فصل یازدهم

صورتهای مبهم و انتگرال های ناسره

تمرین صفحه ۵۱۹ .

۱. حدهای زیر را محاسبه کنید.

1) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}x}{tg^{-1}x}=\lim\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{1+x^2}}=1$$

2) $$\lim_{t\to p}\frac{\sin^2 t}{t-p}=\lim_{t\to p}\frac{\sin 2t}{1}=0$$

3) $$\lim_{x\to \frac{p}{2}}\frac{\cos 3x}{p-2x}=\lim_{x\to \frac{p}{2}}\frac{-3\sin 3x}{-2}=-\frac{3}{2}$$

4) $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin^2 x}{tgx-x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin 2x}{\sec^2 x-1}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\cos 2x}{2\sec^2 x.tgx}=+\infty$$

5) $$\lim_{x\to\infty}x(2tg^{-1}x-p)=\lim_{x\to\infty}\frac{2tg^{-1}x-p}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=-2$$

6) $$\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t\,e^{at}}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{e^{at}-1}{t\,e^{at}}=\lim_{t\to 0}\frac{a\,e^{at}}{e^{at}+a\,t\,e^{at}}=a$$

7) $$\lim_{x\to 0^+}(\csc x)^{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0^+}e^{-\sin^2 x\,Lnx}=e^0=1$$

8) $$\lim_{x\to 0}\frac{3\sin t-\sin 3t}{3tg\,t-tg\,3t}=\lim_{x\to 0}\frac{3\cos t-3\cos 3t}{3\sec^2 t-3\sec^2 3t}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin t+3\sin 3t}{2\sec^2 t.tg\,t-6\sec^2 3t.tg3t}=-\frac{8}{16}$$

9) $$\lim_{x\to 1}\frac{x^{\frac{1}{3}}-1}{x^{\frac{2}{3}}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}}=\frac{1}{2}$$

10) $$\lim_{x\to 1}\frac{Ln(e\,x)-1}{\sin p\ x}=\lim_{x\to 1}\frac{Ln\,e+Ln\,x-1}{\sin p\ x}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{p\ \cos p\ x}=\frac{-1}{p}$$

11) $$\lim_{r\to\frac{p}{2}}\frac{Ln\sin r}{\cos r}=\lim_{r\to\frac{p}{2}}\frac{\cot r}{-\sin r}=0$$

12) $$\lim_{x\to 0^+} x^{\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+} e^{\sqrt{x}\,Lnx}=\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{Lnx}{\frac{1}{\sqrt{x}}}}=\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x\sqrt{x}}}}=1$$

13) $$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{Lnx}\right)=\lim_{x\to 1^+}\frac{Lnx+1-x}{(x-1)\,Lnx}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x}-1}{Lnx+\frac{x-1}{x}}=\lim\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=-\frac{1}{2}$$

14) $$\lim_{t\to 0}(\cos 2t)^{\frac{1}{t^2}}=\lim_{t\to 0} e^{\frac{Ln\cos 2t}{t^2}}$$

$$=\lim_{t\to 0} e^{\frac{-2tg\,2t}{2t}}=e^{-2}$$

۱۵. $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}$ مشروط بر اینکه f دو بار مشتق پذیر باشد.

حل)

حد $$=\lim\frac{f'(x+h)-2f'(x)-f'(x-h)}{2h}=\lim\frac{f''(x+h)-2f''(x)+f''(x-h)}{2}=0$$

16) $$\lim_{x\to 1}\frac{\sum_{k=1}^{n}x^k-n}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x\frac{1-x^n}{1-x}-n}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x(x^n-1)-n(x-1)}{(x-1)^2}=\frac{(n+1)x^n-1-n}{2(x-1)}$$

$$=\lim\frac{n(n+1)x^{n-1}}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$$

17) $$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^x-x}{1-x+Log\,x}=\lim_{x\to 1^+}\frac{e^{x\,Lnx}-x}{1-x-Log\,x}$$

$$=\lim\frac{(1+Lnx)\,e^{x\,Lnx}-1}{-1+\frac{1}{Ln10}.\frac{1}{x}}=0$$

18) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}2x-2\sin^{-1}x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2\times(-\frac{1}{2})(-8x)}{(1-4x^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{2\times(-\frac{1}{2})(-2x)}{(1-x^2)^3\,2}}{6x}$$

$$=\frac{8-2}{6}=1$$

19) $$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x\sqrt{x}}(a\,tg^{-1}\frac{\sqrt{x}}{a}-b\,tg^{-1}\frac{\sqrt{x}}{b})$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+\frac{x}{a^2}}-\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+\frac{x}{b^2}}}{\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2})}{3x}$$

$$=\frac{1}{3}(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2})$$

20) $$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x-a}}}{\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\frac{\sqrt{x-a}+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{\frac{x}{\sqrt{x+a}}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{a}{\sqrt{2a}}}=\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{a}}$$

۲. ثابت های a و b را طوری تعیین کنید که:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{bx-\sin x}\int_0^x\frac{t^2}{\sqrt{a+t}}\,dt=1$$

حد $$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{\sqrt{a+x}}}{b-\cos x}=1 \quad\Rightarrow\quad b=1\ ,\quad a=4$$

تمرین صفحه ۵۲۸ .

۱. تابع f در بازه $[-1,1]$ به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}1 & x=0\\ x^2 & x\neq 0\end{cases}$$

نوع و مقدار انتگرال $\int_{-1}^{1}f(x)\,dx$ را تعیین کنید.

حل) انتگرال ناسره نوع دوم است و مقدار آن برابر زیر است

$$\int_{-1}^{1}x^2dx=2\int_0^1x^2dx=\frac{2}{3}$$

۲. نشان دهید انتگرال ناسره $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ همگرا است، اگر $p>1$ باشد

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\lim_{t\to+\infty}\int_1^t x^{-p}dx=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^{1-p}}{1-p}-\frac{1}{1-p}$$

اگر $p>1$ ، توان x در صورت منفی است پس در این حالت

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=-\frac{1}{1-p}$$

۳. مقداری برای n پیدا کنید که به ازای آن انتگرال $\int_1^{+\infty}(\frac{n}{x+1}-\frac{3x}{2x^2+n})$ همگرا باشد.

به ازای مقدار n بدست آمده انتگرال را حساب کنید.

$$\int_1^{+\infty}(\frac{n}{x+1}-\frac{3x}{2x^2+n})\,dx=\lim_{t\to+\infty}\int_1^{\pm}(\frac{n}{x+1}-\frac{3x}{2x^2+n})\,dx$$

$$=\lim_{t\to+\infty}(Ln\,(t+1)^n-\frac{3}{4}Ln\,(2t^2+n))-A$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\ Ln\frac{(t+1)^n}{(2t^2+n)^{\frac{3}{4}}}-A$$

$$\Rightarrow n=2\times\frac{3}{4}=\frac{3}{2}$$

$$\mathrm{I}=Ln\frac{1}{\sqrt[4]{8}}-Ln\frac{\sqrt{8}}{(\frac{7}{2})\frac{3}{4}}$$

۴) نوع انتگرال $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^3}$ را تعیین کنید.

حل) این انتگرال همگراست چون $\frac{1}{(1+x^2)^3}\le\frac{1}{1+x^2}$, $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ همگراست، طبق آزمون مقایسه انتگرال داده شده همگراست.

۵) نوع انتگرال $\int_{\frac{p}{4}}^{\frac{p}{2}}\sec x\,dx$ را تعیین کنید.

$$\int_{\frac{p}{4}}^{\frac{p}{2}}\sec x\,dx=\lim_{t\to\frac{p}{2}^-}\int_{\frac{p}{4}}^{t}\sec x\,dx=\lim_{t\to\frac{p}{2}^-}\ Ln\left|\sec t+tg\,t\right|-A$$

$$=+\infty$$

انتگرال واگراست.

۶. به ازای مقادیر مختلف n نوع انتگرال های زیر را بررسی کنید:

الف) $\mathrm{I}=\int_0^1 x^n\,dx$ برای $n>-1$ همگرا و برای $n\le-1$ واگراست.

ب) $\mathrm{I}=\int_0^1 x^n\, Ln^2 x\, dx$

۷. نوع انتگرال های زیر را تعیین کنید.

الف) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^2+x}}$ واگراست چون $\frac{1}{\sqrt{x^2+x}}\le\frac{1}{\sqrt{x^2+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{x}}$ و می دانیم $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$ واگراست.

ب) $\int_0^1\frac{dx}{x\cos x}$ واگراست چون $\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x\cos x}}{\frac{1}{x}}=1$ و $\int_0^1\frac{dx}{x}$

واگراست، طبق آزمون مقایسه حدی انتگرال داده شده واگراست.

ج) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2+Lnx}$ ، همگراست، زیرا داریم : $\frac{1}{x^2+Lnx}\le\frac{1}{x^2}$ و انتگرال $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ همگراست پس طبق آزمون مقایسه انتگرال داده شده همگراست.

د) $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$.

برای $0<x<1$ داریم $x^3<x^2$ پس $\frac{1}{\sqrt{1-x^3}}\le\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

اما انتگرال $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ همگراست، طبق آزمون مقایسه انتگرال داده شده همگراست.

ه) $\int_0^{\frac{p}{2}}\frac{\sin x}{x^{\frac{2}{3}}}$ همگراست، چون $\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\sin x}{x\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=1$ اما انتگرال

$\int_0^{\frac{p}{2}}\frac{dx}{\sqrt{x}}$ همگراست، پس انتگرال داده شده همگراست.

و) $\int_0^{\frac{p}{2}} \frac{\cos x}{x} dx$ واگراست. چون $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\frac{\cos x}{x}}{\frac{1}{x}} = 1$ اما انتگرال $\int_0^{\frac{p}{2}} \frac{dx}{x}$ واگراست، پس طبق آزمون مقایسه حدی انتگرال واگراست.

۸. فرض کنید $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{p}}{2}$ ، در این صورت ثابت کنید.

الف) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{p}$ ب) $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{p}}{4}$

حل)

$$u = \sqrt{x} \Rightarrow x = u^2 \Rightarrow dx = 2u\, du$$

الف) $$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = 2 \times \frac{\sqrt{p}}{2} = \sqrt{p}$$

ب) از روش جز به جز استفاده می کنیم.

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \int_0^{+\infty} x.x e^{-x^2} dx = \frac{-x}{2} e^{-x^2} \Big|_0^{+\infty}$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{p}}{2} = \frac{\sqrt{p}}{4}$$

۹. تابعی نظیر f طوری مثال بزنید که $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ واگرا ولی $\lim \int_{-t}^{t} f(x) dx = 0$.

حل) تابع $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3}}$ را در نظر بگیرید.

۱۰. ثابت کنید انتگرال $\int_1^{+\infty} e^{-x} x^t dx$ به ازای هر t حقیقی همگراست.

حل) چون $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^t e^{-x}}{e^{-2x}} = 0$ و انتگرال $\int_1^{+\infty} e^{-2x} dx$ همگراست. پس انتگرال داده شده همگراست.

۱۱. تابع گاما. $\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} e^{-t}.t^{s-1}\,dt$ تابع گاما است.

ثابت کنید.

الف) تابع $\Gamma(s)$ به ازای هر $s>0$ همگراست.

حل) با توجه به تمرین ۱۰ این تابع برای هر s همگراست.

ب) نشان دهید $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$.

$$\Gamma(x+1)=\int_0^{+\infty} e^{-t}.t^{x}\,dt=-t^{x}e^{-t}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty} x\,t^{x-1}e^{-t}\,dt=0+\Gamma(x)$$

ج) $\Gamma(n+1)=n!$.

حل) طبق قسمت ب داریم:

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n\Gamma(n-1+1)=n(n-1)\Gamma(n-1)=n(n-1)(n-2)\ldots1=n!$$

د) $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{p}}{2}$ ، نشان دهید

$$\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{p} \qquad , \qquad \Gamma(\frac{2}{3})=\frac{\sqrt{p}}{2}$$

حل) $\Gamma(\frac{1}{2})=\int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}}.e^{-t}\,dt=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt=\frac{\sqrt{p}}{2}$

تساوی اخیر از تمرین ۸ بدست می آید.

$$\Gamma(\frac{2}{3})=\Gamma(\frac{1}{2}+1)=\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}\sqrt{p}$$

۱۲. نوع انتگرال های زیر را معلوم کنید.

الف) $\int_1^{+\infty}\frac{2+\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$ این انتگرال واگراست چون $\frac{1}{\sqrt{x}}\le\frac{2+\cos x}{\sqrt{x}}$

طبق آزمون مقایسه چون انتگرال $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$ واگراست، انتگرال بزرگتر واگراست.

ب) $\int_1^{+\infty}\frac{1-4\sin 2x}{x^3+\sqrt[3]{x}}$ انتگرال همگراست چون $\frac{1-4\sin 2x}{x^3+\sqrt[3]{x}}\le\frac{1}{x^3}$

و انتگرال $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^3}$ همگراست. طبق آزمون مقایسه انتگرال داده شده همگراست.