فصل نهم

مختصات قطبی و منحنی‌های قطبی

تمرین صفحه 456

1. برای هر یک از نقاط زیر، دو مجموعه دیگر از مختصات قطبی همان نقطه را پیدا کنید که در یکی $r > 0$ و دیگری $r > 0$ باشد.

الف) $(\sqrt{2}\,, -\frac{p}{4})\ :\ (-\,, \frac{3p}{4})\ ,\ (\sqrt{2}\,, \frac{7p}{4})$

ب) $(-2\,, \frac{4p}{3})\ :\ (2\,, \frac{7p}{3})\ ,\ (-2\,, \frac{10p}{3})$

ج) $(-3\,, -p)\ :\ (3\,, 0)\ ,\ (-3\,, p)$

2- مختصات قطبی نقاط زیر را با شرایط $r > 0$ و $0 \le q \le 2p$ تعین کنید

الف) $(2\,,2) : (2\sqrt{2}\,, \frac{7p}{4})$

ب) $(-1\,, -\sqrt{3}) : (2\,, \frac{4p}{3})$

ج) $(1\,, \sqrt{3}) : (2\,, \frac{p}{3})$

3- معادله قطبی معادلات زیر را بنویسید.

الف) $x^3 = 4y^2 :\quad r^3\cos^3 q = 4r^2\sin^2 q \quad \Rightarrow \quad r = \dfrac{4\sin^2 q}{\cos^3 q}$

ب) $xy = 1 :\quad r^2 \sin q \cos q = 1$

$$x^2-4x+y^2=0 \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2=4x$$

ج)
$$\Rightarrow r^2=4r\cos q$$
$$\Rightarrow r=4\cos q$$

4- معادلات دکارتی معادلات زیر را بنویسید.

الف) $r=2\sin 3q=2(3\sin q\ \cos^2 q-\sin^3 q)$

$$r^4=6r\sin q(r\cos q)^2-2(r\sin q)^3$$
$$(x^2+y^2)^2=6yx^2-2y^2$$

ب) $r=\dfrac{4}{3-2\cos q}\Rightarrow 3r-2r\cos q=4$

$$3\sqrt{x^2+y^2}-2x=4\Rightarrow 3(x^2+y^2)=(2x+4)^2$$
$$3x^2+3y^2=4x^2+16x+16$$

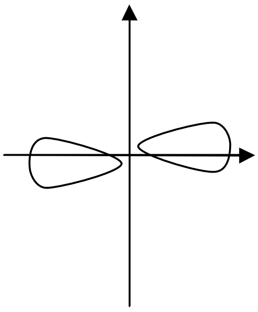
ج) $r^2=q\Rightarrow x^2+y^2=tg^{-1}(\frac{y}{x})$

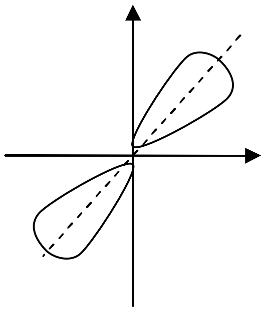
$$\Rightarrow y=xtg(x^2+y^2)$$

تمرین صفحه 462

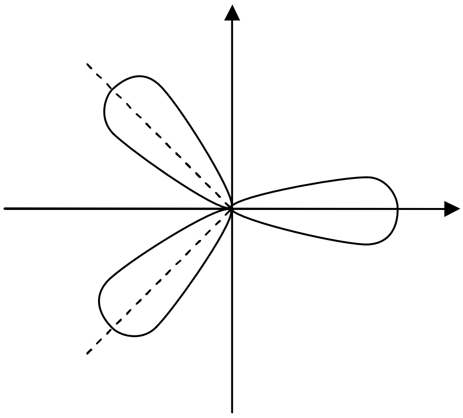
1. نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.

1) $r^2=9\sin 2q$ 2) $r^2=16\cos 2q$

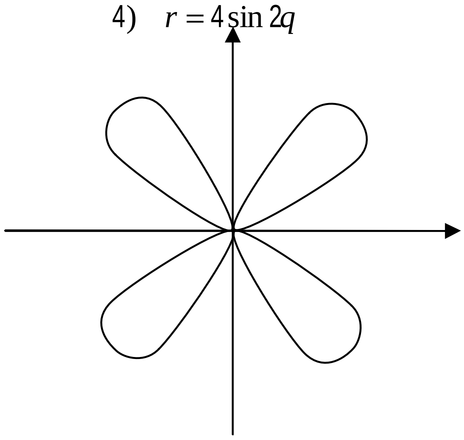




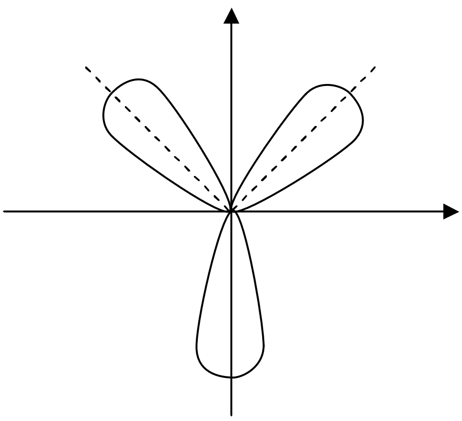
3) $r = 3\cos 3q$



4) $r = 4\sin 2q$



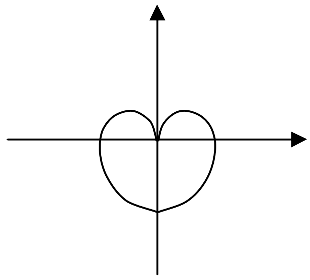
5) $r = 3\sin 3q$



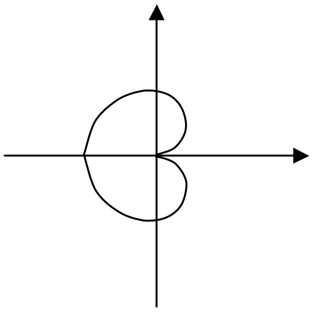
6) $r = 1 + 2\sin q$

$r = 2(\frac{1}{2} + \sin q)$

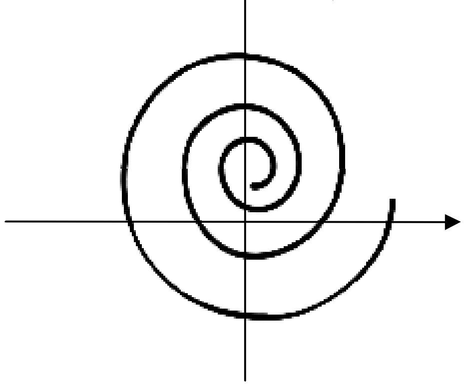
8) $r = 3(1 - \sin q)$



7) $r = 4(1 - \cos q)$



9) $r = ae^{kq}$



2. فرض کنید خطی از مبدأ بر خط $dx+by-c=0$ عمود باشد.

مختصات تقاطع آنها را در مختصات قطبی تعین کنید.

$$y=x-\frac{d}{b}x+\frac{c}{b}$$

خط مورد نظر به صورت $y=\frac{d}{b}x$ است. که در مختصات قطبی به

صورت $q=tg^{-1}(\frac{d}{b})$ مطرح می شود.

$$r\sin q=-\frac{d}{b}r\cos q+\frac{c}{b}$$

$$r=\frac{c}{b\sin q+d\cos q}=\frac{c}{b\sin(tg^{-1}(\frac{b}{d}))+d\cos(tg^{-1}(\frac{b}{d})}$$

$$r=\frac{c}{\frac{b^2}{\sqrt{b^2+d^2}}+\frac{d^2}{\sqrt{b^2+d^2}}}$$

$$r=\frac{c}{\sqrt{b^2+d^2}}$$

3. مسأله 2 را در مورد خط $\sqrt{3}\,x+y=6$ حل کنید.

$$q=tg^{-1}(\frac{1}{\sqrt{3}})=\frac{p}{6}$$

$$r=\frac{6}{\sqrt{4}}=3$$

4. نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $r = 2\sin\theta$

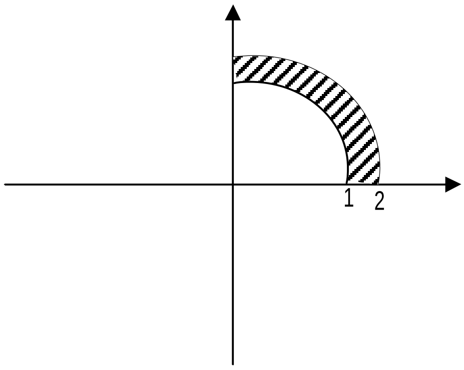
$$r = 2\sin\theta \quad \Rightarrow \quad r^2 = 2r\sin\theta \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 2y$$
$$\Rightarrow \quad x^2 + (y-1)^2 = 1$$

ب) $r = 2\sin(\theta + 45°)$

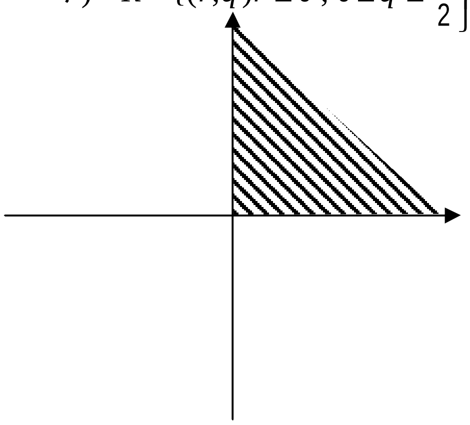
کافی است نمودار قبلی را به اندازه $45°$ در جهت ساعت دوران دهیم.

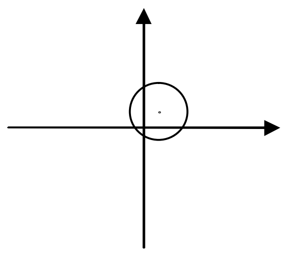
5. ناحیه های زیر را در مختصات قطبی نمایش دهید.

الف) $D = \{(r,\theta) 1 \le r \le 2 \ , \ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\}$



ب) $R = \{(r,\theta) r \ge 0 \ , \ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\}$





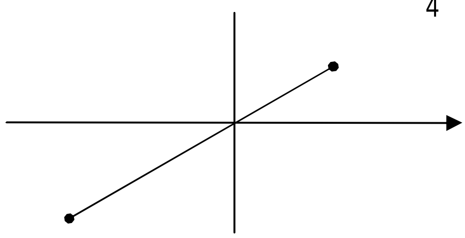
ج) $P=\{(r,q)\ 0\le r\le 2\cos q\ ,\ -\frac{p}{2}\le q\le \frac{p}{2}\}$

$0\le r\le 2\cos q \Rightarrow 0\le r^2\le 2r\cos q$

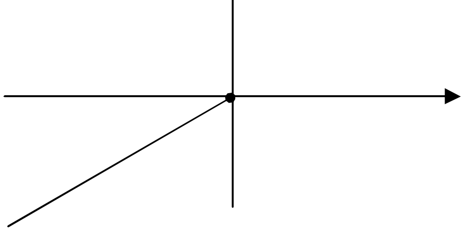
$0\le x^2+y^2\le 2x$

$(x-1)^2+y^2\le 1$

د) $T=\{(r,q)\text{-}3\le r\le 2\ ,\ q=\frac{p}{4}\}$



ه) $K=\{(r,q)r\le 0\ ,q=\frac{p}{4}\}$



تمرین صفحه 446

1. نقاط تقاطع نمودارهای داده شده را پیدا کنید.

الف) $r = 1 - \sin q \ , \ r = \cos(2q)$

حل)

$$q = \frac{p}{4} \Rightarrow r = \cos(2 \times \frac{p}{4}) = 0$$
$$q = \frac{p}{2} \Rightarrow r = 1 - \sin \frac{p}{2} = 0$$

دو منحنی از قطب می گذرند.

$$\cos(2q) = 1 - \sin q \Rightarrow 1 - 2\sin^2 q = 1 - \sin q \Rightarrow 2\sin^2 q = \sin q$$
$$\Rightarrow q = 0 \ , p \ \ , q = \frac{p}{6} \text{ و } \frac{5p}{6}$$

ب) $r = 2\cos q \ , \ r = 2\sin q$

قطب روی دو منحنی است

$$q = 0 \rightarrow r = 2\sin 0 = 0$$
$$q = \frac{p}{4} \rightarrow r = 2\cos\frac{p}{2} = 0$$

$$\cos 2q = \sin q = \cos(q - \frac{p}{2}) \Rightarrow 2q = 2Kp \pm (q - \frac{p}{2})$$
$$\Rightarrow q = 2Kp - \frac{p}{2} \Rightarrow q = -\frac{p}{2} \ , \ \frac{3p}{2}$$
$$q = \frac{2kp}{3} + \frac{p}{2} \Rightarrow q \ \frac{p}{2} \ , \ \frac{2p}{3} + \frac{p}{2}$$

ج) $r = 1 \ , \ r^2 = 2\cos q$

$r = 1$ از قطب نمی گذرد.

$$1 = 2\cos q \Rightarrow \cos q = \frac{1}{2} \Rightarrow q = \pm\frac{p}{3}$$
$$-1 = 2\cos q \Rightarrow \cos q - \frac{1}{2} \Rightarrow q = \frac{2p}{3} \ , \ \frac{4p}{3}$$

د) $r(1 - \sin q) = 3 \ , \ r = 4(1 + \sin q)$

$$q = -\frac{p}{2} \Rightarrow r = 4(1 + \sin(-\frac{p}{2}) = 0$$

منحنی دوم از قطب نمی گذرد.

$$\frac{3}{1-\sin q} = 4(1+\sin q) \Rightarrow \cos^2 q = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos q = \frac{\pm\sqrt{3}}{2}$$
$$q = \pm\frac{p}{6}\ ,\ \frac{5p}{6}\ ,\ \frac{7p}{6}$$

2. نمودار $r = \sin\frac{3}{2}q$ ، خودش را قطع می کند. نقاط تقاطع را تعین کنید.

تمرین صفحه 469

1. ضریب زاویه خط مماس بر منحنی $r = 1+\sin q$ را در نقطه $(\frac{p}{3}$ و $1+\frac{\sqrt{3}}{2})$ بدست آورید.

حل)

$$\frac{dr}{dq} = \cos q\ ,\ tg\frac{p}{3} = \sqrt{3}$$
$$m = tgd = \frac{\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} - (1+\frac{\sqrt{3}}{2})\sqrt{3}}$$
$$m = \frac{\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} - \frac{3}{2}}$$

2. زاویه بین شعاع حامل و خط مماس بر منحنی های زیر را در نقاط مفروض بدست آورید.

الف) $p(\sqrt{2}\text{و}\frac{p}{6})\ ,\ r^2=4\cos 2q$

حل) $$tgb=\frac{r}{\frac{dr}{jq}}=\frac{\sqrt{2}}{\frac{-\sin 2q}{\sqrt{4\cos 2q}}}=\frac{\sqrt{2}}{\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2}}}=-\frac{4}{\sqrt{3}}$$

ب) $p(3,p)\ ,\ r=3(1-\sin q)$

$$tgb=\frac{r}{\frac{dr}{dq}}=\frac{3}{-\cos q}=1\ \Rightarrow b=\frac{p}{4}$$

3. مطلوب است اندازه زاویه کوچکترین خطهای مماس بر نقطه تقاطع داده شده در منحنی

$$p(-2\ ,\ \frac{2p}{3})\ ,\ r=4\cos^2 q-3\ ,\ r=4\cos q$$

$$m_1=tgd_1=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{3}.(-4\times\frac{\sqrt{3}}{2})-2}{-4\times\frac{\sqrt{3}}{2}+2\times(-\frac{\sqrt{3}}{3})}=\frac{2-2}{-4\times\frac{\sqrt{3}}{2}+2\times(-\frac{\sqrt{3}}{2})}=\mathbf{0}$$

$$m_2 = tgd_2 = \frac{-8\sin\frac{2p}{3}\cos\frac{2p}{3}\times(-\frac{\sqrt{3}}{3})-2}{-8\sin\frac{2p}{3}\cos\frac{2p}{3}+2(\frac{-\sqrt{3}}{3})}$$

$$= \frac{4\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times(-\frac{\sqrt{3}}{3})-2}{4\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}} =$$

4. دلنمای $r = 2(1-\cos q)$ مفروض است. ثابت کنید $tgb = tg\frac{q}{2}$

حل)

$$\frac{dr}{dq} = 2\sin q \Rightarrow tgb = \frac{r}{\frac{dr}{dq}} = \frac{1-\cos q}{\sin q}$$

$$\Rightarrow tgb = \frac{2\sin^2\frac{q}{2}}{2\cos\frac{q}{2}\sin\frac{q}{2}} = \frac{\sin\frac{q}{2}}{\cos\frac{q}{2}} = tg\frac{q}{2}$$

5. ثابت کنید. بـه ازای هـر a , b، خطـوط ممـاس در هـر یـک از نقـاط تقـاطع دلنمای زیر متعامدند.

$$r = a(1+\sin q)\ ,\ r = b(1-\sin q)$$

فصل دهم

کاربردهای انتگرال

5-1-10 تمرین صفحه 476

1. سطح محصور به نمودار توابع $x=y^2$, $x=2y^2-y-2$ را محاسبه کنید.

حل)

$$y^2=2y^2-y-2 \Rightarrow y^2-y-2=0 \Rightarrow y=-1 , y=2$$

$$S=\left|\int_{-1}^{2}(y^2-y-2)dy\right|=\left|(\frac{y^3}{3}-\frac{y^2}{2}-2y)\right|$$

$$=\left|(\frac{8}{3}-2-4)-(\frac{-1}{3}-\frac{1}{2}+2)\right|=\left|\frac{-10}{3}-\frac{7}{6}\right|$$

$$=\frac{27}{6}=\frac{9}{2}$$

2. سطح محصور به نمودار توابع $x-y=v$, $2y^2-y+3-x=0$ را محاسبه کنید

حل)

$$x = v + y \ , \ x = 2y^2 - y + 3$$

$$v + y = 2y^2 - y + 3 \Rightarrow 2y^2 - 2y - 4 = 0 \Rightarrow y^2 - y - 2 = 0 y = -1 \ , \ y = 2$$

$$s = \left| \int_{-1}^{2} (2y^2 - 2y - 4) dy \right| = \left| (\frac{2}{3} y^3 - y^2 - 4y) \right|$$

$$= \left| (\frac{16}{3} - 12) - (\frac{-2}{3} - 1 - 4) \right| = |6 - 12 + 5| = 1$$

3. سطح محصور به نمودار توابع $y = \cos x$, $y = \sin x$ را در فاصله $0 \le x \le 2p$ محاسبه کنید.

$$s = \left| \int_{0}^{\frac{p}{4}} (\cos x - \sin x) dx \right| + \left| \int_{\frac{p}{4}}^{\frac{3p}{4}} (\sin x - \cos x) dx \right|$$

$$+ \left| \int_{\frac{3p}{4}}^{2p} (\sin x - \cos x) dx \right|$$

$$s = 3$$

4. سطح محصور به نمودار توابع $y = x^2 - 2x$, $y = 4 - x^2$ را محاسبه کنید.

حل)

$$x^2-2x=4-x^2 \Rightarrow 2x^2-2x-4=0$$
$$\Rightarrow x^2-x-2=0 \Rightarrow x=-1\ ,\ x=2$$
$$s=\left|\int_{-1}^{1}(4-2x^2+2x)dx\right|=(4x-\frac{2}{3}x^3+x^2)$$
$$=8-\frac{16}{3}+4+4-\frac{2}{3}-1=15-\frac{16}{3}=\frac{29}{3}$$

5. مطلوب است محاسبه مساحت ناحیه محدود به خطوط $x=2\ ,\ x=0$ و

منحنی های $y=2x\ ,\ y=2x-x^2$

$$s=\left|\int_{0}^{2}(2x-x^2-2x)dx\right|=\left|-\frac{x^3}{3}\right|=\frac{8}{3}$$

6. سطح محصور به نمودار توابع $x=1-3y^2\ ,\ x=2y^2$ را محاسبه کنید.

حل)

$$2y^2 = 1-3y^2 \Rightarrow y^2 = \frac{1}{5} \Rightarrow y = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$s = \int_{-\frac{1}{\sqrt{5}}}^{\frac{1}{\sqrt{5}}} (1-3y^2-2y^2)dy = 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{5}}} (1-3y^2-2y^2)dy$$

$$= 2(y - y^3 - \frac{2}{3}y^3)\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{5}}} = 2(\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{5\sqrt{5}} - \frac{2}{15\sqrt{5}})$$

7. مطلوب است محاسبه مساحت ناحیه محدود به سهمی $x^2 = 4y$, $y = \frac{8}{x^2+4}$

حل)

$$\frac{x^2}{4} = \frac{8}{x^2+4} \Rightarrow x^4 + 4x^2 - 32 = 0$$

$$\Rightarrow (x^2+8)(x^2-4) = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$s = \int_{-2}^{2} (-\frac{x^2}{4} + \frac{8}{x^2+4})dx = 2\int_0^2 \frac{8}{x^2+4}dx - 2\int_0^2 \frac{x^2}{4}dx$$

$$= 8tg^{-1}(\frac{x}{2})\Big|_0^2 - \frac{x^3}{6}\Big|_0^2 = 2p - \frac{4}{3}$$

8. مساحت قسمتی از ربع اول را که داخل دایره $x^2+y^2=3$ و محدود به سهمی های $y^2 = 2x$, $x^2 = 2y$ می باشد، حساب کنید.

حل) این مساحت با انتگرال دوگانه در ریاضی 2 حل می شود.

9. مساحت ناحیه ای را حساب کنید که به خطوط $y=x+1\ ,\ y=\cos x$ و محور x ها محدود است.

حل) صورت سؤال اشتباه است.

10. مطلوب است محاسبه مساحت بین منحنی $x=2\ ,\ y^2=x^3-x^2$

حل)

$$x=2 \Rightarrow y^2=8-4=4 \Rightarrow y=\pm 2$$
$$s=2\int_0^2 \sqrt{x^3-x^2}\,dx = 2\int_0^2 x\sqrt{1-x}$$
$$1-x=u^2 \Rightarrow dx=-2udu$$
$$s=-4\int u^2(1-u^2)du=-4\left(\frac{u^3}{3}-\frac{u^5}{5}\right)\Big|_0^1$$
$$=8\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)=\frac{16}{15}$$

11. مساحت بین منحنی های $y=(x-4)^2\ ,\ y=16-x^2$ و محور x ها را تعین کنید.

حل)

$$16-x^2=(x-4)^2$$

$$16-x^2=x^2-8x+16 \Rightarrow 2x^2-8x=0 \Rightarrow x=0\ ,\ 4$$

$$s=\int_0^4 (16-x^2-(x-4)^2)dx=16x-\frac{x^3}{3}-\frac{(x-4)^3}{3}\Big|_0^4$$

$$=(64-\frac{64}{3})+\frac{64}{3}=64$$

12. مطلوب است مساحت محدود به منحنی $y=x^4-2x^2+3$ و محور xها که بین عرض های نقاط می نیمم $y(x)$ واقع است.

حل)

$$y'=4x^3-6x^2+2x=x(x-1)(4x-2)$$

$$\Rightarrow x=0\ ,\ x=1\ ,\ x=\frac{1}{2}$$

$$y=3\ ,\ y=3\ ,\ y=\frac{49}{16}$$

13. مساحت محدود به نمودار تابع $(y-1)^2=x-1\ ,\ x=2(y-1)^2$ را محاسبه کنید.

حل)

$$x = 2(x-1) \Rightarrow X = 2$$
$$(y-1)^2 = 1 \Rightarrow y = 0 \ , \ y = 2$$
$$s = \int_0^2 (1 + (y-1)^2 - 2(y-1)^2)dy = \int_0^2 (1-(y-1)^2 dy$$
$$= (y - \frac{(y-1)^3}{3}) \Big|_0^2 = (2 - \frac{1}{3}) - \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

14. سطح محصور به نمودار $y = chx$ و خط $x = 1$ و محور x ها را حساب کنید

حل) مساحتی وجود ندارد.

15. مساحت های دو ناحیه ای را که سهمی $y = \frac{1}{2}x^2$ درون دایره $x^2 + y^2 = 8$ تقسیم می کند محاسبه کنید.

حل)

$$y = \frac{x^2}{2} \Rightarrow x^2 + \frac{x^4}{4} = 8 \Rightarrow x^4 + 4x^2 - 32 = 0$$
$$\Rightarrow (x^2 + 8)(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

مساحت نیم دایره بالایی برابر نصف $8p = p(2\sqrt{2})^2$ است یعنی $4p$ است.

16. مراکز دو قرص مستدیر به شعاع واحد در فاصله $2a$ از هم قرار دارند

$(0<a<1)$ مساحت ناحیه ای را بیابیدکه محدود به دو قرص است.

حل) دایره های $(x+1)^2+y^2=1\ ,\ (x-1)^2+y^2=1$ را در نظر می گیریم خط $x=1-a$ وتر مشترک دودایره است. به علت تقارن مساحت بین $(x-1)^2+y^2=1$ و خط را محاسبه و دو برابر می کنیم

$$x=1-a \Rightarrow (1-a-1)^2+y^2=1 \Rightarrow y=\pm\sqrt{1-a^2}$$
$$s=2\int_{-\sqrt{1-a^2}}^{\sqrt{1-a^2}}(1-a-(1-\sqrt{1-y^2})dy$$
$$=4\int_0^{\sqrt{1-a^2}}(\sqrt{1-y^2}-a)dy=4(\int_0^{\sin^{-1}\sqrt{1-a^2}}\cos^2 q\,dq-\int_0^{\sqrt{1-a^2}}adv)$$
$$=4(\frac{1}{2}\sin^{-1}(\sqrt{1-a^2})+\frac{1}{4}\sin 2(\sin^{-1}\sqrt{1-a^2})-a\sqrt{1-a^2})$$

18) اگر $f(x)=ax\ ,\ g(x)=x^3$ $(a>0$ ثابت) انگاه مساحت محصور به دو منحنی را حساب کنید.

حل)

$$a\,x = x^3 \Rightarrow x = 0\,,\ x = \sqrt{a}\ ,\ x = -\sqrt{a}$$

$$s = \left|\int_{-\sqrt{a}}^{0} (a\,x - x^3)dx\right| + \left|\int_{0}^{\sqrt{a}} (x^3 - a\,x)\right|$$

$$= 2\left|\int_{0}^{\sqrt{a}} (x^3 - a\,x)dx\right| = 2\left|(\frac{x^4}{4} - a\ \frac{x^2}{2})\Big|_0^{\sqrt{a}}\right|$$

$$= 2\left|(\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2}\right| = \frac{a^2}{2}$$

19) مساحت محصور به نمودار $x^2 y + 4y - 12 = 0$ و محور مختصات و خط $x = 2$ را محاسبه کنید.

$$y(x^2 + 4) = 12 \Rightarrow y = \frac{12}{4 + x^2}$$

$$s = \int_0^2 \frac{12}{4 + x}dx = 6tg^{-1}(\frac{x}{2})\Big|_0^2 = 6\frac{p}{4} = \frac{3p}{2}$$

20. مساحت محصور به نمودار توابع $x + y = 2$, $y = x^3$, $x = y^3$ را محاسبه کنید.

$$s_1 = \int_0^1 (2 - y - \sqrt[3]{y})dy$$

$$s_2 = \int_0^1 (2 - y - \sqrt[3]{y})dx$$

$$s_1 = s_2 = (2y - \frac{y^2}{2} - \frac{3}{4}y^{\frac{4}{3}})\Big|_0^1 = 2 - \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

تمرین صفحه 480

مساحت سطح محصور را بیابید.

.1

$$-1 \le t \le 1 \quad , \quad c: \begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = t^3 - t \end{cases}$$

$$g(t) = t^3 - t \Rightarrow g(-1) = -2, g(1) = 0$$

$$f(t) = t^2 - 1 \Rightarrow f'(t) = 2t$$

$$s = \int_{-2}^{0} (t^3 - t)(2t)dt = \frac{2}{5}t^5 - \frac{2}{3}t^3 \Big|_{-2}^{0}$$

$$= \frac{64}{5} - \frac{16}{3} = \frac{192 - 180}{15} = \frac{112}{15}$$

$$0 \le t \le 2 \quad , \quad c: \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \cos^2 t \end{cases}$$

شکل کاملاً متقارن است. " $x^4 + y^2 = x^2$

$$s = 4\int_0^{\frac{p}{4}} \cos t(\cos^3 t - 2\sin^2 t\cos t)dt$$

$$= 4\int_0^{\frac{p}{2}} \cos^4 tdt - 8\int_0^{\frac{p}{2}} \sin^2 t\cos^2 tdt$$

$$\int_0^{\frac{p}{2}} \cos^4 tdt = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{p}{2}} (1+2\cos 2t + \cos^2 2t)dt$$

$$= \frac{1}{4}(t + \sin 2t + \frac{1}{2}t + \frac{1}{8}\sin 4t)\Big|_0^{\frac{p}{2}}$$

$$= \frac{1}{4}(\frac{p}{2} + \frac{p}{4}) = \frac{3p}{16}$$

3) مساحت بیضی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ را محاسبه کنید.

حل) بیضی را به صورت زیر پارامتری می کنیم: $\begin{matrix} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{matrix} \quad 0 \le t \le 2p$

$$s = 4\left|\int_0^{\frac{p}{2}} -b\sin t(a\sin t)dt\right| = \left|-2ab\int_0^{\frac{p}{2}} (1-\cos 2t)dt\right|$$

$$= 2ab \times \frac{p}{2} = pab$$

4) مساحت محدود به $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ را محاسبه کنید.

5. مساحت محدود به یک قوس سیکلوئید زیر را بدست آورید.

$$c: \begin{matrix} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{matrix}$$

$$s = \int_0^{\frac{p}{2}} a(1-\cos t)^2\,dt = a\int_0^{\frac{p}{2}} (1-2\cos t+\cos^2)\,dt$$

$$= (t-2\sin t+\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t)\Big|_0^{\frac{p}{2}} = \frac{3p}{4}-2$$

تمرین صفحه 483

1. مساحت ناحیه ای از صفحه را که بین اولین و دومین دور از پیچ ارشمیدس $r = aq$ واقع است. $(a > 0)$ پیدا کنید.

$$s = \frac{1}{2}\int_0^{4p} (aq^2)\,dq = \frac{1}{2}\frac{a}{3}q^3\Big|_0^{4p} = \frac{16}{2}\frac{4}{3}ap^3$$

2. مطلوب است سطح محدود به $r = \sin 2q$

حل) به علت تقارن کامل داریم:

$$s = \frac{1}{2}\times 4\int_0^{\frac{p}{2}} (\sin 2q)^2\,dq = \int_0^{\frac{p}{2}} (1-\cos 4q)\,dq = \frac{p}{2}$$

3. مساحت داخل دایره $r = 3\cos q$ و خارج دلنمای $r = 1+\cos q$ را بیابید

حل)

$$3\cos q = 1+\cos q \Rightarrow \cos q = \frac{1}{2} \Rightarrow q = \pm\frac{p}{3}$$

$$s = \frac{1}{2}\int_{-\frac{p}{3}}^{\frac{p}{3}} ((3\cos q)^2 - (1+\cos)^2)\,dq$$

$$= \int_{0}^{\frac{p}{3}} (2\cos^2 q - 2\cos q - 1)\,dq = (q + \frac{1}{2}\sin 2q - 2\sin q - q)\Big|_{0}^{\frac{p}{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} - \sqrt{3} \Rightarrow s = \frac{\sqrt[3]{3}}{4}$$

4. مساحت محصور به $r = e^{2q}$ و خطوط $q = 0$, $q = 2p$.

$$s = \frac{1}{2}\int_{0}^{2p} e^{4q}\,dq = \frac{1}{8}e^{2p}\Big|_{0}^{2p} = \frac{1}{8}(e^{4p} - 1)$$

5. مطلوب است مساحت داخل دایره $r = 1$ و خارج دلنمای $r = 1 - \cos q$.

حل) دو نمودار همدیگر را در $q = \frac{p}{2}$, $q = \frac{3p}{2}$ قطع می کنند.

به علت تقارن، مساحت در فاصله $0 \le q \le \frac{p}{2}$ را حساب کرده، دو برابر می کنیم.

$$s = 2\times\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{p}{2}} (1-(1-\cos q))^2\,dq$$

$$= \int_{0}^{\frac{p}{2}} (2\cos q - \cos^2 q)\,dq = (2\sin q - \frac{1}{2}q - \frac{1}{4}\sin 2q)\int_{0}^{\frac{p}{2}} = 2 - \frac{p}{4}$$

6. مطلوب است مساحت ناحیه مشترک به دو منحنی $r = \cos 2q$, $r = \sin 2q$.

حل) به علت تقارن، مساحت را در ربع اول حساب کرده، چهار برابر می کنیم.

7. مساحت ناحیه بین $r = 6\cos q$, $r = 6\sin q$ را حساب کنید.

$$S = \left| 2\int_0^{\frac{p}{4}} (6\sin q)^2 \right|$$

$$= \left| 6\int_0^{\frac{p}{4}} (1-\cos 2q)\,dq \right|$$

$$= \left| 6(q - 2\sin 2q)\Big|_0^{\frac{p}{4}} \right|$$

$$= 6\left(\frac{p}{4} - 2\right)$$

8. مساحت ناحیه داخل $r^2 = a^2\cos 2q$ را بدست آورید.

حل)

$$S = 4\int_0^{\frac{p}{4}} a^2\cos 2q = 4a^2 \sin 2q\Big|_0^{\frac{p}{4}} = 4a^2$$

9. مساحت ناحیه $r = 1+\sin q$ را محاسبه کنید.

حل طبق مثال 10-3-3 برابر $\frac{3}{2}p$ است.

10. مساحت محدود به درون $r^2 = \sin 2q$ و دایره $r = \sqrt{2}\sin q$ را محاسبه کنید.

$$s=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{p}{2}} 2\sin^2 q-\sin 2q)dq$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}q-\frac{1}{4}\sin 2q+\frac{1}{2}\cos 2q)\Big|_0^{\frac{p}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{p}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}(\frac{p}{4}-1)$$

تمرین صفحه 489 .

1. طول منحنی $r=a\sin^3\frac{q}{3}$ را در فاصله $0\le q\le p$ محاسبه کنید.

حل)

$$s=\int_0^p\sqrt{(dr)^2+r^2(dq)}=\int_0^p\sqrt{a^2\sin^4\frac{q}{3}\cos^2\frac{q}{3}+a^2\sin^6\frac{q}{2}}$$

$$=\int_0^p a\sin^2\frac{q}{3}dq=\frac{a}{2}\int_0^p(1-\cos^2\frac{q}{3})dq$$

$$=\frac{a}{2}(q-\frac{3}{2}\sin\frac{2q}{3})\Big|_0^p=\frac{a}{2}(p-\frac{3\sqrt{3}}{4})$$

2. مطلوب است طول قوس $r=2a\cos^2 q$ را در فاصله $0\le q\le\frac{p}{4}$ بیابید.

حل)

$$\frac{d}{dq}=-2a\sin 2q$$

$$s=\int_{0}^{\frac{p}{4}}\sqrt{4a^{2}\sin^{2}2q+4a^{2}\cos^{4}q}\,dq=2a\int_{0}^{\frac{p}{4}}\cos q\sqrt{4\sin^{2}q+\cos^{2}q}\,dq$$

$$=2a\int_{0}^{\frac{p}{4}}\cos q\sqrt{3\sin^{2}q+1}\,dq=2a\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\sqrt{1+3u^{2}}\,du$$

$$\sqrt{3}u=tgt=\int\sqrt{1+3u^{2}}\,du=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\sec^{3}q\,dq$$

3. طول دلوار $r=a(1-\cos q)$ را بیابید.

حل)

$$\frac{dr}{dq}=a\sin q\Rightarrow\left(\frac{dr}{dq}\right)^{2}+r^{2}=a^{2}\sin^{2}q+a^{2}\cos^{2}q+a^{2}$$

$$s=2\int_{0}^{p}\sqrt{2a^{2}}\,dq=2\sqrt{2}ap$$

4. طول منحنی های زیر را در بازه داده شده محاسبه کنید.

الف) $x=\cos 2t\ ,\ y=\sin 2t\ ,\ 0\le t\le 2p$

حل)

$$s=4\int_{0}^{\frac{p}{2}}\sqrt{\sin^{2}2t+\cos^{2}2t}\,dt=2p$$

ب) $x=a\cos^{3}q\ ,\ y=a\sin^{3}q\ ,\ 0\le q\le 2p$

حل)

$$\frac{dx}{d\theta} = -3a\cos^2\theta\,\sin\theta \;,\; \frac{dy}{dt} = 3a\sin^2\theta\,\cos\theta$$

$$s = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a\sin\theta\,\cos\theta\,d\theta = 12a\,\left.\frac{\sin^2\theta}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = 6a$$

5. طول قسمتی از منحنی $y^2 = x^3$ را که بین نقاط $(0\,,\,0)$ و $(4\,,\,8)$ واقع است، محاسبه کنید.

$$y^2 = x^3 \Rightarrow 2yy' = 3x^2 \Rightarrow y' = \frac{3x^2}{2y} \Rightarrow (y')^2 = \frac{9x^4}{4y^2}$$

$$\Rightarrow 1+(y')^2 = 1+\frac{9}{4}x$$

$$s = \int_0^4 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx = \frac{2}{3}\times\frac{4}{9}\left(1+\frac{9}{4}x\right)\left.\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\right|_0^4$$

$$= \frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right)$$

6. طول منحنی $y = \ln|\cos x|$ را در فاصله $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$ محاسبه کنید.

حل)

$$y' = -tgx \Rightarrow s = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x\,dx$$

$$\Rightarrow s = \ln\left|\sec x + tgx\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln\left|\sqrt{2}+1\right|$$

7. طول قوس منحنی $y = \frac{1}{2}x^2$ از نقطه $A(0\,,\,0)$ تا نقطه $B(1\,,\,\frac{1}{2})$ را محاسبه

کنید.

حل)

$$y' = x \Rightarrow s = \int_0^{-1} \sqrt{1+x^2}\, dx = \int_0^{\frac{p}{4}} \sec^3 q\, dq$$

$$\int \sec^3 q\, dq = \int \sec^2 q . \sec q\, dq = tgq . \sec q - \int tg^2 q . \sec q\, dq$$

$$= tgq\ . \sec q - \int \sec^3 q\, dq + \int \sec q\, dq$$

$$\int \sec^3 q\ dq = \frac{1}{2} tgq\ . \sec q + \frac{1}{2} \ln \left| \sec q + tgq \right|$$

$$s = \left(\frac{1}{2} tgq \sec q + \frac{1}{2} \ln \left| \sec q + tgq \right|\right)\Big|_0^{\frac{p}{4}}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2} \ln \sqrt{2}\right)$$

8. طول قوس منحنی $y^3 = 8x^2$ از نقطه $(1 , 2)$ تا نقطه $(27 , 18)$ را به دست آورید.

حل)

$$3y^2y' = 16x \Rightarrow y' = \frac{16x}{3y^2}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{3y^2}{16x} \Rightarrow (\frac{dx}{dy})^2 = \frac{9y^4}{(16)^2x^2} = \frac{9\times 8y}{(16)^2}$$

$$1+(\frac{dx}{dy})^2 = 1+\frac{9}{32}y$$

$$s = \int_2^{18}\sqrt{1+\frac{9}{32}y}dy = \frac{2}{3}\times\frac{32}{9}(1+\frac{9}{32}y\Big|_2^{18}$$

$$= \frac{64}{27}((1+\frac{9}{32}\times 18-(1+\frac{9}{16})\sqrt{1+\frac{9}{16}})$$

9. طول قوس منحنی $6xy = y^4+3$ را در فاصله $1\le y\le 2$ به دست آورید.

$$x = \frac{y^3}{6}+\frac{1}{2y} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{y^2}{2}-\frac{1}{2y^2}$$

$$1+(\frac{dx}{dy})^2 = (\frac{y^2}{2}+\frac{1}{2y^2})^2$$

$$s = \int_1^2(\frac{y^2}{2}+\frac{1}{2y^2})dy = (\frac{y^3}{6}+\frac{1}{2y})\Big|_1^2 = (\frac{8}{6}-\frac{1}{4})-(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}) = \frac{7}{6}+\frac{1}{4}$$

10. طول قوس قسمتی از منحنی $9y^2 = 4(1+x^2)^3$ کـه در ربـع اول از $x=0$ تـا $x = 2\sqrt{2}$ واقع است تعین کنید.

$$18yy' = 24x(1+x^2)^2 \Rightarrow y' = \frac{4x(1+x^2)^2}{3y}$$

$$(y')^2 = \frac{16x^2(1+x^2)^4}{9y^2} = 4x^2(1+x^2)$$

$$s = \int_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{1+4x^2(1+x^2)}\,dx$$

11. طول قوس منحنی مقابل را بیابید:

$$C: \begin{array}{l} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{array}, \ 0 \le t \le 4$$

حل)

$$\frac{dx}{dt} = e^t(\cos t - \sin t), \frac{dy}{dt} = e^t(\sin t + \cos t)$$

$$s = \int_0^4 \sqrt{2}e^t dt = \sqrt{2}e^t \Big|_0^4 = \sqrt{2}(e^4 - 1)$$

12. طول قوس منحنی c را به دست آورید:

$$C: \begin{array}{l} x = \ln\sqrt{1+t^2} \\ y = tg^{-1} t \end{array}, \ 0 \le t \le 1$$

حل)

$$\frac{dx}{dt}=\frac{t}{1+t^2}\ ,\ \frac{dy}{dt}=\frac{1}{1+t^2}$$

$$S=\int_0^1\sqrt{\frac{t^2}{(1+t^2)}+\frac{1}{(1+t^2)^2}}dt=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}=\ln(t+\sqrt{1+t^2})\Big|_0^1$$

$$=\ln(1+\sqrt{2})-\ln 2=\ln(\frac{1+\sqrt{2}}{2})$$

13. طول قوس $y=\frac{1}{3}(x^2+2)^{\frac{3}{2}}$ را در فاصله $0\le x\le 3$ محاسبه کنید.

حل)

$$y'=x(x^2+2)^{\frac{1}{2}}\Rightarrow 1+(y')^2=1+x^2(x^2+2)$$

$$s=\int_0^3\sqrt{1+x^2(x^2+2)}=\int_0^3\sqrt{(x^2+1)^2}\,dx=\int_0^3(x^2+1)\,dx=\frac{x^3}{3}+x\Big|_0^3=12$$

14. طول قوس $y=\ln\frac{e^x-1}{e^x+1}$ را در فاصله $2\le x\le 3$ تعین کنید.

حل)

$$y=\ln(e^x-1)\ln(e^x+1)$$

$$y'=\frac{e^x}{e^x-1}-\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{2e^x}{e^{2x}-1}$$

$$1+(y')^2=1+\frac{4e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2}=\frac{(e^{2x}+1)^2}{(e^{2x}-1)^2}$$

$$s=\int_2^3\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}dx=\int_2^3\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}dx=\ln(e^x-e^{-x})\Big|_2^3$$

$$=\ln\frac{e^3-e^{-3}}{e^2-e^{-2}}$$

15. طول قوس منحنی $x=\frac{1}{3}(2t+3)^{\frac{3}{2}}$, $y=\frac{1}{3}t^{2}+t$ را در فاصله $0\le t\le 3$ محاسبه کنید.

حل)
$$\frac{dx}{dt}=(2t+3)^{\frac{1}{2}},\frac{dy}{dt}=\frac{2}{3}t$$
$$s=\int_0^3\sqrt{2t+3+\frac{4}{9}t^{2}}=\frac{1}{3}\int_0^3\sqrt{(2t+9)^{2}-78}\,dt$$

16. طول منحنی $y=x^4+\frac{1}{32x^2}$ را در فاصله $1\le x\le 10$ حساب کنید.

$$y'=4x^3-\frac{1}{16x^3}=\frac{64x^6-1}{16x^3}$$
$$1+(y')^2=(4x^3+\frac{1}{16x^3})^2$$
$$s=\int_1^{10}(4x^3+\frac{1}{16x^3})dx=x^4-\frac{1}{32x^2}\Big|_1^{10}$$
$$=(10^4-\frac{1}{3200})-(1-\frac{1}{32})$$

تمرین صفحه 495 .

1. حجم حادث از دوران ناحیه OBC حول خط BC را پیدا کنید.

حل)

$$V=p\int_0^4 (y-8)^2\,dx = p\int_0^4 (x^{\frac{3}{2}}-8)^2\,dx$$

$$=p\int_0^4 (x^3-16x^{\frac{3}{2}}+64)\,dx = \left(\frac{x^4}{4}-\frac{32}{5}x^{\frac{5}{2}}+64x\right)\Big|_0^4$$

2. حجم جسم حاصل از دوران ناحیه بین سهمی $y^2=4x$ و خط $y=x$ حول خط $x=4$ را بیابید.

3. حجم مخروط مستدیری به شعاع قاعده a و ارتفاع h را تعین کنید.

حل)

$$y=\frac{a}{h}x$$

$$V=p\int_0^h \frac{a^2}{h^2}x^2\,dx = \frac{1}{3}pa^2h$$

5. مطلوب است حجم حاصل از دوران ناحیه بین سهمی $y^2=x$ و محور yها و خط $y=1$ ، حول خط $y=2$.

حل)

$$V=\int_0^1 ((2-\sqrt{x})^2-(2-1)^2)\,dx$$

$$=p\int_0^1 (3-4\sqrt{x}+x)\,dx = p\left(3x-\frac{8}{3}x\sqrt{x}+\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = p\left(3-\frac{8}{3}+\frac{1}{2}\right)$$

حجم حادث از دوران ناحیه محدود به $x=2y-y^2$ حول محور y ها را تعین کنید.

$$V=p\int_0^2(2y-y^2)^2\,dy=p\int_0^2(4y^2-4y^3+y^4)dy$$
$$=p(\frac{4}{3}y^3-y^4+\frac{y^5}{5})\Big|_0^2=p(\frac{32}{3}-16+\frac{32}{5})$$

7. ناحیه A محصور به منحنی $y=x^2$ و $y=1$, $y=4$, $x=0$ حول محور x ها دورانه می کند. حجم جسم حادث چقدر است؟

$$V=2p\int_{-2}^{2}(4^2-x^4)dx-p\int_{-1}^{1}(1-x^4)dx$$
$$V=2p\int_0^2(16-x^4)dx-2p\int_{-1}^{1}(1-x^4)dx$$
$$=2p(16x-\frac{x^5}{5})\Big|_0^2-2p(x-\frac{x^5}{5})\Big|_0^2$$
$$\Rightarrow V=2p(32-\frac{32}{5})-2p(1-\frac{1}{5})$$

8. منحنی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ را حول محور x ها دوران می دهیم، حجم حاصل چقدر است.

حل)

$$y^2 = b^2(1-\frac{x^2}{a^2})$$

$$V = p\int_{-a}^{a} b^2(1-\frac{x^2}{a^2})dx = 2pb^2\int_{0}^{a}(1-\frac{x^2}{a^2})dx$$

$$= 2p\, b^2(a-\frac{a}{3}) = \frac{4}{3}p\, b^2 a$$

حجم حاصل از دوران سطح محصور بین منحنی های $y^2 = 8x\ ,\ y = x^2$

حول محور x ها را حساب کنید.

$$x^4 = 8x \Rightarrow x = 0\ ,\ x = 2$$

$$V = p\int_{0}^{2}(8x - x^4)dx = p\,(4x^2 - \frac{x^5}{5})\Big|_{0}^{2}$$

$$= p\,(8 - \frac{32}{5})$$

10. ناحیه واقع بین محورهای مختصات و سهمی $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ را حول محور x ها دوران می دهیم. حجم جسم حاصل را محاسبه کنید.

حل)

$$\sqrt{y}=\sqrt{a}-\sqrt{x} \Rightarrow y=a+x-2\sqrt{ax}$$

$$y^2=(a+x)^2-4(a+x)\sqrt{ax}+4ax$$

$$V=p\int_0^a ((a+x)^2-4(a+x)\sqrt{ax}+4ax)dx$$

$$\Rightarrow V=(\frac{(a+x)^3}{3}-\frac{8}{3}ax\sqrt{ax}-\frac{4}{a^2}\times\frac{2}{5}(ax)^{\frac{5}{2}}+2ax^2\Big|_0^a$$

$$=p(\frac{8a^3}{3}-\frac{8}{3}a^3-\frac{8}{5}a^3+2a^3)=\frac{8}{15}a^3p$$

11. ناحیه بین یک قوس از منحنی $y=\sin x$ و محور عرض ها و خط $y=1$ را حول محور y ها دوران می دهیم حجم حاصل را محاسبه کنید.

$$V=2p\int_0^{\frac{p}{2}} x(1-\sin x)dx=2p(\frac{x^2}{2}+x\cos x-\sin x-\sin x)\Big|_0^{\frac{p}{2}}=2p(\frac{p^2}{8}-1)$$

12. حجم حاصل از دوران ناحیه محدود به سهمی $y=\frac{1}{4}x^2+2$ و خط $5x-8y+14=0$ حول محور x ها را به دست آورید.

حل)

$$8y = 2x^2 + 4 \Rightarrow 5x + 14 = 2x^2 + 4$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 5x - 10 = 0$$

$$x = \frac{5+\sqrt{105}}{4} \ , \ x = \frac{5-\sqrt{105}}{2}$$

$$V = \pi \int_{\frac{5-\sqrt{105}}{2}}^{\frac{5+\sqrt{105}}{2}} (\frac{1}{4}x^2 + 2)^2 - (\frac{5x+14}{8})^2 \, dx$$

تمرین صفحه 498 .

1. در یک جسم کروی شکل به شعاع 5 سانتی متر، حفره ای به شعاع 2 سانتی متر ایجاد می کنیم محور حفره یک قطر کرده است. حجم قسمت باقیمانده جسم را بدست آورید.

$$V = \frac{4}{3}\pi(125) - \frac{4}{3}\pi \ = \frac{4}{3}\pi(125-8)$$
$$= \frac{4}{3}\pi(117)$$

2. مطلوب است حجم جسم حادث از دوران ناحیه OBC محصور به $y^2 = x^3$ محور x ها و خطوط $y = 8$, $y = 0$ ، حول محور x ها .

$$V = p\int_0^4 (64 - x^3)dx = p\,(64x - \frac{x^4}{4})\Big|_0^4$$
$$V = p\,(256 - 64) = 192p$$

3. مطلوب است حجم حادث از دوران ناحیه OAC محصور به منحنی $y^2 = x^3$ و خط $x = 4$ و محور x ها حول خط ac .

$$V = p\int_0^4 ((8 - x^{\frac{3}{2}})^2 - 64)dx$$
$$V = p\int_0^4 ((16 - x^{\frac{3}{2}} + x^3)dx$$
$$V = p\,(\frac{x^4}{4} - \frac{32}{5}x^{\frac{5}{2}})\Big|_0^4 = \Big|p\,(64 - \frac{(32)^2}{5})\Big|$$

4. مطلوب است حجم حادث از دوران ناحیه محصور به منحنی های $y^2 = x$, $y = x^2$ حول خط $x = -2$.

حل)

$$0 \le y \le 1\,,\ 0 \le x \le 1$$
$$V = p\int_0^1 (\sqrt{y} + 2)^2 - (y^2 + 2)^2 dy$$
$$V = p\int_0^1 (y + 2\sqrt{y} + 4) - (y^4 + 4y^2 - 4)dy$$
$$V = p\,(\frac{y^2}{2} + \frac{4}{3}y\sqrt{y} - \frac{y^5}{5} + \frac{4y^3}{3})\Big|_0^1$$
$$V = p\,\frac{1}{2} + \frac{4}{3} - \frac{1}{5} + \frac{4}{3}) = p\,(\frac{15 + 80 - 6}{30}) = \frac{89}{30}$$

5. ناحیه ای که به سـهمی $y = x^2$ و خـط $y = 2x$ محـدود و در ربـع اول اسـت. حـول محور y ها دوران می کند حجم جسم حاصل را تعین کنید.

$$V = 2p \int_0^2 x(2x - x^2)dx = 2p\,(\frac{2}{3}x^3 - \frac{x^4}{4})\Big|_0^2$$

$$V = 2p\,(\frac{16}{3} - 4) = \frac{8}{3}p$$

6. حجم جسمی را بیابید که از دوران ناحیه بـین سـهمی $y = x^2$ و خـط $y = 2x$ حـول خط $x = 2$ ایجاد می شود .

حل)

$$V = p \int_0^4 ((2 - \frac{y}{2})^2 - (2 - \sqrt{y})^2)dy$$

$$V = p \int_0^4 (-2y + \frac{y^2}{4} + 2\sqrt{y} - y)dy$$

$$V = p\,(\frac{y^3}{12} + \frac{4}{3}y\sqrt{y} - \frac{3}{2}y^2)\Big|_0^4 = p\,(\frac{64}{12} + \frac{32}{3} - 24)$$

$$V = \left|p\,(\frac{48}{3} - \frac{72}{3})\right| = 8p$$

7. یک دیسک به شعاع و به مرکز $(b\ ,\ 0)$ که $0 \le a \le b$ حول محور y ها دوران مـی کند و یک چنبره تولید می کند حجم جسم آن را تعین کنید.

حل)

$$(x-b)^2+y^2=a^2 \Rightarrow y=\pm\sqrt{a^2-(x-b)^2}$$

$$V=4p\int_{b-a}^{b+a} x\sqrt{a^2-(x-b)^2}\,dx=4p\int_{-a}^{a}(x+b)\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$=4p\int_{-a}^{a} x\sqrt{a^2-x^2}\,dx+4p\int_{-a}^{a} b\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$=8p\,b\int_{0}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=8p\times\frac{p\,a^2}{4}=2p^2a^2b.$$

8. ناحیه مثلثی $y=x$, $y=0$, $x=a>0$ حول خط $x=b>a$ دوران می کند و جسمی پدید می آورد. حجم جسم به دست آمده را حساب کنید.

حل)

$$V=p\int_{0}^{a}((b-y)^2-(b-a)^2\,dy$$

$$V=p\,(\frac{(y-b)^3}{3}-(b-a)^2y)\Big|_{0}^{a}=p\,(\frac{(a-b)^3}{3}-a(b-a)^2)$$