فصل دوازدهم

اعداد مختلط

فصل دوازدهم

اعداد مختلط

تمرین صفحه ۵۳۵ .

۱. جوابهای حقیقی معادله زیر را بیابید.

حل)

$$(4+2i)\,x+(5-3i)\,y=13+i$$

$$(4x+5y)+(2x-3y)\,i=13+i$$

$$\begin{cases}4x+5y=13\\2x-3y=1\end{cases}\Rightarrow \qquad y=1 \quad , \qquad x=2$$

۲. حاصل عبارات زیر را بدست آورید:

الف) $$Z=\frac{5+5i}{3-4i}+\frac{2\mathbf{o}}{4+3i}=\frac{(5+5i)\,(4+3i)+2\mathbf{o}(3-4i)}{(3-4i)4+3i)}$$

$$=\frac{5+35i+6\,\mathbf{o}-8\,\mathbf{o}\,i}{24-7i}=\frac{65-45i}{24-7i}$$

ب) $$\frac{(1+i)\,(1+2i)}{1-i}+i=\frac{-1+3i+1+i}{1-i}=\frac{4i}{1-i}=\frac{(4i\ \ (1+i)}{2}=-2+2i$$

ج) $$\frac{3i^{3\mathbf{o}}-i^{19}}{2i-1}=\frac{3(i^2)^{15}-(i^2)^9\,i}{2i-1}=\frac{-3+i}{2i-1}=\frac{-3}{5}-\frac{1}{5}i$$

۳. جواب دستگاه زیر را بدست آورید.

$$\begin{cases}(1+i)Z_1-i\,Z_2=2+i\\(2+i)\,Z_1+(2-i)\,Z_2=2i\end{cases}$$

حل) از روش کرامر استفاده می کنیم.

$$Z_1=\frac{\begin{vmatrix}2+i & -i\\ 2i & 2-i\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1+i & -i\\ 2+i & 2-i\end{vmatrix}}=\frac{5-2}{3+i-1+2i}=\frac{3}{3i-2}$$

$$Z_2=\frac{\begin{vmatrix}1+i & 2+i\\ 2+i & 2i\end{vmatrix}}{3i-2}=\frac{2i-2-3-4i}{3i-2}=\frac{-5-2i}{3i-2}$$

تمرین صفحه ۵۳۷ .

فرض کنید $a_n Z^n + a_{n-1} Z^{n-1} + \ldots + a Z + a_0 = 0$ که در آن برای $0 \le i \le n$, $a_i \in R$ ، ثابت کنید $\bar{Z}$ ریشه معادله فوق است.

حل)

$$\overline{a_n Z^n + a_{n-1} Z^{n-1} + \ldots + a_1 Z + a_0} = 0$$
$$\bar{a}_n \bar{Z}^n + \bar{a}_{n-1} \bar{Z}^{n-1} + \ldots + \bar{a}_1 \bar{Z} + \bar{a}_0 = 0$$
$$a_n \bar{Z}^n + a_{n-1} \bar{Z}^{n-1} + \ldots + a_1 \bar{Z} + a_0 = 0$$

پس $\bar{Z}$ ریشه معادله است.

تمرین صفحه ۵۳۸ .

۱. فرض کنید $Z_1, Z_2 \in R$, $Z_2 \neq 0$ ثابت کنید

$$\overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)}=\frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2}$$

حل)

$$(\frac{Z_1}{Z_2}) = (Z_1 Z_2^{-1}) = Z_1\ \overline{Z}_2^{-1}$$
$$= \overline{Z}_1\ \overline{Z}_2^{-1} = \frac{\overline{Z}_1}{\overline{Z}_2}$$

۲. عبارات زیر را ساده کنید.

الف) $\dfrac{(2+i)(3-2i)(1+2i)}{(1-i)^2}$

$$= \frac{(8-i)(1+2i)}{1-2i+i^2} = \frac{10+15i}{-2i} = -\frac{15}{2}+5i$$

ب) $\dfrac{i^4+i^9+i^{16}}{2-i^5+i^{10}-i^{15}} = \dfrac{1+i+1}{2-i-1+i} = 2+i$

ج) $3(\dfrac{1+i}{1-i})^2 - 2(\dfrac{1-i}{1+i})^3 = 3(\dfrac{2i}{-2i}) - 2(\dfrac{2i}{-2i})(\dfrac{1-i}{1+i})$

$$= -3 + (\frac{1-i}{1+i}) = -3 - i$$

۳. درستی های زیر را ثابت کنید.

الف) $Z + \overline{Z} = 2\operatorname{Re}(Z)$

حل) $(\operatorname{Re}(Z) + \operatorname{Im}(Z)i) + (\operatorname{Re}(Z) - \operatorname{Im}(Z)i) = 2\operatorname{Re}(Z)$

ب) $Z - \overline{Z} = 2\operatorname{Im}(Z)i$

$$(\operatorname{Re}(Z) + \operatorname{Im} Z\, i) - (\operatorname{Re} Z - \operatorname{Im} Z\, i) = 2\operatorname{Im}(Z)i$$

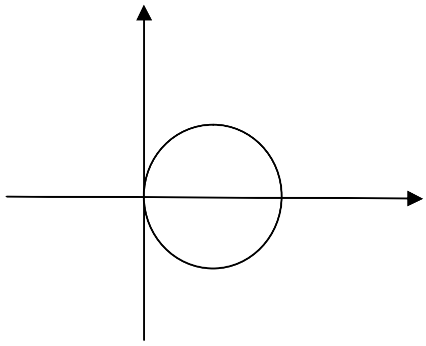
۴. با فرض $Z = x + yi \neq 0$ نمودار $\operatorname{Re}(\frac{1}{Z}) = \frac{1}{2}$ را رسم کنید.

حل)

$$\frac{1}{Z}=\frac{1}{x+yi}=\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y}{x^2+y^2}i$$

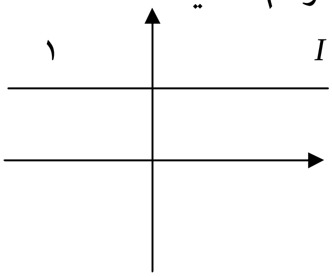
$$Re(\frac{1}{Z})=\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{1}{2}\Rightarrow \quad x^2+y^2=2x$$

$$\Rightarrow \quad (x-1)^2+y^2=1$$



۵. در تمرین ۴ نمودار $Im(Z)=1$ را رسم کنید.

حل) $Im(x+yi)=y=1$



۶. فرض کنید $\sum_{k=0}^{100} i^k = x+yi$ ، در این صورت y , x را محاسبه کنید.

حل) طبق تصاعد هندسی داریم:

$$\sum_{k=0}^{100} i^k=\frac{1-i^{101}}{1-i}=\frac{1-i}{1-i}=1=x+yi \quad \Rightarrow \quad x=1 \ , \quad y=0$$

۷. اگر $\frac{x+yi}{x-yi}=x-yi$ مقادیر حقیقی x و y را بیابید.

حل)

$$x+yi=(x-yi)^2 \;=x^2+(-yi)^2-2x\;yi$$
$$=(x^2-y^2)-2x\;yi$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2=x \\ -2xy=y \end{cases}$$
$$y=0 \quad \Rightarrow \qquad x=0\;,\;x=1$$
$$y\neq 0 \quad \Rightarrow \qquad x=-\frac{1}{2}\;,\;y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

۸. اگر f یک چند جمله ای با ضرایب حقیقی باشد؛ نشان دهید. $\overline{f(Z)}=f(\bar{Z})$

$$f(Z)=a_n\,Z^n+a_{n-1}\,Z^{n-1}+...+a_1Z+a_0$$
$$\overline{f(Z)}=\bar{a}_{\bar{n}}\,\bar{Z}^n+\bar{a}_{n-1}\,\bar{Z}^{n-1}+...+\bar{a}_1\bar{Z}+\bar{a}_0$$
$$=\bar{a}_n\,\bar{Z}^n+\bar{a}_{n-1}\,\bar{Z}^{n-1}+...+\bar{a}_1\bar{Z}+\bar{a}_0$$
$$=a_n\,\bar{Z}^n+a_{n-1}\,\bar{Z}^{n-1}+...+a_1\,\bar{Z}+a_0\;=\;f(\bar{Z})$$

تمرین صفحه ۵۴۰ .

فرض کنید $Z_1=a_1+b_1i$, $Z_2=a_2+b_2i$ با در نظر گرفتن نمایش هندسی اعداد $Z_1\,,\,Z_2$ ، ثابت کنید

$Z_1+Z_2=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$

حل) اگر $Z_1\,,\,Z_2$ را به صورت بردار $(a_1\,,\,b_1)\,,\,(a_2\,,\,b_2)$ در نظر بگیریم، آنگاه $Z_1+Z_2=(a_1+a_2\;,\;b_1+b_2)$.

و این خاصیت از جمع بردارها در R^2 نتیجه می شود.

تمرین صفحه ۵۴۳ .

۱. فرض کنید $Z_1,Z_2,...,Z_n$ اعداد مختلط باشند. در این صورت خواص زیر برقرارند.

الف) $|Z_1 Z_2 ... Z_n| = |Z_1||Z_2|...|Z_n|$

حل) با استفاده از استقراءِ داریم:

$$|Z_1 Z_2 ... Z_n| = |Z_1(Z_2 Z_3 ... Z_n)| = |Z_1||Z_2 Z_3 ... Z_n| = |Z_1||Z_2|...|Z_n|$$

ب) $|Z^n| = |Z|^n$

حل) کافی است در قسمت قبل قرار دهیم:

$$Z_1 = Z_2 = ... = Z_n = Z$$

ج) $\operatorname{Re}(Z) \le |Z|$

حل)

$$Z = x + yi \qquad \Rightarrow x \le |x| \le \sqrt{x^2 + y^2} = |Z| \qquad \Rightarrow \operatorname{Re}(Z) \le |Z|$$

د) $|Z| = |\overline{Z}|$

حل) اگر قرار دهیم:

$$Z = x + yi$$

$$|x + yi| = \sqrt{x^2 + y^2} = |x - yi| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} \quad \Rightarrow \quad |Z| = |\overline{Z}|$$

ه) $|Z_1 + Z_2| \le |Z_1| + |Z_2|$

حل) اگر Z_2 , Z_1 را به عنوان دو بردار در R^2 در نظر بگیریم داریم:

$$|Z_1 + Z_2|^2 = |Z_1|^2 + |Z_2|^2 + 2|Z_1||Z_2| \cos q$$

$$\Rightarrow |Z_1 + Z_2|^2 \le |Z_1|^2 + |Z_2|^2 + 2|Z_1||Z_2| = (|Z_1| + |Z_2|)^2$$

$$\Rightarrow |Z_1 + Z_2| \le |Z_1| + |Z_2|$$

و) $|Z_1 + Z_2 + ... + Z_n| \le |Z_1| + ... + |Z_n|$

حل) با استقراء و استفاده از قسمت (ه) مطلب ثابت می شود.

$$|Z_1+Z_2+\ldots+Z_n|=|Z_1+(Z_2+\ldots+Z_n)|$$
$$\le |Z_1|+|Z_2+\ldots+Z_n|\le |Z_1|+|Z_2|+\ldots+|Z_n|$$

ز) $|Z_1+Z_2|\ge|Z_1|-|Z_2|$ یا $|Z_1-Z_2|\ge|Z_1|-|Z_2|$

حل)

$$|Z_1|=|(Z_1+Z_2)+(-Z_2)|\le|Z_1+Z_2|+|Z_2|\le|Z_1+Z_2|+|Z_2|$$
$$\Rightarrow\quad |Z_1|-|Z_2|\le|Z_1+Z_2|$$

اگر Z_2 را به $-Z_2$ تبدیل کنیم داریم:

$$|Z_1|-|Z_2|\le|Z_1-Z_2|$$

۲. اگر $Z_1=2+i$ و $Z_2=3-2i$ و $Z_3=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ اعداد مختلط باشند؛ هر یک از عبارات زیر را حساب کنید:

الف) $|3Z_1-4Z_2|$

حل) $3Z_1-4Z_2=-6+11i \quad\Rightarrow |3Z_1-4Z_2|=\sqrt{157}$

ب) $\mathrm{A}=\left|\frac{2Z_2+Z_2-5-i}{2Z_1-Z_2+3-i}\right|^3$

حل)

$$2Z_2+Z_1-5-i=3-4i$$
$$2Z_1-Z_2+3-i=4+3i$$
$$\Rightarrow\quad \mathrm{A}=\frac{|3-4i|^3}{|4+3i|^3}=\frac{(\sqrt{25})^3}{\sqrt{25}^3}=1$$

۳. آرگومان اصلی و طول اعداد زیر را تعیین کنید.

الف) $1-i \quad \Rightarrow \quad |1-i|=\sqrt{2} \quad , \quad \mathrm{A}rg\,(1-i)=-\frac{p}{4}$

ب) $-1+i \quad \Rightarrow \quad |-1+i|=\sqrt{2} \quad , \quad Arg\,(-1+i)=\frac{3p}{4}$

ج) $1 \quad \Rightarrow \quad |1|=1 \quad , \quad Arg\,(1)=0$

د) $2i \quad \Rightarrow \quad |2i|=2 \quad , \quad Arg\,(2i)=\frac{p}{2}$

۴. فرض کنید $Z=x+yi$ و $|Z-1+i|=1$ ، مکان Z را تعیین کنید.

حل)

$$Z-1+i=(x-1)+(y+1)i$$
$$\Rightarrow \quad |Z-1+i|=\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}=1$$
$$\Rightarrow \quad (x-1)^2+(y+1)^2=1$$

مکان دایره ای به مرکز $C(1\,,-1)$ و شعاع $R=1$ است.

۵. مکان هندسی نقاط $Z=x+yi$ را در حالات زیر تعیین کنید.

الف) $|Z+1|=|Z-1|$

حل)

$$|(x+1)+yi|=|(x-1)+yi|$$
$$\sqrt{(x+1)^2+y^2}=\sqrt{(x-1)^2+y^2} \qquad \Rightarrow (x+1)^2=(x-1)^2$$
$$\Rightarrow x=0$$

ب) $$|Z+i| = |Z-1|$$

حل)

$$\begin{aligned}
& |x+(y+1)i| = \left|(x-1)^2 + y^2\right| \\
& \Rightarrow \sqrt{x^2+(y+1)^2} = \sqrt{(x-1)^2+y^2} \\
& \Rightarrow \quad x^2+y^2+2y+1 = x^2-2x+1+y^2 \\
& \Rightarrow \quad 2y = -2x \qquad \Rightarrow \qquad y = -x
\end{aligned}$$

۶. نشان دهید که

$$|Z_1+Z_2|^2 + |Z_1-Z_2|^2 = 2(|Z_1|^2 + |Z_2|^2)$$

حل)

$$\begin{aligned}
& |Z_1|^2 + |Z_2|^2 + 2|Z_1||Z_2|\cos q + |Z_1|^2 + |Z_2|^2 - 2|Z_1||Z_2|\cos q \\
& = 2(|Z_1|^2 + |Z_2|^2)
\end{aligned}$$

۷. فرض کنید Z_1 , Z_2 , Z_3 سه عدد مختلط نا صفر باشند به طوری که:

$$Z_1+Z_2+Z_3 = 0 \qquad , \qquad |Z_1| = |Z_2| = |Z_3|$$

ثابت کنید.

الف) $\dfrac{1}{Z_1}+\dfrac{1}{Z_2}+\dfrac{1}{Z_3} = 0$ ب) $Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2 = 0$

حل) الف) رابطه $Z_i\overline{Z}_i = |Z_i|^2$ را در نظر بگیریدداریم

$$\overline{Z}_i = \frac{|Z_i|^2}{Z_i}$$

$$Z_1+Z_2+Z_3=0 \quad \Rightarrow \quad \bar{Z}_1+\bar{Z}_2+\bar{Z}_3=0$$

$$\Rightarrow \frac{|Z_1|^2}{Z_1}+\frac{|Z_2|^2}{Z_2}+\frac{|Z_3|^2}{Z_3}=0$$

$$\Rightarrow |Z_1|^2\left(\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2}+\frac{1}{Z_3}\right)=0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2}+\frac{1}{Z_3}\right)=0$$

ب) طبق قسمت الف ، با مخرج مشترک گیری داریم:

$$\frac{Z_2\,Z_3}{Z_1\,Z_2\,Z_3}+\frac{Z_1\,Z_3}{Z_1\,Z_2\,Z_3}+\frac{Z_1\,Z_2}{Z_1\,Z_2\,Z_3}=0$$

$$\Rightarrow \quad Z_1\,Z_2+Z_1\,Z_3+Z_2\,Z_3=0$$

$$Z_1+Z_2+Z_3=0 \quad \Rightarrow (Z_1+Z_2+Z_3)^2=0$$

$$\Rightarrow Z_1^2+Z_2^2+Z_3^3+2(Z_1\,Z_2+Z_1\,Z_3+Z_2\,Z_3)=0 \Rightarrow Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2=0$$

۸. معادله زیر را بر حسب تابع مزدوج بیان کنید.

$$2x+y=5$$

$$Z=x+yi \quad ,\bar{Z}=x-yi \quad \Rightarrow Z+\bar{Z}=2x\,,\;\bar{Z}-\bar{Z}=2yi$$

$$\Rightarrow \quad (Z+\bar{Z})+\frac{Z-\bar{Z}}{2i}=5$$

۹. هر عدد که ریشه معادله ای به فرم زیر باشد:

$$a_n Z^{n}+a_{n-1}Z^{n-1}+\ldots+a_1 Z+a_0=0$$

که در آن $a_i \in R$ ، یک عدد جبری نام دارد.

ثابت کنید $Z=\sqrt[3]{4}-2i$ جبری است.

حل)

$$Z+2i=\sqrt[3]{4} \quad \Rightarrow \quad (Z+2i)^3=4$$
$$\Rightarrow \quad Z^3+6Z^2i-12Z-8i=4$$
$$\Rightarrow \quad Z^3-12Z-4=(8-6Z^2)i$$
$$\Rightarrow \quad (Z^3-12Z-4)^2=6Z^2-8$$
$$Z^6+144Z^2+16-24Z^4-8Z^3+96Z-6Z^2+8=0$$

پس Z عدد جبری است.

۱۰. نشان دهید که اگر $|Z|=1$ ، آنگاه برای هر دو عدد مختلط b,a که حداقل یکی از آنها مخالف صفر است داریم:

$$\left|\frac{aZ+b}{\bar{b}Z+\bar{a}}\right|=1$$

حل)

$$|aZ+b|=\left|Z(a+\frac{b}{Z})\right|=|Z|\left|a+\frac{b\bar{Z}}{|Z|^2}\right|$$
$$=|a+b\bar{Z}|=|\bar{a}+\bar{b}\bar{\bar{Z}}|=|\bar{a}+\bar{b}Z|$$
$$\Rightarrow \quad \frac{|aZ+b|}{|\bar{a}+\bar{b}Z|}=\left|\frac{aZ+b}{\bar{a}+\bar{b}Z}\right|=1$$

۱۱. اگر $Z=x+yi$ نشان دهید که:

$$|Re(Z)|+|\mathrm{Im}(Z)|\le\sqrt{2}|Z|$$

حل)

$$2|Z|^2=2(\sqrt{|\mathrm{Re}(Z)|^2+|\mathrm{Im}(Z)|^2})^2$$

$$=2(|\mathrm{Re}(Z)|^2+|\mathrm{Im}(Z)|^2)\ge(|\mathrm{Re}(Z)|+|\mathrm{Im}(Z)|)^2$$

$$\Rightarrow \quad |\mathrm{Re}(Z)|+|\mathrm{Im}(Z)|\le\sqrt{2}|Z|$$

۱۲. نشان دهید $|Z_1 - Z_2| = |1 - \overline{Z}_1 Z_2|$ اگر و تنها اگر $|Z_2| = 1 , |Z_1| = 1$

حل) فرض کنید $|Z_1| = |Z_2| = 1$ باشد آنگاه

$$|Z_1 - Z_2| = \left|Z_1 (1 - \frac{Z_2}{Z_1}\right| = |Z_1| \left|1 - \frac{Z_2\,\overline{Z}_1}{|Z_1|^2}\right| = |1 - Z_2\,\overline{Z}_1|$$

حال فرض کنید $|Z_1 - Z_2| = |1 - \overline{Z}_1 Z_2|$ باشد. تساوی بالا را به صورت برعکس ادامه دهید .

۱۳. فرض کنید $Z \neq 0$ عدد مختلط باشد. ثابت کنید $|Z| = 1$ اگر و تنها اگر $Z = \frac{1}{Z}$

حل) اگر $|Z| = 1$ آنگاه $Z\,\overline{Z} = |Z|^2 = 1$ پس $\overline{Z} = \frac{1}{Z}$.

اگر $\overline{Z} = \frac{1}{Z}$ آنگاه $|Z|^2 = Z\,\overline{Z} = 1$ پس $|Z| = 1$.

۱۴. مکان عدد مختلط Z را چنان پیدا کنید که اعداد مختلط i , iZ , Z همواره بر یک استقامت باشند.

حل)

$$\frac{z - iZ}{Z - i} = \frac{iZ - i}{iZ - Z} \Rightarrow -(Z - iZ)^2 = i(Z-1)(Z-i)$$

$$\Rightarrow -z^2 + 2iZ^2 + Z^2 = iZ^2 = Z = 1 - iZ$$

$$i(Z^2 + Z) = Z + 1 \qquad \Rightarrow \qquad iZ = 1$$

$$x = 0 \quad , \qquad -y = 1 \; , \qquad y = -1$$

پس $Z = 0 \, , Z = i \; , Z = -i$ بر یک استقامتند.

۱۵. اگر C , A اعداد حقیقی و

$$A Z \overline{Z} + D Z + DZ + C = 0 \ , \ Z = x + y i \ , \ D = a + i b \ , \ AC < 0$$

نشان دهید مکان Z دایره ای به مرکز $(-\frac{a}{A},\frac{b}{A})$ و شعاع آن به صورت زیر است.

$$R = \sqrt{\frac{a^2}{A^2} + \frac{b^2}{A^2} - \frac{C}{A}}$$

حل)

$$\begin{aligned}
& A Z Z = A(x^2 + y^2) \\
& D Z + D Z = 2 Re(D Z) = 2(a x - b y) \\
& \Rightarrow A x^2 + A y^2 + 2a\ x - 2b\ y + C = 0 \\
& \Rightarrow A(x + \frac{a}{A})^2 + A(y - \frac{b}{A})^2 - \frac{a^2}{A^2} - \frac{b^2}{A^2} + C = 0 \\
& \Rightarrow (x + \frac{a}{A})^2 + (y - \frac{b}{A})^2 = \frac{a^2}{A^3} + \frac{b^2}{A^3} - \frac{C}{A}
\end{aligned}$$

مرکز دایره

$$. \quad R = \sqrt{\frac{a^2}{A^3} + \frac{b^2}{A^3} - \frac{C}{A}} \quad , \qquad (-\frac{a}{A} \ , \ \frac{b}{A})$$

۱۶. معادله خط $A x + B y + C = 0$ را به شکل مختلط بنویسید.

حل) $$A\frac{Z + \overline{Z}}{2} + B\frac{Z - \overline{Z}}{2i} + C = 0$$

۱۷. معادله دایره $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 0$ را به فرم مختلط بنویسید.

حل) $$Z \overline{Z} + Z + \overline{Z} + i(Z - \overline{Z}) = 0$$

۱۸. اگر Z_2 , Z_1 دو عدد مختلط باشند، به طوری که $|Z_1 - Z_2| = |Z_1 + Z_2|$ ثابت کنید اختلاف آرماگون های Z_2 , Z_1 برابر $\frac{p}{2}$ است.

حل)

$$|Z_1 - Z_2|^2 = |Z_1 + Z_2|^2 \Rightarrow |Z_1|^2 + |Z_2|^2 + 2|Z_1||Z_2|\cos q$$

$$= |Z_1|^2 + |Z_2|^2 - 2|Z_1||Z_2|\cos a$$

$$\Rightarrow 4|Z_1||Z_2|\cos q = 0 \quad \Rightarrow \quad q = \frac{p}{2}$$

۱۹. فرض کنید $b\ a\ , Z \in C$ دو عدد حقیقی نابرابر باشند.

نشان دهید اگر $|Z + a\,i| = |Z + b\,i|$ آنگاه $Z - Z = -(a+b)\,i$

حل)

$$Z = x + y\,i \qquad \Rightarrow x^2 + (y+a)^2 = x^2 + (y+b)^2$$

$$\Rightarrow a^2 + 2a\,y = 2b\,y + b^2$$

$$(2a - 2b)\,y = b^2 - a^2 \Rightarrow y = -\frac{a+b}{2}$$

$$Z - \bar{Z} = 2\,y\,i = -(a+b)\,i$$

تمرین صفحه ٥٤٦ .

اعداد زیر را به صورت مثلثاتی نمایش دهید:

الف) $Z_1=-3+\sqrt{3}\,i=2\sqrt{3}\,(\cos\frac{5p}{6}+i\sin\frac{5p}{6})$

ب) $Z_2=\frac{(i-1)^2}{i}=\frac{-2i}{i}=-2=2(\cos p+i\sin p)$

ج) $Z_3=-1-\sqrt{3}\,i=2(\cos(-\frac{p}{3})+i\sin(-\frac{p}{3}))$

تمرین صفحه ۵۴۷ .

ثابت کنید دستور دمو آور برای $n<0$ صحیح نیز برقرار است.

حل) اگر قرار دهیم $n=-m\ ,\ e^{iq}=\cos q+i\sin q$ باشد آنگاه

$$Z=e^{iq}\Rightarrow Z^{-m}=e^{-imq}=\cos(-mq)+i\sin(-mq)$$
$$\Rightarrow n<0\qquad\Rightarrow(\cos q+i\sin q)^n=\cos(nq)+i\sin(nq)$$

تمرین صفحه ۵۴۷ .

اگر $Z_2\ ,\ Z_1$ دو عدد مختلط باشند و $Z_2\neq 0$ ، ثابت کنید

$$\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right|=\frac{|Z_1|}{|Z_2|}$$

حل)

$$Z_1=\left|Z_1\right|(\cos q_1+i\sin q_1) \qquad , \qquad Z_2=\left|Z_2\right|(\cos q_2+i\sin q_2)$$

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{\left|Z_1\right|(\cos q_1+i\sin q_1)}{\left|Z_2\right|(\cos q_2+i\sin q_2)}=\frac{\left|Z_1\right|}{\left|Z_2\right|}(\cos q_1+i\sin q_2)(\cos q_2+i\sin q_2)$$

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{\left|Z_1\right|}{\left|Z_2\right|}(\cos(q_1-q_2)+i\sin(q_1-q_2))$$

$$\Rightarrow Arg(\frac{Z_1}{Z_2})={}_1-{}_2=Arg\,Z_1-Arg\,Z_2$$

$$\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right|=\frac{\left|Z_1\right|}{\left|Z_2\right|}\left|\cos(q_1-q_2)+i\sin(q_1-q_2)\right|=\frac{\left|Z_1\right|}{\left|Z_2\right|}$$

تمرین صفحه ۵۴۹ .

۱. ثابت کنید:

$$(\frac{1+i\,tga}{1-i\,tga})^n=\frac{1+i\,tgn\,a}{1-i\,tgn\,a}$$

حل)

$$(\frac{1+i\,tg\,a}{1-i\,tg\,a})^n=(\frac{1+i\,\frac{\sin a}{\cos a}}{1-i\,\frac{\sin a}{\cos a}})^n=(\frac{\cos a+i\sin a}{\cos a-i\sin a}))^n$$

$$=(\frac{\cos a+i\sin na}{\cos na-i\sin na})=\frac{1+i\,tgna}{1-i\,tgna}$$

۲. فرض کنید n عدد صحیح و مثبت باشد، حاصل $I=\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$ را محاسبه کنید.

حل)

$$I=(1+i)^n\,(1-i)^{2-n}=\sqrt{2}\,(\cos\frac{p}{4}+i\sin\frac{p}{4})^n\,\sqrt{2}\,(\cos\frac{p}{4}-i\sin\frac{p}{4})^{2-n}$$

$$=2^{\frac{n}{2}}\times 2^{1-\frac{n}{2}}\,(\cos\frac{np}{2}+i\sin\frac{np}{4})(\cos\frac{(2-n)p}{4}-i\sin\frac{(2-n)p}{4})$$

$$=2(\cos\frac{np}{2}+i\sin\frac{np}{2})$$

۳. عدد مختلط $(1+i)^n$ را به دو طریق محاسبه و نتیجه را مقایسه کنید.

حل)

$$(1+i)^2=2i \qquad \Rightarrow n=2k \qquad \Rightarrow (1+i)^n=(2i)^k$$

$$n=2k+1 \qquad \Rightarrow (1+i)^n=(2i)^k\,(1+i)$$

۵. ثابت کنید.

$$\frac{\sin 4q}{\sin q}=2\cos 3q+6\cos q-4$$

حل)

$$Z=\cos+i\sin q \qquad \Rightarrow Z^4=\cos 4q+i\sin 4q$$

$$((\cos^2 q-\sin^2 q)+2\sin q\,\cos q\;i)^2=\cos 4q+i\sin 4q$$

$$(\cos 2q+\sin 2q\;i)^2=$$

تمرین صفحه ۵۵۶ .

۱- معادله $Z^2+(2i-3)Z+5-i=0$ را حل کنید.

حل)

$$(Z+\frac{2i-3}{2})^2 = i-5-\frac{(2i-3)^2}{4}$$

$$(Z+\frac{2i-3}{2})^2 = \frac{4i-20+4+6i-9}{4} = \frac{10i-25}{4}$$

$$Z = \frac{3-2i}{2} \pm \sqrt{10i-25}$$

۲- فرض کنید $(Z \neq 1)$. در این صورت معادله زیر را حل کنید:

$$1+Z+Z^2+Z^3+Z^4+Z^5=0$$

حل) دو طرف را در $(1-Z)$ ضرب می کنیم.

$$1-Z^6=0 \qquad \Rightarrow Z^6=1$$

$$W_i = \cos(\frac{kp}{3}) + i\sin(\frac{kp}{3})$$

$$W_0 = 1 \ , \qquad W_1 = \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$W_2 = -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad , \qquad W_3 = -1$$

$$W_4 = \frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \qquad , \qquad W_5 = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

ریشه $Z=1$ قابل قبول نیست. چون با ضرب $1-Z$ تولید شده است.

۳. اگر W یکی از ریشه های موهومی، n ام واحد باشد. نشان دهید:

$$1+W+W^2+\ldots+W^{n-1}=0$$

حل)

$$W \neq 1 \qquad , \qquad W^n = 1 \quad \Rightarrow \quad W^n - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (W-1)(W^{n-1} + W^{n-2} + \ldots + W + 1) = 0$$

$$W \neq 1 \quad \Rightarrow \quad 1 + W + W^2 + \ldots + W^{n-1} = 0$$

۴. معادله زیر را حل کنید:

$$iZ^3 + 8 = 0 \; .$$

حل)

$$-Z^3 + 8i = 0 \Rightarrow Z^3 = 8i$$

$$r = 8 \quad , \qquad q = \frac{p}{2}$$

$$W_k = \sqrt[3]{8}\,(\cos\frac{2kp + \frac{p}{2}}{3} + i\sin\frac{2kp + \frac{p}{2}}{3}$$

$$W_0 = 2(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}) = \sqrt{3} + i$$

$$W_1 = 2(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}) = -\sqrt{3} + i$$

$$W_3 = -2i$$

۵. ریشه های هر یک از اعداد زیر را بدست آورید.

الف) $(-1+i)^{\frac{1}{3}} \qquad , \qquad r = \sqrt{2} \; , \qquad q = \frac{3p}{4}$

$$W_k=\sqrt[6]{2}\,(\cos\frac{2kp+\frac{3p}{4}}{3}+i\sin\frac{2kp+\frac{3p}{4}}{3})$$

$$W_0=\sqrt[6]{2}\,(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\,\frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$W_1=\sqrt[6]{2}\,(\cos\frac{11p}{12}+i\sin\frac{11p}{12})$$

$$W_2=\sqrt[6]{2}\cos\frac{19p}{12}+i\,siin\frac{19p}{12})$$

ب) $(-2\sqrt{3}-2i)^{\frac{1}{3}}$, $r=4$, $q=\frac{7p}{6}$

$$W_k=\sqrt[4]{4}\,(\cos\frac{2kp+\frac{7p}{6}}{3}+i\sin\frac{2kp+\frac{7p}{6}}{3})$$

$$W_0=\sqrt[4]{4}\,(\cos\frac{7p}{24}+i\sin\frac{7p}{24})$$

$$W_1=\sqrt[4]{4}\,(\cos\frac{19p}{24}+i\sin\frac{19p}{24})$$

$$W_2=\sqrt[4]{4}\,(\cos\frac{31p}{24}+i\sin\frac{31p}{24})$$

$$W_3=\sqrt[4]{4}\,(\cos\frac{43p}{24}+i\sin\frac{43p}{24})$$

۷. معادله $6Z^4-25Z^3+32Z^2+3Z-10=0$ را حل کنید.

حل) مقسوم علیه های -10 برابر ±1 و ±2 و ±5 است.

مقسوم علیه های 6 برابر ±1 و ±2 و ±3 است.

۱۰. معادله $(1+Z)^5=(1-Z)^5$ را حل کنید.

حل)

$$(\frac{1+Z}{1-Z})^5=1 \quad , \quad W^5=1 , \quad W=\frac{Z+1}{Z-1}$$

$$W_0=1 \Rightarrow \frac{1+Z}{1-Z}=1 \Rightarrow Z_0=0$$

$$W_1=\cos\frac{2p}{5}+i\sin\frac{2p}{5}=\frac{1+Z_1}{1-Z_1}$$

$$W_2=\cos\frac{4p}{5}+i\sin\frac{4p}{5}=\frac{1+Z_2}{1-Z_2}$$

$$W_3=\cos\frac{6p}{5}+i\sin\frac{6p}{5}=\frac{1+Z_3}{1-Z_3}$$

$$W_4=\cos\frac{8p}{5}+i\sin\frac{8p}{5}=\frac{1+Z_4}{1-Z_4}$$

۱۱. هر یک از عبارات زیر را ساده کنید.

الف)

$$\sqrt[6]{\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}}=(\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}})^{\frac{1}{6}}=$$

$$\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}\ e^{-i\frac{p}{4}}}{2\ e^{-i\frac{p}{3}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\ e^{-\frac{7p}{12}}$$

$$Z_k=\sqrt[6]{\frac{\sqrt{2}}{2}}(\cos\frac{2kp-\frac{7p}{12}}{6}+i\sin\frac{2kp-\frac{7p}{12}}{6})$$

$$\sqrt[6]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$$

ب) $$\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}=\frac{\sqrt{2}\ e^{-i\frac{p}{4}}}{2\ e^{i\frac{p}{6}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\ e^{-i\frac{5p}{12}}$$

$$Z_k=\sqrt[6]{\frac{\sqrt{2}}{2}}\,(\cos(\frac{2kp-\frac{5p}{12}}{6})+i\sin(\frac{2kp-\frac{5p}{12}}{6}))$$

۱۲. معادله $(x+i)^n-(x-i)^n=0$ را حل کنید که در آن x عدد حقیقی است.

حل)

$$(x+i)^n-(x-i)^n=0 \Rightarrow (x+i)^n-(x-i)^n$$

$$\Rightarrow (\frac{x+i}{x-i})^n=1$$

$$Z=\frac{x+i}{x-i} \qquad \Rightarrow \qquad Z^n=1$$

$$Z_k=\cos\frac{2kp}{8}+i\sin\frac{2kp}{8}\ ,\ k=0,1,2,\dots,n-1$$

$$Z_k=\frac{x+i}{x-i} \qquad \Rightarrow \qquad x\,Z_k-i\,Z_k=x+i$$

$$x(Z_k-1)=i(Z_k+1)$$

$$x=i\frac{Z_k+1}{Z_k-1} \qquad k=0,1,2,\dots,n-1$$

۱۳) منحنی ای بیابید که معادله اش $|Z+c|+|Z-c|=2a$ باشد که در آن $a\,,c$ اعداد حقیقی مثبت اند به طوری که $a>c$.

حل) طبق تعریف ، معادله فوق، معادله یک بیضی است.

$$b^2 = a^2 - c^2 \qquad , \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

۱۴. معادله خط مستقیم $Ax+By+C=0$ را به شکل مختلط بنویسید.

حل) $$A(\frac{Z+\overline{Z}}{2})+B(\frac{Z-\overline{Z}}{2i})+C=0$$

۱۵. معادله دایره ای را بنویسید که از سه نقطه $1+i\ ,\ 2i\ ,\ 1-i$ می گذرد.

حل) فرض کنید $Z_0 = x_0 + y_0 i$ مرکز دایره باشد پس:

$$\left|Z_0-(1-i)\right| = \left|Z_0-(1+i)\right| = \left|Z_0-2i\right|$$
$$\Rightarrow (x_0-1)^2+(y_0+1)^2 = (x_0-1)^2+(y_0+1)^2 \Rightarrow y_0=0$$
$$\Rightarrow (x_0-1)^2+1 = x_0^2+4 \qquad \Rightarrow \qquad x_0^2-2x_0+2 = x_0^2+4$$

مرکز دایره $C(-1\ ,\ 0)$ است.

$$R=\left|(-1+0)-(1-i)\right| = \left|-2+i\right| = \sqrt{5}$$

شعاع دایره برابر $R=\sqrt{5}$ است.

۱۶) مکان Z در هر حالت تعیین کنید.

الف) $|Z-i|=1$: دایره به مرکز $(0,+1)$ و شعاع $R=1$.

ب) $|Z-1-i|=1$: دایره به مرکز $(1,1)$ و شعاع $R=1$.

ج) $|Z-2i|=\frac{1}{2}$: دایره به مرکز $(0,2)$ و شعاع $R=\frac{1}{2}$.