$

جواب دستگاه

$$۲x + y-۲۴ = ۰$$

$$۲y + x-۲۴ = ۰$$

برابر با $(۸\ ,\ ۸)$ است. در نتیجه مختصات نقطه موردنظر عبارت‌اند از

$x = ۸$، $y = ۸$ و $z = ۲۴-۸-۸ = ۸$

۱۷. می‌خواهیم بردار $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ را پیدا کنیم به‌طوری که $|\ \vec{a}\ | = \sqrt{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}} = ۲۰$ یا $x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} = ۴۰۰$ و $s = x + y + z$ ماکسیمم باشد. چون s باید ماکسیمم باشد، پس x و y و z مثبت هستند. در نتیجه،

$$x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=۴۰۰ \Rightarrow z=\sqrt{۴۰۰-x^{۲}-y^{۲}}$$

تابع f را به صورت

$$f(x,y)=x+y+\sqrt{400-x^2-y^2}$$

تعریف می‌کنیم. ماکسیمم f در یک نقطهٔ بحرانی آن رخ می‌دهد. برای پیدا کردن نقاط بحرانی f، مشتقهای جزئی آن را پیدا می‌کنیم. داریم

$$f_x(x,y)=1-\frac{x}{\sqrt{400-x^2-y^2}}=\frac{\sqrt{400-x^2-y^2}-x}{\sqrt{400-x^2-y^2}}$$

$$f_y(x,y)=1-\frac{y}{\sqrt{400-x^2-y^2}}=\frac{\sqrt{400-x^2-y^2}-y}{\sqrt{400-x^2-y^2}}$$

دستگاه

$$\begin{aligned}\sqrt{400-x^2-y^2}-x&=0\\ \sqrt{400-x^2-y^2}-y&=0\end{aligned} \qquad \text{یا} \qquad \begin{aligned}\sqrt{400-x^2-y^2}&=x\\ \sqrt{400-x^2-y^2}&=y\end{aligned}$$

را حل می‌کنیم. این دستگاه معادل است با

$$\begin{aligned}2x^2+y^2&=400\\ x^2+2y^2&=400\end{aligned}$$

با قرار دادن $y^2=400-2x^2$ از معادلهٔ اول در معادلهٔ دوم، داریم

$$x^2+800-4x^2=400 \qquad \text{یا} \qquad 3x^2=400$$

در نتیجه $x=20\frac{\sqrt{3}}{3}$ ، $y=20\frac{\sqrt{3}}{3}$ جواب مثبت دستگاه بالا است.

بنابراین مؤلفه‌های بردار مورد نظر عبارت‌اند از $x=20\frac{\sqrt{3}}{3}$ ، $y=20\frac{\sqrt{3}}{3}$ و

$$z=\sqrt{400-\frac{400}{3}-\frac{400}{3}}=20\sqrt{3}/3$$

۱۸. روشن است که چون $f_{xx}(x_0,y_0)>0$ و $f_{yy}(x_0,y_0)<0$ ،

$$D(x_0,y_0)=f_{xx}(x_0,y_0)\,f_{yy}(x_0,y_0)-\left[f_{xy}(x_0,y_0)\right]^2<0$$

و در نتیجه f در $(x_{\circ}, y_{\circ})$ یک نقطهٔ زین اسبی دارد.

۱۹. فرض کنیم $Q(x, y, z)$ نقطه‌ای بر صفحهٔ داده شده باشد. فاصلهٔ P از Q برابر است با

$$PQ=\sqrt{(x-۱)^{۲}+(y-۱)^{۲}+(z-۱)^{۲}}=\sqrt{(x-۱)^{۲}+(y-۱)^{۲}+(۴-۴x+۳y)^{۲}}$$

روشن است که اگر تابع f با تعریف

$$f(x, y) = (x-۱)^{۲} + (y-۱)^{۲} + (۴-۴x + ۳y)^{۲}$$

در نقطه‌ای چون Q مینیمم داشته باشد، PQ نیز مینیمم است. جواب دستگاه معادلات

$$\begin{aligned} f_x &= ۲(x-۱)-۸(۴-۴x + ۳y) = \circ \\ f_y &= ۲(y-۱)+۶(۴-۴x + ۳y) = \circ \end{aligned}$$

برابر با $(\frac{۱۷}{۱۶}, \frac{۱۹}{۱۳})$ است. در نتیجه

$$z = ۵-۴(\frac{۱۹}{۱۳}) + ۳(\frac{۱۷}{۲۶}) = \frac{۲۹}{۲۶}$$

به آسانی دیده می‌شود که f در نقطهٔ $(\frac{۱۹}{۱۳}, \frac{۱۷}{۱۶}, \frac{۲۹}{۲۶})$ مینیمم است. بنابراین، کوتاهترین فاصلهٔ P از صفحهٔ داده شده برابر است با

$$PQ=\sqrt{\left(\frac{۱۹}{۳}-۱\right)^{۲}+\left(\frac{۱۷}{۲۶}-۱\right)^{۲}+\left(\frac{۲۹}{۲۶}-۱\right)^{۲}}=\frac{۳}{\sqrt{۲۶}}$$

توجه کنید که این تمرین با استفاده از فرمول فاصلهٔ یک نقطه از صفحه آسانتر حل می‌شود:

$$d=\frac{|۴(۱)-۳(۱)+۱-۵|}{\sqrt{۱۶+۹+۱}}=\frac{۳}{\sqrt{۲۶}}$$

ولی روش بالا در تمرین زیر نیز به کار می‌آید.

۲۰. فرض کنیم نقطهٔ $Q(x, y, z)$ بر نمودار $xy^{۳}z^{۲} = ۱۶$ واقع است. چون $z^{۲} = \frac{۱۶}{xy^{۳}}$،

$$OQ=\sqrt{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}}=\sqrt{x^{۲}+y^{۲}+\frac{۱۶}{xy^{۳}}}$$

مانند تمرین قبل، برای سادگی محاسبات، نقطه‌ای چون (x, y) را پیدا می‌کنیم که مقدار تابع f باتعریف

$$f(x, y) = x^{۲} + y^{۲} + \frac{۱۶}{xy^{۳}}$$

در آن مینیمم باشد. دستگاه معادلات

$$f_x = ۲x - \frac{۱۶}{x^{۲}y^{۳}} = ۰$$
$$f_y = ۲y - \frac{۴۸}{xy^{۴}} = ۰$$

را حل می‌کنیم. این دستگاه معادل است با

$$x^{۳}y^{۳} = ۸$$
$$xy^{۵} = ۲۴$$

معادلهٔ دوم نتیجه می‌دهد که $x = \frac{۲۴}{y^{۵}}$. با قرار دادن این عبارت در معادلهٔ اول، $y = \pm \sqrt[۴]{۱۲}$ به دست می‌آید. در نتیجه $x = \pm \frac{۲}{\sqrt[۴]{۱۲}}$ و $z = \pm \frac{۲}{\sqrt[۴]{۳}}$. چون

$$f\left[\pm\frac{۲}{\sqrt[۴]{۱۲}},\ \pm\sqrt[۴]{۱۲},\ \pm\frac{۲}{\sqrt[۴]{۳}}\right] = \left[\pm\frac{۲}{\sqrt[۴]{۱۲}}\right]^{۲} + \left(\pm\sqrt[۴]{۱۲}\right)^{۲} + \left[\pm\frac{۲}{\sqrt[۴]{۳}}\right]^{۲}$$
$$= \frac{۴}{\sqrt{۱۲}} + \sqrt{۱۲} + \frac{۴}{\sqrt{۳}}$$
$$= \frac{۲}{\sqrt{۳}} + ۲\sqrt{۳} + \frac{۴}{\sqrt{۳}} = ۴\sqrt{۳}$$

مختصات هشت نقطه از سطح داده شده که نزدیکترین نقاط تا مبدأ هستند عبارت‌اند از

$$z = \pm\frac{۲}{\sqrt[۴]{۳}} \text{ ، } y = \pm\sqrt[۴]{۱۲} \text{ ، } x = \pm\frac{۲}{\sqrt[۴]{۱۲}}$$

فاصلهٔ این نقاط از مبدأ برابر است با

$$OQ = \sqrt{۴\sqrt{۳}} = ۲\sqrt[۴]{۳}$$

تمرینهای ۹.۷

۱. تابع لاگرانژ F را به صورت

$$F(x, y, \lambda) = x + y^{۲} + \lambda(x^{۲} + y^{۲} - ۴)$$

تعریف می‌کنیم. دستگاه

$$F_x = ۱ + ۲\lambda x = ۰$$
$$F_y = ۲y + ۲\lambda y = ۰$$
$$F_\lambda = x^{۲} + y^{۲} - ۴ = ۰$$

را حل می‌کنیم. معادلهٔ دوم نتیجه می‌دهد که $y = ۰$ یا $\lambda = -۱$. اگر $y = ۰$، آنگاه معادلهٔ سوم نتیجه می‌دهد که $x = \pm ۲$ و اگر $\lambda = -۱$ را در معادلهٔ اول قرار دهیم، $x = \frac{۱}{۲}$ به دست می‌آید. با قرار دادن $x = \frac{۱}{۲}$، در معادلهٔ سوم $y = \pm\frac{\sqrt{۱۵}}{۲}$ به دست می‌آید. بنابر این، ماکسیمم و مینیمم f در $(۲, ۰)$، $(-۲, ۰)$، $(\frac{۱}{۲}, \frac{\sqrt{۱۵}}{۲})$ یا $(\frac{۱}{۲}, -\frac{\sqrt{۱۵}}{۲})$ رخ می‌دهد. چون

$$f(۲, ۰) = ۲ \text{ ، } f(-۲, ۰) = -۲ \text{ ، } f(\frac{۱}{۲}, \frac{\sqrt{۱۵}}{۲}) = f(\frac{۱}{۲}, -\frac{\sqrt{۱۵}}{۲}) = \frac{۱۷}{۴}$$

پس ماکسیمم و مینیمم f، به ترتیب برابرند با $\frac{۱۷}{۴}$ و -۲

۲. تابع لاگرانژ F را به صورت

$$F(x, y, \lambda) = x^{۳} + ۲y^{۳} + \lambda(x^{۲} + y^{۲} - ۱)$$

تعریف می‌کنیم. دستگاه معادلات

$$F_x = ۳x^{۲} + ۲\lambda x = ۰$$
$$F_y = ۶y^{۲} + ۲\lambda y = ۰$$
$$F_\lambda = x^{۲} + y^{۲} - ۱ = ۰$$

را حل می‌کنیم. معادلهٔ اول نتیجه می‌دهد که $x = ۰$ یا $\lambda = -\frac{۳}{۲}x$. اگر $x = ۰$ را در معادلهٔ سوم قرار دهیم، $y = \pm ۱$ به دست می‌آید. اگر $\lambda = -\frac{۳}{۲}x$ را در معادلهٔ دوم قرار دهیم، به دست می‌آوریم $۶y^{۲} - ۳xy = ۰$. پس $y = ۰$ یا $y = \frac{x}{۲}$. حال با استفاده از معادلهٔ سوم، داریم

$$y = ۰ \Rightarrow x = \pm ۱$$
$$y = \frac{x}{۲} \Rightarrow x \pm \frac{۲\sqrt{۵}}{۵} \Rightarrow y = \pm\frac{\sqrt{۵}}{۵}$$

بنابراین، ماکسیمم و مینیمم f در $(\circ,\ 1)$، $(\circ,\ -1)$، $(1,\ \circ)$، $(-1,\ \circ)$، $(\frac{\sqrt{5}}{5},\ \frac{2\sqrt{5}}{5})$، $(\frac{\sqrt{5}}{5},\ -2\frac{\sqrt{5}}{5})$، $(-\frac{\sqrt{5}}{5},\ 2\frac{\sqrt{5}}{5})$ یا $(-\frac{\sqrt{5}}{5},\ -2\frac{\sqrt{5}}{5})$ رخ می‌دهد. چون
$f(\circ,\ 1) = 2$، $f(\circ,\ -1) = -2$، $f(1,\ \circ) = 1$، $f(-1,\ \circ) = -1$،
$f(\frac{\sqrt{5}}{5},\ \frac{2\sqrt{5}}{5}) = 17\frac{\sqrt{5}}{25}$، $f(\frac{\sqrt{5}}{5},\ -2\frac{\sqrt{5}}{5}) = -\frac{3\sqrt{5}}{5}$، $f(-\frac{\sqrt{5}}{5},\ 2\frac{\sqrt{5}}{5}) = \frac{3\sqrt{5}}{5}$
$f(-\frac{\sqrt{5}}{5},\ -\frac{2\sqrt{5}}{5}) = -17\frac{\sqrt{5}}{25}$، ماکسیمم و مینیمم f به ترتیب برابرند با ۲ و ۲−.

۳. تابع لاگرانژ F را به صورت

$$F(x, y, \lambda) = xy + \lambda[(x + 1)^2 + y^2 - 1]$$

تعریف می‌کنیم. جوابهای دستگاه معادلات

$$\begin{aligned}
F_x &= y + 2\lambda(x + 1) = \circ \\
F_y &= x + 2\lambda y = \circ \\
F_\lambda &= (x + 1)^2 + y^2 - 1 = \circ
\end{aligned}$$

را به دست می‌آوریم. معادلات اول و دوم نتیجه می‌دهند که

$$\lambda = -\frac{y}{2(x + 1)} \quad \text{، } x \neq -1 \text{ اگر}$$
$$\lambda = -\frac{x}{2y} \quad \text{، } y \neq \circ \text{ اگر}$$

اگر $x = -1$ یا $y = \circ$، معادلهٔ سوم نتیجه می‌دهد که

$$\begin{aligned}
x &= -1 \Rightarrow y = \pm 1 \\
y &= \circ \Rightarrow x = \circ,\ x = -2
\end{aligned}$$

اگر $x \neq -1$ و $y \neq \circ$، آنگاه

$$\lambda = -\frac{y}{2(x + 1)} = -\frac{x}{2y} \Rightarrow y^2 = x(x + 1)$$

با قرار دادن این عبارت در معادلهٔ سوم، $x = \circ$ و $x = -\frac{3}{2}$ به دست می‌آید. پس

$$x = 0 \Rightarrow y = 0$$
$$x = -\frac{3}{2} \Rightarrow y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

بنابراین، ماکسیمم f در $(-1, 1)$، $(-1, -1)$، $(0, 0)$، $(-2, 0)$، $(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ یا $(-\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ رخ می‌دهد. چون

$f(-1, 1) = -1$، $f(-1, -1) = 1$، $f(0, 0) = 0$، $f(-2, 0) = 0$، $f(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{3\sqrt{3}}{4}$ و $f(-\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$، ماکسیمم و مینیمم f، به ترتیب، برابرند با $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ و $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

۴. تابع لاگرانژ F به صورت
$$F(x, y, z, \lambda) = xy + yz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 8)$$
تعریف می‌شود. جوابهای دستگاه

$$F_x = y + 2\lambda x = 0$$
$$F_y = x + z + 2\lambda y = 0$$
$$F_z = y + 2\lambda z = 0$$
$$F_\lambda = x^2 + y^2 + z^2 - 8 = 0$$

را به دست می‌آوریم. اگر $y = 0$، مقدار f صفر است. اگر $x = 0$ یا $z = 0$، معادلات اول و سوم نتیجه می‌دهند که $y = 0$ و مقدار f برابر با صفر است. فرض می‌کنیم $x \neq 0$، $y \neq 0$ و $z \neq 0$. در این صورت معادلات اول، دوم و سوم نتیجه می‌دهند که

$$\lambda = -\frac{y}{2x}، \lambda = -\frac{x+z}{2y} \text{ و } \lambda = -\frac{y}{2z}$$

بنابراین

$$-\frac{y}{2x} = -\frac{x+z}{2y} \Rightarrow y^2 = x(x+z)$$
$$-\frac{y}{2x} - \frac{y}{2z} \Rightarrow x = z$$

در نتیجه، $y^2 = x(x+z) = x(x+x) = 2x^2$. با قرار دادن این عبارتها در معادلهٔ چهارم، $x = \pm\sqrt{2}$ به دست می‌آید. بنابراین

$$x=\sqrt{۲}\Rightarrow y=\pm ۲ \quad , \quad z=\sqrt{۲}$$
$$x=-\sqrt{۲}\Rightarrow y=\pm ۲ \quad , \quad z=-\sqrt{۲}$$

مقدار f را در $(\sqrt{۲}, ۲, \sqrt{۲})$، $(\sqrt{۲}, -۲, \sqrt{۲})$، $(-\sqrt{۲}, ۲, -\sqrt{۲})$ و $(-\sqrt{۲}, -۲, -\sqrt{۲})$ به دست می‌آوریم. داریم

$$f(\sqrt{۲}, ۲, \sqrt{۲}) = (\sqrt{۲})\ (۲)+(۲)(\sqrt{۲}) = ۴\sqrt{۲}$$
$$f(\sqrt{۲}, -۲, \sqrt{۲}) = (\sqrt{۲})\ (-۲)+(-۲)(\sqrt{۲}) = -۴\sqrt{۲}$$
$$f(-\sqrt{۲}, ۲, -\sqrt{۲}) = -\sqrt{۲}(۲)+۲(-\sqrt{۲}) = -۴\sqrt{۲}$$
$$f(-\sqrt{۲}, -۲, -\sqrt{۲}) = -\sqrt{۲}(-۲)+(-۲)(-\sqrt{۲}) = ۴\sqrt{۲}$$

بنابراین ماکسیمم و مینیمم f، به ترتیب، برابرند با $۴\sqrt{۲}$ و $-۴\sqrt{۲}$.

۵. تابع لاگرانژ F را به صورت

$$F(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda(x^۲ + y^۲ + ۴z^۲-۶)$$

تعریف می‌کنیم. دستگاه معادلات

$$F_x = yz + ۲\lambda x = ۰$$
$$F_y = xz + ۲\lambda y = ۰$$
$$F_z = xy + ۸\lambda z = ۰$$
$$F_\lambda = x^۲ + y^۲ + ۴z^۲-۶ = ۰$$

را حل می‌کنیم. اگر $x = ۰$، $y = ۰$ یا $z = ۰$، آنگاه مقدار f صفر است. فرض کنیم $x\neq ۰$، $y\neq ۰$، $z\neq ۰$. در این صورت، سه معادلهٔ اول نتیجه می‌دهند که

$$\lambda = -\frac{xy}{۸z} \quad ، \quad \lambda = -\frac{xz}{۲y} \quad ، \quad \lambda = -\frac{yz}{۲x}$$

از مساوی قرار دادن این عبارتها، داریم

$$-\frac{yz}{۲x} = -\frac{xz}{۲y} \Rightarrow y^۲ = x^۲$$
$$-\frac{yz}{۲x} = -\frac{xy}{۸z} \Rightarrow z^۲ = \frac{x^۲}{۴}$$

با قرار دادن این عبارتها در معادلهٔ چهارم، به دست می‌آوریم

$$x^{۲}+x^{۲}+x^{۲}=۶ \Rightarrow x=\pm\sqrt{۲}$$

در نتیجه

$$x=\pm\sqrt{۲} \Rightarrow y=\pm\sqrt{۲},\ \ z=\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

چون

$$f\left(\sqrt{۲}, \sqrt{۲}, \frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)=f\left(\sqrt{۲}, -\sqrt{۲}, -\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)=\sqrt{۲}$$
$$f\left(-\sqrt{۲}, -\sqrt{۲}, \frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)=f\left(-\sqrt{۲}, \sqrt{۲}, -\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)=\sqrt{۲}$$
$$f\left(\sqrt{۲}, -\sqrt{۲}, \frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)=f\left(\sqrt{۲}, \sqrt{۲}, -\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)=-\sqrt{۲}$$
$$f\left(-\sqrt{۲}, \sqrt{۲}, \frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)=f\left(-\sqrt{۲}, -\sqrt{۲}, -\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)=-\sqrt{۲}$$

ماکسیمم و مینیمم f به ترتیب برابرند با $\sqrt{۲}$ و $-\sqrt{۲}$.

۶. فرض می‌کنیم

$$F(x, y, z, \lambda) = x^{۲} + ۲y^{۲} + z^{۲} + \lambda(x + y + z-۴)$$

دستگاه معادلات

$$F_x = ۲x + \lambda = ۰$$
$$F_y = ۴y + \lambda = ۰$$
$$F_z = ۲z + \lambda = ۰$$
$$F_\lambda = x + y + z-۴ = ۰$$

را حل می‌کنیم. سه معادلهٔ اول نتیجه می‌دهند که

$$z = -\frac{\lambda}{۲}\ ،\ y = -\frac{\lambda}{۴}\ ،\ x = -\frac{\lambda}{۲}$$

با قرار دادن این عبارتها در معادلهٔ چهارم، $\lambda = -\frac{۱۶}{۵}$ به دست می‌آید. در نتیجه $x = \frac{۸}{۵}$ ، $y = \frac{۴}{۵}$ و $z = \frac{۸}{۵}$. بنابراین، مقدار مینیمم f برابر است با

$$f(-\frac{8}{5}, -\frac{4}{5}, -\frac{8}{5}) = (\frac{8}{5})^2 + 2(\frac{4}{5})^2 + (\frac{8}{5})^2 = 6/4$$

۷. تابع لاگرانژ F را به صورت

$$F(x, y, z, \lambda) = x + 2y - 3z + \lambda(x^2 + 4y^2 - z)$$

تعریف می‌کنیم. دستگاه معادلات

$$\begin{aligned} F_x &= 1 + 2\lambda x = 0 \\ F_y &= 2 + 8\lambda y = 0 \\ F_z &= -3 - \lambda = 0 \\ F_\lambda &= x^2 + 4y^2 - z = 0 \end{aligned}$$

را حل می‌کنیم. معادلهٔ سوم نتیجه می‌دهد که $\lambda = -3$. اگر این مقدار λ را در معادلات اول و دوم قرار دهیم، $x = \frac{1}{6}$ و $y = \frac{1}{12}$ به دست می‌آید. معادلهٔ چهارم نتیجه می‌دهد که

$$z = (\frac{1}{6})^2 + 4(\frac{1}{12})^2 = \frac{1}{18}$$

بنابراین، مقدار مینیمم f برابر است با

$$f(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{18}) = \frac{1}{6} + 3(\frac{1}{12}) - 3(\frac{1}{18}) = \frac{1}{4}$$

۸. تابع لاگرانژ F را به صورت

$$F(x, y, z, \lambda) = x^4 + 8y^4 + 27z^4 + \lambda(x + y + z - \frac{11}{12})$$

تعریف می‌کنیم، دستگاه معادلات

$$\begin{aligned} F_x &= 4x^3 + \lambda = 0 \\ F_y &= 32y^3 + \lambda = 0 \\ F_z &= 108z^3 + \lambda = 0 \\ F_\lambda &= x + y + z - \frac{11}{12} = 0 \end{aligned}$$

را حل می‌کنیم. معادلات اول تا سوم نتیجه می‌دهند که

$$\lambda = -108z^3 \text{ ،} \quad \lambda = -32y^3 \text{ ،} \quad \lambda = -4x^3$$

از مساوی قرار دادن این عبارتها، داریم

$$-۴x^۳ = -۳۲y^۳ \Rightarrow x = ۲y$$
$$-۳۲y^۳ = -۱۰۸z^۳ \Rightarrow z = \frac{۲}{۳}y$$

با قرار دادن این عبارتها به جای xو zدر معادلهٔ چهارم، $y = \frac{۱}{۴}$به دست می‌آید. در نتیجه $x = \frac{۱}{۲}$، $y = \frac{۱}{۴}$ و $z = \frac{۱}{۶}$. بنابراین، مینیمم fبرابر است با

$$f(\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۶}) = (\frac{۱}{۲})^۴ + ۸(\frac{۱}{۴})^۴ + ۲۷(\frac{۱}{۶})^۴ = \frac{۱۱}{۹۶}$$

۹. داریم $xyz = ۲۴$.فرض می‌کنیم که $f(x, y, z) = x + y + z$ و $g(x, y, z) = xyz - ۲۴$. تابع لاگرانژ را به صورت

$$F(x, y, z, \lambda) = x + y + z + \lambda(xyz - ۲۴)$$

تعریف می‌کنیم. دستگاه معادلات

$$F_x = ۱ + \lambda yz = ۰$$
$$F_y = ۱ + \lambda xz = ۰$$
$$F_z = ۱ + \lambda xy = ۰$$
$$F_\lambda = xyz - ۲۴ = ۰$$

را حل می‌کنیم. روشن است که $x \neq ۰$، $y \neq ۰$و $z \neq ۰$، زیرا در غیر این صورت معادلهٔ چهارم نقض می‌شود. داریم

$$۱ + \lambda yz = ۱ + \lambda xz \Rightarrow x = y$$
$$۱ + \lambda xz = ۱ + \lambda xy \Rightarrow z = y$$

با قرار دادن این عبارتها در معادلهٔ چهارم، $y = ۲\sqrt[۳]{۳}$ به دست می‌آید. در نتیجه $x = y = z = ۲\sqrt[۳]{۳}$.

۱۰. داریم $x + y + z = ۲۴$.فرض می‌کنیم $f(x, y, z) = xyz$ و $g(x, y, z) = x + y + z - ۲۴$. تابع لاگرانژ F را به صورت

$$F(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda(x + y + z - ۲۴)$$

تعریف می‌کنیم. دستگاه معادلات

$$\begin{aligned} F_x &= yz + \lambda = ۰ \\ F_y &= xz + \lambda = ۰ \\ F_z &= xy + \lambda = ۰ \\ F_\lambda &= x + y + z - ۲۴ = ۰ \end{aligned}$$

را حل می‌کنیم. معادلات اول تا سوم نتیجه می‌دهند که

$$\lambda + yz = \lambda + xz \Rightarrow y = x$$
$$\lambda + yz = \lambda + xy \Rightarrow z = x$$

با قرار دادن این عبارتها در معادلهٔ چهارم، $x = ۸$ به دست می‌آید. در نتیجه $y = ۸$ و $z = ۸$.

۱۱. می‌خواهیم نقطه‌ای چون (x, y, z) را پیدا کنیم به طوری که $x + y + z = ۲۴$ و $d = \sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲}$ مینیمم باشد. برای سادگی محاسبات نقطه‌ای چون (x, y, z) را روی صفحهٔ داده شده پیدا می‌کنیم به طوری که مقدار

$$f(x, y, z) = x^۲ + y^۲ + z^۲$$

مینیمم باشد. روشن است که در این صورت d نیز مینیمم می‌شود. تابع لاگرانژ f را به صورت

$$F(x, y, z, \lambda) = x^۲ + y^۲ + z^۲ + \lambda(x + y + z - ۲۴)$$

تعریف می‌کنیم. دستگاه معادلات

$$\begin{aligned} F_x &= ۲x + \lambda = ۰ \\ F_y &= ۲y + \lambda = ۰ \\ F_z &= ۲z + \lambda = ۰ \\ F_\lambda &= x + y + z - ۲۴ = ۰ \end{aligned}$$

را حل می‌کنیم. سه معادلهٔ اول نتیجه می‌دهند که $x = y = z$. با قرار دادن این عبارتها به جای y و z در معادلهٔ چهارم به دست می‌آوریم $x = y = z = ۸$.

۱۲. می‌خواهیم برداری چون (x, y, z) پیدا کنیم به طوری که $\sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲} = ۲۰$ یا $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۴۰۰$ و $f(x, y, z) = x + y + z$ ماکسیمم باشد. تابع لاگرانژ F را به صورت

$$F(x, y, z, \lambda) = x + y + z + \lambda(x^۲ + y^۲ + z^۲ - ۴۰۰)$$

تعریف می‌کنیم. دستگاه معادلات

$$F_x = ۱ + ۲\lambda x = ۰$$
$$F_y = ۱ + ۲\lambda y = ۰$$
$$F_z = ۱ + ۲\lambda z = ۰$$
$$F_\lambda = x^۲ + y^۲ + z^۲ - ۴۰۰ = ۰$$

را حل می‌کنیم. چون $\lambda = ۰$ در معادلات صدق نمی‌کند، پس سه معادلهٔ اول نتیجه می‌دهند که

$$۱ + ۲\lambda x = ۱ + ۲\lambda y \Rightarrow x = y$$
$$۱ + ۲\lambda y = ۱ + ۲\lambda z \Rightarrow z = y$$

بنابراین، باتوجه به معادلهٔ چهارم، داریم

$$x^۲ + x^۲ + x^۲ - ۴۰۰ = ۰ \Rightarrow x = \pm ۲۰\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

و در نتیجه $y = z = \pm ۲۰\frac{\sqrt{۳}}{۳}$. چون مقدار ماکسیمم f موردنظر است، پس x، y و z مثبت هستند و $(۲۰\frac{\sqrt{۳}}{۳}, ۲۰\frac{\sqrt{۳}}{۳}, ۲۰\frac{\sqrt{۳}}{۳})$ بردار مورد نظر است.

۱۳. تابع f ماکسیمم و مینیمم خود را روی مرز ناحیهٔ داده شده، یعنی روی دایره $x^۲ + y^۲ = ۴$، یا در یک نقطهٔ بحرانی اختیار می‌کند. ابتدا، به روش مضرب لاگرانژ ماکسیمم و مینیمم احتمالی f را روی دایره $x^۲ + y^۲ = ۴$ پیدا می‌کنیم. تابع لاگرانژ را به صورت

$$F(x, y, \lambda) = ۲x^۲ + y^۲ + ۲y - ۳ + \lambda(x^۲ + y^۲ - ۴)$$

تعریف می‌کنیم. دستگاه معادلات

$$F_x = ۴x + ۲\lambda x = ۰$$
$$F_y = ۲y + ۲ + ۲\lambda y = ۰$$
$$F_\lambda = x^۲ + y^۲ - ۴ = ۰$$

را حل می‌کنیم. جوابهای این دستگاه عبارت‌اند از $(۲, ۰)$، $(-۲, ۰)$، $(۰, ۲)$، $(۰, -۲)$، $(\sqrt{۳}, ۱)$ و $(-\sqrt{۳}, ۱)$. برای پیدا کردن نقاط بحرانی f، دستگاه معادلات

$$f_x = ۴x = ۰$$
$$f_y = ۲y + ۲ = ۰$$

را حل می‌کنیم. پس تنها نقطهٔ بحرانی f در $(۰, -۱)$ است. در پایان، چون

$$f(۰, ۲) = ۵ \text{ ،} f(۰, -۲) = -۳ \text{ ،} f(۲, ۰) = ۵ = f(-۲, ۰)$$
$$f(\sqrt{۳}, ۱) = ۶ = f(-\sqrt{۳}, ۱) \text{ ،} f(۰, -۱) = -۴$$

پس ماکسیمم و مینیمم f، به ترتیب، برابرند با ۶ و ۴−.

۱۴. مانند تمرین ۱۳، ابتدا، به روش مضرب لاگرانژ، ماکسیمم و مینیمم احتمالی f را روی ناحیهٔ $۲x^۲ + y^۲ = ۴$ پیدا می‌کنیم. فرض می‌کنیم که

$$F(x, y, \lambda) = xy + \lambda(۲x^۲ + y^۲ - ۴)$$

دستگاه معادلات

$$F_x = y + ۴\lambda x = ۰$$
$$F_y = x + ۲\lambda y = ۰$$
$$F_\lambda = ۲x^۲ + y^۲ - ۴ = ۰$$

را حل می‌کنیم. اگر $x = ۰$ یا $y = ۰$، مقدار f برابر با ۰ است. فرض کنیم $x \neq ۰$ و $y \neq ۰$. در این صورت معادلات اول و دوم نتیجه می‌دهند که

$$\lambda = -\frac{x}{۲y} \text{ ،} \lambda = -\frac{y}{۴x}$$

از مساوی قرار دادن این عبارتها، داریم

$$-\frac{x}{۲y} = -\frac{y}{۴x} \Rightarrow y^۲ = ۲x^۲$$

با قرار دادن این عبارت در معادلهٔ سوم، $x = \pm ۱$ به دست می‌آید. در نتیجه $y = \pm\sqrt{۲}$. پس اگر f روی $۲x^۲ + y^۲ = ۴$ ماکسیمم یا مینیمم داشته باشد، این مقدار ماکسیمم یا مینیمم در $(۱, \sqrt{۲})$ ، $(-۱, \sqrt{۲})$ یا $(-۱, -\sqrt{۲})$ رخ می‌دهد.

برای پیدا کردن نقاط بحرانی f، دستگاه معادلات

$$f_x = y = ۰$$
$$f_y = x = ۰$$

را حل می‌کنیم. جواب این دستگاه $(\circ, \circ)$ است. در پایان، چون

$$f(۱, \sqrt{۲}) = f(-۱, -\sqrt{۲}) = \sqrt{۲}$$
$$f(-۱, \sqrt{۲}) = f(۱, -\sqrt{۲}) = -\sqrt{۲}, \quad f(\circ, \circ) = \circ$$

ماکسیمم و مینیمم f، به ترتیب، برابرند با $\sqrt{۲}$ و $-\sqrt{۲}$.

۱۵. می‌خواهیم مقدار مینیمم

$$d = \sqrt{(x-۱)^{۲} + (y-۱)^{۲} + (z-۱)^{۲}}$$

را تحت شرط $۴x - ۳y + z = ۵$ پیدا کنیم. برای سادگی محاسبات، فرض می‌کنیم

$$f(x, y, z) = (x-۱)^{۲} + (y-۱)^{۲} + (z-۱)^{۲}$$

تابع لاگرانژ F را به صورت

$$F(x, y, z, \lambda) = (x-۱)^{۲} + (y-۱)^{۲} + (z-۱)^{۲} + \lambda(۴x - ۳y + z - ۵)$$

تعریف می‌کنیم. دستگاه معادلات

$$F_x = ۲(x-۱) + ۴\lambda = \circ$$
$$F_y = ۲(y-۱) - ۳\lambda = \circ$$
$$F_z = ۲(z-۱) + \lambda = \circ$$
$$F_\lambda = ۴x - ۳y + z - ۵ = \circ$$

را حل می‌کنیم. تنها جواب این دستگاه معادلات $x = \frac{۱۹}{۱۳}$، $y = \frac{۱۷}{۲۶}$، $z = \frac{۲۹}{۲۶}$ است. پس کوتاهترین فاصلهٔ نقطهٔ P از صفحهٔ داده شده برابر است با

$$d = \sqrt{\left(\frac{۱۹}{۱۳} - ۱\right)^{۲} + \left(\frac{۱۷}{۲۶} - ۱\right)^{۲} + \left(\frac{۲۹}{۲۶} - ۱\right)^{۲}} = \frac{۳}{\sqrt{۲۶}}$$

۱۶. فرض کنیم x شعاع و y ارتفاع این استوانه باشند. داریم $۲\pi x^{۲} + ۲\pi xy = ۶\pi$ یا $x^{۲} + xy = ۳$. حجم این استوانه برابر است با $F(x, y) = \pi x^{۲} y$. تابع لاگرانژ F را به صورت

$$F(x, y, \lambda) = \pi x^{۲} y + \lambda(xy + x^{۲} - ۳)$$

$xy + x^۲ = ۳$. حجم این استوانه برابر است با $F(x, y) = \pi x^۲ y$. تابع لاگرانژ F را به صورت

$$F(x, y, \lambda) = \pi x^۲ y + \lambda(xy + x^۲ - ۳)$$

تعریف می‌کنیم. دستگاه معادلات

$$F_x = ۲\pi xy + \lambda(y + ۲x) = ۰$$
$$F_y = \pi x^۲ + \lambda x = ۰$$
$$F_\lambda = xy + x^۲ - ۳ = ۰$$

را حل می‌کنیم. چون $x \neq ۰$، معادلهٔ دوم نتیجه می‌دهد که $\lambda = -\pi x$. با جایگزین کردن این مقدار λ در معادلهٔ اول، $y = ۲x$ به دست می‌آید. با قرار دادن این مقادیر y در معادلهٔ سوم، $x = ۱$ و در نتیجه $y = ۲$ به دست می‌آید.

تمرینهای فصل ۸

تمرینهای ۱.۸

.۱
$$\int_{0}^{1}\int_{-1}^{1} x\, dy\, dx = \int_{0}^{1}[xy]_{y=-1}^{y=1}\, dx$$
$$= \int_{0}^{1} 2x\, dx = x^{2}\Big|_{0}^{1} = 1$$

.۲
$$\int_{0}^{1}\int_{0}^{1} e^{x+y} dy\, dx = \int_{0}^{1}\left[e^{x+y}\right]_{0}^{1} dx$$
$$= \int_{0}^{1}\left(e^{x+1} - e^{x}\right) dx$$
$$= \left[e^{x+1} - e^{x}\right]_{0}^{1} = e^{2} - 2e + 1$$

.۳
$$\int_{0}^{1}\int_{x}^{x^{2}} dy\, dx = \int_{0}^{1}[y]_{x}^{x^{2}} dx$$
$$= \int_{0}^{1}\left(x^{2} - x\right) dx = \left[\frac{x^{3}}{3} - \frac{x^{2}}{2}\right]_{0}^{1} = -\frac{1}{6}$$

.۴

$$\int_0^1 \int_0^3 x\sqrt{x^2+y}\,dy\,dx = \int_0^1 \left[\frac{2}{3}x\,(x^2+y)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3 dx$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{2}{3}x\,(x^2+3)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}x^4\right] dx$$

$$= \left[\frac{2}{15}(x^2+3)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{15}x^5\right]_0^1 = \frac{62}{15}$$

در محاسبهٔ $\int \frac{2}{3}x\,(x^2+3)^{\frac{3}{2}}$ از تغییر متغیر $u = x^2 + 3$ استفاده شده است.

.۵

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} x\,dx\,dy = \int_0^2 \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\sqrt{4-y^2}} dy$$

$$= \int_0^2 \left(2 - \frac{y^2}{2}\right) dy$$

$$= \left[2y - \frac{y^3}{6}\right]_0^2 = \frac{8}{3}$$

.۶

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{3}\,d\theta = \left[\frac{1}{3}\theta\right]_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{3}$$

.۷

$$\int_1^3 \int_0^x \frac{2}{x^2+y^2}\,dy\,dx = \int_1^3 \left[\frac{2}{x}\,\mathrm{tg}^{-1}\frac{y}{x}\right]_0^x dx$$

$$= \int_1^3 \frac{\pi}{2x}\,dx = \left[\frac{\pi}{2}\ln x\right]_1^3 = \frac{\pi}{2}\ln 3$$

۸.

$$\int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{x} e^{(x^{۲})}dy\,dx=\int_{۰}^{۱}\left[y\,e^{(x^{۲})}\right]_{۰}^{x}dx$$

$$=\int_{۰}^{۱} x\,e^{(x^{۲})}dx=\left[\frac{۱}{۲}e^{(x^{۲})}\right]_{۰}^{۱}=\frac{۱}{۲}e-\frac{۱}{۲}$$

۹.

$$\int_{۰}^{\pi/۴}\int_{۰}^{\cos y} e^{x}\sin y\,dx\,dy=\int_{۰}^{\pi/۴}\left[e^{x}\sin y\right]_{۰}^{\cos y}dy$$

$$=\int_{۰}^{\pi/۴}\left(e^{\cos y}\sin y-\sin y\right)dy$$

$$=\left[-e^{\cos y}+\cos y\right]_{۰}^{\pi/۴}$$

$$=-e^{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}+e-۱$$

۱۰.

$$\int_{۰}^{۲}\int_{۰} y\,dx\,dy=\int_{۰}^{۲}\left[xy\right]_{۰}^{\sqrt{۴-y^{۲}}}dy$$

$$=\int_{۰}^{۲} y\sqrt{۴-y^{۲}}\,dy$$

$$=\left[-\frac{۱}{۳}\left(۴-y^{۲}\right)^{\frac{۳}{۲}}\right]_{۰}^{۲}=\frac{۸}{۳}$$

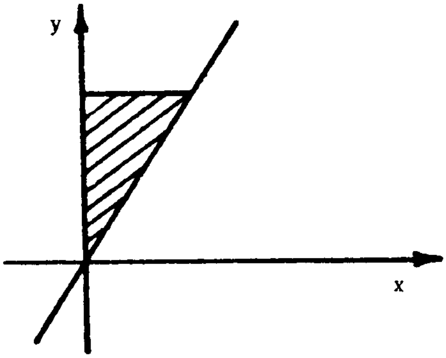
۱۱.

$$\int_{R}\int (x+y)\,dA=\int_{۴}^{۶}\int_{۲}^{۳}(x+y)\,dx\,dy$$

$$=\int_{۴}^{۶}\left[\frac{x^{۲}}{۲}+yx\right]_{۲}^{۳}dy$$

$$=\int_{۴}^{۶}\left(y+\frac{۵}{۲}\right)dy=\left[\frac{۱}{۲}y^{۲}+\frac{۵}{۲}y\right]_{۴}^{۶}=۱۵$$

۱۲. ناحیهٔ R در شکل ۱.۱.۸ نشان داده شده است.



شکل ۱.۱.۸

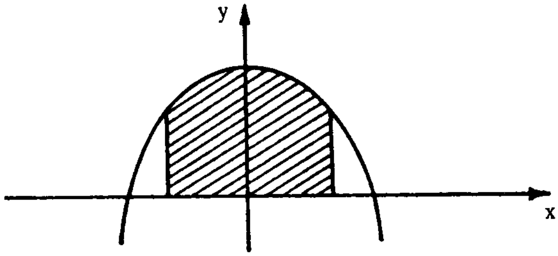
این انتگرال دوگانه را می‌توانیم توسط هریک از انتگرالهای مکرر

$$\int_{\circ}^{۲}\int_{y=۲x}^{y=۴}(x+y)dy\,dx \qquad \text{یا} \qquad \int_{\circ}^{۴}\int_{x=\circ}^{x=\frac{y}{۲}}(x+y)dx\,dy$$

محاسبه کنیم. داریم

$$\begin{aligned}\iint_R (x+y)\,dA &= \int_{\circ}^{۲}\int_{۲x}^{۴}(x+y)\,dy\,dx\\ &= \int_{\circ}^{۲}\left[xy+\frac{y^{۲}}{۲}\right]_{۲x}^{۴}dx\\ &= \int_{\circ}^{۲}\left(-۴x^{۲}+۴x+۸\right)dx\\ &= \left[-\frac{۴}{۳}x^{۳}+۲x^{۲}+۸x\right]_{\circ}^{۲}=\frac{۴\circ}{۳}\end{aligned}$$

۱۳. ناحیهٔ R در شکل ۲.۱.۸ نشان داده شده است.



شکل ۲.۱.۸

محاسبهٔ این انتگرال دوگانه توسط انتگرال مکرر زیر آسانتر است:

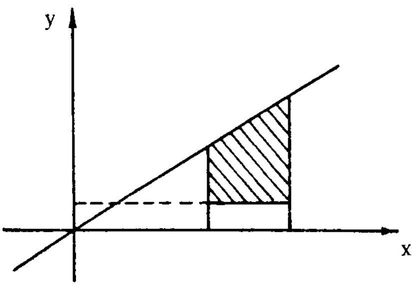
$$\int_R\int xy^۲ dA = \int_{-۱}^{۱}\int_{y=۰}^{y=۴-x^۲} xy^۲\,dy\,dx$$

$$= \int_{-۱}^{۱}\left[\frac{xy^۳}{۳}\right]_۰^{۴-x^۲} dx$$

$$= \int_{-۱}^{۱}\frac{x(۴-x^۲)^۳}{۳}\,dx$$

$$= \left[-\frac{۱}{۲۴}(۴-x^۲)^۴\right]_{-۱}^{۱} = ۰$$

۱۴. ناحیهٔ داده شده در شکل ۳.۱.۸ رسم داده شده است.



شکل ۳.۱.۸

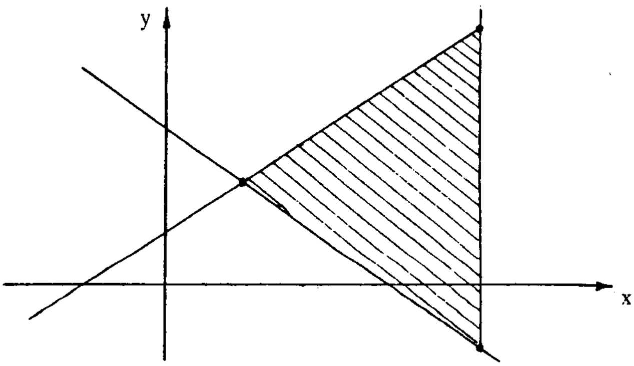
بنابراین،

$$\iint_R x\,dA = \int_{۳}^{۵} \int_{y=۱}^{y=x} x\ dy\ dx$$

$$= \int_{۳}^{۵} [xy]_{۱}^{x} dx$$

$$= \int_{۳}^{۵} (x^{۲}-x)\ dx = \left[\frac{x^{۳}}{۳} - \frac{x^{۲}}{۲}\right]_{۳}^{۵} = \frac{۷۴}{۳}$$

۱۵. دو خط $y = ۵ + x$ و $y = -x + ۷$ یکدیگر را در نقطهٔ $(۱, ۶)$ قطع می‌کنند.



شکل ۴.۱.۸

این انتگرال دوگانه توسط انتگرال مکرر زیر آسانتر محاسبه می‌شود،

$$\iint_R (۳x - ۵)\,dA = \int_{۱}^{۱۰} \int_{y=x+۷}^{y=۵+x} (۳x - ۵)dy\ dx$$

$$= \int_{۱}^{۱۰} \left[(۳x - ۵)y\right]_{-x+۷}^{۵+x} dx$$

$$= \int_{۱}^{۱۰} (۶x^{۲} - ۱۶x + ۱۰)\ dx$$

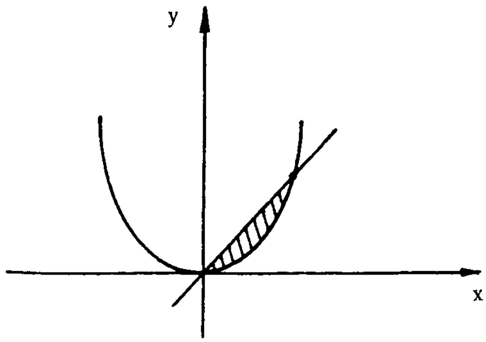
$$= \left[۲x^{۳} - ۸x^{۲} + ۱۰x\right]_{۱}^{۱۰} = ۱۲۹۶$$

توجه کنید که اگر بخواهیم اول نسبت به x انتگرال بگیریم، باید ناحیهٔ R را توسط خط $y = ۶$ به دو زیر ناحیه تقسیم کنیم. در این صورت

$$\iint_R (۳x - ۵)\, dA = \int_{-۳}^{۶} \int_{x=۷-y}^{۱۰} (۳x - ۵) dx\, dy + \int_{۶}^{۱۵} \int_{x=y-۵}^{۱۰} (۳x - ۵) dx\, dy$$

دانشجویان می‌توانند این انتگرالها را محاسبه و جواب را با جواب به دست آمده در بالا مقایسه کنند.

۱۶. ناحیهٔ R، و محل تلاقی دو نمودار $y = x$ و $y = x^۲$، در شکل ۵.۱.۸ نشان داده شده است.

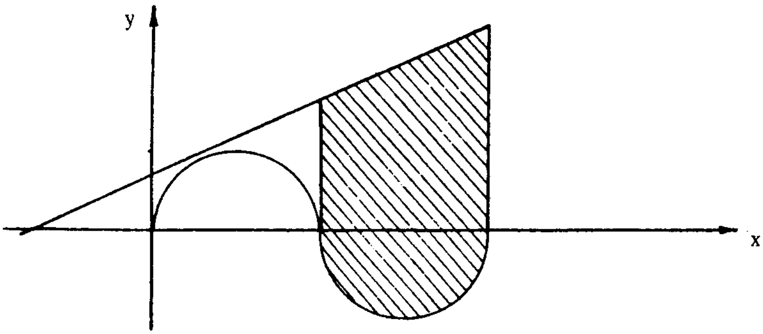


شکل ۵.۱.۸

بنابراین،

$$\begin{aligned}\iint_R xy\, dA &= \int_{۰}^{۱} \int_{y=x^۲}^{x} xy\, dy\, dx \\ &= \int_{۰}^{۱} \left[\frac{xy^۲}{۲}\right]_{x^۲}^{x} dx \\ &= \int_{۰}^{۱} \left(\frac{x^۳}{۲} - \frac{x^۵}{۲}\right) dx \\ &= \left[\frac{x^۴}{۸} - \frac{x^۶}{۱۲}\right]_{۰}^{۱} = \frac{۱}{۲۴}\end{aligned}$$

۱۷. ناحیهٔ R در شکل ۶.۱.۸ رسم شده است.



شکل ۶.۱.۸

بنابراین، انتگرال دوگانهٔ موردنظر برابر است با

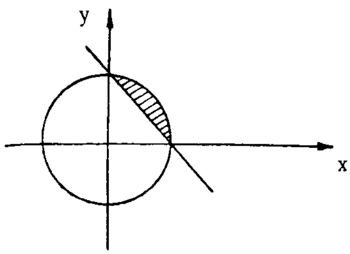
$$\int_R\int 1\,dA=\int_{\pi}^{2\pi}\int_{y=\sin x}^{y=1+x} dy\;dx$$

$$=\int_{\pi}^{2\pi}[\,y\,]_{\sin x}^{1+x}\,dx$$

$$=\int_{\pi}^{2\pi}(1+x-\sin x)\,dx$$

$$=\left[x+\frac{x^2}{2}+\cos x\right]_{\pi}^{2\pi}=\frac{3\pi^2}{2}+\pi+2$$

۱۸. ناحیهٔ مورد نظر در شکل ۷.۱.۸ سایه زده شده است.



شکل ۷.۱.۸

بنابراین، داریم

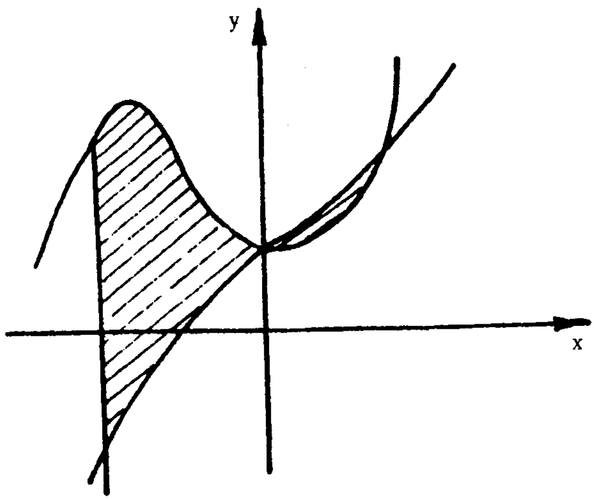
$$\int_R\int xy^{۲}dA=\int_{۰}^{۱}\int_{x=۱-y}^{x=\sqrt{۱-y^{۲}}} xy^{۲}\,dx\,dy$$

$$=\int_{۰}^{۱}\left[\frac{x^{۲}y^{۲}}{۲}\right]_{۱-y}^{\sqrt{۱-y^{۲}}}dy$$

$$=\int_{۰}^{۱}(-y^{۴}+y^{۳})\,dy$$

$$=\left[\frac{۱}{۲}\left(-\frac{۱}{۵}y^{۵}+\frac{۱}{۴}y^{۴}\right)\right]_{۰}^{۱}=\frac{۱}{۲۰}$$

۱۹. ناحیهٔ R در شکل ۸.۱.۸ سایه زده شده است.



شکل ۸.۱.۸

چون R به دو زیرناحیهٔ $R_{۱}$ و $R_{۲}$ تقسیم شده است، پس

$$\int_R\int x^{۲}dA=\int_{R_{۱}}\int x^{۲}dA+\int_{R_{۲}}\int x^{۲}dA$$

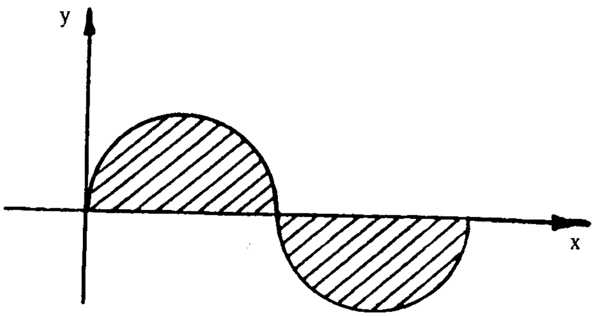
$$=\int_{-۱}^{۰}\int_{x^{۳}+x+۱}^{x^{۳}+x^{۲}+۱}x^{۲}dy\,dx+\int_{۰}^{۱}\int_{x^{۳}+x^{۲}+۱}^{x^{۳}+x+۱}x^{۲}dy\,dx$$

$$=\int_{۱}^{۰}\left[x^{۲}y\right]_{x^{۳}+x+۱}^{x^{۳}+x^{۲}+۱}dx+\int_{۰}^{۱}\left[x^{۲}y\right]_{x^{۳}+x^{۲}+۱}^{x^{۳}+x+۱}dx$$

$$=\int_{-۱}^{۰}\left(x^{۴}-x^{۳}\right)dx+\int_{۰}^{۱}\left(x^{۳}-x^{۴}\right)dx$$

$$=\left[\frac{x^{۵}}{۵}-\frac{x^{۴}}{۴}\right]_{-۱}^{۰}+\left[\frac{x^{۴}}{۴}-\frac{x^{۵}}{۵}\right]_{۰}^{۱}=\frac{۱}{۲}$$

۲۰. ناحیهٔ داده شده در شکل ۹.۱.۸ سایه زده شده است.



شکل ۹.۱.۸

بنابراین، انتگرال دوگانهٔ موردنظر برابر است با

$$\int_R\int ۲y\,dA=\int_{R_{۱}}\int ۲y\,dA+\int_{R_{۲}}\int ۲y\,dA$$

$$=\int_{۰}^{\pi}\int_{y=۰}^{y=\sin x}۲y\,dy\,dx+\int_{\pi}^{۲\pi}\int_{y=\sin x}^{y=۰}۲y\,dy\,dx$$

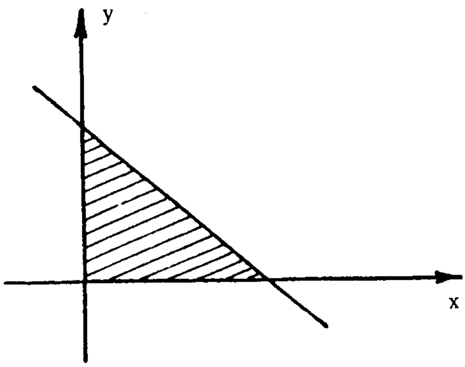
$$=\int_{۰}^{\pi}\left[y^{۲}\right]_{۰}^{\sin x}dx+\int_{\pi}^{۲\pi}\left[y^{۲}\right]_{\sin x}^{۰}dx$$

$$= \int_{\circ}^{\pi} \sin^{۲} x\, dx + \int_{\pi}^{۲\pi} -\sin^{۲} x\, dx$$

$$= \int_{\circ}^{\pi} \left(\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲}\cos ۲x\right) dx + \int_{\pi}^{۲\pi} \left(\frac{۱}{۲}\cos ۲x - \frac{۱}{۲}\right) dx$$

$$= \left[\frac{۱}{۲}x - \frac{۱}{۴}\sin ۲x\right]_{\circ}^{\pi} + \left[\frac{۱}{۴}\sin ۲x - \frac{۱}{۲}x\right]_{\pi}^{۲\pi} = \circ$$

۲۱. صفحهٔ داده شده صفحهٔ xy را در خط $y = ۱-x$ قطع می‌کند. بنابراین، حجم این جسم برابر است با انتگرال دوگانه $f(x, y) = ۱-x-y$ روی ناحیهٔ R که در شکل ۱۰.۱.۸ سایه زده شده است.



شکل ۱۰.۱.۸

در نتیجه،

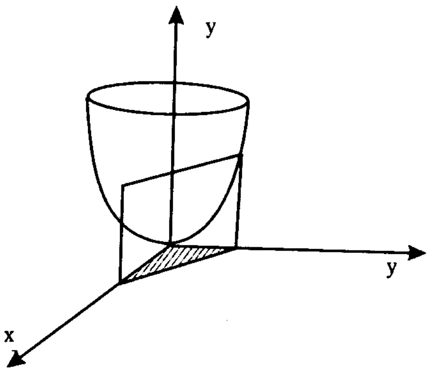
$$V = \int_{\circ}^{۱} \int_{y=\circ}^{y=۱-x} (۱-x-y)\, dy\, dx$$

$$= \int_{\circ}^{۱} \left[y - xy - \frac{y^{۲}}{۲}\right]_{\circ}^{۱-x} dx$$

$$= \int_{\circ}^{۱} \left(\frac{۱}{۲} - x + \frac{x^{۲}}{۲}\right) dx$$

$$= \left[\frac{۱}{۲}x - \frac{x^{۲}}{۲} + \frac{x^{۳}}{۶}\right]_{\circ}^{۱} = \frac{۱}{۶}$$

۲۲. ناحیهٔ موردنظر در شکل ۱۱.۱.۸ نشان داده شده است.



شکل ۱۱.۱.۸

بنابراین،

$$V=\int\int_R (x^۲+y^۲)\ dA=\int_۰^۱\int_۰^{۱-x} (x^۲+y^۲)\ dy\ dx$$

$$=\int_۰^۱ \left[x^۲y+\frac{y^۳}{۳}\right]_۰^{۱-x} dx$$

$$=\int_۰^۱ \left(-\frac{۴}{۳}x^۳+۲x^۲-x+\frac{۱}{۳}\right) dx$$

$$=\left[-\frac{۱}{۳}x^۴+\frac{۲}{۳}x^۳-\frac{x^۲}{۲}+\frac{۱}{۳}x\right]_۰^۱=\frac{۱}{۶}$$

۲۳. قاعدهٔ جسم مورد نظر ناحیهٔ $R=\{(x,y)\,|\,۰\le x\le ۳\ ،\ ۰\le y\le ۲\}$ درصفحهٔ xyاست. بنابراین،

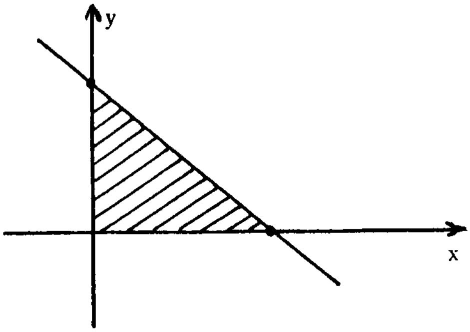
$$V=\int\int_R f(x,y)\ dA=\int_۰^۳\int_۰^۲ \left(۴-\frac{۱}{۹}x^۲+\frac{۱}{۱۶}y^۲\right) dy\ dx$$

$$=\int_۰^۳ \left[۴y-\frac{۱}{۹}x^۲y+\frac{۱}{۴۸}y^۳\right]_۰^۲ dx$$

$$=\int_۰^۳ \left(\frac{۴۷}{۶}-\frac{۲}{۹}x^۲\right) dx$$

$$=\left[\frac{۴۷}{۶}x-\frac{۲}{۲۷}x^۳\right]_۰^۳=\frac{۴۳}{۲}$$

۲۴. حجم ناحیهٔ موردنظر برابر است با انتگرال دوگانه $f(x, y) = x^{۲} + y^{۲} + ۱$ روی ناحیهٔ محدود به خط $۲x + y = ۲$ و محورهای x و y (شکل ۱۲.۱.۸ را ببینید).



شکل ۱۲.۱.۸

بنابراین،

$$V = \int\int_R f(x, y)\, dA = \int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{۲-۲x} (x^{۲}+y^{۲}+۱)\, dy\, dx$$

$$= \int_{۰}^{۱} \left[x^{۲}y + \frac{y^{۳}}{۳} + y\right]_{۰}^{۲-۲x} dx$$

$$= \int_{۰}^{۱} \left(-\frac{۱۴}{۳}x^{۳} + ۱۰x^{۲} - ۱۰x + \frac{۱۴}{۳}\right) dx$$

$$= \left[-\frac{۲}{۶}x^{۴} + \frac{۱۰}{۳}x^{۳} - ۵x^{۲} + \frac{۱۴}{۳}x\right]_{۰}^{۱} = \frac{۱۱}{۶}$$

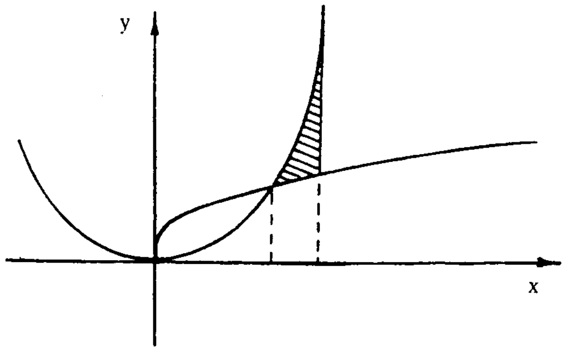
۲۵. (الف) این جسم به نمودار $f(x, y) = ۳$ و ناحیهٔ مستطیلی

$$R = \{(x,y) \mid -۲ \leq x \leq ۱\ ,\ ۱ \leq y \leq ۴\}$$

محدود است.

(ب) این جسم زیرنمودار $f(x, y) = x^{۲} + y^{۲}$ و روی ناحیهٔ محدود به نمودارهای $y = x-۱$ و $y = ۱-x^{۲}$ قرار دارد.

۲۶. ناحیهٔ موردنظر در شکل ۱۳.۱.۸ نشان داده شده است.



شکل ۱۳.۱.۸

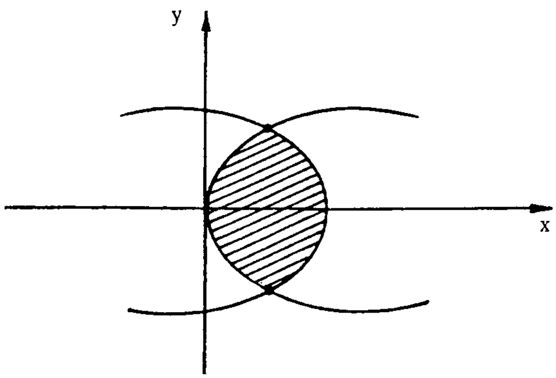
بنابراین، مساحت R برابر است با

$$A=\int_R\int dA=\int_{۱}^{۴}\int_{y=\sqrt{x}}^{y=x^{۲}} dy\ dx$$

$$=\int_{۱}^{۴}\left(x^{۲}-\sqrt{x}\right)\ dx$$

$$=\left[\frac{x^{۳}}{۲}-\frac{۲}{۳}x^{۳/۲}\right]_{۱}^{۴}=\frac{۴۹}{۳}$$

۲۷. ناحیهٔ موردنظر در شکل ۱۴.۱.۸ سایه زده شده است.



شکل ۱۴.۱.۸

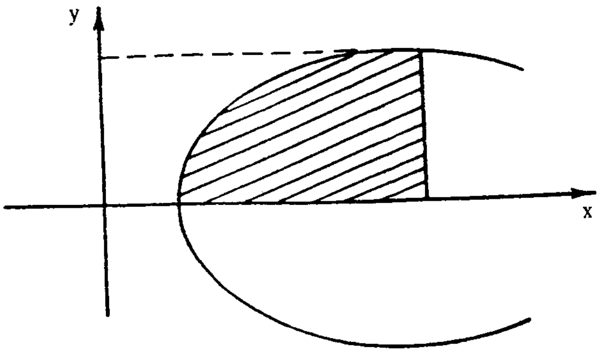
بنابراین، مساحت R برابر است با

$$A=\int_R\int dA=\int_{-۴}^{۴}\int_{x=y^{۲}}^{۳۲-y^{۲}} dx\, dy$$

$$=\int_{-۴}^{۴}\left(۳۲-۲y^{۲}\right) dy$$

$$=\left[۳۲y-\frac{۲}{۳}y^{۳}\right]_{-۴}^{۴}=\frac{۵۱۲}{۳}$$

۲۸. ناحیه‌ای که انتگرال دوگانه روی آن محاسبه می‌شود در شکل ۱۵.۱.۸ نشان داده شده است.



شکل ۱۵.۱.۸

برای تغییر ترتیب انتگرالگیری، R را به صورت زیر درنظر می‌گیریم:

$$R=\{(x, y) \mid ۱\le x\le ۵ \quad , \quad ۰\le y\le\sqrt{x-۱}\}$$

بنابراین،

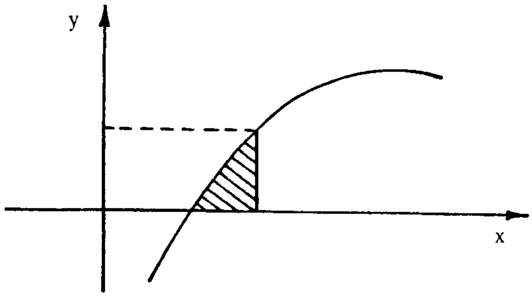
$$\int_{0}^{2}\int_{1+y^2}^{5} ye^{(x-1)^2}dx\,dy = \int_{1}^{5}\int_{y=0}^{y=\sqrt{x-1}} ye^{(x-1)^2}dy\,dx$$

$$= \int_{1}^{5}\left[\frac{y^2}{2}\,e^{(x-1)^2}\right]_{0}^{\sqrt{x-1}}dx$$

$$= \int_{1}^{5}\frac{(x-1)}{2}\,e^{(x-1)^2}dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}\,e^{(x-1)^2}\right]_{1}^{5} = \frac{1}{4}\left(e^{16}-1\right)$$

۲۹. ناحیه‌ای که انتگرال دوگانه روی آن محاسبه می‌شود زیر نمودار $y = \ln x$ و روی بازهٔ $[1, e]$ قرار دارد (شکل ۱۶.۱.۸ را ببینید).



شکل ۱۶.۱.۸

این ناحیه را به صورت $R = \{(x,y) \mid e^y \le x \le e \ ,\ 0 \le y \le 1\}$ درنظر می‌گیریم. بنابراین،

$$\int_{1}^{e}\int_{x=0}^{x=e^y} y\,dy\,dx = \int_{0}^{1}\int_{e^y}^{e} y\,dx\,dy$$

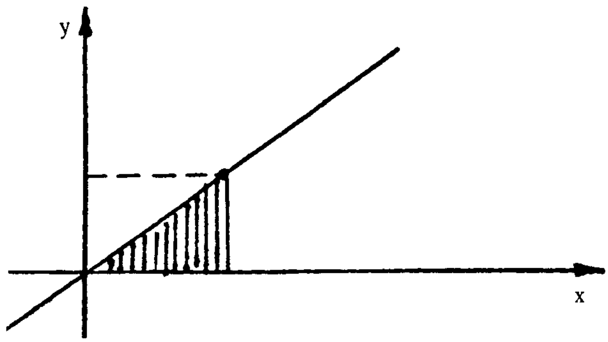
$$= \int_{0}^{1}\left[yx\right]_{e^y}^{e}dy$$

$$= \int_{0}^{1}\left(ey - ye^y\right)dy$$

$$= \left[\frac{e}{2}\,y - e^y(y-1)\right]_{0}^{1} = \frac{e}{2} - 1$$

توجه کنید که انتگرال $\int ye^y dy$ را به روش جزء به جزء پیدا کرده‌ایم.

۳۰. ناحیهٔ داده شده در شکل ۱۷.۱.۸ رسم شده است.



شکل ۱۷.۱.۸

بنابراین،

$$\int_{\circ}^{\sqrt{\pi/۲}} \int_{y}^{\sqrt{\pi/۲}} y^{۲} \sin x^{۲}\, dx\, dy = \int_{\circ}^{\sqrt{\pi/۲}} \int_{y=\circ}^{y=x} y^{۲} \sin x^{۲}\, dy\, dx$$

$$= \int_{\circ}^{\sqrt{\pi/۲}} \left[\frac{y^{۳}}{۳} - \sin x^{۲}\right]_{\circ}^{x} dx$$

$$= \int_{\circ}^{\sqrt{\pi/۲}} \frac{x^{۳}}{۳} \sin x^{۲} dx$$

با محاسبهٔ این انتگرال به روش جزء به جزء، مقدار آن برابر با $\frac{۱}{۶}$ به دست می‌آید.

تمرینهای ۲.۸

۱. چون در مختصات قطبی، $x = r \cos \theta$ و $y = r \sin \theta$. پس

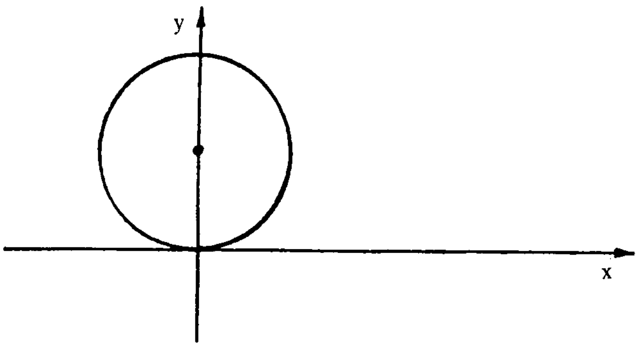
$$\int_R\int xy\, dA = \int_R\int r^{۲} \sin\theta \cos\theta\, dA$$

$$= \int_{\circ}^{۵} \int_{\theta=\circ}^{\theta=۲\pi} r^{۲} \sin\theta\cos\theta\, r d\theta\, dr = \int_{\circ}^{۵} \int_{\circ}^{۲\pi} \frac{۱}{۲} r^{۳} \sin ۲\theta\, d\theta\, dr$$

$$= \int_{\circ}^{\text{۵}} \left[-\frac{\text{۱}}{\text{۴}} r^{\text{۳}} \cos \text{۲}\theta \right]_{\circ}^{\text{۲}\pi} dr$$

$$= \int_{\circ}^{\text{۵}} \circ \, dr = \circ$$

۲. ناحیهٔ R در شکل ۱.۲.۸ رسم شده است.



شکل ۱.۲.۸

بنابراین،

$$\int_R\int x^{\text{۲}} dA = \int_R\int r^{\text{۲}} \cos^{\text{۲}} \theta \, dA$$

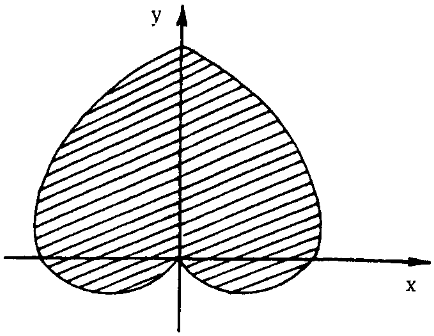
$$= \int_{\circ}^{\pi} \int_{\circ}^{\text{۴}\sin\pi} r^{\text{۲}} \cos^{\text{۲}} \theta \, r \, dr \, d\theta$$

$$= \int_{\circ}^{\pi} \left[\frac{r^{\text{۴}}}{\text{۴}} \cos^{\text{۲}} \theta \right]_{\circ}^{\text{۴}\sin\theta} d\theta$$

$$= \int_{\circ}^{\pi} \text{۶۴} \sin^{\text{۴}} \theta \, \cos^{\text{۲}} \theta \, d\theta = \text{۴}\pi$$

جزئیات محاسبهٔ انتگرال آخر را به عهده دانشجویان می‌گذاریم.

۳. ناحیهٔ R در شکل ۲.۲.۸ رسم شده است.



شکل ۲.۲.۸

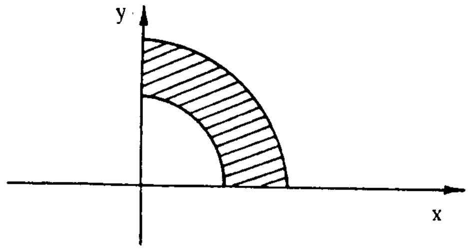
چون در مختصات قطبی $x^۲ + y^۲ = r^۲$،

$$\int_R\int (x^۲+y^۲)\, dA = \int_R\int r^۲ dA$$
$$= \int_{-\pi/۲}^{۳\pi/۲} \int_۰^{۲(۱+\sin\theta)} r^۲\, r\, dr\, d\theta$$
$$= \int_{-\pi/۲}^{۳\pi/۲} \left[\frac{r^۴}{۴}\right]_۰^{۲(۱+\sin\theta)} d\theta$$
$$= \int_{-\pi/۲}^{۳\pi/۲} ۴(۱+\sin\theta)^۴ d\theta = ۳۵\pi$$

جزئیات محاسبهٔ انتگرال آخر را به عهدهٔ دانشجویان می‌گذاریم.

.۴
$$\int_R\int dA = \int_۰^{\pi/۲}\int^{۳\sqrt{\sin ۲\theta}} r\, dr\, d\theta$$
$$= \int_۰^{\pi/۲} \left[\frac{r^۲}{۲}\right]_۰^{۳\sqrt{\sin ۲\theta}} d\theta$$
$$= \int_۰^{\pi/۲} \frac{۹}{۲} \sin ۲\theta\, d\theta = \left[-\frac{۹}{۴} \cos ۲\theta\right]_۰^{\pi/۲} = ۹$$

۵. سطح مقطع هشت یک اول این جسم با صفحهٔ xy در شکل ۳.۲.۸ سایه زده است.

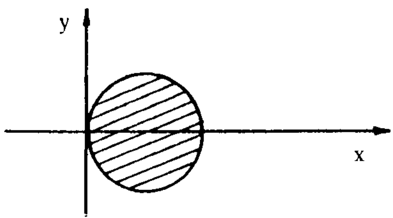


شکل ۳.۲.۸

چون در مختصات قطبی، $z^۲ = ۲۵-x^۲-y^۲ = ۲۵-r^۲$، حجم جسم موردنظر برابر است با

$$V = ۸\iint_R \sqrt{۲۵-r^۲}\; r\,dr\,d\theta$$
$$= ۸\int_۰^{\pi/۲}\int_۳^۵ \sqrt{۲۵-r^۲}\; r\,dr\,d\theta$$
$$= ۸\int_۰^{\pi/۲}\left[-\frac{۱}{۳}(۲۵-r^۲)^{\frac{۳}{۲}}\right]_۳^۵ d\theta$$
$$= ۸\int_۰^{\pi/۲}\frac{۶۴}{۳}\,d\theta = \left[\frac{۵۱۲}{۳}\,\theta\right]_۰^{\pi/۲} = \frac{۲۵۶\pi}{۳}$$

۶. معادلهٔ دایرهٔ داده شده در مختصات قطبی $r = ۲\cos\theta$ است (شکل ۴.۲.۸ را ببینید).



شکل ۴.۲.۸

بنابراین، حجم ناحیهٔ مورد نظر برابر است با

$$V=\int_R\int (x^{۲}+y^{۲})\ dA=\int_R\int r^{۲}dA$$

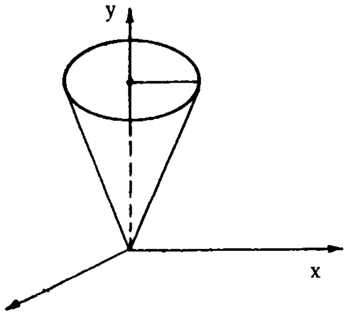
$$=\int_{-\pi/۲}^{\pi/۲}\int_{۰}^{۲\cos\theta} r^{۲}\, r\, dr\, d\theta$$

$$=\int_{-\pi/۲}^{\pi/۲}\left[\frac{r^{۴}}{۴}\right]_{۰}^{۲\cos\theta} d\theta$$

$$=\int_{-\pi/۲}^{\pi/۲} ۴\cos^{۴}\theta\, d\theta=۳\pi/۲$$

جزئیات محاسبه انتگرال آخر را به عهده دانشجویان می‌گذاریم.

۷. ناحیهٔ مورد نظر در شکل ۵.۲.۸ نشان داده شده است.



شکل ۵.۲.۸

حجم ناحیهٔ موردنظر برابر است با تفاضل حجم زیر مخروط $z=\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}=r$ و روی صفحهٔ xy از حجم استوانهٔ به شعاع ۲ و ارتفاع ۲ . بنابراین،

$$V=\text{۸}\pi-\int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{۲} r(rd\ rd\theta)$$

$$=\text{۸}\pi-\int_{۰}^{۲\pi}\left[\frac{r^{۳}}{۳}\right]_{۰}^{۲} d\theta$$

$$=\text{۸}\pi-\int_{۰}^{۲\pi}\frac{\text{۸}}{۳}\, d\theta=\text{۸}\pi-\frac{۱۶\pi}{۳}=\frac{\text{۸}\pi}{۳}$$

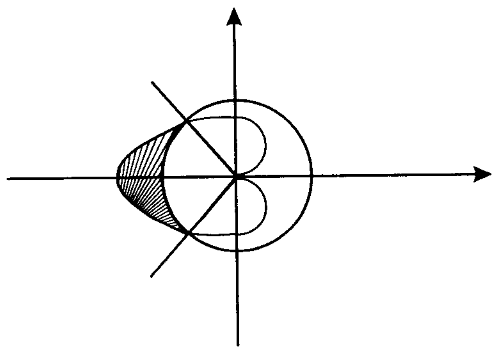
۸. چون در مختصات قطبی، $x^۳ + xy^۲ = r^۳\cos\theta$، پس

$$V=\int_{۰}^{\pi/۲}\int_{۰}^{۲} r^{۳}\cos\theta\, r\,dr\,d\theta$$

$$=\int_{۰}^{\pi/۲}\left[\frac{r^{۵}}{۵}\cos\theta\right]_{۰}^{۲}d\theta$$

$$=\int_{۰}^{\pi/۲}\frac{۳۲}{۵}\cos\theta\,d\theta=\left[\frac{۳۲}{۵}\sin\theta\right]_{۰}^{\pi/۲}=\frac{۳۲}{۵}$$

۹. ناحیهٔ موردنظر در شکل ۶.۲.۸ نشان داده شده است.



شکل ۶.۲.۸

بنابراین، مساحت R برابر است با

$$A=\int_{R}\int dA=\int_{۲\pi/۳}^{۴\pi/۳}\int_{۳}^{۲-۲\cos\theta} r\,dr\,d\theta$$

$$=\int_{۲\pi/۳}^{۴\pi/۳}\left[\frac{r^{۲}}{۲}\right]_{۳}^{۲-۲\cos\theta}d\theta$$

$$=\frac{۱}{۲}\int_{۲\pi/۳}^{۴\pi/۳}\left[(۲-۲\cos\theta)^{۲}-۹\right]d\theta$$

$$=\frac{۱}{۲}\int_{۲\pi/۳}^{۴\pi/۳}\left(۴\cos^۲\theta - ۸\cos\theta - ۵\right)\,d\theta$$

$$=\frac{۱}{۲}\int_{۲\pi/۳}^{۴\pi/۳}\left(۲\cos ۲\theta - ۸\cos\theta - ۳\right)\,d\theta$$

$$=\frac{۱}{۲}\left[(\sin ۲\theta - ۸\sin\theta - ۳\theta)\right]_{۲\pi/۳}^{۴\pi/۳} = \frac{۹\sqrt{۳}}{۲} - \pi$$

۱۰. مساحت قطعه موردنظر برابر است با

$$A=\int_R\int dA=\int_۰^{\alpha}\int_۰^{۲a\sin\theta} r\,dr\,d\theta$$

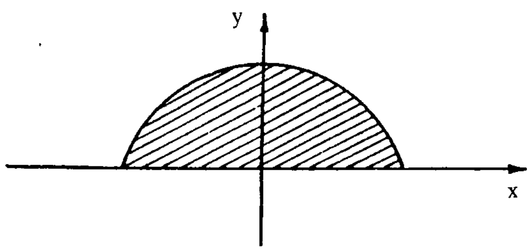
$$=\int_۰^{\alpha}\left[\frac{r^۲}{۲}\right]_۰^{۲a\sin\theta} d\theta$$

$$=\int_۰^{\alpha} ۲a^۲\sin^۲\theta\,d\theta$$

$$=a^۲\int_۰^{\alpha}\left(۱-\cos ۲\theta\right)\,d\theta$$

$$=a^۲\left[\theta-\frac{۱}{۲}\sin ۲\theta\right]_۰^{\alpha}=a^۲\left(\alpha-\frac{۱}{۲}\sin ۲\alpha\right)$$

۱۱. ناحیه‌ای که انتگرال روی آن محاسبه می‌شود در شکل ۸.۲.۸ رسم شده است.



شکل ۸.۲.۸

بنابراین، باتوجه به تذکر ۵.۲.۸ ، داریم

$$\int_{-a}^{a}\int_{۰}^{\sqrt{a^۲-x^۲}} e^{-(x^۲+y^۲)}\,dy\,dx=\int_{۰}^{\pi}\int_{۰}^{a} e^{-r^۲}\,r\,dr\,d\theta$$

$$=\int_{۰}^{\pi}\left[-\frac{۱}{۲}e^{-r^۲}\right]_{۰}^{a}d\theta$$

$$=\int_{۰}^{\pi}\left(-\frac{۱}{۲}e^{-a^۲}+\frac{۱}{۲}\right)d\theta$$

$$=\left[\left(-\frac{۱}{۲}e^{-a^۲}+\frac{۱}{۲}\right)\theta\right]_{۰}^{\pi}$$

$$=\frac{۱}{۲}\pi\left(۱-e^{-a^۲}\right)$$

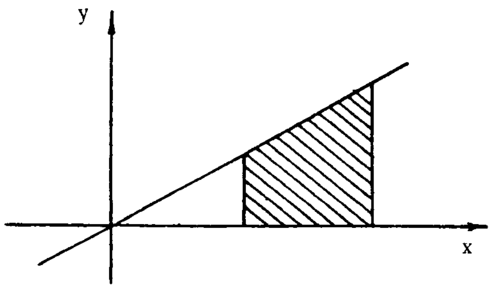
۱۲. ناحیه‌ای که انتگرال روی آن محاسبه می‌شود، ربع اول دایرهٔ $r = a$ است. پس

$$\int_{۰}^{a}\int_{۰}^{\sqrt{a^۲-x^۲}}(x^۲+y^۲)^{۳/۲}\,dy\,dx=\int_{۰}^{\pi/۲}\int_{۰}^{a} r^۳\,r\,dr\,d\theta$$

$$=\int_{۰}^{\pi/۲}\left[\frac{r^۵}{۵}\right]_{۰}^{a}d\theta$$

$$=\int_{۰}^{\pi/۲}\frac{a^۵}{۵}\,d\theta=\left[\frac{a^۵}{۵}\theta\right]_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}=\frac{a^۵\pi}{۱۰}$$

۱۳. ناحیهٔ R که انتگرال روی آن محاسبه می‌شود در شکل ۷.۲.۸ نشان داده شده است.



شکل ۷.۲.۸

چون $x = r\cos\theta$، معادلات خطوط $x = ۱$ و $x = ۲$ درمختصات قطبی به‌صورت $r = \frac{۱}{\cos\theta}$ و $r = \frac{۲}{\cos\theta}$ هستند. بنابراین،

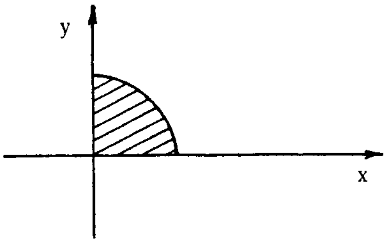
$$\int_{۱}^{۲}\int_{۰}^{x} \frac{۱}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}}\,dy\,dx = \int_{۰}^{\pi/۴}\int_{۱/\cos\theta}^{۲/\cos\theta} \frac{۱}{r}\, r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_{۰}^{\pi/۴} [\,r\,]_{۱/\cos\theta}^{۲/\cos\theta} d\theta$$

$$\int_{۰}^{\pi/۴} \frac{۱}{\cos}\,d\theta = \int_{۰}^{\pi/۴} \sec\theta\,d\theta$$

$$= [\,\ln(\sec\theta + \operatorname{tg}\theta)\,]_{۰}^{\pi/۴} = \ln(\sqrt{۲}+۱)$$

۱۴. ناحیه‌ای که انتگرال روی آن محاسبه می‌شود در شکل ۹.۲.۸ نشان داده شده است.



شکل ۹.۲.۸

بنابراین، در مختصات قطبی داریم

$$\int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{\sqrt{۱-x^{۲}}} e^{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}}\,dy\,d = \int_{۰}^{\pi/۲}\int_{۰}^{۱} e^{r}\,r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_{۰}^{\pi/۲} \left[e^{r}(r-۱)\right]_{۰}^{۱} d\theta \qquad \text{(جزء به جزء)}$$

$$= \int_{۰}^{\pi/۲} \left[\theta\right]_{۰}^{\pi/۲} = \pi/۲$$

تمرینهای ۳.۸

۱. فرض می‌کنیم $f(x, y) = x^{۲}$. چون $f_x(x, y) = ۲x$ و $f_y(x, y) = ۰$، بنابر فرمول ۱.۳.۸، داریم

$$S = \int_R \int \sqrt{۱ + [f_x(x,y)]^۲ + [f_y(x,y)]^۲}\, dA$$

$$= \int_۰^۲ \int_۰^۳ \sqrt{۱ + ۴x^۲}\, dy\, dx$$

$$= \int_۰^۲ ۳\sqrt{۱ + ۴x^۲}\, dx$$

$$= ۳\sqrt{۱۷} + \frac{۳}{۴}\ln\left(۴ + \sqrt{۱۷}\right)$$

برای محاسبهٔ انتگرال آخر، تغییر متغیر $x = \frac{۱}{۲}\operatorname{tg}\theta$ را به‌کار برده‌ایم؛ جزئیات این محاسبه را به‌عهدهٔ دانشجویان می‌گذاریم.

۲. قرار می‌دهیم $f(x, y) = ۱ - x^۲$. در نتیجه

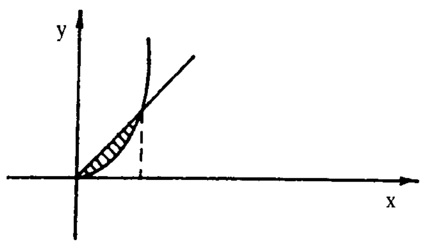
$$S = \int_R \int \sqrt{۱ + [f_x(x,y)]^۲ + [f_y(x,y)]^۲}\, dA$$

$$= \int_۰^۱ \int_۰^x \sqrt{۱ + ۴x^۲}\, dy\, dx$$

$$= \int_۰^۱ x\sqrt{۱ + ۴x^۲}\, dx$$

$$= \left[\frac{۱}{۸} \cdot \frac{۲}{۳}(۱ + ۴x^۲)^{۳/۲}\right]_۰^۱ = \frac{۵\sqrt{۵} - ۱}{۱۲}$$

۳. ناحیهٔ R در شکل ۱.۳.۸ نشان داده شده است.



شکل ۱.۳.۸

قرار می‌دهیم $f(x, y) = ۲x + ۳y$. در نتیجه

$$S = \int_R \int \sqrt{۱ + [f_x(x,y)]^۲ + [f_y(x,y)]^۲}\, dA$$

$$= \int_۰^۱ \int_{x^۲}^{x} \sqrt{۱+۴+۹}\, dy\, dx$$

$$= \sqrt{۱۴} \int_۰^۱ [\,y\,]_{x^۲}^{x}\, dx = \sqrt{۱۴} \int_۰^۱ (x - x^۲)\, dx$$

$$= \left[\sqrt{۱۴}\left(\frac{x^۲}{۲} - \frac{x^۳}{۲}\right)\right]_۰^۱$$

$$= \frac{\sqrt{۱۴}}{۶}$$

۴. فرض می‌کنیم $f(x,y) = \sqrt{a^۲ - x^۲ - y^۲}$. در این صورت

$$\sqrt{۱ + [f_x(x, y)]^۲ + [f_y(x, y)]^۲} = \frac{a}{a^۲ - x^۲ - y^۲}$$

بنابراین، در مختصات قطبی، داریم

$$S = \int_{۴x^۲ + ۴y^۲ = a^۲} \int \frac{a}{\sqrt{a^۲ - x^۲ - y^۲}}\, dA$$

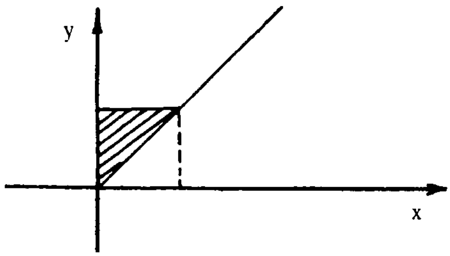
$$= ۴ \int_۰^{\pi/۲} \int_۰^{a/۲} \frac{a}{\sqrt{a^۲ - r^۲}}\, r\, dr\, d\theta$$

$$= -۴a \int_۰^{\pi/۲} \left[(a^۲ - r^۲)^{۱/۲}\right]_۰^{a/۲} d\theta$$

$$= -۴a \int_۰^{\pi/۲} \frac{\sqrt{۳} - ۲}{۲}\, a\, d\theta$$

$$= \left[۲a^۲(۲ - \sqrt{۳})\theta\right]_۰^{\pi/۲} = \pi a^۲(۲ - \sqrt{۳})$$

۵. فرض می‌کنیم $f(x, y) = y^۲$. در نتیجه، با توجه به شکل ۸. ۳. ۲، داریم



شکل ۸.۳.۲

$$S = \int_R \int \sqrt{۱ + [f_x(x,y)]^۲ + [f_y(x,y)]^۲}\, dA$$

$$= \int_۰^۱ \int_۰^{\frac{y}{۲}} \sqrt{۱+۴y^۲}\, dx\, dy$$

$$= \int_۰^۱ \frac{y}{۲}\sqrt{۱+۴y^۲}\, dy$$

$$= \left[\frac{۱}{۲۴}(۱+۴y^۲)^{۳/۲}\right]_۰^۱ = \frac{۵\sqrt{۵}-۱}{۲۴}$$

۶. فرض می‌کنیم $F(x, y, z) = x^۲ + z^۲$. پس

$$\sqrt{[F_x(x,y,z)]^۲ + [F_y(x,y,z)]^۲ + [F_z(x,y,z)]^۲}$$

$$= \frac{\sqrt{۴x^۲+۴z^۲}}{۲|z|} = \frac{۳}{۸-x^۲}$$

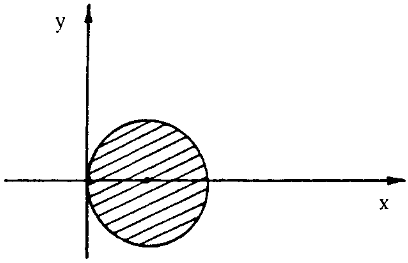
بنابراین، با توجه به تذکر ۸. ۳. ۵، داریم

$$S=\iint_R \frac{3}{\sqrt{9-x^2}}\,dA$$
$$=\int_1^2\int_0^4 \frac{3}{\sqrt{9-x^2}}\,dy\,dx$$
$$=12\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx=24\left[\sin^{-1}\frac{x}{3}\right]_1^2$$
$$=12\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}-\sin^{-1}\frac{1}{3}\right)$$

۷. سطح مقطع نمودار $f(x, y) = 1-x^2-y^2$ با صفحهٔ xy دایرهٔ $x^2+y^2=1$ است. بنابراین، در مختصات قطبی، داریم

$$S=\iint_{x^2+y^2=1} \sqrt{1+[f_x(x,y)]^2+[f_y(x,y)]^2}\,dA$$
$$=\iint_{x^2+y^2=1} \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dA$$
$$=4\int_0^{\pi/2}\int_0^1 \sqrt{1+4r^2}\;r\,dr\,d\theta$$
$$=\frac{1}{3}\int_0^{\pi/2}\left[(1+4r^2)^{3/2}\right]_0^1 d\theta$$
$$=\frac{1}{3}\int_0^{\pi/2}(5\sqrt{5}-1)\,d\theta$$
$$=\frac{1}{3}\left[(5\sqrt{5}-1)\theta\right]_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)$$

۸. سطح مقطع استوانهٔ داده شده با صفحهٔ xy دایرهٔ $x^2-4x+y^2=0$ است (شکل ۸.۳.۳ را ببینید).



شکل ۸.۳.۳

فرض می‌کنیم که $F(x, y, z)= x^۲+y^۲+z^۲$. چون،

$$\frac{\sqrt{F_x^۲+F_y^۲+F_z^۲}}{|F_z|}=\frac{\sqrt{۴x^۲+۴y^۲+۴z^۲}}{۲|z|}=\frac{۴}{\sqrt{۱۶-x^۲-y^۲}}$$

پس، بنابر تذکر ۸. ۳. ۵

$$S=۲\int_R\int\frac{۴}{\sqrt{۱۶-x^۲-y^۲}}dA$$

$$=۸\int_{-\pi/۲}^{\pi/۲}\int_{۰}^{۴\cos\theta}\frac{۱}{\sqrt{۱۶-r^۲}}r\,dr\,d\theta \qquad \text{(در مختصات قطبی)}$$

$$=۸\int_{-\pi/۲}^{\pi/۲}\left[-(۱۶-r^۲)^{\frac{۱}{۲}}\right]_{۰}^{۴\cos\theta}d\theta$$

$$=۸\int_{-\pi/۲}^{\pi/۲}(۴-۴\sin\theta)d\theta$$

$$=\left[۸(۴\theta+۴\cos\theta)\right]_{-\pi/۲}^{\pi/۲}=۳۲\pi$$

۹. بنابر فرمول ۸.۳.۸، داریم

$$S=۲\pi\int_{۰}^{۱}f(x)\sqrt{\left[f'(x)\right]^۲+۱}\,dx$$

$$=۲\pi\int_{۰}^{۱}x^۳\sqrt{۹x^۴+۱}\,dx$$

$$=\frac{\pi}{۲۷}\left[(۹x^۴+۱)^{۳/۲}\right]_{۰}^{۱}=\frac{\pi(۱۰\sqrt{۱۰}-۱)}{۲۷}$$

۱۰. بنابر فرمول ۸.۳.۸، داریم

$$S = ۲\pi \int_{۴}^{۵} f(x)\sqrt{\left[f'(x)\right]^{۲} + ۱}\, dx$$

$$= ۲\pi \int_{۴}^{۵} (\frac{۱}{۳}x^{\frac{۳}{۲}} - x^{\frac{۱}{۲}})(\frac{۱}{۲}x^{\frac{۱}{۲}} + \frac{۱}{۲}x^{-\frac{۱}{۲}})\, dx$$

$$= ۲\pi \int_{۴}^{۵} (\frac{۱}{۶}x^{۲} - \frac{۱}{۳}x - \frac{۱}{۲})\, dx = \frac{۲۵\pi}{۹}$$

تمرینهای ۴.۸

.۱

$$\int_{۰}^{۳}\int_{-۱}^{۱}\int_{۲}^{۴}(y - xz)dz\,dy\,dx = \int_{۰}^{۳}\int_{-۱}^{۱}\left[yz - \frac{xz^{۲}}{۲}\right]_{۲}^{۴} dy\,dx$$

$$= \int_{۰}^{۳}\int_{-۱}^{۱} (۲y - ۶x)dy\,dx$$

$$= \int_{۰}^{۳} [\,y^{۲} - ۶xy\,]_{-۱}^{۱} dx$$

$$= \int_{۰}^{۳} -۱۲x\,dx = [\,-۶x^{۲}]_{۰}^{۳} = -۵۴$$

.۲

$$\int_{۰}^{۳}\int_{-۱}^{۱}\int_{۲}^{۴}(y - xz)\,dy\,dx\,dz = \int_{۰}^{۳}\int_{-۱}^{۱}\left[\frac{y^{۲}}{۲} - xyz\right]_{۲}^{۴} dx\,dz$$

$$= \int_{۰}^{۳}\int_{-۱}^{۱} (۶ - ۲xz)dx\,dz$$

$$= \int_{۰}^{۳} [\,۶x - x^{۲}z\,]_{-۱}^{۱} dz$$

$$= \int_{۰}^{۳} ۱۲dz = ۳۶$$

.۳

$$\int_{-۱}^{۱}\int_{۰}^{x}\int_{x-y}^{x+y}(z-۲x-y)\,dz\,dy\,dx$$

$$=\int_{-۱}^{۱}\int_{۰}^{x}\left[\frac{z^{۲}}{۲}-۲xz-yz\right]_{x-y}^{x+y}dy\,dx$$

$$=\int_{-۱}^{۱}\int_{۰}^{x}(-۲y^{۲}-۲xy)\,dy\,dx$$

$$=\int_{-۱}^{۱}\left[-\frac{۲}{۳}y^{۳}-xy^{۲}\right]_{۰}^{x}dx$$

$$=\int_{-۱}^{۱}-\frac{۵}{۳}x^{۳}\,dx=-\left[\frac{۵}{۱۲}x^{۴}\right]_{-۱}^{۱}=۰$$

.۴

$$\int_{۰}^{\pi/۲}\int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{\sqrt{۱-x^{۲}}}x\cos z\,dy\,dx\,dz$$

$$=\int_{۰}^{\pi/۲}\int_{۰}^{۱}\left[(x\cos z)y\right]_{۰}^{\sqrt{۱-x^{۲}}}dx\,dz$$

$$=\int_{۰}^{\pi/۲}\int_{۰}^{۱}x\cos z\sqrt{۱-x^{۲}}\,dx\,dz$$

$$=\int_{۰}^{\pi/۲}\left[-\frac{۱}{۳}\cos z\,(۱-x^{۲})^{۳/۲}\right]_{۰}^{۱}dz$$

$$=\int_{۰}^{\pi/۲}\frac{۱}{۳}\cos z\,dz$$

$$=\left[\frac{۱}{۳}\sin z\right]_{۰}^{\pi/۲}=\frac{\pi}{۶}$$

.۵

$$\int_{۰}^{\ln ۳}\int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{y}(z^{۲}+۱)e^{y^{۲}}dx\,dz\,dy$$

$$=\int_{۰}^{\ln ۳}\int_{۰}^{۱}(z^{۲}+۱)y\,e^{y^{۲}}\,dz\,dy$$

$$=\int_{۰}^{\ln ۳}\left[\left(\frac{z^{۳}}{۳}+z\right)ye^{y^{۲}}\right]_{۰}^{۱}dy$$

$$=\int_{۰}^{\ln ۳}\frac{۴}{۳}y\,e^{y^{۲}}dy$$

$$=\left[\frac{۲}{۳}e^{y^{۲}}\right]_{۰}^{\ln ۳}$$

$$=\frac{۲}{۳}e^{(\ln ۳)^{۲}}-\frac{۲}{۳}$$

.۶

$$\int_{۰}^{\sqrt{\pi/۶}}\int_{۰}^{y}\int_{۰}^{y}(۱+y^{۲}z\cos xz)dx\,dz\,dy$$

$$=\int_{۰}^{\sqrt{\pi/۶}}\int_{۰}^{y}\left[x+y^{۲}\sin xz\right]_{۰}^{y}dz\,dy$$

$$=\int_{۰}^{\sqrt{\pi/۶}}\int_{۰}^{y}(y+y^{۲}\sin yz)\,dz\,dy$$

$$=\int_{۰}^{\sqrt{\pi/۶}}\left[yz-y\cos yz\right]_{۰}^{y}dy$$

$$=\int_{۰}^{\sqrt{\pi/۶}}(y^{۲}-y\cos y^{۲}+y)dy$$

$$=\left[\frac{y^{۳}}{۳}-\frac{۱}{۲}\sin y^{۲}+\frac{y^{۲}}{۲}\right]_{۰}^{\sqrt{\pi/۶}}$$

$$=\frac{\pi}{۱۸}\sqrt{\frac{\pi}{۶}}-\frac{۱}{۴}+\frac{\pi}{۱۲}$$

.۷

$$\int_{-15}^{13}\int_{1}^{e}\int_{0}^{1/\sqrt{x}} z(\ln x)^{2}\,dz\,dx\,dy$$

$$=\int_{-15}^{13}\int_{1}^{e}\left[\frac{z^{2}}{2}(\ln x)^{2}\right]_{0}^{1/\sqrt{x}} dx\,dy$$

$$=\int_{-15}^{13}\int_{1}^{e}\frac{1}{2}\frac{(\ln x)^{2}}{x}\,dx\,dy$$

$$=\int_{-15}^{13}\left[\frac{1}{6}(\ln x)^{3}\right]_{1}^{e} dy$$

$$=\int_{-15}^{13}\frac{1}{6}\,dy=\frac{14}{3}$$

.۸

$$\int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{\sin z} x^{2}\sin y\,dx\,dy\,dz$$

$$=\int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{\pi/2}\left[\frac{x^{3}}{3}\sin y\right]_{0}^{\sin z} dy\,dz$$

$$=\int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{\pi/2}\frac{1}{3}\sin^{3} z\sin y\,dy\,dz$$

$$=\int_{0}^{\pi/2}\left[-\frac{1}{3}\sin^{3} z\cos y\right]_{0}^{\pi/2} dz$$

$$=\int_{0}^{\pi/2}\frac{1}{3}\sin^{3} z\,dz$$

$$=\frac{1}{3}\int_{0}^{\pi/2}(1-\cos^{2} z)\sin z\,dz$$

$$=\frac{1}{3}\left[-\cos+\frac{\cos^{3} z}{3}\right]_{0}^{\pi/2}=\frac{2}{9}$$

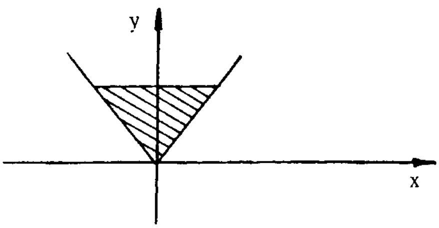
.۹

$$\int_{0}^{1}\int_{1+x}^{2x}\int_{z}^{x+z} x\,dy\,dz\,dx = \int_{0}^{1}\int_{1+x}^{2x} [\,xy\,]_{z}^{x+z}\,dz\,dx$$
$$= \int_{0}^{1}\int_{1+x}^{2x} x^{2}\,dz\,dx$$
$$= \int_{0}^{1} [\,x^{2}z\,]_{1+x}^{2x}\,dx$$
$$= \int_{0}^{1} (x^{3}-x^{2})\,dx = \left[\frac{x^{4}}{4}-\frac{x^{3}}{3}\right]_{0}^{1} = -\frac{1}{12}$$

.۱۰

$$\int_{-1}^{2}\int_{1}^{x^{2}}\int_{0}^{x+y} 2x^{2}y\,dz\,dy\,dx = \int_{-1}^{2}\int_{1}^{x^{2}} [\,2x^{2}yz\,]_{0}^{x+y}\,dy\,dx$$
$$= \int_{-1}^{2}\int_{1}^{x^{2}} (2x^{3}y+2x^{2}y^{2})\,dy\,dx$$
$$= \int_{-1}^{2} \left[x^{3}y^{2}+\frac{2}{3}x^{2}y^{3}\right]_{1}^{x^{2}} dx$$
$$= \int_{-1}^{2} (x^{7}+\frac{2}{3}x^{8}-x^{3}-\frac{2}{3}x^{2})\,dx$$
$$= \left[\frac{x^{8}}{8}+\frac{2}{27}x^{9}-\frac{x^{4}}{4}-\frac{2}{9}x^{3}\right]_{-1}^{2} = \frac{513}{8}$$

۱۱. سطح مقطع ناحیهٔ D با صفحهٔ xy در شکل ۱.۴.۸ سایه زده شده است.



شکل ۱.۴.۸

در نتیجه، بنابر فرمول ۴.۴.۸، داریم

$$\iint_D\int e^y dv=\int_۰^۱\int_{-y}^{y}\int_۰^{y} e^y\, dz\, dx\, dy$$

$$=\int_۰^۱\int_{-y}^{y}[\,e^y z\,]_۰^{y}\, dx\, dy$$

$$=\int_۰^۱\int_{-y}^{y} y\, e^y dx\ dy$$

$$=\int_۰^۱[\,ye^y x\,]_{-y}^{y}\, dy$$

$$=\int_۰^۱ ۲y^۲ e^y dy=[\,۲e^y y^۲-۴e^y y+۴e^y\,]_۰^۱=۲e-۴$$

.۱۲

$$\iint_D\int ye^{xy}\, dv=\int_۰^۲\int_۱^۳\int_{-۲}^{۰} ye^{xy}\, dz\, dx\, dy$$

$$=\int_۰^۲\int_۱^۳ ۲y\, e^{xy}\, dx\, dy$$

$$=\int_۰^۲[\,۲e^{xy}\,]_۱^۳ dy$$

$$=\int_۰^۲(۲e^{۳y}-۲e^y)dy$$

$$=\left[\frac{۲}{۳}e^{۳y}-۲e^y\right]_۰^۲=\frac{۲}{۳}e^۶-۲e^۲+\frac{۴}{۳}$$

۱۳. سطح مقطع صفحهٔ xy با مخروط $z=\sqrt{۱-x^۲-y^۲}$، دایرهٔ $x^۲+y^۲=۱$ است. بنابراین

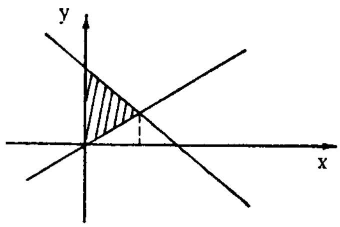
$$\int\!\!\int_D\!\int zy\,dv=\int_{-۱}^{۱}\int_{-\sqrt{۱-x^۲}}^{\sqrt{۱-x^۲}}\int_{۰}^{\sqrt{۱-x^۲-y^۲}} zy\,dz\,dy\,dx$$

$$=\int_{-۱}^{۱}\int_{-\sqrt{۱-x^۲}}^{\sqrt{۱-x^۲}}\left[\frac{z^۲}{۲}y\right]_{۰}^{\sqrt{۱-x^۲-y^۲}} dy\ dx$$

$$=\frac{۱}{۲}\int_{-۱}^{۱}\int_{-\sqrt{۱-x^۲}}^{\sqrt{۱-x^۲}}(y-yx^۲-y^۳)\,dy\,dx$$

$$=\frac{۱}{۲}\int_{-۱}^{۱}\left[\frac{y^۲}{۲}-\frac{y^۲}{۲}x^۲-\frac{y^۴}{۴}\right]_{-\sqrt{۱-x^۲}}^{\sqrt{۱-x^۲}} dx=۰$$

۱۴. ناحیهٔ D ازبالا به‌صفحهٔ $z=۱۰+x+y$ وازپایین به‌مثلث سایه‌زده درشکل ۲.۴.۸ محدوداست.



شکل ۲.۴.۸

بنابراین، حجم D برابر است با

$$v=\int\!\!\int\!\!\int_D \int ۱dv=\int_{۰}^{۱}\int_{x}^{۲-x}\int_{۰}^{۱۰+x+y} dz\ dy\ dx$$

$$=\int_{۰}^{۱}\int_{x}^{۲-x}(۱۰+x+y)\,dy\ dx$$

$$=\int_{۰}^{۱}\left[۱۰y+xy+\frac{y^۲}{۲}\right]_{x}^{۲-x} dx$$

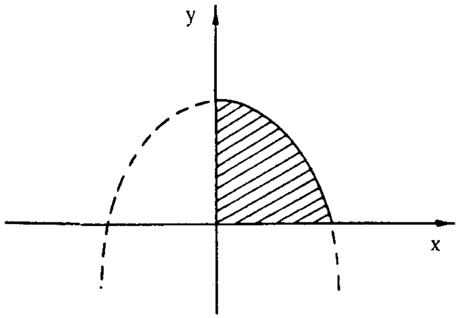
$$=\int_{۰}^{۱}(-۲x^۲-۲۰x+۲۲)\,dx$$

$$=\left[-\frac{۲}{۳}x^۳-۱۰x^۲+۲۲x\right]_{۰}^{۱}=\frac{۳۴}{۳}$$

۱۵. نقطهٔ (x, y, z) متعلق به محل تلاقی این دو رویه است اگر

$$x^2+2y+1=y+2 \quad \text{یا} \quad y=1-x^2$$

پس سطح مقطع D با صفحه xy ناحیه سایه زده در شکل ۸. ۴. ۳ است.



شکل ۳.۴.۸

بنابراین، حجم D برابر است با

$$v=\iint_D\int 1dv=\int_0^1\int_x^{1-x^2}\int_{x^2+2y+1}^{y+2} dz\, dy\, dx$$

$$=\int_0^1\int_0^{1-x^2}[\,z\,]_{x^2+2y+1}^{y+2}\, dy dx$$

$$=\int_0^1\int_0^{1-x^2}(1-x^2-y)\, dy\, dx$$

$$=\int_0^1\left[y-x^2y-\frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x^2} dx$$

$$=\int_0^1\left(\frac{1}{2}-x^2-\frac{x^4}{2}\right)dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{10}\right]_0^1=\frac{4}{15}$$

تمرینهای ۵.۸

۱. $r=\sin\theta=-۴$

۲. $۵z=r\cos\theta$

۳. $r(\cos\theta+\sin\theta)+z=۳$

۴. $r^{۲}+z^{۲}=۱۶$

۵. $r^{۲}+z=۱$

۶. $۴r^{۲}-z^{۲}=۰$ یا $z=۲r$

۷.

$$\int_{۰}^{۲\pi}\int_{۱}^{۲}\int_{۰}^{۵}e^{z}r\,dz\,dr\,d\theta=\int_{۰}^{۲\pi}\int_{۱}^{۲}\left[e^{z}r\right]_{۰}^{۵}dr\,d\theta$$

$$=\int_{۰}^{۲\pi}\int_{۱}^{۲}r(e^{۵}-۱)\,dr\,d\theta$$

$$=\int_{۰}^{۲\pi}\left[\frac{r^{۲}}{۲}(e^{۵}-۱)\right]_{۱}^{۲}d\theta$$

$$=\int_{۰}^{۲\pi}\frac{۳}{۲}(e^{۵}-۱)\,d\theta$$

$$=\left[\frac{۳}{۲}(e^{۵}-۱)\theta\right]_{۰}^{۲}=۳\pi(e^{۵}-۱)$$

۸.

$$\int_{۰}^{\pi/۲}\int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{\sqrt{۱-r^{۲}}}r\sin\theta\,dz\,dr\,d\theta=\int_{۰}^{\pi/۲}\int_{۰}^{۱}\left[(r\sin\theta)z\right]_{۰}^{\sqrt{۱-r^{۲}}}dr\,d\theta$$

$$=\int_{۰}^{\pi/۲}\int_{۰}^{۱}\sin\theta\,(r\sqrt{۱-r^{۲}})\,dr\,d\theta$$

$$=-\frac{۱}{۳}\int_{۰}^{\pi/۲}\left[\sin\theta(۱-r^{۲})^{۳/۲}\right]_{۰}^{۱}$$

$$=\frac{۱}{۳}\int_{۰}^{\pi/۲}\sin\theta\,d\theta$$

$$=\left[-\frac{۱}{۳}\cos\theta\right]_{۰}^{\pi/۲}=\frac{۱}{۳}$$

.۹

$$\int_{-\pi/۲}^{۰}\int_{۰}^{۲\sin\theta}\int_{۰}^{r^۲} r^۲\cos\theta\,dz\,dr\,d\theta=\int_{-\pi/۲}^{۰}\int_{۰}^{۲\sin\theta} r^۴\cos\theta\,dr\,d\theta$$

$$=\int_{-\pi/۲}^{۰}\left[\frac{r^۵}{۵}\cos\theta\right]_{۰}^{۲\sin\theta}d\theta$$

$$=\frac{۳۲}{۵}\int_{-\pi/۲}^{۰}\sin^۵\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$=\frac{۳۲}{۵}\left[\frac{\sin^۶\theta}{۶}\right]_{-\pi/۲}^{۰}=-\frac{۱۶}{۱۵}$$

.۱۰

$$\int_{-\pi/۴}^{\pi/۴}\int_{۰}^{۱-۲\cos ۲\theta}\int_{۰}^{۱} r\sin\theta\,dz\,dr\,d\theta=\int_{-\pi/۴}^{\pi/۴}\int_{۰}^{۱-۲\cos ۲\theta} r\sin\theta\,dr\,d\theta$$

$$=\int_{-\pi/۴}^{\pi/۴}\left[\frac{r^۲}{۲}\sin\theta\right]_{۰}^{۱-۲\cos ۲\theta}d\theta$$

$$=\frac{۱}{۲}\int_{-\pi/۴}^{\pi/۴}(۱-۲\cos ۲\theta)^۲\sin\theta\,d\theta$$

$$=\frac{۱}{۲}\int_{-\pi/۴}^{\pi/۴}(۳-۴\cos^۲\theta)^۲\sin\theta\,d\theta$$

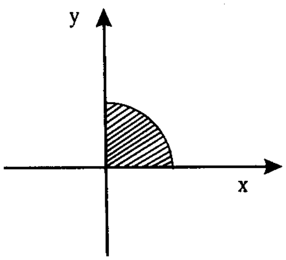
$$=\frac{۱}{۲}\int_{-\pi/۴}^{\pi/۴}(۹-۲۴\cos^۲\theta+۱۶\cos^۴\theta)\sin\theta\,d\theta$$

$$=\frac{۱}{۲}\left[-۹\cos\theta+۸\cos^۳\theta-\frac{۱۶}{۵}\cos^۵\theta\right]_{-\pi/۴}^{\pi/۴}=۰$$

.۱۱ سطح مقطع این جسم با صفحهٔ xy در شکل ۸. ۵. ۱ نشان داده شده است. چون ناحیه D از بالا به نمودار $z^۲=۱-x^۲-y^۲=۱-r^۲$ محدود است،

$$\iiint_D z\,dv=\int_0^{\pi/2}\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-r^2}} z\,r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{\pi/2}\int_0^1 r\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{\sqrt{1-r^2}} dr\,d\theta$$



$$=\int_0^{\pi/2}\int_0^1 \frac{1}{2}r(1-r^2)\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{\pi/2}\left[-\frac{1}{8}(1-r^2)\right]_0^1 d\theta$$

$$=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{8}\,d\theta=\left[\frac{1}{8}\theta\right]_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{16}$$

۱۲. سطح مقطع D با صفحهٔ xy دایره $r=\cos\theta$ است، D از بالا به نمودار $z=\sqrt{1-x^2-y^2}=\sqrt{1-r^2}$ محدود است. پس در مختصات استوانه‌ای، داریم

$$\iiint_D yz\,dv=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{\cos\theta}\int_0^{\sqrt{1-r^2}}(r\sin\theta)z\,r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{\cos\theta}\left[r^2\sin\theta\frac{z^2}{2}\right]_0^{\sqrt{1-r^2}} dr\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{\cos\theta}\sin\theta.r^2(1-r^2)dr\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin\theta\left[\frac{r^3}{3}-\frac{r^5}{5}\right]_0^{\cos\theta} d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin\theta\left(\frac{\cos^3\theta}{3}-\frac{\cos^5\theta}{5}\right)d\theta$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{\cos^4\theta}{12}-\frac{\cos^6\theta}{30}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}=0$$

۱۳. به آسانی محاسبه می‌شود که محل تلاقی دو رویهٔ داده شده دایرهٔ $r=1$ (در صفحه $z=1$) است. چون D از بالا به نمودار $z=\sqrt{2-x^2-y^2}=\sqrt{2-r^2}$ و از پایین به $z=x^2+y^2=r^2$

محدود است،

$$V=\iiint_D 1\,dv=\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r^2}^{\sqrt{1-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^1 (r\sqrt{2-r^2}-r^3)\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{3}(2-r^2)^{3/2}-\frac{r^4}{4}\right]_0^1 d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{7}{12}\right)d\theta$$

$$=\left[\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{7}{12}\theta\right)\right]_0^{2\pi}=2\pi\left(\frac{2\sqrt{2}}{2}-\frac{7}{12}\right)$$

۱۴. محل تلاقی سهمیوار داده شده و صفحه $z=-3$ دایره $x^2+y^2=4$ (یا در مختصات قطبی، $r=2$) است. چون $z=1-x^2-y^2=1-r^2$،

$$V=\iiint_D 1\,dv=\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{-3}^{1-r^2} r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^2 r(4-r^2)\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[2r^2-\frac{r^3}{3}\right]_0^2 d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi} 4\,d\theta=[\,4\theta\,]_0^{2\pi}=8\pi$$

۱۵. محل تلاقی این دو رویه دایرهٔ $r=2$ (در صفحه $z=2$) است. چون

$$z^2=x^2+y^2 \Rightarrow z^2=r^2$$
$$x^2+y^2+z^2-4z=0 \Rightarrow (z-2)^2=4-r^2$$

پس D از پایین به نمودار $z=r$ و از بالا به نمودار $z=2+\sqrt{4-r^2}$ محدود است. بنابراین

$$V=\iiint_D ۱dv=\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{۲}\int_r^{۲+\sqrt{۴-r^۲}} r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$=\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{۲} r(۲+\sqrt{۴-r^۲}-r)\,dr\,d\theta$$

$$=\int_۰^{۲\pi}\left[r^۲-\frac{۱}{۳}(۴-r^۲)^{۳/۲}-\frac{r^۳}{۳}\right]_۰^{۲} d\theta$$

$$=\int_۰^{۲\pi} ۴d\theta=[۴\theta]_۰^{۲\pi}=۸\pi$$

تمرینهای ۸. ۶

۱. چون $\rho=۱$، $\phi=\frac{\pi}{۲}$ و $\theta=\frac{\pi}{۶}$،

$$x=۱.\sin\frac{\pi}{۲}\cos\frac{\pi}{۶}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$y=۱.\sin\frac{\pi}{۲}\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

$$z=۱.\cos\frac{\pi}{۲}=۰$$

۲. چون $\rho=۵$، $\phi=\frac{\pi}{۲}$ و $\theta=۰$

$$x=۵\sin\frac{\pi}{۲}\cos ۰=۵$$

$$y=۵\sin\frac{\pi}{۲}\sin ۰=۰$$

$$z=۵\cos\frac{\pi}{۲}=۰$$

۳. چون $x=۱$، $y=۰$ و $z=۱$، پس $r=\sqrt{x^۲+y^۲}=۱$ و $\rho=\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}=\sqrt{۲}$. در نتیجه

$$x=r\cos\theta\Rightarrow\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{۱}{۱}=۱\Rightarrow\theta=۰$$

$$z=\rho\cos\phi\Rightarrow\cos\phi=\frac{z}{\rho}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow\phi=\frac{\pi}{۴}$$

بنابراین، مختصات کروی این نقطه عبارت است از $(\sqrt{۲},\frac{\pi}{۴},۰)$.

۴. چون $x=۲$، $y=۲$ و $z=\frac{۲\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}$، پس

$$\rho=\sqrt{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}}=۴\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}} \quad \text{و} \quad r=\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}=۲\sqrt{۲}$$

در نتیجه

$$x=r\cos\theta \Rightarrow \cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{۲}{۲\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow \theta=\frac{\pi}{۴}$$

$$z=\rho\cos\phi \Rightarrow \cos\phi=\frac{z}{\rho'}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \phi=\frac{\pi}{۳}$$

.۵

$$\int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{\pi/۴}\int_{۰}^{۱}\rho^{۲}\sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta=\int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{\pi/۴}\left[\frac{\rho^{۳}}{۳}\sin\phi\right]_{۰}^{۱}d\phi\, d\theta$$

$$=\int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{\pi/۴}\frac{۱}{۳}\sin\phi\, d\phi\, d\theta$$

$$=\int_{۰}^{۲\pi}\left[-\frac{۱}{۳}\cos\phi\right]_{۰}^{\pi/۴}d\theta$$

$$=\int_{۰}^{۲\pi}\frac{۱}{۳}(۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲})\,d\theta$$

$$=\left[\frac{۱}{۳}(\frac{۲-\sqrt{۲}}{۲})\theta\right]_{۰}^{۲\pi}=\frac{\pi}{۳}(۲-\sqrt{۲})$$

.۶

$$\int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{\pi/۲}\int_{۱}^{۳}\rho^{۳}\cos\phi\sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta=\int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{\pi/۲}\left[\frac{\rho^{۴}}{۴}\cos\phi\sin\phi\right]_{۱}^{۳}d\phi\, d\theta$$

$$=\int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{\pi/۲}۲۰\cos\phi\sin\phi\, d\phi\, d\theta$$

$$=\int_{۰}^{۲\pi}[-۱۰\cos^{۲}\phi]_{۰}^{\pi/۲}d\theta$$

$$=\int_{۰}^{۲\pi}۱۰\,d\theta=[۱۰\theta]_{۰}^{۲\pi}=۲۰\pi$$

.۷

$$\int_{۰}^{\pi}\int_{\pi/۲}^{\pi}\int_{۱}^{۲}\rho^{۴}\sin^{۲}\phi\cos^{۲}\theta\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

$$=\int_{۰}^{\pi}\int_{\pi/۲}^{\pi}\left[\frac{\rho^{۵}}{۵}\sin^{۲}\phi\cos^{۲}\theta\right]_{۱}^{۲}d\phi\,d\theta$$

$$=\int_{۰}^{\pi}\int_{\pi/۲}^{\pi}\frac{۳۱}{۵}\sin^{۲}\phi\cos^{۲}\theta\,d\phi\,d\theta$$

$$=\int_{۰}^{\pi}\int_{\pi/۲}^{\pi}\frac{۳۱}{۵}\left(\frac{۱-\cos ۲\phi}{۲}\right)\cos^{۲}\theta\,d\phi\,d\theta$$

$$=\int_{۰}^{\pi}\frac{۳۱}{۱۰}\left[\left(\phi-\frac{۱}{۲}\sin ۲\phi\right)\cos^{۲}\theta\right]_{\pi/۲}^{\pi}d\theta$$

$$=\int_{۰}^{\pi}\frac{۳۱\pi}{۲۰}\cos^{۲}\theta\,d\theta=\int_{۰}^{\pi}\frac{۳۱\pi}{۲۰}\left(\frac{۱+\cos ۲\theta}{۲}\right)d\theta$$

$$=\frac{۳۱\pi}{۴۰}\left[\theta+\frac{۱}{۲}\sin ۲\theta\right]_{۰}^{\pi}=\frac{۳۱\pi^{۲}}{۴۰}$$

.۸

$$\int_{\pi/۴}^{\pi/۳}\int_{۰}^{\theta}\int_{۰}^{۹\sec\phi}\rho\cos^{۲}\phi\cos\theta\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

$$=\int_{\pi/۴}^{\pi/۳}\int_{۰}^{\theta}\left[\frac{\rho^{۲}}{۲}\cos^{۲}\phi\cos\theta\right]_{۰}^{۹\sec\phi}d\phi\,d\phi$$

$$=\int_{\pi/۴}^{\pi/۳}\int_{۰}^{\theta}\frac{۸۱}{۲}\cos\theta\,d\phi\,d\theta$$

$$=\int_{\pi/۴}^{\pi/۳}\left[\frac{۸۱}{۲}(\cos\theta)\phi\right]_{۰}^{\theta}d\theta$$

(جزء به جزء)

$$=\frac{۸۱}{۲}\int_{\pi/۴}^{\pi/۳}\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$=\frac{۸۱}{۲}[\theta\sin\theta+\cos\theta]_{\pi/۴}^{\pi/۳}$$

$$=\frac{۸۱}{۴}\pi\left(\frac{\sqrt{۳}}{۳}-\frac{\sqrt{۲}}{۴}\right)+\frac{۸۱}{۴}(۱-\sqrt{۲})$$

۹. چون معادلات این دو کره به ترتیب $\rho=۲$ و $\rho=۳$ است، پس D مجموعه نقاط (ρ, φ, θ) است، به طوری که

$$۲\leq \rho \leq ۳ \text{ ،} \quad ۰ \leq \phi \leq \pi \text{ ،} \quad ۰\leq \theta \leq ۲\pi$$

در نتیجه، بنابر قضیه ۴.۶.۸، داریم

$$\iiint_D x^۲ dV=\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\pi}\int_۲^۳(\rho^۲\sin^۲\phi\cos^۲\theta)\sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$=\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\pi}\left[\frac{\rho^۵}{۵}\sin^۳\phi\cos^۲\theta\right]_۲^۳ d\phi\, d\theta$$

$$=\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\pi}\frac{۲۱۱}{۵}\sin^۳\phi\cos^۲\theta\, d\phi\, d\theta$$

$$=\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\pi}\frac{۲۱۱}{۵}(۱-\cos^۲\phi)\sin\phi\cos^۲\theta\, d\phi\, d\theta$$

$$=\frac{۲۱۱}{۵}\int_۰^{۲\pi}\left[(-\cos\phi+\frac{۱}{۳}\cos^۳\phi)\cos^۲\theta\right]_۰^{\pi} d\theta$$

$$=\frac{۸۴۴}{۱۵}\int_۰^{۲\pi}\cos^۲\theta\, d\theta$$

$$=\frac{۸۴۴}{۱۵}\int_۰^{۲\pi}(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\cos ۲\theta)\, d\theta$$

$$=\frac{۸۴۴}{۱۵}\left[\frac{۱}{۲}\theta+\frac{۱}{۴}\sin ۲\theta\right]_۰^{۲\pi}=\frac{۸۴۴}{۱۵}\pi$$

۱۰. با استفاده از فرمولهای ۱.۶.۸، معادلات مخروط و دو کرهٔ داده شده درمختصات کروی به ترتیب عبارت‌انداز $\cot g\, \phi=\sqrt{۳}$ (یا $\phi=\frac{\pi}{۶}$) ، $\rho=۳$ و $\rho=۹$. بنابراین D مجموعهٔ نقاط (ρ, φ, θ) است به طوری که

$$۳ \leq \rho \leq ۹ \text{ ،} \quad ۰ \leq \phi \leq \frac{\pi}{۶} \text{ و} \quad ۰\leq \theta \leq ۲\pi$$

در نتیجه، بنابر قضیه ۴.۶.۸، داریم

$$\iiint_D \frac{1}{x^۲+y^۲+z^۲}dV=\int_۰^۲\int_۰^{\pi/۶}\int_{۳\rho^۲}^{۹}\frac{1}{\rho^۲}\rho^۲\sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

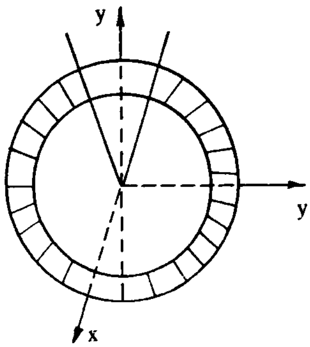
$$=\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\pi/۶} ۶\sin\phi\, d\phi\, d\theta$$

$$=\int_۰^{۲\pi}[\ -۶\cos\phi]\ _۰^{\pi/۶}\, d\theta=۰$$

$$=\int_۰^{۲\pi} ۳(۲-\sqrt{۳})d\theta=۶\pi(۲-\sqrt{۳})$$

۱۱. معادلات دو کره و مخروط داده شده در مختصات کروی به ترتیب عبارت‌اند از $\rho=۱$، $\rho=۲$ و $\phi=\frac{\pi}{۳}$ (شکل ۸. ۶. ۱) را ببینید. بنابراین D مجموعه نقاط (ρ, ϕ, θ) است به طوری که

$$۱\le \rho \le ۲\ ،\ \frac{\pi}{۳}\le \phi \le \pi\ \text{ و }\ ۰\le \theta \le ۲\pi$$



بنابراین، حجم D برابر است با:

$$\iiint_D ۱dV=\int_۰^{۲\pi}\int_{\pi/۳}^{\pi}\int_۱^۲ \rho^۲\sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$=\int_۰^{۲\pi}\int_{\pi/۳}^{\pi}\left[\frac{\rho^۳}{۳}\sin\phi\right]_۱^۲ d\phi\, d\theta$$

$$=\int_۰^{۲\pi}\int_{\pi/۳}^{\pi}\frac{۷}{۳}\sin\phi\, d\phi\, d\theta$$

$$=\int_{\circ}^{۲\pi}\left[-\frac{۷}{۳}\cos\phi\right]_{\pi/۳}^{\pi}d\theta$$

$$=\int_{\circ}^{۲\pi}\frac{۷}{۲}d\theta=\left[\frac{۷}{۲}\theta\right]_{\circ}^{۲\pi}=۷\pi$$

۱۲. معادلهٔ کرهٔ به شعاع a و مرکز O عبارت است از $\rho=a$. بنابراین، حجم آن برابر است با

$$V=\int_{\circ}^{۲\pi}\int_{\circ}^{\pi}\int_{\circ}^{a}\rho^{۲}\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

$$=\int_{\circ}^{۲\pi}\int_{\circ}^{\pi}\left[\frac{\rho^{۳}}{۳}\sin\phi\right]_{\circ}^{a}d\phi\,d\theta$$

$$=\int_{\circ}^{۲\pi}\int_{\circ}^{\pi}\frac{a^{۳}}{۳}\sin\phi\,d\phi\,d\theta$$

$$=\int_{\circ}^{۲\pi}\left[-\frac{a^{۳}}{۳}\cos\phi\right]_{\circ}^{\pi}d\theta$$

$$=\int_{\circ}^{۲\pi}\frac{۲a^{۳}}{۳}d\theta=\left[\frac{۲a^{۳}}{۳}\theta\right]_{\circ}^{۲\pi}=\frac{۴\pi a^{۳}}{۳}$$

تمرینهای ۷.۸

۱. داریم

$$m=\iint_{R}\rho(x,y)\,dA=\int_{\circ}^{۹}\int_{\circ}^{\sqrt{x}}(x+y)\,dy\,dx$$

$$=\int_{\circ}^{۹}\left[xy+\frac{y^{۲}}{۲}\right]_{\circ}^{\sqrt{x}}dx$$

$$=\int_{\circ}^{۹}\left(x^{۳/۲}+\frac{x}{۲}\right)dx=\frac{۲۳۴۹}{۲۰}$$

$$M_x = \iint_R y\rho(x,y)\,dA = \int_۰^۹ \int_۰^{\sqrt{x}} y(x+y)\,dy\,dx$$

$$= \int_۰^۹ \left[\frac{y^۲}{۲}x + \frac{y^۳}{۳}\right]_۰^{\sqrt{x}} dx$$

$$= \int_۰^۹ \left(\frac{x^۲}{۲} + \frac{۱}{۳}x^{۳/۲}\right) dx$$

$$= \left[\frac{x^۳}{۶} + \frac{۲}{۱۵}x^{۵/۲}\right]_۰^۹ = \frac{۱۵۳۹}{۱۰}$$

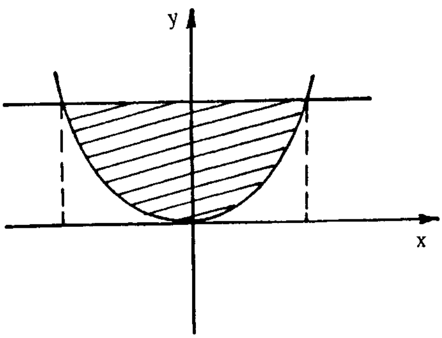
به همین ترتیب، می‌توان نشان داد که $M_y = \frac{۱۰۴۴۹}{۱۴}$. در نتیجه، مختصات مرکز جرم عبارت‌اند از

$$\bar{x} = \frac{M_x}{m} = \frac{۳۸}{۲۹} \qquad \text{و} \qquad \bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{۱۲۹۰}{۲۰۳}$$

۲. ناحیه R در شکل ۱.۷.۸ سایه زده شده است. بنابراین

$$m = \iint_R \rho(x,y)\,dA = \iint_R |x|\,dA$$

$$= \int_۰^۲ \int_{x^۲}^۴ x\,dy\,dx + \int_{-۲}^۰ \int_{x^۲}^۴ -x\,dy\,dx = ۴+۴=۸$$



شکل ۱.۷.۸

$$M_x = \iint_R y\rho(x,y)\,dA = \iint_R y\,|x|\,dA$$
$$= \int_{\circ}^{۲}\int_{x^{۲}}^{۴} yx\,dy\,dx + \int_{-۲}^{\circ}\int_{x^{۲}}^{۴} -yx\,dy\,dx$$
$$= \frac{۳۲}{۳} - \frac{۳۲}{۳} = \frac{۶۴}{۳}$$

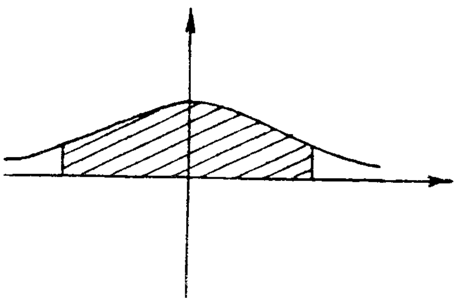
$$M_y = \iint_R x\rho(x,y)\,dA = \iint_R x\,|x|\,dA$$
$$= \int_{\circ}^{۲}\int_{x^{۲}}^{۴} x^{۲}\,dy\,dx + \int_{-۲}^{\circ}\int_{x^{۲}}^{۴} -x^{۲}\,dy\,dx$$
$$= \frac{۶۴}{۱۵} - \frac{۶۴}{۱۵} = \circ$$

جزئیات محاسبهٔ انتگرالهای بالا را به عهده دانشجویان واگذار می‌کنیم. بنابراین

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{۶۴/۳}{۸} = \frac{۸}{۳} \quad \bar{x} = \frac{M_y}{m} = \circ$$

۳. ناحیه R در شکل ۲.۷.۸ نشان داده شده است. بنابراین

$$m = \iint_R \rho(x,y)\,dA = \iint_R |xy|\,dA$$
$$= \int_{-۱}^{\circ}\int_{\circ}^{e^{-x^{۲}}} -xy\,dy\,dx + \int_{\circ}^{۱}\int_{\circ}^{e^{-x^{۲}}} xy\,dy\,dx = \frac{۱}{۴}(۱-e^{-۲})$$



شکل ۲.۷.۸

$$M_x=\iint_R y\rho(x,y)\,dA=\iint_R y\,|\,xy\,|\,dA$$

$$=\int_{-۱}^{۰}\int_{۰}^{e^{-x^۲}} -xy^۲\,dy\,dx+\int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{e^{-x^۲}} xy^۲dy\,dx$$

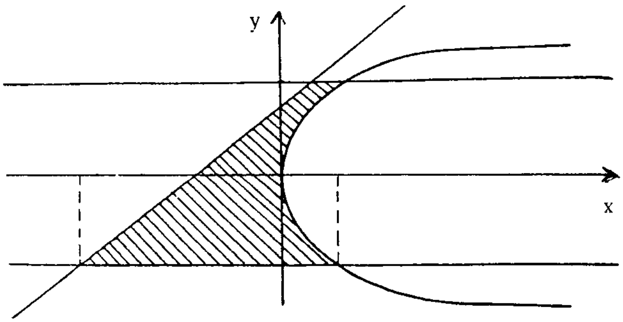
$$=\frac{۱}{۹}(۱-e^{-۳})$$

$$M_y=\iint_R x\rho(x,y)\,dA=\int_R\int x\,|\,xy\,|\,dA=۰$$

جزئیات محاسبهٔ انتگرالهای بالا را به عهده دانشجویان واگذار می‌کنیم. بنابراین

$$\bar{y}=\frac{M_x}{m}=\frac{۴}{۹}\ \frac{۱-e^{-۳}}{۱-e^{-۲}} \qquad و \qquad \bar{x}=\frac{M_y}{m}=۰$$

۴. ناحیه R در شکل ۳.۷.۸ نشان داده شده است.



شکل ۳.۷.۸

بنابراین

$$m=\int_R\int\rho(x,y)\,dA=\int_R\int dA$$

$$=\int_{-۲}^{۳}\int_{y-۲}^{y^۲} dx\,dy=\frac{۱۱۵}{۶}$$

$$M_x = \int_R\int y\,(x,y)\,dA = \int_R\int y\,dA$$

$$= \int_{-۲}^{۳}\int_{y-۲}^{y^۲} y\,dx\,dy = \frac{۱۱۵}{۱۲}$$

$$M_y = \int_R\int x\,\rho(x,y)\,dA = \int_R\int x\,dA$$

$$= \int_{-۲}^{۳}\int_{y-۲}^{y^۲} x\,dx\,dy = \frac{۵۰}{۳}$$

در نتیجه

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\frac{۱۱۵}{۱۲}}{\frac{۱۱۵}{۶}} = \frac{۱}{۲} \quad \text{و} \quad \bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\frac{۵۰}{۳}}{\frac{۱۱۵}{۶}} = ۲۰/۲۳$$

.۵

$$I_x = \int_R\int y^۲\rho(x,y)\,dA = \int_۰^۹\int_۰^{\sqrt{x}} y^۲(x+y)\,dy\,dx$$

$$= \frac{۷۵۳۳}{۲۸}$$

$$I_y = \int_R\int x^۲\rho(x,y)\,dA = \int_۰^۹\int_۰^{\sqrt{x}} x^۲(x+y)\,dy\,dx$$

$$= \frac{۴۱۵۵۳}{۸}$$

$$I_۰ = I_x + I_y = \frac{۷۵۳۳}{۲۸} + \frac{۴۱۵۵۳}{۸} = \frac{۳۰۵۹۳۷}{۵۶}$$

.۶

$$I_x = \int_R\int y^۲\rho(x,y)\,dA = \int_R\int y^۲\,|\,x\,|\,dA$$

$$= \int_۰^۲\int_{x^۲}^{۴} y^۲x\,dy\,dx + \int_{-۲}^{۰}\int_{x^۲}^{۴} -y^۲x\,dy\,dx$$

$$= ۶۴$$

$$I_y=\iint_R x^{۲}\rho(x,y)\,dA=\iint_R x^{۲}\,|x|\,dA$$

$$=\int_{۰}^{۲}\int_{x^{۲}}^{۴} x^{۳}\,dy\,dx+\int_{-۲}^{۰}\int_{x^{۲}}^{۴} -x^{۳}\,dy\,dx$$

$$=\frac{۳۲}{۳}$$

در نتیجه $\qquad I_{۰}=I_x+I_y=\dfrac{۲۲۴}{۳}$

۷. محل تلاقی دو سهمیوار داده شده مجموعهٔ نقاط (x, y, z) است به طوری که

$$x^{۲}+y^{۲}=۱-x^{۲}-y^{۲} \quad \text{یا} \quad x^{۲}+y^{۲}=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین، جرم این جسم برابر است با

$$m=\iiint_D \rho(x,y,z)\,dv=\iiint_D (۲-z)\,dv$$

$$=\int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{۱/\sqrt{۲}}\int_{r^{۲}}^{۱-r^{۲}} (۲-z)r\,dz\,dr\,d\theta \qquad \text{(در مختصات استوانه‌ای)}$$

$$=\int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{۱/\sqrt{۲}}\left[(۲z-\frac{z^{۲}}{۲})r\right]_{r^{۲}}^{۱-r^{۲}} dr\,d\theta$$

$$=\int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{۱/\sqrt{۲}} \frac{۳r-۶r^{۳}}{۲}\,dr\,d\theta$$

$$=\frac{۳}{۴}\int_{۰}^{۲\pi}\left[r^{۲}-r^{۴}\right]_{۰}^{۱/\sqrt{۲}}\,d\theta$$

$$=\frac{۳}{۱۶}\int_{۰}^{۲\pi} d\theta=\left[\frac{۳}{۱۶}\theta\right]_{۰}^{۲\pi}=\frac{۳\pi}{۸}$$

می‌توان نشان داد که $M_{xz}=M_{yz}=۰$. همچنین، داریم

$$M_{xy} = \iiint_D z\rho(x,y,z)\,dv$$

$$= \int_{\circ}^{۲\pi}\int_{\circ}^{۱/\sqrt{۲}}\int_{r^{۲}}^{۱-r^{۲}} z(۲-z)r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$= \int_{\circ}^{۲\pi}\int_{\circ}^{۱/\sqrt{۲}} \left[(z^{۲}-\frac{z^{۳}}{۳})r\right]_{r^{۲}}^{۱-r^{۲}} dr\,d\theta$$

$$= \frac{۱}{۳}\int_{\circ}^{۲\pi}\int_{\circ}^{۱/\sqrt{۲}} (۲r-۳r^{۳}-۳r^{۵}+۲r^{۷})dr\,d\theta$$

$$= \frac{۱}{۳}\int_{\circ}^{۲\pi}\left[r^{۲}-\frac{۳}{۴}r^{۴}-\frac{۱}{۲}r^{۶}+\frac{۱}{۴}r^{۸}\right]_{\circ}^{۱/\sqrt{۲}} d\theta$$

$$= \frac{۱}{۳}\int_{\circ}^{۲\pi} \frac{۱۷}{۶۴}d\theta = \frac{۱۷}{۹۶}\pi$$

پس

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{۱۷\frac{\pi}{۹۶}}{۳\frac{\pi}{۸}} = \frac{۱۷}{۳۶} \quad ، \quad \bar{y} = \circ \quad ، \quad \bar{x} = \circ$$

۸. جرم این جسم برابر است با

$$m = \iiint_D \rho(x,y,z)\,dv$$

$$= \int_{\circ}^{۲\pi}\int_{\circ}^{\pi/۲}\int_{\circ}^{۳} (\rho\sin\phi)\rho^{۲}\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

$$= \int_{\circ}^{۲\pi}\int_{\circ}^{\pi/۲}\left[\frac{\rho^{۴}}{۴}\sin^{۲}\phi\right]_{\circ}^{۳} d\phi\,d\theta$$

$$= \frac{۸۱}{۴}\int_{\circ}^{۲\pi}\int_{\circ}^{\pi/۲} \frac{۱-\cos ۲\phi}{۲}d\phi\,d\theta$$

$$= \frac{۸۱}{۸} \int_{۰}^{۲\pi} \left[\phi - \frac{۱}{۲} \sin ۲\phi \right]_{۰}^{\pi/۲} d\theta$$

$$= \frac{۳۱}{۱۶} \pi \int_{۰}^{۲\pi} d\theta = \left[\frac{۸۱}{۱۶} \pi\theta \right]_{۰}^{۲\pi} = \frac{۸۱}{۸} \pi^{۲}$$

می‌توان نشان داد که $M_{xz} = M_{xz} = ۰$. همچنین، داریم

$$M_{xy} = \iiint_{D} z\rho(x,y,z)\,dv$$

$$= \int_{۰}^{۲\pi} \int_{۰}^{\pi/۲} \int_{۰}^{۳} (\rho \cos\phi)(\rho \sin\phi)\rho^{۲} \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

$$= \int_{۰}^{۲\pi} \int_{۰}^{\pi/۲} \left[\frac{\rho^{۵}}{۵} \sin^{۲}\phi \cos\phi \right]_{۰}^{۳} d\phi \, d\theta$$

$$= \frac{۲۴۳}{۵} \int_{۰}^{۲\pi} \int_{۰}^{\pi/۲} \sin^{۲}\phi \cos\phi \, d\phi \, d\theta$$

$$= \frac{۲۴۳}{۵} \int_{۰}^{۲\pi} \left[\frac{۱}{۳} \sin^{۳}\phi \right]_{۰}^{\pi/۲} d\theta$$

$$= \frac{۸۱}{۵} \int_{۰}^{۲\pi} d\theta = \left[\frac{۸۱}{۵} \theta \right]_{۰}^{۲\pi} = \frac{۱۶۲}{۵} \pi$$

بنابراین $\bar{y} = \bar{x} = ۰$ و

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{\frac{۱۶۲}{۵}}{\frac{۸۱\pi^{۲}}{۸}} = \frac{۱۶}{۵\pi}$$

۹. داریم

$$M_{xy} = \iiint_{D} z\rho(x,y,z)\,dV$$

$$= \int_{۰}^{۲\pi} \int_{۰}^{\sqrt{۲}} \int_{-\sqrt{۴-r^{۲}}}^{\sqrt{۴-r^{۲}}} z(z^{۲}+۱) r \, dz \, dr \, d\theta$$

$$= \int_{۰}^{۲\pi} \int_{۰}^{\sqrt{۲}} \left[\left(\frac{z^{۴}}{۴} + \frac{z^{۲}}{۲} \right) r \right]_{-\sqrt{۴-r^{۲}}}^{\sqrt{۴-r^{۲}}} dr \, d\theta = ۰$$

به همین ترتیب $M_{xz}= M_{yz}=0$. بنابراین مرکز جرم این جسم در $(0,\ 0,\ 0)$ است.

۱۰. مانند مسألهٔ نمونه‌ای ۸. ۷. ۱۸ حل کنید.

۱۱. در مختصات کروی، داریم

$$I_x=\iiint_D (y^2+z^2)\rho(x,y,z)\,dV$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{5} 5(\rho^2\sin^2\phi\sin^{2\theta}+\rho^2\cos^2\phi)\rho^2\sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left[\rho^5(\sin^2\theta+\cos^2\phi\cos^2\theta)\sin\phi\right]_0^5 d\phi\, d\theta$$

$$=3125\int_0^{2\pi}\left[-\sin^2\theta\cos\phi-\frac{1}{3}\cos^3\phi\cos^2\theta\right]_0^{\pi} d\theta$$

$$=3125\int_0^{2\pi}(2\sin^2\theta+\frac{2}{3}\cos^2\theta)\,d\theta=\frac{25000}{3}\pi$$

به همین ترتیب $\pi\ \frac{25000}{3} = I_y= I_z$ به دست می‌آید.

۱۲. در مختصات استوانه‌ای، داریم

$$I_x=\iiint_D (y^2+z^2)\rho(x,y,z)\,dv$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_0^{6} 2(r^2\sin^2\theta+z^2)r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\left[2(r^2 z\sin^2\theta+\frac{1}{3}z^3)r\right]_0^6 dr\,d\theta$$

$$=2\int_0^{2\pi}\int_0^{2}(6r^3\sin^2\theta+72r)\,dr\,d\theta=624\pi$$

به همین ترتیب $I_y=624\pi$ و

$$I_z = \iiint_D (x^۲+y^۲)\rho(x,y,z)\,dV$$

$$= \int_۰^{۲\pi}\int_۰^۲\int_۰^۶ (۲r^۲)\,rdz\,dr\,d\theta$$

$$= \int_۰^{۲\pi}\int_۰^۲ ۱۲r^۳\,dr\,d\theta$$

$$= \int_۰^{۲\pi}\left[\,۳r^۴\right]_۰^۲ d\theta = ۴۸\int_۰^{۲\pi} d\theta = ۹۶\pi$$

تمرینهای فصل ۹

تمرینهای ۱.۹

.۱

$$\operatorname{curl}\vec{F}=\nabla\times\vec{F}=\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)\vec{k}$$

$$=\left(\frac{-۲xy}{(x^{۲}+y^{۲})^{۲}}-\frac{-۲xy}{(x^{۲}+y^{۲})^{۲}}\right)\vec{k}=\vec{o}$$

$$\operatorname{div}\vec{F}=\nabla.\vec{F}=\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}$$

$$=\frac{y^{۲}-x^{۲}}{(x^{۲}+y^{۲})^{۲}}+\frac{x^{۲}-y^{۲}}{(x^{۲}+y^{۲})^{۲}}=۰$$

.۲

$$\operatorname{curl}\vec{F}=\nabla\times F=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y & z & x\end{vmatrix}$$

$$=-\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$$

$$\operatorname{div}\vec{F}=\nabla.\vec{F}=\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}$$

$$=۰+۰+۰=۰$$

.۳

$$\operatorname{curl}\vec{F}=\nabla\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ -\frac{x}{z} & -\frac{y}{z} & \frac{۱}{z}\end{vmatrix}$$

$$=-\frac{y}{z^{۲}}\,\vec{i}+\frac{x}{z^{۲}}\,\vec{j}$$

$$div\,F=\nabla.F=\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}$$

$$=-\frac{۱}{z}-\frac{۱}{z}-\frac{۱}{z^{۲}}=-\frac{۲}{z}-\frac{۱}{z^{۲}}$$

.۴

$$\operatorname{curl}\vec{F}=\nabla\vec{F}=\begin{vmatrix}i & j & k\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ e^{x}\cos y & e^{x}\sin y & z\end{vmatrix}$$

$$=\circ\vec{i}+\circ\vec{j}+(e^{x}\sin y+e^{x}\sin y)\vec{k}$$

$$=۲e^{x}\sin y\vec{k}$$

$$\operatorname{div}\vec{F}=\frac{\partial}{\partial x}\ (e^{x}\cos y)+\frac{\partial}{\partial y}(e^{x}\sin y)+\frac{\partial}{\partial z}z$$

$$=e^{x}\cos y+e^{x}\cos y+۱=۲e^{x}\cos y+۱$$

.۵ داریم $\frac{\partial f}{\partial x}=y$ و $\frac{\partial f}{\partial y}=x$. در نتیجه

$$\nabla^{۲}f=\frac{\partial^{۲}f}{\partial x^{۲}}+\frac{\partial^{۲}F}{\partial y^{۲}}=\circ$$

.۶ چون $\frac{\partial f}{\partial x}=۲x$ ، $\frac{\partial f}{\partial y}=۲y$ ، $\frac{\partial f}{\partial z}=-۴z$ ، داریم

$$\nabla^{۲}f=\frac{\partial^{۲}f}{\partial x^{۲}}+\frac{\partial^{۲}F}{\partial y^{۲}}+\frac{\partial^{۲}F}{\partial z^{۲}}$$

$$=۲+۲-۴=\circ$$

.۷ چون

$$\frac{\partial M}{\partial y}=x\cos xy\neq\frac{\partial N}{\partial x}=-y\sin xy$$

$\vec{F}$ گرادیان هیچ تابعی نیست.

۸. چون

$$\text{curl}\vec{F}=\nabla\times\vec{F}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ۲xyz & x^۲z & x^۲y+۱ \end{vmatrix}$$

$$=(x^۲-x^۲)\vec{i}+(۲xy-۲xy)\vec{j}+(۲xz-۲xz)\vec{k}=\vec{۰}$$

و دامنه $\vec{F}$ تمام فضاست، $\vec{F}$ گرادیان یک تابع است. فرض کنیم $\vec{F}=$ grad f. چون

$$\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}=\text{grad } f$$

$$=۲xyz\vec{i}+x^۲z\vec{j}+(x^۲y+۱)\vec{k}$$

پس

$$\frac{\partial f}{\partial z}=x^۲y+۱ \text{ و } ،\frac{\partial f}{\partial y}=x^۲z ،\frac{\partial f}{\partial x}=۲xyz \qquad (*)$$

با انتگرالگیری از معادله اول (*) نسبت به x، داریم

$$f(x,y,z)=x^۲yz+g(y,z)$$

که در آن g نسبت به x ثابت است. مشتق جزئی اول این عبارت نسبت به y برابر است با

$$\frac{\partial f}{\partial y}=x^۲z+\frac{\partial g}{\partial y}$$

با مقایسهٔ این عبارت و معادله دوم (*)، داریم

$$\frac{\partial g}{\partial y}=۰$$

در نتیجه g نسبت به y ثابت است. بنابراین

$$f(x,y,z)=x^۲yz+h(z)$$

مشتق جزئی اول این عبارت نسبت به z برابر است با

$$\frac{\partial f}{\partial z}=x^۲y+\frac{dh}{dz}$$

با مقایسهٔ این عبارت و معادله سوم (*) ، داریم

$$\frac{dh}{dz} = 1 \quad \text{و در نتیجه} \quad h(z)=z+C$$

که در آن C یک مقدار ثابت است. بنابراین

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= x^2yz+h(z) \\ &= x^2yz+z+C \end{aligned}$$

۹. چون

$$\operatorname{curl}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & yz & xz \end{vmatrix} = -y\vec{i}+(x-z)\vec{j}+0\vec{k} \neq \vec{O}$$

پس $\vec{F}$ گرادیان هیچ تابعی نیست.

۱۰. چون

$$\operatorname{curl}\vec{F} = \nabla\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2+x^2 & z^2+y^2 & x^2+z^2 \end{vmatrix}$$
$$= 2z\vec{i} - 2x\vec{j} - 2y\vec{k} \neq \vec{O}$$

پس $\vec{F}$ گرادیان تابعی نیست.

۱۱. (الف) چون گرادیان تابع $h=fg$ یک تابع برداری است، $\operatorname{grad}(fg)$ یک میدان برداری است.

(ب) بی‌معنی است.

(پ) یک میدان برداری است.

(ت) یک میدان برداری است. زیرا $\operatorname{div}\vec{F}$ یک تابع چند متغیره است و در نتیجه گرادیان آن یک میدان برداری است.

(ث) یک میدان برداری است.

(ج) یک تابع چند متغیره است.

(چ) یک میدان برداری است.

(ح) یک تابع چند متغیره است.

(خ) بی‌معنی است زیرا $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f)$ یک میدان برداری نیست و چرخه آن معنی ندارد.

۱۲. فرض کنیم $\vec{F}=M_1\vec{i}+N_1\vec{j}+P_1\vec{k}$ و $\vec{G}=M_2\vec{i}+N_2\vec{j}+P_2\vec{k}$. به آسانی می‌توان نشان داد که

$$\operatorname{curl}(\vec{F}+\vec{G})=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M_1+M_2 & N_1+N_2 & P_1+P_2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M_1 & N_1 & P_1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M_2 & N_2 & P_2 \end{vmatrix}$$

$$=\operatorname{curl}\vec{F}+\operatorname{curl}\vec{G}$$

.۱۳

$$\operatorname{div}(F+G)=\nabla.(F+G)=\nabla.F+\nabla.G=\operatorname{div}F+\operatorname{div}G$$

۱۴. اگر $\vec{F}=M\vec{i}+N\vec{j}+P\vec{k}$، آنگاه

$$\operatorname{curl}(f\vec{F})=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ fM & fN & fP \end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{\partial(fP)}{\partial y}-\frac{\partial(fN)}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial(fM)}{\partial z}-\frac{\partial(fP)}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial(fN)}{\partial x}-\frac{\partial(fM)}{\partial y}\right)\vec{k}$$

$$=\left[\frac{\partial f}{\partial y}P+f\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial z}N-f\frac{\partial N}{\partial z}\right]\vec{i}+\left[\frac{\partial f}{\partial z}M+f\frac{\partial M}{\partial z}-\frac{\partial f}{\partial x}P-f\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)\right]\vec{j}$$

$$+\left[\frac{\partial f}{\partial x}N+f\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}M-f\frac{\partial M}{\partial y}\right]\vec{k}$$

$$=f\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial z}\right)\vec{i}+f\left(\frac{\partial M}{\partial z}-\frac{\partial P}{\partial x}\right)\vec{j}+f\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)\vec{k}$$

$$+\left(\frac{\partial f}{\partial y}P-\frac{\partial f}{\partial z}N\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial f}{\partial z}M-\frac{\partial f}{\partial x}P\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial f}{\partial x}N-\frac{\partial f}{\partial y}M\right)\vec{k}$$

$$=f(\operatorname{curl}\vec{F})+[(\operatorname{grad}f)\times\vec{F}]$$

۱۵. مانند تمرین قبل حل می‌شود.

.۱۶

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f)=\nabla.\nabla f$$
$$=\left(\frac{\partial}{\partial x}\, i+\frac{\partial}{\partial y}\,\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\,.\left(\frac{\partial f}{\partial x}\,\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}\right)$$
$$=\frac{\partial^{۲} f}{\partial x^{۲}}+\frac{\partial^{۲} f}{\partial y^{۲}}+\frac{\partial^{۲} f}{\partial z^{۲}}=\operatorname{Lap} f$$

.۱۷

$$\operatorname{div}\vec{r}=\frac{\partial}{\partial x}x+\frac{\partial}{\partial y}y+\frac{\partial}{\partial z}z=۱+۱+۱=۳$$

$$\operatorname{curl}\vec{r}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x & y & z\end{vmatrix}=۰\vec{i}+۰\vec{j}+۰\vec{k}=\vec{۰}$$

$$\operatorname{grad}\,|\vec{r}\,|=\operatorname{grad}\sqrt{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}}$$
$$=\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}}\;\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\sqrt{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}}\;\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\sqrt{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}}\;\vec{k}$$
$$=\frac{x}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}}}\,\vec{i}+\frac{y}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}}}\,\vec{j}+\frac{z}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}}}\,\vec{k}$$
$$=\frac{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}}}=\frac{r}{|\vec{r}\,|}$$

.۱۸ فرض کنیم $\vec{a}=a_{۱}\vec{i}+a_{۲}\vec{j}+a_{۳}\vec{k}$. چون

$$\vec{a}\times\vec{r}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_{۱} & a_{۲} & a_{۳}\\ x & y & z\end{vmatrix}$$
$$=(a_{۲}z-a_{۳}y)\vec{i}+(a_{۳}x-a_{۱}z)\vec{j}+(a_{۱}y-a_{۲}x)\vec{k}$$

$$\operatorname{crul}(\vec{a}\times\vec{r})=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ a_{۲}z-a_{۳}y & a_{۳}x-a_{۱}z & a_{۱}y-a_{۲}x\end{vmatrix}$$
$$=(a_{۱}+a_{۱})\vec{i}+(a_{۲}+a_{۲})\vec{j}+(a_{۳}+a_{۳})\vec{k}=۲\vec{a}$$

تمرینهای ۲.۹

۱. داریم

$$x=۵ \quad , \quad \frac{dx}{dt}=۰$$

$$y=-\sin t \quad , \quad \frac{dy}{t}=-\cos t$$

$$z=-\cos t \quad , \quad \frac{dz}{dt}=\sin t$$

و $M(x, y, z)=z=-\cos t$، $N(x, y, z)=-y=\sin t$، و $P(x, y, z)=-x=-۵$. در نتیجه

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_C Mdx+Ndy+Pdz$$

$$=\int_۰^{\frac{\pi}{۴}} \left[M\frac{dx}{dt}+N\frac{dy}{dt}+P\frac{dz}{dt}\right] dt$$

$$=\int_۰^{\frac{\pi}{۴}} [(-\cos t).۰+(\sin t)(-\cos t)+(-۵)\sin t]\, dt$$

$$=\int_۰^{\frac{\pi}{۴}} (-\sin t\cos t-۵\sin t)dt$$

$$=\left[\left(-\frac{۱}{۲}\sin^۲ t+۵\cos t\right)\right]_۰^{\frac{\pi}{۴}}=\frac{۵}{۲}\sqrt{۲}-\frac{۲۱}{۴}$$

۲. داریم

$$x=\cos t \quad , \quad \frac{dx}{dt}=-\sin t$$

$$y=\sin t \quad , \quad \frac{dy}{dt}=\cos t$$

$$z=۲t \quad , \quad \frac{dz}{dt}=۲$$

در نتیجه

$$\int_C \vec{F}.d\vec{r} = \int_C Mdx + Ndy + Pdz$$

$$= \int_C \left[M\frac{dx}{dt} + N\frac{dy}{dt} + P\frac{dz}{dt}\right] dt$$

$$= \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} [(\sin t)(-\sin t) + (\cos t \sin t)\cos t + ۸t^{۳}(۲)]\, dt$$

$$= \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} (-\sin^{۲} t + \cos^{۲} t \sin t + ۱۶t^{۳})\, dt$$

$$= \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \left(\frac{۱}{۲}\cos ۲t - \frac{۱}{۲} + \cos^{۲} t \sin t + ۱۶t^{۳}\right) dt$$

$$= \left[\frac{۱}{۴}\sin ۲t - \frac{۱}{۲}t - \frac{۱}{۳}\cos^{۳} t + ۴t^{۴}\right]_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}$$

$$= -\frac{\pi}{۴} + \frac{\pi^{۴}}{۴} + \frac{۱}{۳}$$

۳. در اینجا،

$$x = \cos t \quad , \quad \frac{dx}{dt} = -\sin t$$

$$y = ۰ \quad , \quad \frac{dy}{dt} = ۰$$

$$z = \sin t \quad , \quad \frac{dz}{dt} = \cos t$$

در نتیجه

$$\int_c \vec{F}.d\vec{r} = \int_{\pi}^{۰} \left[M\frac{dx}{dt} + N\frac{dy}{dt} + P\frac{dz}{dt}\right] dt$$

$$= \int_{\pi}^{۰} [(-\sin t)(-\sin t) + ۰.۰ + (\cos t)(\cos t)]\, dt$$

$$= \int_{\pi}^{۰} ۱\, dt = t \Big|_{\pi}^{۰} = -\pi$$

۴. داریم

$$x=\frac{۱}{۲} \quad , \quad \frac{dx}{dt}=۰$$

$$y=۲ \quad , \quad \frac{dy}{dt}=۰$$

$$z=-\ln(\cos ht) \quad , \quad \frac{dz}{dt}=-\frac{\sin ht}{\cos ht}=\frac{e^{-x}-e^{x}}{e^{x}+e^{-x}}$$

و $M(x,y,z)=۵e^{\sin\frac{\pi}{۲}}=۵e$ ، $N(x,y,z)=-۴e^{\cos\frac{\pi}{۲}}=-۴$ ، و $P=۰$. در نتیجه

$$\int_C \vec{F}.d\vec{r}=\int_۰^{\frac{\pi}{۶}}\left[(۵-e).۰+(-۴).۰+۰.\frac{-\sin ht}{\cos ht}\right]dt=۰$$

.۵

$$\int_C ydx-xdy+xyz^۲dz=\int_۰^۱\left[M\frac{dx}{dt}+N\frac{dy}{dt}+P\frac{dz}{dt}\right]dt$$

$$=\int_۰^۱[e^t(-e^{-t})-(e^{-t})e^t+(e^{-t}e^t t^۲)]\,dt$$

$$=\int_۰^۱(-۲+t^۲)dt$$

$$=\left[\left(-۲t+\frac{۱}{۳}t^۳\right)\right]_۰^۱=-\frac{۵}{۳}$$

.۶

$$\int_C e^x dx+xydy+xyzdz=\int_{-۱}^{۱}\left[e^x\frac{dx}{dt}+xy\frac{dy}{dt}+xyz\frac{dz}{dt}\right]dt$$

$$=\int_{-۱}^{۱}[e^{-t}(-۱)+(-t)(-t)(-۱)+(-t)(-t)(-۲t)(-۲)]\,dt$$

$$=\int_{-۱}^{۱}(-e^{-t}-t^۲+۴t^۳)dt$$

$$=\left[e^{-t}-\frac{۱}{۳}t^۳+t^۴\right]_{-۱}^{۱}=e^{-۱}-e-\frac{۲}{۳}$$

.۷

$$\int_c xy\,dx+(x+z)dy+z^{۲}dz=\int_{-۱}^{۲}\left[xy\frac{dx}{dt}+(x+z)\frac{dy}{dt}+z^{۲}\frac{dz}{dt}\right]dt$$

$$=\int_{-۱}^{۲}[(t+۱)(t-۱)(۱)+(t+۱+t^{۲})(۱)+t^{۴}(۲t)]\,dt$$

$$=\int_{-۱}^{۲}(۲t^{۵}+۲t^{۲}+t)dt$$

$$=\left[\frac{۱}{۳}t^{۶}+\frac{۲}{۳}t^{۳}+\frac{۱}{۲}t^{۲}\right]_{-۱}^{۲}=\frac{۵۷}{۲}$$

۸. معادلهٔ منحنی C عبارت است از

$$\vec{r}(t)=\cos t\vec{i}+\sin t\vec{j} \qquad , \qquad ۰\le t\le\frac{\pi}{۲}$$

بنابراین،

$$\int_C \frac{۱}{۱+x^{۲}}+\frac{۲}{۱+y^{۲}}dy=\int\left[\frac{۱}{۱+x^{۲}}\ \frac{dx}{dt}+\frac{۲}{۱+y^{۲}}\ \frac{dy}{dt}\right]dt$$

$$=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\left[\frac{۱}{۱+\cos^{۲}t}(-\sin t)+\frac{۲}{۱+\sin^{۲}t}\cos t\right]dt$$

$$=\left[\operatorname{tg}^{-۱}\cos t+۲\operatorname{tg}^{-۱}\sin t\right]_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}$$

$$=\frac{\pi}{۴}$$

۹. معادلهٔ برداری خط C که این جسم روی آن حرکت می‌کند عبارت است از

$$\vec{v}(t)=t\vec{i}+t\vec{j}+t\vec{k} \qquad , \qquad ۰\le t\le ۱$$

بنابراین، کار انجام شده برابر است با

$$W=\int_c \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_c \left[M\frac{dx}{dt}+N\frac{dy}{dt}+P\frac{dz}{dt}\right] dt$$

$$=\int_۰^۱ [(۲t-t)(۱)+۲t(۱)+(t-t)(۱)]\, dt$$

$$=\int_۰^۱ ۳t\,dt=\left[\frac{۳}{۲}t^۲\right]_۰^۱=\frac{۳}{۲}$$

۱۰. در اینجا

$$x=\sin\frac{\pi}{۲}t \quad , \quad \frac{dx}{dt}=\frac{\pi}{۲}\cos\frac{\pi}{۲}t$$

$$y=\sin\frac{\pi}{۲}t \quad , \quad \frac{dy}{dt}=\frac{\pi}{۲}\cos\frac{\pi}{۲}t$$

$$z=t \quad , \quad \frac{dz}{dt}=۱$$

بنابراین، کار انجام شده توسط $\vec{F}$ برابر است با

$$W=\int_c \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_c \left[M\frac{dx}{dt}+N\frac{dy}{dt}+P\frac{dz}{dt}\right] dt$$

$$=\int_۰^۱ \left[(۲\sin\frac{\pi}{۲}t-\sin\frac{\pi}{۲}t)(\frac{\pi}{۲}\cos\frac{\pi}{۲}t)+۲t\left(\frac{\pi}{۲}\cos\frac{\pi}{۲}t\right)+\left(\sin\frac{\pi}{۲}t-t\right)(۱)\right] dt$$

$$=\int_۰^۱ \left(\frac{\pi}{۲}\sin\frac{\pi}{۲}t\cos\frac{\pi}{۲}t+\pi t\cos\frac{\pi}{۲}t+\sin\frac{\pi}{۲}t-t\right) dt$$

$$=\left[\frac{۱}{۲}\sin^۲\frac{\pi}{۲}t+۲t\sin\frac{\pi}{۲}t+\frac{\pi}{۴}\cos\frac{\pi}{۲}t-\frac{۲}{\pi}\cos\frac{\pi}{۲}t-\frac{۱}{۲}t^۲\right]_۰^۱=۲-\frac{\pi}{۲}$$

تمرینهای ۳.۹

۱. قرار می‌دهیم $M(x,y)=e^x+y$ و $N(x,y)=x+۲y$. چون

$$\frac{\partial M}{\partial y}=۱=\frac{\partial N}{\partial x}$$

و دامنه $\vec{F}=M\vec{i}+N\vec{j}$ تمام صفحه است، بنابر قضیه ۱۴.۱.۹، $\vec{F}$ پایستار است و در نتیجه انتگرال خطی داده شده مستقل از مسیر است. برای پیدا کردن مقدار این انتگرال می‌توانیم تابع پتانسیل $\vec{F}$ را پیدا کنیم و سپس قضیهٔ اساسی انتگرال خطی را به کار ببریم یا انتگرال را روی مسیر ساده‌ای چون یک خط راست که از نقاط (۰,۱) و (۲,۳) می‌گذرد محاسبه کنیم.

روش اول

ابتدا تابع پتانسیلی چون f پیدا می‌کنیم به طوری که $\vec{F}=\operatorname{grad} f$. چون

$$\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}=\operatorname{grad} f=(e^x+y)\,\vec{i}+(x+2y)\,\vec{j}$$

پس

$$\frac{\partial f}{\partial y}=x+2y \quad \text{و} \quad \frac{\partial f}{\partial x}=e^x+y \qquad (*)$$

با انتگرالگیری از معادلهٔ اول نسبت به x، داریم

$$f(x,\ y)=e^x+xy+g(y)$$

که در آن تابع g نسبت به x ثابت است. مشتق این عبارت نسبت به y برابر است با

$$\frac{\partial f}{\partial x}=x+\frac{dg}{dy}$$

با مقایسهٔ این عبارت و معادلهٔ دوم (*)، داریم

$$g(y)=y^2+c \quad \text{و در نتیجه} \quad \frac{dg}{dy}=2y$$

که در آن c یک مقدار ثابت است. بنابراین

$$\begin{aligned}F(x,y)&=e^x+xy+g(y)\\&=e^x+xy+y^2+c\end{aligned}$$

در نتیجه، بنابر قضیهٔ اساسی انتگرال خطی، داریم

$$\int_{(0,1)}^{(2,3)}(e^x+y)dx+(x+2y)dy=f(2,3)-f(0,1)=e^2+13$$

روش دوم

معادله دکارتی خطی که از (۰,۱) و (۲,۳) می‌گذرد عبارت از $y=x+۱$ است. معادلات

$$x=t \quad , \quad y=t+۱ \quad , \quad ۰\leq t\leq ۲$$

را به عنوان معادلات پارامتری این خط در نظر می‌گیریم. در نتیجه

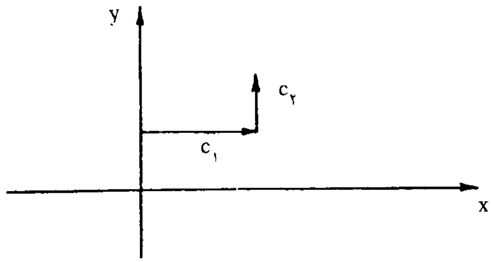
$$\int_C (e^x+y)dx+(x+۲y)dy=\int_{(۰,۱)}^{(۲,۳)} \left[(e^x+y)\frac{dx}{dt}+(x+۲y)\frac{dy}{dt}\right] dt$$

$$=\int_۰^۲ [(e^t+t+۱)(۱)+(t+۲t+۲)(۱)]\, dt$$

$$=\left[e^t+۲t^۲+۳t\right]_۰^۲=e^۲+۱۳$$

روش سوم

دراینجا C را مسیر شکل ۱.۳.۹ درنظرمی‌گیریم. در اینجا $\int_{C_۱} Ndy=۰$ و $\int_{C_۲} Mdx=۰$ (چرا؟)



شکل ۱.۳.۹

$$\int_{(۰,۱)}^{(۲,۳)} Mdx+Ndy=\int_{C_۱} Mdx+Ndy+\int_{C_۲} Mdu+Ndy$$

$$=\int_{C_۱} Mdx+\int_{C_۲} Ndy$$

$$=\int_{(۰,۱)}^{(۲,۱)} (e^x+y)dx+\int_{(۲,۱)}^{(۲,۳)} (x+۲y)dy$$

چون در انتگرال اول yو در انتگرال دوم xثابت است، انتگرالهای بالا برابرند با

$$=\left[e^x+xy \right]_{(۰,۱)}^{(۲,۱)}+\left[xy+y^{۲} \right]_{(۲,۱)}^{(۲,۳)}$$
$$=e^{۲}+۲-۱-۰+۶+۹-۲-۱=e^{۲}+۱۳$$

۲. در اینجا $\vec{F}=M\vec{i}+N\vec{j}+P\vec{k}$ که در آن $M=y$، $N=x+z$ و $P=y$. چون

$$\frac{\partial N}{\partial z}=۱=\frac{\partial P}{\partial y} \quad ، \quad \frac{\partial M}{\partial z}=۰=\frac{\partial P}{\partial x} \quad ، \quad \frac{\partial M}{\partial y}=۱=\frac{\partial N}{\partial x}$$

و دامنهٔ $\vec{F}$ تمام فضاست، بنا به قضیه ۱۴.۱.۹ ، $\vec{F}$ پایستار است و در نتیجه انتگرال داده شده مستقل از مسیر است. ابتدا و انتهای منحنی C به ترتیب نقاط $P_۱(-۱,۱,۰)$ و $P_۲(-\frac{۵}{۳},۰,۱)$ هستند که با قرار دادن $t=۰$ و $t=\frac{۱}{۲}$ در $\vec{r}\ (t)$ به دست می‌آیند. چون محاسبه این انتگرال روی منحنی C مشکل است. پس مسیر ساده‌تری چون یک خط راست را در نظر می‌گیریم که این دو نقطه را به یکدیگر متصل می‌کند. چون

$$\vec{a}=\overrightarrow{P_۱P_۲}=(-\frac{۲}{۳},-۱,۱)$$

پس معادلات پارامتری این خط عبارت‌اند از $x=-۱-\frac{۲}{۳}t$ ، $y=۱-t$ ، $z=t$. چون $\frac{dx}{dt}=-\frac{۲}{۳}$، $\frac{dy}{dt}=-۱$ ، $\frac{dz}{dt}=۱$ ، داریم

$$\int_C ydx+(x+z)dy+ydz=\int_C \left[y\frac{dx}{dt}+(x+z)\frac{dy}{dt}+y\frac{dz}{dt}\right]dt$$
$$=\int_۰^۱ \left[(۱-t)\left(-\frac{۲}{۳}\right)+\left(-۱-\frac{۲}{۳}t+t\right)(-۱)+(۱-t)(۱)\right]dt$$
$$=\int_۰^۱ \left(\frac{۴}{۳}-\frac{۲}{۳}t\right)dt$$
$$=\left[\frac{۴}{۳}t-\frac{۱}{۳}t^{۲}\right]_۰^۱=۱$$

۳. قرار می‌دهیم

$$P=\frac{z}{۱+x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}} \quad ، \quad N=\frac{y}{۱+x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}} \quad ، \quad M=\frac{x}{۱+x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}}$$

$$\frac{\partial N}{\partial z}=\frac{۲yz}{(۱+x^۲+y^۲+z^۲)^۲}=\frac{\partial P}{\partial y} \quad ، \quad \frac{\partial M}{\partial z}=\frac{۲xz}{(۱+x^۲+y^۲+z^۲)^۲}=\frac{\partial P}{\partial x}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{۲xy}{(۱+x^۲+y^۲+z^۲)^۲}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

پس $\vec{F}=M\vec{i}+N\vec{j}+P\vec{k}$ پایستار است و در نتیجه انتگرال داده شده مستقل از مسیر است. ابتدا و انتهای منحنی C نقاط $P_۱(۰,۰,۰)$ و $P_۲(۱,۱,۱)$ هستند که با قرار دادن $t=۰$ و $t=۱$ در $r(t)$ به دست می‌آیند. چون محاسبهٔ این انتگرال روی منحنی C مشکل است، خط $P_۱P_۲$ را در نظر می‌گیریم. داریم

$$\vec{a}=\overrightarrow{P_۱P_۲}=(۱,۱,۱)$$

پس‌معادلات پارامتری‌این خط عبارت‌اند از $x=t$، $y=t$، $z=t$. چون $۱ = \frac{dz}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt}$، پس

$$\int_C \frac{x}{۱+x^۲+y^۲+z^۲}dx+\frac{y}{۱+x^۲+y^۲+z^۲}dy+\frac{z}{۱+x^۲+y^۲+z^۲}dz$$

$$=\int_۰^۱\left[\frac{t}{۱+۳t^۲}(۱)+\frac{t}{۱+۳t^۲}(۱)+\frac{t}{۱+۳t^۲}(۱)\right]dt$$

$$=\int_۰^۱\frac{۳t}{۱+۳t^۲}dt=\frac{۱}{۲}\left[\ln(۱+۳t^۲)\right]_۰^۱=\frac{۱}{۲}\ln ۴=\ln ۲$$

۴. در اینجا

$$\frac{\partial N}{\partial z}=۰=\frac{\partial P}{\partial y} \quad ، \quad \frac{\partial M}{\partial z}=۰=\frac{\partial P}{\partial x} \quad ، \quad \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{e^{-x}}{y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

پس انتگرال داده شده مستقل از مسیر است. ابتدا و انتهای C نقاط $P_۱(-۱,۱,۱)$ و $P_۲(۰,e,۲)$ هستند. در اینجا تابع پتانسیل fرا پیدا می‌کنیم. قرار می‌دهیم

$$\frac{\partial f}{\partial z}=z \;،\; \frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{e^{-x}}{\partial y} \;،\; \frac{\partial f}{\partial x}=e^{-x}\ln y \qquad (*)$$

با انتگرالگیری از معادلهٔ اول نسبت به xداریم

$$f(x,y,z)=-e^{-x}\ln y+g(y,z) \qquad (**)$$

مشتق جزئی این عبارت نسبت به yبرابر است با

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{e^{-x}}{y}+\frac{\partial g}{\partial y}$$

با مقایسهٔ این عبارت و معادله دوم (*) ، داریم $\frac{\partial g}{\partial y} = \circ$ و در نتیجه g نسبت به y ثابت است.
مشتق جزئی عبارت (**) نسبت به z برابر است با

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial z}$$

با مقایسهٔ این عبارت و معادله سوم (*) ، داریم

$$\frac{dg}{dz} = z \quad \text{و در نتیجه} \quad g(y,z)=g(y)= \frac{z^{۲}}{۲} + c$$

که در آن c یک مقدار ثابت است. پس

$$f(x, y, z) = -e^{-x}\ln y + \frac{z^{۲}}{۲} + c$$

در نتیجه، بنابر قضیه اساسی انتگرال خطی، داریم

$$\int_C e^{-x} \ln y\, dx - \frac{e^{-x}}{y} dy + z dz = f(\circ, e, ۲) - f(-۱, ۱, ۱)$$

$$= -۱ + ۲ - \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

تمرینهای ۴.۹

.۱

$$\oint y dx + \circ\, dy = \int_R\int \left[\frac{\partial}{\partial x}(\circ) - \frac{\partial}{\partial y}(y)\right] dA$$

$$= \int_R\int -۱ dA$$

$$= \int_\circ^{\frac{\pi}{۲}} \int_\circ^{۲} -r\, dr\, d\theta \qquad \text{(در مختصات قطبی)}$$

$$= \int_\circ^{\frac{\pi}{۲}} \left[-\frac{۱}{۲} r^{۲}\right]_\circ^{۲} d\theta = \int_\circ^{\frac{\pi}{۲}} -۲ d\theta$$

$$= [-۲\theta]_\circ^{\frac{\pi}{۲}} = -\pi$$

.٢

$$\oint xy\,dx+(x^{\frac{٣}{٢}}+y^{\frac{٣}{٢}})dy=\int_R\int\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(x^{\frac{٣}{٢}}+y^{\frac{٣}{٢}}\right)-\frac{\partial}{\partial y}(xy)\right]dA$$

$$=\int_٠^١\int_٠^١\left(\frac{٣}{٢}x^{\frac{١}{٢}}-x\right)dy\,dx$$

$$=\int_٠^١\left[\frac{٣}{٢}x^{\frac{١}{٢}}y-xy\right]_٠^١dx$$

$$=\int_٠^١\left(\frac{٣}{٢}x^{\frac{١}{٢}}-x\right)dx$$

$$=\left[x^{\frac{٣}{٢}}-\frac{١}{٢}x^٢\right]_٠^١=\frac{١}{٢}$$

.٣

$$\oint_C(x^٢+y^٢)dx+(x^٢+y^٢)dy=\int_R\int\left[\frac{\partial}{\partial x}(x^٢+y^٢)-\frac{\partial}{\partial y}(x^٢+y^٢)\right]dA$$

$$=\int_٠^١\int_٠^{\sqrt{١-x^٢}}(٢x-٢y)dy\,dx$$

$$=\int_٠^١[٢xy-y^٢]_٠^{\sqrt{١-x^٢}}dx$$

$$=\int_٠^١(٢x\sqrt{١-x^٢}-١+x^٢)dx$$

$$=\left[-\frac{٢}{٣}(١-x^٢)^{\frac{٣}{٢}}-x+\frac{١}{٣}x^٣\right]_٠^١=٠$$

.۴

$$\oint y\,dx - x\,dy = \int_R\int \left[\frac{\partial}{\partial x}(-x) - \frac{\partial}{\partial y}(y)\right] dA$$

$$= \int_{\circ}^{۲\pi}\int_{\circ}^{۱-\cos\theta} -۲r\,dr\,d\theta \qquad \text{(در مختصات قطبی)}$$

$$= \int_{\circ}^{۲\pi} [-r^{۲}]_{\circ}^{۱-\cos\theta}\, d\theta$$

$$= \int_{\circ}^{۲\pi} (-۱+۲\cos\theta - \cos^{۲}\theta)\,d\theta$$

$$= \int_{\circ}^{۲\pi}\left(-۱+۲\cos\theta - \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲}\cos ۲\theta\right) d\theta$$

$$= \left[-\frac{۳}{۲}\theta + ۲\sin\theta - \frac{۱}{۴}\sin ۲\theta\right]_{\circ}^{۲\pi} = -۳\pi$$

.۵

$$\oint_C e^x \sin y\,dx + e^x\cos y\,dy = \int_F\int \left[\frac{\partial}{\partial x}(e^x\cos y) - \frac{\partial}{\partial y}(e^x \sin y)\right] dA$$

$$= \iint_R \circ\, dA = \circ$$

$$\oint_C xy\,dx + \left(\frac{۱}{۲}x^{۲}+xy\right) dy = \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{۱}{۲}x^{۲}+xy\right) - \frac{\partial}{\partial y}(xy)\right] dA$$

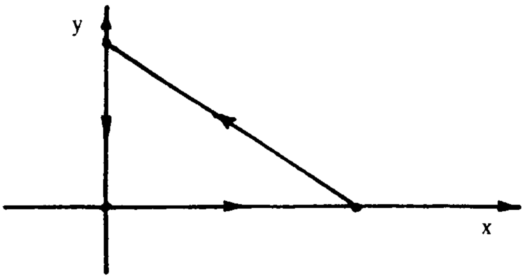
$$= \int_{-۱}^{۱}\int_{\circ}^{\frac{\sqrt{۱-x^{۲}}}{۲}} y\,dy\,dx$$

$$= \int_{-۱}^{۱}\left[\frac{۱}{۲}y^{۲}\right]_{\circ}^{\frac{\sqrt{۱-x^{۲}}}{۲}} dx$$

$$= \int_{-۱}^{۱}\frac{۱}{۸}(۱-x^{۲})dx = \frac{۱}{۸}\left[x - \frac{۱}{۳}x^{۳}\right]_{-۱}^{۱} = \frac{۱}{۶}$$

تمرینهای ۵.۹

۱. قرار می‌دهیم $z=f(x,y)=6-2x-3y$. تصویر S روی صفحهٔ xy در شکل ۱.۵.۹ نشان داده شده است. بنابراین



شکل ۱.۵.۹

$$\iint_S g(x,y,z)ds=\iint_R x\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}\,dA$$

$$=\int_0^3\int_0^{2-\frac{2}{3}x} x\sqrt{4+9+1}\,dy\,dx$$

$$=\sqrt{14}\int_0^3 [\,xy\,]_0^{2-\frac{2}{3}x}\,dx$$

$$=\sqrt{14}\int_0^3\left(2x-\frac{2}{3}x^2\right)dx$$

$$=\sqrt{14}\left[x^2-\frac{2}{9}x^3\right]_0^3=3\sqrt{14}$$

۲. قرار می‌دهیم $z=f(x,y)=3x-2$. تصویر S روی صفحهٔ xy ناحیهٔ R محدود به دایرهٔ $x^2+y^2=4$ است. در نتیجه داریم

$$\iint_S g(x,y,z)ds=\iint_R (2x^2+1)\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}\,dA$$

$$=\iint_R (2x^2+1)\sqrt{9+0+1}\,dA$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^2 (2r^2\cos^2\theta+1)\sqrt{10}\,r\,dr\,d\theta$$

$$=\sqrt{۱۰}\int_{۰}^{۲\pi}\left[\frac{۱}{۲}r^{۴}\cos^{۲}\theta+\frac{r^{۲}}{۲}\right]_{۰}^{۲}d\theta$$

$$=\sqrt{۱۰}\int_{۰}^{۲\pi}(۸\cos^{۲}\theta+۲)d\theta$$

$$=\sqrt{۱۰}\int_{۰}^{۲\pi}\left[۸\left(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\cos ۲\theta\right)+۲\right]d\theta$$

$$=\sqrt{۱۰}\left[۶\theta+\frac{۴}{۳}\sin ۲\theta\right]_{۰}^{۲\pi}=۱۲\pi\sqrt{۱۰}$$

۳. در اینجا $z=f(x,y)=x^{۲}+y^{۲}$. نقطهٔ (x,y,z) روی محل تلاقی سهمیوار $z=x^{۲}+y^{۲}$ و صفحهٔ $y=z$ قرار دارد اگر (x,y) در معادلهٔ دایره $x^{۲}+y^{۲}-y=۰$ (یا در مختصات $r=\sin\theta$) صدق کند. پس تصویر S روی صفحهٔ xy ناحیه R محدود به این دایره است. بنابراین

$$\iint_{S}g(x,y,z)ds=\iint_{R}\sqrt{۴x^{۲}+۴y^{۲}+۱}\,\sqrt{f_x^{۲}+f_y^{۲}+۱}\,dA$$

$$=\iint_{R}\sqrt{۴x^{۲}+۴y^{۲}+۱}\,\sqrt{۴x^{۲}+۴y^{۲}+۱}\,dA$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}\int_{۰}^{\sin\theta}(۴r^{۲}+۱)r\,dr\,d\theta \qquad \text{(در مختصات قطبی)}$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}\left[r^{۴}+\frac{r^{۲}}{۲}\right]_{۰}^{\sin\theta}d\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}\left(\sin^{۴}\theta+\frac{۱}{۲}\sin^{۲}\theta\right)d\theta$$

$$=\left[\frac{۳}{۸}\theta-\frac{۱}{۴}\sin ۲\theta+\frac{۱}{۳۲}\sin ۴+\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۳}\cos ۲\theta\right]_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}$$

$$=\frac{۵}{۸}\pi$$

۴. فرض می‌کنیم که $z=f(x, y)=۴-y^۲$. در این صورت،

$$\int_S\int g(x,y,z)ds=\int_R\int y\sqrt{f_x^۲+f_y^۲+۱}\,dA$$

$$=\int_۰^۳\int_۰^۲ y\sqrt{۰+۴y^۲+۱}\,dy\,dx$$

$$=\int_۰^۳\left[\frac{۱}{۱۲}(۴y^۲+۱)^{\frac{۳}{۲}}\right]_۰^۲dx$$

$$=\frac{۱}{۱۲}\int_۰^۳\left(۱۷^{\frac{۳}{۲}}-۱\right)dx$$

$$=\frac{۱}{۱۲}\left[\left(۱۷^{\frac{۳}{۲}}-۱\right)x\right]_۰^۳=\frac{۱}{۴}\left(۱۷^{\frac{۳}{۲}}-۱\right)$$