

## فصل چهارم

# کاربرد مشتق

14-2-4 تمرین صفحه 290

(1) ابتدا نشان دهید که هریک از توابع زیر در بازه داده شده در شرایط قضیه رل صدق می کند. پس مقدار  $c$  مربوطه را بدست آورید.

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2, x \in [-1, 2] \quad (1)$$

حل) چند جمله ای ها روی هر بازه شرایط قضیه رل را دارند. چون مشتق پذیرند و مشتق آنها نیز چند جمله ای است.

$$f(2) = f(-1) = 0$$

$$f'(c) = 0 \Rightarrow 3c^2 - 4c - 1 = 0$$

$$c = \frac{4 \pm \sqrt{28}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{7}}{3}$$

$$x \in [-4, 0], f(x) = x^3 - 16x \quad (2)$$

حل :

$$f(-4) = -64 + 64 = 0 = f(0)$$

$$f'(c) = 3c^2 - 16 = 0 \Rightarrow c = \pm \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$x \in [0, 4], f(x) = x^{\frac{4}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} - x^{-\frac{2}{3}}$$

(3)

پس تابع روی  $[0, 3]$  پیوسته و روی  $(0, 3)$  مشتق پذیر است.

$$f(0) = 0 = f(3) = 3\sqrt[3]{3} - 3\sqrt[3]{3} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3}c^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{c^{\frac{2}{3}}} = \frac{4c-3}{3c^{\frac{2}{3}}} = 0$$

$$\Rightarrow c = \frac{3}{4}$$

$$f(x) = x^{\frac{3}{4}} - 2x^{\frac{1}{4}}, \quad x \in [0, 4] \quad (4)$$

حل:

$$f'(x) = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{4}}$$

پس تابع  $f$  روی  $[0, 4]$  پیوسته و روی  $(0, 4)$  مشتق پذیر است.

$$\frac{3}{4}c^{-\frac{1}{4}} - \frac{1}{2}c^{-\frac{3}{4}} = 0$$

$$\frac{3}{4c^{\frac{1}{4}}} - \frac{1}{2c^{\frac{3}{4}}} = \frac{3c^{\frac{1}{2}} - 2}{4c^{\frac{3}{4}}} = 0$$

$$\Rightarrow c = \frac{4}{9}$$

$$x \in [-3, 7], \quad f(x) = \begin{cases} x+3 \rightarrow x \leq 2 \\ 7-x \rightarrow x > 2 \end{cases} \quad (5)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 \rightarrow x \leq 2 \\ -1 \rightarrow x > 2 \end{cases}$$

حل) این تابع در 2 پیوسته است، پس همه جا پیوسته است و

پس در 2 مشتق پذیر نیست. لذا شرایط را ندارد.

حل المسائل ریاضی عمومی (۱) ۴

$$x \in [-3, 4], f(x) = \frac{x^2 - x - 12}{x - 3} \quad (6)$$

حل) تابع در  $[-3, 4]$  پیوسته نیست، پس شرایط قضیه را ندارد.

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6, x \in [2, 3] \quad (7)$$

حل)

$$f(2) = 8 - 24 + 22 - 6 = 0$$

$$f(3) = 27 - 54 + 33 - 6 = 0$$

$$f'(c) = 3c^2 - 12c + 11 = 0$$

$$c = \frac{12 \pm \sqrt{12}}{24} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{12}$$

$$f(x) = (x - p) \sin x, x \in [0, p] \quad (8)$$

حل) چند جمله ای و  $\sin x$  همه جا پیوسته و مشتق پذیرند.

$$f(0) = 0 = f(p)$$

$$f'(c) = \sin c + (c - p) \cos c = 0$$

$$\Rightarrow \sin c = (p - c) \cos c$$

$$\Rightarrow \tan c = p - c$$

$$\Rightarrow c + \tan c = p$$

واضح است که  $c = p$  جواب در این بازه است.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 9 \rightarrow x < 2 \\ 5x - 4 \rightarrow x \geq 2 \end{cases} \rightarrow x \in [-3, 4] \quad (9)$$

حل) این تابع در  $[-3, 4]$  پیوسته نیست چون

فصل چهارم : کاربرد مشتق

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 9) = -5 \neq f(2) = 6$$

پس شرایط قضیه برقرار نیست.

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{x - 1}, \quad x \in [-2, 4] \quad (10)$$

حل) این تابع در  $1 \in [-2, 4]$  پیوسته نیست، پس شرایط قضیه برقرار نیست.

(2) اگر  $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x$  باشد، به کمک قضیه رل ثابت کنید که معادله

$$4x^3 - 6x^2 + 4x - 1 = 0 \quad \text{در بازه } (1, 0) \text{ حداقل یک ریشه دارد.}$$

$$f(0) = 0$$

$$f(1) = 1 - 2 + 2 - 1 = 0 \quad \text{حل)}$$

تابع چند جمله ای در قضیه رل صدق می کند، پس در  $(1, 0)$  حداقل یک  $c$  وجود دارد که

$$f'(c) = 4c^3 - 6c^2 + 4c - 1 = 0$$

(3) به کمک قضیه رل ثابت کنید که معادله  $x^3 + 2x + c = 0$  ، که در آن  $c$  یک ثابت

دلخواه است، نمی تواند بیش از یک ریشه حقیقی داشته باشد.

حل) اگر  $f(x) = x^3 + 2x + c$  بیش از یک ریشه داشته باشد  $f'(x) = 3x^2 + 2$

حداقل یک ریشه دارد که تناقض است.

(4) با استفاده از قضیه رل ثابت کنید معادله  $f(x) = x^5 + x^3 + 2x - 3 = 0$

دقیقا یک ریشه در بازه  $(1, 0)$  دارد.

حل المسائل ریاضی عمومی (۱) ۶

حل)  $f(0)f(1) < 0$  پس  $f(0) = -3$  و  $f(1) = 1$  طبق قضیه مقدار میانی حداقل یک

ریشه در  $(0, 1)$  دارد. از طرفی  $f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 2 > 0$ .

چون  $f'(x)$  هیچ ریشه ای ندارد پس  $f(x)$  دقیقا یک ریشه دارد.

(5) ابتدا نشان دهید توابع داده شده در شرایط قضیه مقدار میانگین صدق می کنند. سپس مقدار  $c$  مربوطه را بدست آورید.

$$f(x) = x^{\frac{2}{3}}, \quad x \in [0, 1] \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} \quad (\text{حل})$$

پس  $f$  روی  $[0, 1]$  پیوسته و روی  $(0, 1)$  مشتق پذیر است.

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{c}} = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 1$$
$$\Rightarrow c = \frac{8}{27}$$

(2)

$$f(x) = x - 1 + \frac{1}{x-1}, \quad x \in \left[\frac{3}{2}, 3\right]$$

حل) تابع داده شده روی  $\left[\frac{3}{2}, 3\right]$  پیوسته روی  $\left(\frac{3}{2}, 3\right)$  مشتق پذیر است،

$$f'(c) = -\frac{1}{(c-1)^2}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{(c-1)^2} = \frac{f(3) - f(\frac{3}{2})}{3 - \frac{3}{2}}$$

$$1 - \frac{1}{(c-1)^2} = \frac{\frac{5}{2} - \frac{5}{2}}{\frac{3}{2}} = 0 \Rightarrow (c-1)^2 = 1$$

$$\Rightarrow c = 0$$

(3)

$$x \in [-1, 5]$$

$$\begin{cases} 2x+3, & x < 3 \\ 15-2, & x \geq 3 \end{cases}$$

حل) تابع در 3 مشتق پذیر نیست، چون  $f'_-(3) = 2$  و  $f'_+(3) = -2$ ، پس شرایط قضیه را ندارد.

$$x \in [-4, 5], f(x) = 3(x-4)^{\frac{2}{3}} \quad (4)$$

حل)  $f'(x) = 2(x-4)^{-\frac{1}{3}}$  در  $4 \in [-4, 5]$  مشتق پذیر نیست، پس شرایط برقرار نیست.

$$x \in [-5, 0], f(x) = \frac{x^2-3}{x+3} \quad (5)$$

تابع در  $-3 \in [-5, 0]$  پیوسته نیست پس شرایط قضیه برقرار نیست.

$$x \in [-1, 5], f(x) = x^2 + 7x - 1 \quad (6)$$

حل) چون  $f$  چند جمله ای است، شرایط برقرار است. پس

$$2c + 7 = \frac{f(5) - f(-1)}{6} = \frac{49 - 7}{6} = 7$$

$$\Rightarrow c = 0$$

(6) نشان دهید هر چند جمله ای از درجه 3 حداکثر 3 ریشه حقیقی دارد.

حل) چون مشتق چندجمله ای درجه 3، چندجمله ای درجه 2 است و حداکثر 2 ریشه دارد پس چندجمله ای درجه 3 حداکثر 3 ریشه دارد.

(7) نشان دهید معادله  $x^5 + 3x^3 + x + 13 = 0$  دارای بیش از یک ریشه حقیقی نیست.

حل) چون درجه چند جمله ای فرد است، حداقل یک ریشه حقیقی دارد.

از طرفی  $f'(x) = 5x^4 + 9x^2 + 1$  هیچ ریشه ای ندارد، پس چند جمله ای داده شده، دقیقاً یک ریشه دارد.

(8) نشان دهید معادله  $x^{2n+1} + ax + b = 0$  برای  $n \in \mathbb{N}, a > 0$  دقیقاً یک ریشه دارد.

حل) چون چندجمله ای از درجه فرد است، حداقل یک ریشه دارد.

از طرفی  $f'(x) = (2n+1)x^{2n} + a$  و  $a > 0$ ، پس  $f'(x)$  هیچ ریشه ای ندارد، پس معادله دقیقاً یک ریشه دارد.

(9) نشان دهید  $x^5 + x^3 + x + 1 = 0$  دقیقاً یک ریشه دارد.

از طرفی  $f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1$  هیچ ریشه ای ندارد پس معادله دقیقاً یک ریشه دارد.

(10) نشان دهید

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x \quad (x > 0)$$

حل) تابع  $f(t) = \ln(1+t)$  را روی بازه  $[0, x]$  در نظر بگیرید این تابع شرایط قضیه



مقدار میانگین را دارد. پس:

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$0 < c < x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+c} = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

$$c < x \Rightarrow \frac{1}{1+x} < \frac{1}{1+c} = \frac{\ln(1+x)}{x} \Rightarrow \frac{1}{1+x} < \ln(1+x)$$

$$0 < c \Rightarrow \frac{1}{1+0} = 1 > \frac{1}{1+c} = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$$

(11) نشان دهید.

$$(x > 0), \frac{1}{1+x} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$$

حل) کافی است در تمرین قبل به جای  $x$  قرار دهیم  $\frac{1}{x}$  داریم:

$$\frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$$

(12) اگر  $f$  بر بازه بسته  $[0, 1]$  پیوسته و  $f(0) = 0$  و اگر  $f'(x)$  بر بازه بسته باز

( $0$  آو) موجود و صعودی باشد، نشان دهید که  $g(x) = \frac{f(x)}{x}$  نیز بر بازه ( $0$  آو)

صعودی است.

حل) برای  $0 < x < 1$  طبق قضیه مقدار میانگین داریم:

$$g(x) = \frac{f(x) - f(\mathbf{0})}{x - \mathbf{0}} = f'(cx)$$

$$\mathbf{0} < x_1 < x_2 < 1 \Rightarrow cx_1 \leq cx_2$$

$$f' \Rightarrow f'(cx_1) \leq f'(cx_2) \text{ صعودی است } f'$$

$$\Rightarrow g(x_1) \leq g(x_2) \Rightarrow g \text{ صعودی است } g$$

(13) فرض کنید  $f'(x) = \frac{x}{1+x^2}$ . ثابت کنید به ازای هر  $a$  و  $b$  متمایز داریم:

$$\left| f(b) - f(a) \right| \leq \frac{1}{2} |b - a|$$

(حل)

$$f'(x) = \frac{1+x^2 - 2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \leq 1 - \frac{x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$\frac{x^2}{(1+x^2)^2} \geq \frac{1}{2} \text{ پس } 2x^2 \leq (1+x^2)^2 \text{ از طرفی. لذا}$$

$$f'(x) \leq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

حال اگر  $a$  و  $b$  متمایز و دلخواه باشد.

$$\left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right| = |f'(c)| \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow |f(b) - f(a)| \leq \frac{1}{2} |b - a|$$

(14) اگر  $\mathbf{0} < b \leq a < \frac{p}{2}$  باشد، نشان دهید که:

$$\frac{a-b}{\cos^2 b} \leq \tan a - \tan b \leq \frac{a-b}{\cos^2 a}$$

حل) تابع  $f(x) = \tan x$  را روی بازه  $[a, b]$  در نظر بگیرید.

این تابع شرایط قضیه مقدار میانگین را داراست. پس:

$$\frac{\tan a - \tan b}{a - b} = \frac{1}{\cos^2 c}$$

چون  $b < c < a$  و  $\frac{1}{\cos^2 x}$  تابعی صعودی است. پس

$$\frac{1}{\cos^2 b} \leq \frac{1}{\cos^2 c} \leq \frac{1}{\cos^2 a}$$

لذا

$$\frac{1}{\cos^2 b} \leq \frac{\tan a - \tan b}{a - b} \leq \frac{1}{\cos^2 a}$$

(15) درستی قضیه مقدار میانگین را برای تابع زیر در فاصله  $[0, 2]$  بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2}, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 1$$

حل) پس تابع همه جا خصوصا روی  $[0, 2]$  پیوسته است. از

طرفی:

$$f'_-(1) = f'_+(1) = 1, f'(x) = \begin{cases} -x, 0 \leq x \leq 1 \\ -\frac{1}{x^2}, x > 1 \end{cases}$$

پس مشتق  $f$  همه جا خصوصا روی  $(0, 2)$  موجود است. لذا شرایط قضیه مقدار میانگین برقرار است.

(16) ثابت کنید که معادله  $x = 2^{-x}$  یک و تنها ریشه در بازه  $(0, 1)$  دارد.

حل) از  $x = 2^{-x}$  نتیجه می گیریم  $\text{Log}_2 x = -x$

حال تابع  $f(x) = \text{Log}_2^x + x$  را روی فاصله  $(0, 1)$  در نظر بگیرید.

$$f(1) = 1 > 0$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, 1\right) \text{ در } f \text{ ریشه ای در } \left(\frac{1}{2}, 1\right) \text{ دارد.}$$

از طرفی  $f'(x) = \frac{1}{\text{Ln}2} \cdot \frac{1}{x} + 1$  هیچ ریشه ای ندارد. پس  $\text{Log}_2^x = x$

دقیقا یک ریشه دارد، لذا  $x = 2^{-x}$  دقیقا یک ریشه در  $(0, 1)$  دارد.

(17) قضیه رل را بیان کرده با استفاده از آن نشان دهید که معادله  $x^3 + x - 1 = 0$  یک

و فقط یک ریشه حقیقی دارد.

حل) اگر  $f$  روی  $[a, b]$  پیوسته و روی  $(a, b)$  مشتق پذیر باشد و  $f(a) = f(b)$

آنگاه  $c \in (a, b)$  موجود است که  $f'(c) = 0$ .

چون معادله داده شده از درجه فرد است پس حداقل یک ریشه دارد.

از طرفی  $f'(x) = 3x^2 + 1$  هیچ ریشه ای ندارد، پس طبق قضیه رل  $f(x)$  نمی تواند

بیش از یک ریشه داشته باشد.

(18) با استفاده از قضیه رل ثابت کنید بین هر دو ریشه حقیقی معادله  $e^x \sin x = 1$  حداقل یک ریشه  $e^x \cos x = -1$  قرار دارد.

(حل)  $e^x \sin x = 1$  معادل است با  $\sin x = e^{-x}$  و  $e^x \cos x = -1$  معادل است با  $\cos x = -e^{-x}$

حال تابع  $f(x) = \sin x - e^{-x}$  را در نظر بگیرید. این تابع شرایط قضیه رل را داراست و  $f'(x) = \cos x + e^{-x}$

بنابراین بین هر دو ریشه  $f'(x)$  وجود دارد.

یعنی بین هر دو ریشه  $\sin x = e^{-x}$  یک ریشه از  $\cos x = -e^{-x}$  وجود دارد.

(19) با استفاده از قضیه مقدار میانگین ثابت کنید.  $0 < x \leq 1 \quad \text{Ln}\left(\frac{x+1}{x}\right) \geq \frac{1}{a+1}$

(حل) طبق تمرین (11) برای  $x > 0$  داریم  $\text{Ln}\left(\frac{x+1}{x}\right) > \frac{x}{x+1}$  است.

حال اگر  $0 < x \leq 1$  آنگاه  $\frac{x}{x+1} \leq \frac{1}{1+x}$  بنابراین:

$$\frac{x}{x+1} \leq \text{Ln}\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

(20) با استفاده از قضیه مقدار میانگین نشان دهید که به ازای هر عدد حقیقی  $a \geq 1$

رابطه زیر برقرار است. (به شرط آنکه  $(z+1) > 0$  باشد).

$$z \geq 0 \quad (1+z)^a \geq 1+az \quad \text{اگر}$$

(حل) تابع  $f(x) = (1+x)^a - ax$  را روی فاصله  $[0, z]$  در نظر بگیرید

این تابع شرایط قضیه مقدار میانگین را داراست. پس  $0 < c < z$  موجودات که

$$\frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = f'(c) \Rightarrow \frac{(1+z)^a - az - 1}{z} = a(1+c)^{a-1} - a \geq 0$$

چون  $c > 0$  است پس  $(1+z)^a \geq 1+az$

اگر  $z < 0$  تابع  $f(x) = (1+x)^a - ax$  را روی  $[z, 0]$  در نظر می‌گیریم

$$\frac{f(0) - f(z)}{0 - z} = f'(c)$$

$$\frac{1 - (1+z)^a + az}{0 - z} = (1+c)^a - a \leq 0$$

$$\Rightarrow 1 + az \leq (1+z)^a$$

(21) با استفاده از قضیه رل نشان دهید که مشتق تابع  $f(x) = x^4 - 8x^2 - 12x$  فقط

یک ریشه در  $[-1, 1]$  دارد.

(حل)

$$f'(x) = 4x^3 - 16x - 12$$

$$f''(x) = 12x^2 - 16$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{16}{12} \Rightarrow x = \pm \frac{4}{\sqrt{3}}$$

ریشه‌های  $f''(x)$  خارج  $[-1, 1]$  قرار دارند پس  $f'(x)$  حداکثر یک ریشه در  $[-1, 1]$

دارد.

از طرفی  $f'(-1) = -4 + 16 - 12 = 0$  و این تنها ریشه تابع مشتق است.

(22) ثابت کنید که تابع  $f(x) = 4x^5 + 3x^3 + 3x - 2$  در فاصله  $[0, 1]$  تنها یک

ریشه دارد.

حل)  $f(1) = 8 > 0$  ,  $f(0) = -2 < 0$  پس حداقل یک ریشه در  $[0, 1]$  دارد. از طرفی:

$$f'(x) = 20x^4 + 9x^2 + 3 > 0$$

$f'(x)$  هیچ ریشه ای ندارد پس  $f(x)$  دقیقاً یک ریشه دارد.

(23) فرض کنید  $f(x)$  روی  $[0, 1]$  مشتق پذیر باشد. ثابت کنید عددی مانند

$$c^2 f'(c) + 2cf(c) = f(1) \quad , \quad 0 < c < 1$$
 وجود دارد به طوری که

حل) تابع  $h(x) = x^2 f(x)$  را روی فاصله  $[0, 1]$  در نظر بگیرید این تابع شرایط قضیه مقدار میانگین را داراست پس:

$$0 < c < 1, \quad \frac{h(1) - h(0)}{1 - 0} = h'(c)$$

$$0 < c < 1, \quad \frac{f(1) - 0}{1} = c^2 f'(c) + 2cf(c)$$

$$\Rightarrow c^2 f'(c) + 2cf(c) = f(1)$$

8-3-4 تمرین صفحه 300.

(1) تعیین کنید توابع زیر روی چه بازه هایی صعودی یا نزولی هستند.

$$1) \quad f(x) = -x^5 - 4x + 2$$

$$f'(x) = 5x^4 - 4 = -(5x^4 + 4) < 0$$

$f$  همواره نزولی است.

$$2) \quad f(x) = x^4 - 2x^2$$

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$$

تابع روی  $[1, +\infty)$  تابع صعودی روی  $[0, 1]$  نزولی

روی  $[-1, 0]$  تابع صعودی و روی  $(-\infty, -1]$  نزولی است.

$$3) \quad f(x) = \frac{-x+2}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-(x-1)^2 - 2(x-1)(-x+2)}{(x-1)^4} = \frac{(x-1)(-x+1+2x-4)}{(x-1)^4} = \frac{(x-3)}{(x-1)^3}$$

تابع روی  $(1, 3)$  نزولی و روی  $(3, +\infty)$  و  $(-\infty, 1)$  صعودی است.

$$4) \quad f(x) = x\sqrt{4-x^2}$$

$$f'(x) = \sqrt{4-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

تابع روی  $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$  صعودی و روی  $(-2, -\sqrt{2})$  و  $(\sqrt{2}, 2)$  نزولی است.

$$5) \quad f(x) = [x]$$

تابع جزء صحیح همه جا صعودی است.

$$6) \quad f(x) = |x| - |x+1|$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 \rightarrow x < -1 \\ -2x-1 \rightarrow -1 \leq x < 0 \\ -1 \rightarrow 0 \leq x \end{cases}$$

$$7) \quad f(x) = x + \cos x \\ f'(x) = 1 - \sin x \geq 0$$

همواره صعودی است.

$$8) \quad f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$



تابع روی  $(-1, 1)$  صعودی و روی  $(-\infty, -1)$  و  $(1, +\infty)$  صعودی است.

$$9) \quad f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) < 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{تابع همواره نزولی است. چون}$$

$$10) \quad f(x) = 2x + \frac{1}{2x}$$

$$f'(x) = 2 - \frac{1}{2x^2} = \frac{4x^2 - 1}{2x^2}$$

تابع روی  $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  نزولی و روی  $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$  و  $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$  صعودی است.

$$11) \quad f(x) = x\sqrt{5-x^2}$$

$$f'(x) = \sqrt{5-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{5-x^2}} = \frac{5-2x^2}{\sqrt{5-x^2}}$$

تابع روی  $\left(-\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{\frac{5}{2}}\right)$  صعودی و روی  $\left(\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{5}\right)$  و  $\left(-\sqrt{5}, -\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$  نزولی است.

$$12) \quad f(x) = 2 - (x-1)^{\frac{1}{3}}$$

$$f'(x) = -(x-1)^{-\frac{2}{3}} < 0 \Rightarrow \text{همواره نزولی است}$$

$$13) \quad f(x) = x^3(x-2)^2$$

$$f'(x) = 3x^2(x-2)^2 + 2x^3(x-2) = x^2(x-2)(3x-6+2x) = x^2(x-2)(5x-6)$$

تابع روی  $\left(-\infty, \frac{6}{5}\right)$  و صعودی و روی  $(2, +\infty)$  صعودی و روی  $\left(\frac{6}{5}, 2\right)$  نزولی است.

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos^2 x + \cos x - 2 \\ f'(x) &= -\sin 2x - \cos x = -\cos x(2\sin x + 1) \\ &= -2\cos x\left(\sin x + \frac{1}{2}\right) \end{aligned} \quad (14)$$

$$0 < x < \frac{p}{2} \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow \text{تابع نزولی}$$

$$\frac{p}{2} < x < p \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow \text{تابع صعودی}$$

$$p < x < \frac{7p}{6} \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow \text{تابع نزولی}$$

$$\frac{7p}{6} < x < \frac{3p}{2} \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow \text{تابع صعودی}$$

$$\frac{3p}{2} < x < \frac{11p}{6} \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow \text{تابع نزولی}$$

$$\frac{11p}{6} < x < 2p \Rightarrow f'(m) > 0 \Rightarrow \text{تابع صعودی}$$

(2) با فرض  $0 < x < \frac{p}{2}$  ، نامساوی های زیر را ثابت کنید.

$$\sin x < x \quad (\text{الف})$$

حل) تابع  $f(t) = \sin t$  را روی  $[0, x]$  در نظر بگیرید

شرایط قضیه مقدار میانگین را دارد پس.

$$\frac{f(x) - f(\mathbf{0})}{x - \mathbf{0}} = f'(c) \Rightarrow \frac{\sin x}{x} = \cos c < 1 \Rightarrow \sin x < x$$

$$x - \frac{x^3}{6} < \sin x \quad (\text{ب})$$

حل) تابع  $f(t) = \sin t + \frac{t^3}{6}$  را روی فاصله  $[\mathbf{0}, x]$  در نظر بگیرید

شرایط قضیه مقدار میانگین را دارد. پس داریم

$$\frac{f(x) - f(\mathbf{0})}{x - \mathbf{0}} = f'(c) \Rightarrow \frac{\sin x + \frac{x^3}{6}}{x} = \cos c + \frac{c^2}{3} > 1 \Rightarrow \sin x > x - \frac{x^3}{6}$$

(3) نشان دهید.

$$(x > \mathbf{0})$$

$$\frac{x}{1+x^2} < \text{Arc tan } t < x$$

حل) تابع  $f(t) = \text{Arc tan } t$  را روی بازه  $[\mathbf{0}, x]$  در نظر بگیرید

شرایط قضیه مقدار میانگین را دارد. پس داریم:

$$\frac{f(x) - f(\mathbf{0})}{x - \mathbf{0}} = f'(c) \Rightarrow \frac{\text{Arc tan } x - \mathbf{0}}{x} = \frac{1}{1+c^2}$$

$$\frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{1+c^2} < 1 \quad \text{چون } \mathbf{0} < c < x \text{ پس لذا داریم:}$$

$$\frac{1}{1+x^2} < \frac{\text{Arc tan } x}{x} < 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{1+x^2} < \text{Arc tan } x < x$$

(4) با فرض  $f(x) = x - \text{Ln}(1+x)$  و  $\mathbf{0} < x < 1$  نشان دهید.

$$\frac{x^2}{4} < x - \ln(1+x) < \frac{x^2}{2}$$

حل) تابع  $f(t) = t - \ln(1+t)$  و  $g(t) = t^2$  روی  $[0, x]$  شرایط قضیه مقدار میانگین را دارند، پس داریم:

$$\frac{f(x) - f(0)}{g(x) - g(0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \Rightarrow \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{1 - \frac{1}{1+c}}{2c} \Rightarrow \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{c}{1+c} / 2c$$

$$\frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2(1+c)}$$

از طرفی چون  $0 < c < x < 1$  لذا داریم:

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{2(1+c)} < \frac{1}{2}$$

پس داریم:

$$\frac{1}{4} < \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x^2}{4} < x - \ln(1+x) < \frac{x^2}{2}$$

$$(x > 0) \quad \frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$$

(5) نشان دهید:

حل) به تمرین صفحه 292 مراجعه کنید.

$$\frac{2}{p}x < \sin x < x, 0 < x < \frac{p}{2}$$

(6) نامساوی زیر را ثابت کنید:

حل) نامساوی  $\sin x < x$  در تمرین 2 قسمت الف نشان داده شد.

برای  $x > 0$  تابع  $f(t) = \sin t - \frac{2}{p}t$  را روی فاصله  $\left[x, \frac{p}{2}\right]$  در نظر بگیرید، این تابع

شرایط قضیه مقدار میانگین را دارد.

$$\frac{f\left(\frac{p}{2}\right) - f(x)}{\frac{p}{2} - x} f'(c) \Rightarrow \frac{0 - \left(\sin x - \frac{2}{p}x\right)}{\frac{p}{2} - x} = \cos c - \frac{2}{p} \Rightarrow \frac{\sin x - \frac{2}{p}x}{\frac{p}{2} - x} = \frac{2}{p} - \cos c$$

(7) اگر  $0 < x < \frac{p}{2}$  باشد نشان دهید:  $\tan x + \sin x > 2x$ .

(8) فرض کنید تابع  $f$  در بازه  $[a, b]$  پیوسته و  $f''$  در فاصله  $(a, b)$  همواره موجود و

مثبت باشد. نشان دهید.

$$\forall x, y \in [a, b]: f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(f(x) + f(y))$$

(9) اگر  $f$  در بازه  $[0, 1]$  پیوسته و  $f(0) = 0$  و اگر  $f'(x)$  بر بازه  $(0, 1)$  موجود و

صعودی باشد. نشان دهید که  $g(x) = \frac{f(x)}{x}$  نیز بر بازه  $(0, 1)$  صعودی است.

(حل) به تمرین 12 صفحه 292 مراجعه کنید.

نقاط بحرانی هر یک از توابع زیر را تعیین کنید.

$$1) \quad f(x) = 4x^4 + 4x^3$$

$$f'(x) = 16x^3 + 12x^2 = 4x^2(4x + 3) = 0$$

$$\text{نقاط بحرانی} = \left\{ 0, -\frac{3}{4} \right\} \Rightarrow$$

$$2) \quad f(x) = \frac{-x}{x^2 + 4}$$

$$f'(x) = \frac{-x^2 - 4 + 2x^2}{(x^2 + 4)^2} = \frac{x^2 - 4}{(x^2 + 4)^2} = 0$$

$$\text{نقاط بحرانی} = \{-2, 2\} \Rightarrow$$

$$3) \quad f(x) = \sin^2 x - \sin x$$

$$f'(x) = \sin^2 x - \cos x = 0$$

$$\Rightarrow \cos x = 0$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$\text{نقاط بحرانی} = \left\{ kp + \frac{p}{2}, 2kp + \frac{p}{6}, 2kp + \frac{5p}{6} \right\} \Rightarrow$$

$$4) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & -\frac{3}{2} \leq x < 2 \\ -x + 3 & 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 3 & -\frac{3}{2} \leq x < 2 \\ -1 & 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

تابع در  $x = 2$  پیوسته است ولی مشتق پذیر نیست. پس  $x = 2$  نقطه بحرانی است.

$$5) \quad f(x) = x^{\frac{7}{3}} + x^{\frac{4}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}} + \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} - x^{-\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{7x^2 + 4x - 3}{3x^{\frac{2}{3}}} = 0 \rightarrow 7x^2 + 4x - 3 = 0$$

پس نقاط بحرانی  $\left\{0, -1, \frac{3}{7}\right\} \Rightarrow$

$$6) \quad f(x) = \sqrt[3]{(x^3 - 3x^2 + 4)}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 6x}{3\sqrt[3]{(x^3 - 3x^2 + 4)^2}}$$

$$3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x = 0, 2$$

$$x^3 - 3x^2 + 4 = 0 \Rightarrow (x-2)^2(x+1) = 0 \Rightarrow x = 2, -1$$

به ازای  $x = 2$  مشتق موجود است پس

$\{0, -1\} \Rightarrow$  نقاط بحرانی

$$7) \quad f(x) = \frac{(x+1)}{(x^2 - 5x + 4)}$$

(حل)

$$D_f = R - \{1, 4\}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 5x + 4 - 2x^2 - 2x + 5x + 5}{(x^2 - 5x + 4)^2}$$

$$\Rightarrow -x^2 - 2x + 9 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 9 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{40}}{2} = -1 \pm \sqrt{10} \Rightarrow$$

نقاط بحرانی

$$8) \quad f(x) = x^{\frac{3}{2}} - 4x^{\frac{1}{2}} + 2$$

$$D_f = [0, +\infty]$$

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 2x^{-\frac{1}{2}} = \frac{3x-4}{2x^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow = \frac{4}{3} \Rightarrow$$

نقطه بحرانی

313-21-3-4 تمرین صفحه

با استفاده از آزمون مشتق دوم نقاط ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی هر یک از توابع زیر را تعیین کنید.

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2 \quad (1)$$

$$x = 0 \Rightarrow f''(0) = -6 \Rightarrow \text{ماکزیمم نسبی}$$

$$x = 2 \Rightarrow f''(2) = 6 \Rightarrow \text{مینیمم نسبی}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \cos x$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin x = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{p}{4}, \frac{3p}{4}$$

$$f''(x) = -\cos x \quad (2)$$

$$x = \frac{p}{4} \Rightarrow f''\left(\frac{p}{4}\right) = -\cos\left(\frac{p}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \text{ماکزیمم نسبی}$$

$$x = \frac{3p}{4} \Rightarrow f''\left(\frac{3p}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \text{مینیمم نسبی}$$



$$\begin{aligned}
 f(x) &= -4x^3 + 3x^2 + 18x \\
 f'(x) &= -12x^2 + 6x + 18 = -6(2x^2 - x - 6) = 0 \\
 \Rightarrow x &= \frac{1 \pm 7}{4} \Rightarrow x = 2, x = -\frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= -24x + 6 \\
 x = 2 &\Rightarrow f''(2) < 0 \Rightarrow \text{ماکزیمم نسبی} \\
 x = -\frac{3}{2} &\Rightarrow f''(-\frac{3}{2}) > 0 \Rightarrow \text{مینیمم نسبی}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 2x^3 - 9x^2 + 27 \\
 f'(x) &= 6x^2 - 18x = 6x(x - 3) \Rightarrow x = 0, x = 3 \\
 f''(x) &= 12x - 18
 \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}
 x = 0 &\Rightarrow f''(0) = -18 < 0 \Rightarrow \text{ماکزیمم نسبی} \\
 x = 3 &\Rightarrow f''(3) = 18 > 0 \Rightarrow \text{مینیمم نسبی}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 4x^{\frac{1}{2}} + 4x^{-\frac{1}{2}} \\
 f'(x) &= 2x^{-\frac{1}{2}} - 2x^{-\frac{3}{2}} = 2\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x\sqrt{x}}\right) = 2\left(\frac{x-1}{x\sqrt{x}}\right) = 0 \Rightarrow x = 1 \\
 f''(x) &= -x^{-\frac{3}{2}} + 3x^{-\frac{5}{2}}
 \end{aligned}$$

(5)

$$f''(1) = 2 > 0 \Rightarrow \text{مینیمم نسبی}$$

$$f(x) = (x-3)^4 \Rightarrow \text{در } x = 3 \text{ مینیمم نسبی دارد.}$$

(7)

$$f(x) = (x-4)^2 \sqrt{x} \Rightarrow D_f = [0, +\infty]$$

$$f'(x) = 2(x-4)\sqrt{x} + (x-4)^2 \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{4x(x-4) + (x-4)^2}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{(x-4)(5x-4)}{2\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow x = 4, x = \frac{4}{5}$$

$$f''(x) = \frac{2\sqrt{x}(10x-24) - \frac{1}{\sqrt{x}}(x-4)(5x-4)}{2\sqrt{x}} = \frac{2x(10x-24) - (x-4)(5x-4)}{2x}$$

$$f''(4) = \frac{8 \times 16}{8} = 16 > 0 \Rightarrow f \text{ در } 4 \text{ مینیمم نسبی}$$

$$f''\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{\frac{8}{5} \times (-4)}{\frac{8}{5}} < 0 \Rightarrow f \text{ در } \frac{4}{5} \text{ ماکزیمم نسبی}$$

$$f(x) = \frac{9}{x} + \frac{x^2}{9}$$

$$f'(x) = -\frac{9}{x^2} + \frac{2x}{9} = \frac{-81 + 2x^3}{9x^2} = 0 \Rightarrow x^3 = \frac{81}{2} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{81}{2}} \quad (8)$$

مینیمم نسبی

$$f''(x) = \frac{18}{x^3} + \frac{2}{9} \Rightarrow f''\left(\sqrt[3]{\frac{81}{2}}\right) > 0 \Rightarrow$$



## فصل پنجم

ضد مشتق

9-2-5 تمرین صفحه 350

(1) هر یک از انتگرال های زیر را حل کنید:

$$\int (3x-2)^4 dx = \frac{1}{3} \int (3x-2)^4 3 dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{(3x-2)^5}{5} + c \quad (\text{الف})$$

$$\int \frac{x+1}{2\sqrt{x+1}} dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{x+1} dx = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} (x+1)\sqrt{x+1} + c \quad (\text{ب})$$

$$\int x^2 \sqrt{1+x} dx \quad (\text{ج})$$

قرار دهید  $u^2 = 1+x$  پس  $2udu = dx$ 

$$\begin{aligned} \int (u^2-1)^2 2u^2 du &= 2 \int (u^6 - 2u^4 + u^2) du \\ &= 2 \left( \frac{u^7}{7} - \frac{2u^5}{5} + \frac{u^3}{3} \right) + c \\ &= 2 \left( \frac{(x+1)^{\frac{7}{2}}}{7} - \frac{2(x+1)^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{3} \right) + c \end{aligned}$$

$$\int x^3 \sqrt{x^2-1} dx$$

$$u^2 = x^2 - 1 \Rightarrow 2udu = 2x dx \Rightarrow udu = x dx$$

$$\int (u^2+1)udu = \frac{u^4}{4} + \frac{u^2}{2} + c = \frac{(x^2-1)^2}{4} + \frac{x^2-1}{2} + c \quad (\text{د})$$

$$\int \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}} dx$$

(ه)

$$u = \sqrt{x} \Rightarrow 2du = \frac{dx}{\sqrt{x}} \Rightarrow 2 \int (u-1)^2 du = \frac{2}{3}(u-1)^3 + c$$

$$= \frac{2}{3}(\sqrt{x}-1)^3 + c$$

$$\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^6}} = -\frac{1}{6} \int \frac{-6x^5}{\sqrt{1-x^6}} dx = -\frac{1}{6} \times 2\sqrt{1-x^6} + c$$

$$= -\frac{1}{3}\sqrt{1-x^6} + c$$

(و)

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{(1+x^2)^3}} = \int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

$$u^2 = 1+x^2 \Rightarrow udu = xdx$$

$$\int \frac{udu}{\sqrt{1+(u^2-1)u^3}} = \int \frac{udu}{\sqrt{1-u^3+u^5}}$$

(ز)

$$\int \frac{(x+1)dx}{(x^2+2x+2)^3} = \int \frac{(x+1)dx}{((x+1)^2+1)^3}$$

$$u = (x+1)^2 + 1 \Rightarrow \frac{du}{u^3} = \frac{1}{2} \times -\frac{1}{2} \times \frac{1}{u^2} + c = -\frac{1}{4((x+1)^2+1)^2} + c$$

(ح)

$$\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^4} dx; u = 2 \sin x \Rightarrow du = 2 \cos x dx$$

$$\frac{1}{4} \int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} dx = \frac{1}{4} \int \cot^2 x \cdot \csc^2 x dx = -\frac{1}{12} \cot^3 x + c$$

(ط)

$$\int \frac{x^2 + 1}{\sqrt[3]{x^3 + 3x + 1}} dx$$

$$u = x^3 + 3x + 1 \Rightarrow \frac{du}{3} = (x^2 + 1)dx$$

$$\frac{1}{3} \int \frac{du}{\sqrt[3]{u}} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} u^{\frac{2}{3}} + c = \frac{1}{2} (x^3 + 3x + 1)^{\frac{2}{3}} + c$$

(ک)

$$\int x^2 \sqrt[3]{1-x} dx$$

$$u^3 = 1 - x \Rightarrow -3u^2 du = dx$$

$$-3 \int (1 - u^3)^2 u^3 du = -3 \int (u^3 - 2u^6 + u^9) du$$

$$= -3 \left( \frac{u^4}{4} - \frac{2u^7}{7} + \frac{u^{10}}{10} \right) + c$$

$$= -3 \left( \frac{(1-x)^{\frac{4}{3}}}{4} - \frac{2(1-x)^{\frac{7}{3}}}{7} + \frac{(1-x)^{\frac{10}{3}}}{10} \right) + c$$

(ک)

$$\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3 + 1}} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3x^2}{\sqrt[3]{x^3 + 1}} dx = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} (x^3 + 1)^{\frac{2}{3}} + c$$

(ل)

$$\int x \sqrt{5-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int \sqrt{5-x^2} (-2x) dx$$

$$= -\frac{1}{2} \times \frac{5}{6} (5-x^2)^{\frac{6}{5}} + c$$

(م)

(2) فرض کنید  $f(x) = |x|$  و تابع  $F$  به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2, & x < 0 \\ \frac{1}{2}x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

نشان دهید  $F$  یک ضد مشتق  $f$  روی  $(-\infty, +\infty)$  است.

$$F'(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases} = f(x) \quad (\text{حل})$$

13-3-5 تمرین صفحه 355.

انتگرال  $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x}$  را حل کنید.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x} &= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^4 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^4 x} + \int \frac{dx}{(\sin x \cos x)^2} \\ &= \int \sec^4 x dx + 4 \int \frac{dx}{(\sin 2x)^2} = \int \sec^2 x (1 + \tan^2 x) dx + 4 \int \csc^2 2x \\ &= \tan x + \frac{\tan^3 x}{3} - 2 \cot 2x + c \end{aligned} \quad (\text{حل})$$

20-3-5 تمرین صفحه 357.

(1) هر یک از انتگرال های زیر را حساب کنید.

$$\begin{aligned} \int \tan^4 x dx &= \int \tan^2 x (\sec^2 x - 1) dx \\ &= \int \tan^2 x \sec^2 x dx - \int (\tan^2 x + 1) dx + \int dx \\ &= \frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x + c \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \int \tan^6 x dx &= \int \tan^2 x \cdot \tan^4 x dx = \int (\sec^2 x - 1) \tan^4 x dx \\ &= \int \tan^4 x \cdot \sec^2 x dx - \int \tan^4 x dx \\ &= \frac{\tan^5 x}{5} - \frac{\tan^3 x}{3} + \tan x - x + c \end{aligned} \quad (2)$$



$$\begin{aligned}
& \int \frac{\cos^3 x}{\sin^9 x} dx \\
&= \int \frac{\cos x(1-\sin^2 x)}{\sin^9 x} dx = \int \frac{\cos x}{\sin^9 x} dx - \int \frac{\cos x}{\sin^7 x} dx \\
&= -\frac{1}{8\sin^8 x} + \frac{1}{6\sin^6 x} + c
\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
& \int \sec^4 x \cdot \cot^6 x dx = \int \frac{\sec^4 x}{\tan^6 x} dx = \int \frac{\sec^2 x(1+\tan^2 x)}{\tan^6 x} dx \\
&= \int \frac{\sec^2 x}{\tan^6 x} dx + \int \frac{\sec^2 x}{\tan^4 x} dx = -\frac{1}{5\tan^5 x} - \frac{1}{3\tan^3 x} + c
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
 5) \quad \int \frac{\sin^3 x}{\cos^9 x} &= \int \frac{\sin x(1-\cos^2 x)}{\cos^9 x} dx = \int \frac{\sin x}{\cos^9 x} dx - \int \frac{\sin x}{\cos^9 x} dx \\
 &= \frac{1}{8\cos^8 x} - \frac{1}{6\cos^6 x} + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6) \quad & \left| \csc^4 x \cdot \cot^7 x dx - \left| \csc^2 x (\cot^2 x - 1) \cot^7 \right. \right. \\
 &= \int \cot^9 x \cdot \csc^2 x dx - \int \cot^7 x \cdot \csc^2 x dx \\
 &= -\frac{\cot^{10} x}{10} + \frac{\cot^8 x}{8} + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7) \quad \int \cos x \sec^2(\sin x) dx &= \int \frac{\sin x \cot x}{\cos^2 x} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{2 \sin x \cos x}{\cos^2 x} dx = -\frac{1}{2 \cos x} + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8) \quad \int \sin^3 2x \cdot \cos^5 2x dx &= \int \sin 2x (1 - \cos^2 2x) \cos^5 2x dx \\
 &= \int \cos^5 2x \cdot \sin 2x dx - \int \cos^7 2x \cdot \sin 2x dx \\
 &= -\frac{1}{12} \cos^6 2x + \frac{1}{16} \cos^8 2x + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9) \quad \int \frac{\tan x (1 + \tan x)^{10}}{\cos^2 x} dx &= \int u(1+u)^{10} du \\
 & \left( u = \tan x \Rightarrow du = \frac{dx}{\cos^2 x} \right) \\
 &= \int ((u+1)^{11} - (u+1)^{10}) du = \frac{(\tan x + 1)^{12}}{12} - \frac{(\tan x + 1)^{11}}{11}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10) \quad \int \frac{\sin x \, dx}{\cos^2 x + 2\cos x + 1} &= \int \frac{\sin x \, dx}{(\cos x + 1)^2} \\
 (u = \cos x + 1 \Rightarrow -du = \sin x \, dx) & \\
 &= -\int \frac{du}{u^2} = \frac{1}{\cos x + 1} + c
 \end{aligned}$$

(2) فرض کنید  $I_n = \int \tan^n x \, dx$ . یک فرمول بازگشتی برای محاسبه  $I_n$  بیابید،  $I_4$  و  $I_6$  را محاسبه کنید.  
(حل)

$$\begin{aligned}
 I_n &= \int \tan^{n-2} x \cdot \tan^2 x \, dx = \int \tan^n x (\sec^2 x - 1) \, dx = \tan x \\
 &= \int \tan^{n-1} x \cdot \tan^2 x \, dx - \int \tan^{n-2} x (\sec^{n-2} x - 1) \, dx \\
 &= \frac{\tan^{n-1}}{n-1} - I_{n-2} + c \\
 \Rightarrow \quad I_n + I_{n-2} &= \frac{\tan^{n-1}}{n-1} + c \\
 I_2 &= \int \tan^3 x \, dx = \int (\sec^2 x - 1) \, dx = \tan x - x \\
 I_4 &= \frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x + c \\
 I_6 &= \frac{\tan^5 x}{5} - \frac{\tan^3 x}{3} + \tan x - x + c
 \end{aligned}$$

(3) معادله دسته منحنی‌هایی را بیابید که ضریب زاویه خطوط مماس در هر نقطه  $(x, y)$

از آن برابر  $y = \frac{\bar{x}}{y}$  باشد.

(حل)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \Rightarrow ydy = -xdx$$

$$\Rightarrow \int ydy = -\int xdx + c$$

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + c \Rightarrow x^2 + y^2 = 2c$$

معادله دسته مخفی‌ها، دایره بر مرکز مبدأ مختصات است.

(4) معادله مخفی را بیابید که از نقطه  $(2, 9)$  گذشته و معادله ضریب زاویه مماس برخی  $3x^2$  باشد.

$$y = 3x^2 \Rightarrow y = \int 3x^2 dx + c$$

$$y = x^3 + c$$

$$9 = 8 + c \Rightarrow c = 1$$

$$y = x^3 + 1$$

(حل)

(5) معادله  $y' - 2x = 0$  را حل کنید.

$$y' = 2x \Rightarrow y = \int 2x + c$$

$$\Rightarrow y = x^2 + c$$

(حل)

(6) مشتق تابعی برابر  $\sqrt{x+3}$  است. هرگاه مقدار به ازای  $x=1$  برابر 1 باشد، تابع را

بیابید.

$$y' = \sqrt{x+3} \Rightarrow y = \int \sqrt{x+3} + c$$

$$\Rightarrow y = \frac{2}{3}(x+3)\sqrt{x+3} + c$$

$$(1, 1) \Rightarrow 1 = \frac{2}{3} \times 4 \times 2 \times c \Rightarrow c = -\frac{13}{3}$$

$$y = \frac{2}{3}(x+3)\sqrt{x+3} - \frac{13}{3} \quad (\text{حل})$$

(7) هر یک از انتگرالهای زیر را حل کنید.

$$1) \int \frac{\sin x \, dx}{(1 + \cos x)^2} = -\frac{1}{1 + \cos x} + c$$

$$\int \cos^6 x \, dx = \frac{1}{8} \int (1 + \cos 2x)^3 \, dx$$

$$2) = \frac{1}{8} \int (1 + 3 \cos 2x + 3 \cos^2 2x + \cos^3 2x) \, dx$$

$$= \frac{1}{8} \left( \int dx + 3 \int \cos 2x \, dx + \frac{3}{2} \int (1 + \cos 4x) \, dx + \int \cos 2x (1 - \sin^2 2x) \, dx \right)$$

$$= \frac{1}{8} \left( x + \frac{3}{2} \sin 2x + \frac{3}{2} x + \frac{3}{8} \sin 4x + \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{\sin^3 2x}{6} \right) + c$$

$$3) \int \sin^5 x \cos^2 x \, dx = \int \sin x (1 - \cos^2 x)^2 \cos^2 x \, dx$$

$$= \int \sin x \cdot \cos^2 x \, dx - 2 \int \sin x \cdot \cos 4x \, dx + \int \sin x \cdot \cos^6 x \, dx$$

$$= -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{2}{5} \cos^5 x - \frac{\cos^7 x}{7} + c$$

$$\begin{aligned}
 4) \quad \int \frac{\cos^3 3x}{\sqrt[3]{\sin 3x}} dx &= \int \cos 3x (1 - \sin^2 3x) \sin^{-\frac{1}{3}} 3x dx \\
 &= \int \sin^{-\frac{1}{3}} 3x \cdot \cos 3x dx - \int \sin^{\frac{5}{3}} 3x \cdot \cos 3x dx \\
 &= \frac{1}{2} \sin^{\frac{2}{3}} 3x + \frac{1}{8} \sin^{\frac{8}{3}} 3x + c
 \end{aligned}$$

$$5) \quad \int \sin 3y \cos 3y dy = \frac{1}{6} \sin^2 3y + c$$

$$\begin{aligned}
 6) \quad \int \cos t \cdot \cos 3t dt &= \frac{1}{2} \int (\cos 2t + \cos t) dt \\
 &= \frac{1}{4} \sin 2t + \frac{1}{2} \sin t + c
 \end{aligned}$$

$$7) \quad \int \sin x \cdot \sin 3x \cdot \sin 5x = \int \frac{1}{2} (\cos 2x - \cos x) \sin 5x dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \int \sin 5x \cdot \cos 2x dx - \frac{1}{2} \int \sin 5x \cdot \cos x dx \\
 &= \frac{1}{2} \int \left( \sin \frac{7}{2} x + \sin \frac{3}{2} x \right) dx - \frac{1}{2} \int (\sin 3x + \sin 2x) dx \\
 &= \frac{-1}{7} \cos \frac{7}{2} x - \frac{1}{3} \cos \frac{3}{2} x + \frac{1}{6} \cos 3x + \frac{1}{4} \cos 2x + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
8) \quad \int \sin^4 x \cos^4 x dx &= \frac{1}{16} \int (2 \sin x \cos x)^4 dx \\
&= \frac{1}{16} \int \sin^4 2x dx = \frac{1}{32} \int (1 - \cos 4x)^2 dx \\
&= \frac{1}{32} \int (1 - 2\cos 4x + \cos^2 4x) dx \\
&= \frac{1}{32} \left( x - \frac{1}{2} \sin 4x + \frac{1}{2} x + \frac{1}{16} \sin 8x \right) + c
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
9) \quad \int \sqrt{1 + \sin^2(x-1)} \cdot \sin(x-1) \cos(x-1) dx \\
\left( u = 1 + \sin^2(x-1) \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{2} = \sin(x-1) \cos(x-1) dx \right)
\end{aligned}$$

$$I = \frac{1}{2} \int \sqrt{u} du = \frac{1}{3} u \sqrt{u} + c = \frac{1}{3} (1 + \sin^2(x-1)) \sqrt{1 + \sin^2(x-1)} + c$$

$$10) \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} = 4 \int \frac{dx}{(2 \sin x \cos x)^2} = 4 \int \frac{dx}{\sin^2 2x} = -2 \cot 2x + c$$

$$\begin{aligned}
11) \quad \int \sqrt{- + \sin^2(x-1)} \cdot \sin(x-1) \cos(x-1) dx \\
= \frac{1}{2} \int \frac{1}{2} \left( \cos \frac{13}{4} x + \cos \frac{7}{4} x + \cos \frac{11}{4} x + \cos \frac{9}{4} x \right) dx \\
I = \frac{1}{2} \left( \frac{4}{13} \sin \frac{13}{4} x + \frac{4}{7} \sin \frac{7}{4} x + \frac{4}{11} \sin \frac{11}{4} x + \frac{4}{9} \sin \frac{9}{4} x \right) + c
\end{aligned}$$

$$12) \quad \int \frac{1 + \sin 3x}{\cos^2 3x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 3x} dx + \int \frac{\sin 3x}{\cos^2 3x} dx$$

$$= \frac{1}{3} \tan 3x - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\cos 3x} + c$$

$$13) \quad \int \frac{(\sin x + \cos x)}{\sqrt[3]{(\sin x - \cos x)}} dx \quad u = \sin x - \cos x \Rightarrow du = (\cos x + \sin x) dx$$

$$= \int \frac{dy}{\sqrt[3]{u}} = \int u^{-\frac{1}{3}} du = \frac{2}{3} u^{\frac{2}{3}} + c = \frac{2}{3} (\sin x - \cos x)^{\frac{2}{3}} + c$$

$$14) \quad \int x^{n-1} \sin x^n dx \quad u = x^n \Rightarrow \frac{du}{n} = x^{n-1} dx$$

$$= \frac{1}{n} \int \sin u du = -\frac{1}{n} \cos x^n + c$$

$$15) \quad \int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[5]{\cos^3 x}} dx = \int \sin x \frac{1 - \cos^2 x}{\sqrt[5]{\cos^3 x}} dx$$

$$= \int \cos^{-\frac{3}{5}} x \cdot \sin x dx - \int \cos^{\frac{13}{5}} x \cdot \sin x dx$$

$$= -\frac{5}{2} \cos^{\frac{2}{5}} x + \frac{5}{18} \cos^{\frac{18}{5}} x + c$$

$$16) \quad \int \frac{\sin x}{(1 + \cos x)^2} dx = -\int \frac{du}{u^2} = \frac{1}{u} + c = \frac{1}{1 + \cos x} + c$$

$$17) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x} \sin^2 \sqrt{x}}, \quad u = \sqrt{x} \Rightarrow 2du = \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$I = 2 \int \frac{du}{\sin^2 u} = -2 \cot(\sqrt{x}) + c$$



$$18) \quad \int \frac{x dx}{\cos^2 x^2}, \quad u = x^2 \Rightarrow \frac{du}{2} = x dx$$

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{du}{\cos^2 u} = \frac{1}{2} \tan x^2 + c$$

$$19) \quad \int \sin x (1 + \cos x)^5 dx = - \int u^5 du = - \frac{(1 + \cos x)^6}{6} + c$$

$$20) \quad \int \sin 2x \sqrt{2 + \sin^2 x} dx = \int \sqrt{u} du = \frac{2}{3} (1 + \sin^2 x) \sqrt{1 + \sin^2 x} + c$$

## فصل ششم

# انتگرال معین

7-1-6 نکریم صفحه 364

با استفاده تعریف حد، انتگرال تابع  $f(x) = x^2$  را در فاصله  $[0, 1]$  بیابید.

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n}\right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{aligned} \quad (\text{حل})$$

2-2-6 تمرین صفحه 366.

در شی تساوی‌های زیر ثالث کنید.

$$\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx \quad (\text{الف})$$

(حل) اگر  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  افرازی از  $[a, b]$  باشد آنگاه  $\Delta y_i = \Delta x_i$  برای بازه

$[b, a]$  به کار می‌رود پس

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\mathbf{D}_i) \Delta x_i = -\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\mathbf{D}_i) \Delta y_i \\ &= \int_b^a f(x) dx \\ \int_b^a f(x) dx &= \mathbf{0} \quad (\text{ب}) \end{aligned}$$

(حل) طبق خاصیت الف)

$$\begin{aligned} \int_a^a f(x) dx &= -\int_a^a f(x) dx \\ \Rightarrow 2 \int_a^a f(x) dx &= \mathbf{0} \quad \Rightarrow \int_a^a f(x) dx = \mathbf{0} \end{aligned}$$

5-2-6 تمرین صفحه 368

قضیه 4-2-6. فرض کنید  $f$  در بازه‌ای شامل نقاط  $a, b, c$  پیوسته باشد در این صورت:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

اثبات) اگر  $a < c < b$ ، اثبات تساوی از قضیه 3-2-6 حاصل می‌شود. بدون از دست رفتن کلیت فرض کنید  $a < c < b$ .

$$\Rightarrow \int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_a^b f(x) dx &= \int_a^c f(x) dx - \int_b^c f(x) dx \\ &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \end{aligned}$$

7-2-6. تمرین صفحه 369

قضیه 6-2-4. اگر  $f$  و  $g$  بر  $[a, b]$  پیوسته باشد و برای ره  $x \in [a, b]$ ،

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx \quad \text{آنگاه } f(x) \geq g(x)$$

اثبات.

$$f(\mathbf{D}_i) \geq g(\mathbf{D}_i) \Rightarrow f(\mathbf{D}_i) \Delta x_i \geq g(\mathbf{D}_i) \Delta x_i$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n f(\mathfrak{S}_i) \Delta x_i \geq \sum_{i=1}^n g(\mathfrak{S}_i) \Delta x_i$$

$$\Rightarrow \lim \sum_{i=1}^n f(\mathfrak{S}_i) \Delta x_i \geq \lim \sum_{i=1}^n g(\mathfrak{S}_i) \Delta x_i$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$

(2) اگر  $f$  بر  $[a, b]$  انتگرال پذیر باشد و برای هر  $x$  در فاصله  $[a, b]$ ،

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0 \quad \text{اگر } f(x) \geq 0 \text{ انگاه}$$

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b 0 dx = 0$$

اثبات : طبق قضیه 6-2-4 داریم

(3) اگر  $f$  روی  $[a, b]$  پیوسته باشد و برای هر  $x \in [a, b]$  ،  $f(x) < 0$  انگاه:

$$\int_a^b f(x) dx \leq 0$$

(حل)

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b 0 dx = 0$$

12-2-6 تمرین صفحه 371.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 8 \left( \frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \dots + \frac{n^2}{n^3} \right) \quad \text{حد (1)}$$

را به صورت یک انتگرال معین بنویسید.

(حل)

$$= 8 \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \left( \frac{i}{n} \right)^2 = 8 \int_0^1 x^2 dx$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{n}{i^2} \quad \text{حد (2)}$$

را به صورت انتگرال معین بنویسید.

(حل)

$$\begin{aligned} \lim \sum_{i=1}^n \frac{n}{i^2} &= \lim \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{n^2}{i^2} = \lim \frac{n}{i^2} = \lim \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{\left(\frac{i}{n}\right)} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{x^2} dx \end{aligned}$$

(3) با استفاده از تعریف انتگرال‌های زیر را حساب کنید.

(الف)

$$\int_{-1}^1 |x| dx$$

(حل)

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 |x| dx &= 2 \int_0^1 dx = 2 \lim \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \left( \frac{i}{n} \right) = 2 \lim \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n i \\ &= 2 \lim \frac{n(n+1)}{2n^2} = 1 \end{aligned}$$

(ب)

$$J = \int_3^5 [x] dx$$

$$\int_a^b k dx = k(b-a) \quad \text{(حل می‌دانیم پس)}$$

$$\begin{aligned} J &= \int_3^4 [x] dx + \int_4^5 [x] dx = \int_3^4 3 dx + \int_4^5 4 dx \\ &= 3(4-3) + 4(5-4) = 3 + 4 = 7 \end{aligned}$$

(4) اگر تابع  $f$  روی  $[a, b]$  انتگرال پذیر باشد. ثابت کنید که:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

(حل) چون برای هر  $x \in [a, b]$  داریم:  $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$  طبق قضیه

6-2-6 داریم:

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

پس

(5) فاصله‌هایی را معین کنید که مقدار انتگرال‌های داده شده در آن فاصله قرار گیرد.

(الف)

$$\int_{-2}^1 (x+1)^{\frac{3}{2}} dx$$

(حل) تابع  $f(x) = (x+1)^{\frac{3}{2}}$  روی  $[-1, 1]$  صعودی است پس

$$\max f(x) = f(1) = 2\sqrt{2}$$

$$\max f(x) = f(-1) = 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq \int_{-2}^1 f(x) dx \leq 2\sqrt{2}(2 - (-1))$$

$$\Rightarrow 0 \leq \int_{-2}^1 (x+1)^{\frac{3}{2}} dx \leq 6\sqrt{2}$$

(ب)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{2} \sin^2 x} dx$$

(حل) تابع  $f(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{2} \sin^2 x}$  روی  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  است، چون ترکیب دو تابع صعودی

است پس

حل المسائل ریاضی عمومی (۱)

$$\max f(x) = 1$$

$$\min f(x) = \sqrt{\frac{3}{2}} \Rightarrow \sqrt{\frac{3}{2}} \times \frac{\bar{p}}{2} \leq \int_0^{\bar{p}} f(x) dx \leq \frac{\bar{p}}{2}$$

(ج)

$$\int_1^4 |x-2| dx$$

$$\max |x-2| = |4-2| = 2$$

$$\min |x-2| = |2-2| = 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq \int_1^4 |x-2| dx \leq 6$$

(د)

$$\int_{-5}^2 \frac{x+5}{x-3} dx$$

حل)  $f(x) = \frac{x+5}{x-3}$  نزولی است پس

$$\max f(x) = f(-5) = 0$$

$$\min f(x) = f(2) = -7$$

$$\Rightarrow -49 \leq \int_{-5}^2 f(x) dx \leq 0$$

(6) بدون محاسبه انتگرال نشان دهید  $\int_0^1 x dx \leq \int_1^2 x^2 dx$  و  $\int_0^1 x dx \geq \int_0^1 x^2 dx$

حل) تابع  $f(x) = x - x^2$  را در نظر بگیرید داریم:



$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow f(x) \geq 0 \Rightarrow x \geq x^2 \Rightarrow \int_0^1 x dx \geq \int_0^1 x^2 dx$$

$$0 \geq 1 \Rightarrow f(x) \leq 0 \Rightarrow x \leq x^2 \Rightarrow \int_0^2 x dx \leq \int_0^2 x^2 dx$$

(7) اگر  $f$  روی  $[-1, 2]$  پیوسته باشد نشان دهید:

$$\int_{-1}^2 f(x) dx + \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx + \int_1^{-1} f(x) dx = 0$$

حل) داریم:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 f(x) dx &= \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx \\ \Rightarrow \int_{-1}^2 f(x) dx - \int_0^2 f(x) dx - \int_1^0 f(x) dx - \int_{-1}^1 f(x) dx &= 0 \\ \Rightarrow \int_{-1}^2 f(x) dx + \int_2^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx + \int_1^{-1} f(x) dx &= 0 \end{aligned}$$

(8) اگر  $f$  بر  $[a, b]$  پیوسته و  $\int_a^b f(x) dx = 0$ ، نشان دهید حداقل عددی نظیر

$a$  در فاصله  $[a, b]$  قرار دارد به طوری که  $f(x) = 0$ .

حل) طبق قضیه مقدار میانگین برای انتگرال داریم:

$$\min f(x) \leq \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} \leq \max f(x)$$

$$\min f(x) \leq \bullet \leftarrow \leq \max f(x)$$

پس

حال طبق قضیه مقدار میانی  $a$  وجود دارد که  $f(a) = 0$  باشد.

(9) مثالی از یک تابع چنان ارائه دهید که ناپیوسته و قضیه مقدار میانگین برای انتگرال ما

حل المسائل ریاضی عمومی (۱)

الف) برقرار نباشد. ب) برقرار باشد.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

حل ب) تابع را در نظر بگیرید. داریم:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 0 \Rightarrow \frac{\int_{-1}^1 f(x) dx}{2} = 0 = f(0)$$

(10) اگر  $f$  روی  $[-1, 4]$  انتگرال پذیر باشد و مقدار متوسط تابع  $f$  روی  $[-1, 4]$

برابر 3 باشد، مقدار  $\int_{-1}^4 f(x) dx$  را بدست آورید.

(حل)

$$\frac{\int_{-1}^4 f(x) dx}{5} = 3 \Rightarrow \int_{-1}^4 f(x) dx = 15$$

6-3-13 تمرین صفحه 378

(1) فرض کنید  $f$  بر  $[-a, a]$  پیوسته و فرد باشد و ثابت کنید:  $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$

(حل)

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a f(x) dx &= \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx \\ &= \int_a^0 f(-x) (-dx) + \int_0^a f(x) dx \\ &= \int_0^a f(-x) dx + \int_0^a f(x) dx \\ &= -\int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 0 \end{aligned}$$

(2) در تمرین 1 اگر  $f$  زوج باشد، ثابت کنید که:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx$$

$$= \int_a^0 f(-x) dx + \int_0^a f(x) dx$$

$$= \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

(3) انتگرالهای زیر را حل کنید:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}} dx \quad (\text{الف})$$

اگر قرار دهیم  $u = \frac{p}{2} - x$  پس  $du = -dx$  و داریم

$$I = \int_{\frac{p}{2}}^0 \frac{\sqrt{\sin u}}{\sqrt{\sin u} + \sqrt{\cos u}} (-du) = \int_0^{\frac{p}{2}} \frac{\sqrt{\sin u}}{\sqrt{\cos u} + \sqrt{\sin u}} du$$

$$I + I = 2I = \int_0^{\frac{p}{2}} \frac{\sqrt{\cos u}}{\sqrt{\cos u} + \sqrt{\sin u}} du + \int_0^{\frac{p}{2}} \frac{\sqrt{\sin u}}{\sqrt{\cos u} + \sqrt{\sin u}} du$$

$$= \int_0^{\frac{p}{2}} du = \frac{p}{2} \quad \Rightarrow \quad I = \frac{p}{2}$$

$$I = \int_0^{\frac{p}{2}} \frac{\sin^m x}{\sin^m x + \cos^m x} dx \quad (\text{ب})$$

حل) اگر قرار دهیم  $u = \frac{p}{2} - x$  پس  $du = -dx$  و داریم:

$$I = -\int_{\frac{p}{2}}^0 \frac{\cos^m u}{\cos^m u + \sin^m u} dx = \int_0^{\frac{p}{2}} \frac{\cos^m u}{\cos^m u + \sin^m u} du$$

$$I + I = 2I = \int_0^{\frac{p}{2}} \frac{\sin^m u}{\sin^m u + \cos^m u} du + \int_0^{\frac{p}{2}} \frac{\cos^m u}{\cos^m u + \sin^m u} du = \int_0^{\frac{p}{2}} du = \frac{p}{2}$$

$$\Rightarrow I = \frac{p}{4}$$

(4) مشتق توابع زیر را محاسبه کنید.

$$F(t) = \int_{-2}^{\sqrt{t}} \frac{\sin x}{1 + \sqrt{1+x^2}} dx$$

$$F'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} \cdot \frac{\sin \sqrt{t}}{1 + \sqrt{1+t}}$$

(الف)

$$F(t) = \int_a^g f(x) dx$$

$$F'(t) = g'(t) f(g(t))$$

(ب)

$$F(t) = \int_{-x}^x |t| dt$$

$$F(x) = 2 \int_0^x t dt \Rightarrow F'(x) = 2x$$

(ج)

$$F(x) = \int_{-x}^x \frac{dt}{3+t^4}$$

$$F(x) = 2 \int_0^x \frac{dt}{3+t^4} \Rightarrow F'(x) = \frac{2}{3+t^4} \text{ د)}$$

(5) حد زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \sin \sqrt{t} dt}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin x}{3x^2} = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{2}{3}$$

(6) در توابع ضمنی زیر  $\frac{dy}{dx}$  را حساب کنید.

$$\int_0^y \cos^2 t dt + \int_0^x \sin^2 t dt = 0 \quad (\text{الف})$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \sin^2 t dt}{\frac{d}{dx} \int_0^y \cos^2 t dt} = -\frac{2x \sin^2 x^2}{\cos^2 y} \quad (\text{حل})$$

$$\int_{\frac{p}{2}}^x \sqrt{3-2\sin^2 z} dz + \int_0^y \cos t dt = 0 \quad (\text{ب})$$

(حل)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{d}{dx} \int_{\frac{p}{2}}^x \sqrt{3-2\sin^2 z} dz}{\frac{d}{dy} \int_0^y \cos t dt} = -\frac{\sqrt{3-2\sin^2 x}}{\cos y}$$

(7) انتگرال زیر را محاسبه کنید:

$$I = \int_0^p \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$$

(حل) قرار می‌دهیم:  $u = x - \frac{p}{2}$  پس  $du = dx$  و

$$I = \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} \frac{\left(u + \frac{p}{2}\right) \cos u}{1 + \sin^2 u} du$$

$$= \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} \frac{u \cos u}{1 + \sin^2 u} du + \frac{p}{2} \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} \frac{\cos u}{1 + \sin^2 u} du$$

حل المسائل رياضى عمومى (١)

٥٤

$$\begin{aligned} &= p \int_0^{\frac{p}{2}} \frac{\cos u}{1 + \sin^2 u} du = p \operatorname{Arc} \tan(\sin u) \Big|_0^{\frac{p}{2}} \\ &= \frac{p^2}{4} \end{aligned}$$

$$I = \int_0^p \frac{\sin 2kx}{\sin x} dx = 0 \quad (8) \text{ فرض کنید } K \text{ عددی صحیح باشد ثابت کنید:}$$

حل) قرار می دهیم  $u = x - \frac{p}{2}$  پس  $du = dx$  و

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} \frac{\sin 2k(u + \frac{p}{2})}{\sin(u + \frac{p}{2})} du = \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} \frac{\sin(2ku + p)}{\cos u} du \\ &= -\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} \frac{\sin 2ku}{\cos} du = 0 \end{aligned}$$

چون تابع زیر انتگرال فرد است.

(9) اگر در انتگرال  $I = \int_0^{2p} \frac{dx}{5 - 2\cos}$  تغییر متغیر  $x=2t$  را به کار ببریم داریم

$$I = \int_0^{2p} \frac{dx}{5 - 2\cos} = \int_0^0 \frac{2dt}{(1+t^2)(5 - \frac{1+t^2}{1-t^2})} = 0$$

واضح است که نتیجه درست نیست زیرا  $\frac{1}{5 - 2\cos} > 0$ ، مورد اشتباه را بیابید.

حل) با تغییر  $x=2t$  بازه  $[0, 2p]$  به  $[\frac{0}{2}, \frac{p}{2}]$  برده می شود که در حل مورد استفاده قرار نگرفته است.

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)] dx \quad (10) \text{ فرض کنید } f(x) \text{ دلخواه باشد، ثابت کنید:}$$

$$f(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \quad \text{حل) تابع } f(x) \text{ را می توان به صورت}$$

نوشت که  $\frac{f(x)+f(-x)}{2}$  زوج و  $\frac{f(x)-f(-x)}{2}$  فرد است. پس

$$\begin{aligned}\int_{-a}^a f(x) dx &= \int_{-a}^a \frac{f(x)+f(-x)}{2} dx + \int_{-a}^a \frac{f(x)-f(-x)}{2} dx \\ &= 2 \int_0^a \frac{f(x)+f(-x)}{2} dx + 0 = \int_0^a (f(x)+f(-x)) dx\end{aligned}$$

(11) انتگرال  $I = \int_0^{2p} f(x) \cos x dx$  را با تغییر متغیر  $t = \sin x$  تغییر دهید.

$$t = \sin x \Rightarrow x = \text{Arc sin } t \Rightarrow dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\cos x = \sqrt{1-t^2}$$

$$I = \int_0^1 f(\text{Arc sin } t) dt + \int_1^0 f(\text{Arc sin } t) dt + \int_0^{-1} f(\text{Arc sin } t) dt + \int_{-1}^0 f(\text{Arc sin } t) dt$$

(12) درستی اتحادهای زیر را ثابت کنید.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx \quad (\text{الف})$$

حل) اگر قرار دهیم  $u = a+b-x$  آنگاه  $du = -dx$  و  $u(a) = b$  ,  $u(b) = a$  است، پس داریم:

$$\int_a^b f(a+b-x) dx = - \int_b^a f(u) du = \int_a^b f(u) du = \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_0^t f(x) g(t-x) dx = \int_0^t g(x) f(t-x) dx \quad (\text{ب})$$

حل) قرار دهید  $u = t-x$  پس  $du = -dx$  و  $u(0) = t$  ,  $u(t) = 0$  پس داریم:

$$\begin{aligned}\int_0^t f(x) g(t-x) dx &= - \int_t^0 f(t-u) g(u) du \\ &= \int_0^t g(u) f(t-u) du = \int_0^t g(x) f(t-x) dx\end{aligned}$$



$$\int_0^{\frac{p}{2}} \sin^m x dx = \int_0^{\frac{p}{2}} \cos^m x dx \quad (\text{ج})$$

حل) اگر قرار دهیم  $u = \frac{p}{2} - x$  پس  $u(\frac{p}{2}) = 0$  ,  $u(0) = \frac{p}{2}$  ,  $du = -dx$  لذا داریم:

$$\int_0^{\frac{p}{2}} \sin^m x dx = - \int_{\frac{p}{2}}^0 \sin^m (\frac{p}{2} - u) du = \int_0^{\frac{p}{2}} \cos^m u du = \int_0^{\frac{p}{2}} \cos^m x dx$$

(13) با توجه به مسأله 12 (ج) انتگرال های  $\int_0^{\frac{p}{2}} \sin^2 x dx$  و  $\int_0^{\frac{p}{2}} \cos^2 x dx$  را محاسبه کنید.

حل) طبق مسأله قبل داریم:

$$\int_0^{\frac{p}{2}} \sin^2 x dx + \int_0^{\frac{p}{2}} \cos^2 x dx = \int_0^{\frac{p}{2}} (\sin^2 + \cos^2 x) dx = \int_0^{\frac{p}{2}} dx = 2 \int_0^{\frac{p}{2}} \sin^2 x dx = 2 \int_0^{\frac{p}{2}} \cos^2 x dx$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{p}{2}} \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{p}{2}} \cos^2 x dx = \frac{p}{2}$$

(14) درستی های زیر را ثابت کنید.

$$\int_0^p f(\sin x) dx = 2 \int_0^{\frac{p}{2}} f(\sin x) dx \quad (\text{الف})$$

حل)

اگر قرار دهیم  $u = \frac{p}{2} - x$  آنگاه  $u(p) = -\frac{p}{2}$  ,  $u(0) = \frac{p}{2}$  ,  $du = -dx$  پس

$$\int_0^p f(\sin x) dx = - \int_{\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} f(\cos u) du = \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} f(\cos u) du = 2 \int_0^{\frac{p}{2}} f(\cos x) dx$$

علت آخری این است که  $f(\cos u)$  تابعی زوج است.

$$\int_0^p xf(\sin x)dx = \frac{p}{2} \int_0^p f(\sin x)dx \quad (\text{ب})$$

(حل)

اگر قرار دهیم  $u = \frac{p}{2} - x$  داریم  $du = -dx$  ،  $u(0) = \frac{p}{2}$  ،  $u(p) = -\frac{p}{2}$  ، لذا داریم:

$$\begin{aligned} \int_0^p xf(\sin x)dx &= -\int_{\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} \left(\frac{p}{2} - u\right) f\left(\sin\left(\frac{p}{2} - u\right)\right) du = \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} \frac{p}{2} f(\cos u) du \\ &= \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} uf(\cos u) du = p \int_0^{\frac{p}{2}} f(\cos x) dx \end{aligned}$$

چون تابع  $f(\cos a)$  فرد و تابع  $f(\cos u)$  زوج است.

(15) انتگرال زیر را محاسبه کنید:

$$I = \int_0^p \sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}} dx$$

(حل)

$$\begin{aligned} I &= \int_0^p \sqrt{\sin^2 x} dx = \int_0^p \sin x dx \\ &= -\cos x \Big|_0^p = 2 \end{aligned}$$

(16) هر یک از انتگرال های زیر را حساب کنید.

$$\int_{-L}^L \cos \frac{mp}{L} x dx = 2 \int_0^L \cos \frac{mp}{L} x dx = \frac{2L}{mp} \sin \frac{mp}{L} x \Big|_0^L = 0$$

(الف)

$$\text{ب) } \int_{-L}^L \sin \frac{mp}{L} x dx = 0 \quad \text{تابع فرد است}$$

$$\text{ج) } \int_{-L}^L \cos \frac{mp}{L} x = \sin \frac{mp}{L} x dx = 0 \quad \text{چون تابع فرد است.}$$

$$F(x) - G(x) = \frac{1}{2} \quad \text{ثابت کنید} \quad G(x) = \int_1^x t dt, \quad F(x) = \int_0^x u du \quad (17) \text{ اگر}$$

(حل)

$$F(x) = \int_0^x u du$$

$$\Rightarrow F(x) - G(x) = \int_0^1 u du = \frac{u^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$G(x) = \int_1^x u du$$

(18) درستی های زیر را ثابت کنید.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right) = \frac{1}{2} \quad \text{الف)}$$

(حل)

$$\text{حد} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left( \frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \dots + \frac{n-1}{n} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \left( \frac{i}{n} \right) = \int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2} \right) \quad \text{ب)}$$

(حل)

حل المسائل ریاضی عمومی (۱)

۶۰

$$\text{حد} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} + \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{n}\right)^2} + \dots + \frac{1}{1 + \left(\frac{n}{n}\right)^2} \right)$$

$$= \lim \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \frac{1}{1 + \left(\frac{i}{n}\right)^2} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{p}{4}$$

$$\frac{2}{p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( \sin \frac{p}{n} + \sin \frac{2p}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)p}{n} \right)$$

(ج)

(حل)

$$\text{حد} = \frac{1}{p} \lim \sum_{i=1}^n \frac{p}{n} \sin p \left(\frac{i}{n}\right) = \frac{1}{p} \int_0^p \sin x dx = -\frac{1}{p} \cos x \Big|_0^p = \frac{2}{p}$$

(19) فرض کنید  $B(m, n) = \int_0^1 x^m (1-x)^n dx$  . اولاً تساوی  $B(m, n) = B(n, m)$  را ثابت

کنید، ثانیاً ثابت کنید که

$$B(m, n) = 2 \int_0^{\frac{p}{2}} \sin^{2m+1} x \cdot \cos^{2n+1} x dx$$

(حل) اولاً اگر قرار دهیم  $u=1-x$  پس  $du = -dx$  ,  $u(0) = 1$  ,  $u(1) = 0$  پس داریم:

$$B(m, n) = - \int_0^1 (1-u)^m u^n du = \int_0^1 x^n (1-x)^m dx = B(n, m)$$

ثانیاً: اگر قرار دهیم  $x = \sin^2 t$  آنگاه  $(1-x) = \cos^2 t$  ,  $dx = 2 \sin t \cos t dt$  و کرانها به

تبدیل می شود. پس داریم:  $\left[ 0, \frac{p}{2} \right]$

$$B(m, n) = \int_0^1 x^m (1-x)^n dx = \int_0^{\frac{p}{2}} \sin^{2m} t \cdot \cos^{2n} t \cdot 2 \sin t \cos t dt = 2 \int_0^{\frac{p}{2}} \sin^{2m+1} t \cdot \cos^{2n+1} t dt$$

$$I = \int_3^6 xy \, dx \quad (20) \text{ با فرض } y = 2 \sin q, x = 6 \cos q, \text{ مطلوب است، محاسبه}$$

$$\text{حل) } q = \frac{p}{6} \text{ آنگاه } x = 3 \text{ اگر } dx = -6 \sin q \, dq$$

$$\text{اگر } x = 6 \text{ آنگاه } q = 0$$

$$\Rightarrow I = \int 6 \cos q \cdot 2 \sin q \cdot (-6 \sin q) \, dq = 72 \int \sin^2 q \cdot \cos q \, dq = \frac{72}{3} \sin^3 q \Big|_0^{\frac{p}{6}} = 24 \left( \sin^3 \frac{p}{6} - 0 \right) = \frac{24}{8} = 3$$

## فصل هفتم

توابع غیر  
جبری

## 27\_7 تمرین صفحه 387

مشابه آنچه در تعریف  $\sin^{-1}$  بیان شد، تابع  $\cos^{-1}$  را تعریف و سپس ثابت کنید

$$\frac{d}{dx} \cos^{-1} x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(حل) تابع  $y = \cos x$  روی  $[0, p]$  نزولی است پس وارونه پذیر است

$$\cos x: [0, p] \rightarrow [-1, 1]$$

$$\cos^{-1} x: [-1, 1] \rightarrow [0, p]$$

برای محاسبه مشتق داریم:  $y = \cos^{-1} x \Leftrightarrow x = \cos y$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \cos^{-1} x = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

## 27\_25. تمرین صفحه 394.

1- ثابت کنید هرگاه  $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{p}{2}$  ,  $0 \leq x \leq 1$  در مورد  $0 \leq x \leq 1$

تساوی بالا چگونه بیان می شود؟

(حل)

$$y = \sin^{-1} x \Rightarrow x = \sin y = \cos\left(\frac{p}{2} - y\right) \Rightarrow \cos^{-1} x = \frac{p}{2} - y$$

$$\Rightarrow y + \cos^{-1} x = \frac{p}{2} \Rightarrow \sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{p}{2}$$

این تساوی برای هر  $-1 \leq x \leq 1$  برقرار است.

2\_  $y = \sin^{-1} \frac{1}{2}$  مفروض است، مطلوب است:

$\cos y$  ,  $\tan y$  ,  $\cot y$  ,  $\sec y$  ,  $\csc y$

$$y = \frac{p}{6} \quad \text{حل) توجه کنید}$$

$$\cos y = \cos \frac{p}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \tan y = \tan \frac{p}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot y = \cot \frac{p}{6} = \sqrt{3}, \quad \sec y = \frac{1}{\cos y} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\csc y = \frac{1}{\sin y} = 2$$

(3) در تمرین های زیر مقدار دقیق کمیت داده شده را پیدا کنید.

الف)

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\sec^{-1}(\frac{5}{3}) + \csc^{-1}(-\frac{13}{12})) &= \operatorname{tg}(\cos^{-1}(\frac{3}{5}) - \sin^{-1}(-\frac{12}{13})) = \frac{\sin(\cos^{-1}(\frac{3}{5}) - \sin^{-1}(-\frac{12}{13}))}{\cos(\cos^{-1}(\frac{3}{5}) - \sin^{-1}(-\frac{12}{13}))} \\ &= \frac{\sin(\cos^{-1}(\frac{3}{5})\cos(\cos^{-1}(\frac{3}{5})) - \cos(\sin^{-1}(\frac{12}{13}))\sin(\sin^{-1}(-\frac{12}{13}))}{\cos(\cos^{-1}(\frac{3}{5})) - \cos(\sin^{-1}(\frac{12}{13})) + \sin(\cos^{-1}(\frac{3}{5}))\sin(\sin^{-1}(-\frac{12}{13}))} \\ &= \frac{\frac{4}{5} \times \frac{3}{5} - \frac{5}{13} \times \frac{12}{13}}{\frac{4}{5} - \frac{5}{13} + \frac{3}{5} \times \frac{12}{13}} = \frac{\frac{12}{25} - \frac{60}{169}}{\frac{15}{65} - \frac{169}{48}} \end{aligned}$$

ب)

$$\begin{aligned} \sin(\cos^{-1}(-\frac{2}{3}) + 2\sin^{-1}(-\frac{1}{3})) &= \sin(p - \cos^{-1}(\frac{2}{3}) - 2\sin^{-1}(\frac{1}{3})) = \sin(\cos^{-1}(\frac{2}{3}) + 2\sin^{-1}(\frac{1}{3})) \\ &= \sin(\cos^{-1}(\frac{2}{3}))\cos(2\sin^{-1}(\frac{1}{3})) + \cos(\cos^{-1}(\frac{2}{3}))\sin(2\sin^{-1}(\frac{1}{3})) \\ &= \sqrt{1 - \frac{4}{9}} \times (2(\sqrt{1 - \frac{1}{9}})^2 + 1) + \frac{2}{3} \times 2 \times \frac{1}{3} \times \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3} \times (\frac{16}{9} + 1) + \frac{4}{9} \times \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$



ج)

$$\begin{aligned} \cos(\sin^{-1}(-\frac{1}{2}) + \sin^{-1}(\frac{-1}{4})) &= \cos(-\frac{\pi}{6} - \sin^{-1}(\frac{1}{4})) = \cos\frac{\pi}{6} \cos(\sin^{-1}(\frac{1}{4})) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{1 - \frac{1}{16}} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{15}}{4} - \frac{1}{8} = \frac{3\sqrt{5} - 1}{8} \end{aligned}$$

(4) مشتق توابع زیر را محاسبه کنید.

الف)

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \sin^{-1}(x^2) \\ f'(x) &= 2x \sin^{-1}(x^2) + \frac{2x^2}{\sqrt{1-x^4}} \end{aligned}$$

ب)

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin^{-1}(\cos x) \\ f'(x) &= \frac{-\sin x}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = -1 \end{aligned}$$

د)

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x} \cos^{-1} x^2 + \sin^{-1} \sqrt{x} \\ f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos^{-1} x^2 + \frac{-2x\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

ج)

$$f(x) = 3 \sec^{-1} \frac{2}{x} + \csc^{-1} 2x$$

$$f(x) = 3 \cos^{-1} \frac{x}{2} + \sin^{-1} \frac{1}{2x}$$

$$f'(x) = \frac{3}{2} \cdot \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - 4x^2}}$$

هـ)

$$f(x) = x(\sec^{-1} 2x)^2 \Rightarrow f(x) = x(\cos^{-1} \frac{1}{2x})^2$$

$$f'(x) = (\cos^{-1}(\frac{1}{2x}))^2 - 2x(\frac{-1}{2x^2}) \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4x^2}}} = (\cos^{-1}(\frac{1}{2x}))^2 + \frac{2}{\sqrt{4x^2 - 1}}$$

و)

$$f(x) = \csc^{-1} \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow f(x) = \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{-x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2 + 1}}} = -\frac{1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$$

(5) تساوی های زیر را تحقیق کنید.

$$A = \sin^{-1} x + \sin^{-1} y = \sin^{-1}(x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2})$$

$$|\sin^{-1} x + \sin^{-1} y| \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{که در آن}$$

(حل)

$$\begin{aligned}\sin A &= \sin(\sin^{-1} y) = \sin(\sin^{-1} x) \cos(\sin^{-1} y) + \sin(\sin^{-1} y) \cos(\sin^{-1} x) \\ &= x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \Rightarrow A = \sin^{-1}(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})\end{aligned}$$

$$tg^{-1}x + tg^{-1}y = tg^{-1} \frac{x+y}{1-xy} \quad (\text{ب})$$

(حل)

$$tg(tg^{-1}x + tg^{-1}y) = \frac{tg(tg^{-1}x) + tg(tg^{-1}y)}{1 - tg(tg^{-1}x) \cdot tg(tg^{-1}y)} = \frac{x+y}{1-xy} \Rightarrow tg^{-1}x = tg^{-1}y + tg^{-1} \frac{x+y}{1-xy}.$$

(6) مقادیر زیر را با توجه به تمرین 5 تعیین کنید.

$$\sin^{-1} \frac{4}{5} - \sin^{-1} \frac{3}{5} \quad \text{الف}$$

(حل)

$$\sin^{-1} \frac{4}{5} + \sin^{-1} \left(-\frac{3}{5}\right) = \sin^{-1} \left(\frac{4}{5} \sqrt{1-\frac{9}{25}} - \frac{3}{5} \sqrt{1-\frac{16}{25}}\right) = \sin^{-1} \left(\frac{16}{25} - \frac{9}{25}\right) = \sin^{-1} \left(\frac{7}{25}\right)$$

$$A = tg^{-1} \frac{1}{3} + tg^{-1} \frac{1}{4} + tg^{-1} \frac{2}{9} \quad (\text{ب})$$

(حل)

$$A = tg^{-1} \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{12}} + tg^{-1} \frac{2}{9} = tg^{-1} \frac{7}{11} + tg^{-1} \frac{2}{9} = tg^{-1} \frac{\frac{7}{11} + \frac{2}{9}}{1 - \frac{14}{99}} = tg^{-1} \frac{85}{85} = \frac{\pi}{4}$$

(7) نشان دهید:

$$tg^{-1}x + tg^{-1}\frac{1-x}{x} = \begin{cases} \frac{p}{4} & x > -1 \\ -\frac{3p}{4} & x < -1 \end{cases}$$

(حل) طبق؟؟؟

$$A = \cot^{-1}\left(\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}\right)$$

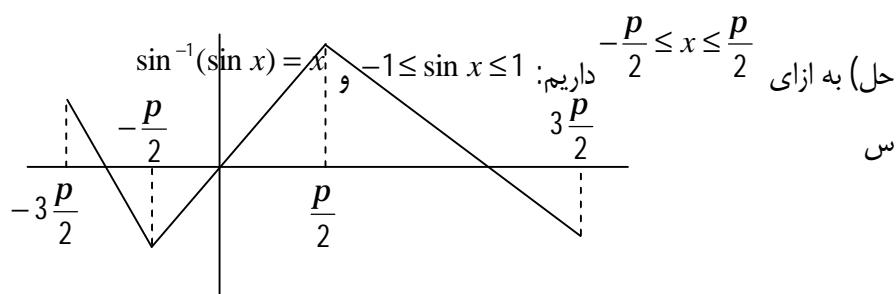
(8) عبارت را ساده کنید.

(حل)

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{p}{4}\right)$$

$$\sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{p}{4}\right) \Rightarrow A = \cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{p}{4}\right)}{\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{p}{4}\right)}\right) = \cot^{-1}\left(\cot\left(x - \frac{p}{4}\right)\right) = x - \frac{p}{4}$$

(9) تابع  $f(x) = \sin^{-1}(\sin x)$  را رسم و نشان دهید دوره تناوب آن  $2p$  است.



طبق شکل دو فاصله های به طول  $2p$  منحنی تکرار می شود.

(10) انتگرال های زیر را حل کنید.

$$1) \int_{-\frac{3}{7}}^0 \frac{dx}{\sqrt{36-49x^2}} = \frac{1}{7} \sin^{-1}\left(\frac{7x}{6}\right) \Big|_{-\frac{3}{7}}^0 = -\frac{1}{7} \sin^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{1}{7} \times \frac{p}{6}$$

$$2) \int_{\frac{5\sqrt{2}}{3}}^{\frac{10}{3}} \frac{dx}{x\sqrt{9x^2-25}} = \frac{1}{3} \sec^{-1}\left(\frac{3x}{5}\right) \Big|_{\frac{5\sqrt{2}}{3}}^{\frac{10}{3}}$$

$$= \frac{1}{3} \sec^{-1}(2) - \frac{1}{3} \sec^{-1}(\sqrt{2}) = \frac{1}{3} \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3} \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{p}{9} - \frac{p}{12} = \frac{p}{36}$$

$$3) \int \frac{3dx}{(x+2)\sqrt{x^2+4x+3}} = \int \frac{3dx}{(x+2)\sqrt{(x+2)^2-1}}$$

$$= 3 \sec^{-1}(x+2) + c \quad \text{س}$$

$$4) \int \frac{\sec^2 dx}{9+tg^2 x} = \frac{1}{3} tg^{-1}\left(\frac{tgx}{3}\right) + c$$

$$5) \int_{\frac{2}{\sqrt{2}}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \sec^{-1}(x) \Big|_{\frac{2}{\sqrt{2}}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}} = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= \frac{p}{6} - \frac{p}{4}$$

(11) فرض کنید  $x > -1$  ثابت کنید:

$$tg^{-1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = tg^{-1}x - \frac{p}{4}$$

حل) طبق فرمول تمرین 6 داریم:

$$\begin{aligned} & \operatorname{tg}^{-1} x - \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{x-1}{x+1} \right) \\ &= \operatorname{tg}^{-1} \frac{x + \frac{1-x}{1+x}}{1-x \frac{1-x}{1+x}} = \operatorname{tg}^{-1} \frac{1+x^2}{1+x^2} = \operatorname{tg}^{-1} 1 = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

(12) نشان دهید که هر گاه  $|x| < 1$  آنگاه:

$$\sin^{-1} x = \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right)$$

$$\operatorname{tg}(\sin^{-1} x) = \frac{\sin(\sin^{-1} x)}{\cos(\sin^{-1} x)} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Rightarrow \sin^{-1} x = \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right)$$

(حل)

$$\operatorname{tg}^{-1} x = \sin^{-1} \left( \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right)$$

(13) نشان دهید که

$$\operatorname{tg} \left( \sin^{-1} \left( \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) \right) = \frac{\sin \left( \sin^{-1} \left( \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) \right)}{\cos \left( \sin^{-1} \left( \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) \right)}$$

$$= \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{1+x^2}}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}} = x$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}^{-1} x = \sin^{-1} \left( \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right)$$

تمرین صفحه 404

1- انتگرال زیر را محاسبه کنید:

$$\int_{-2}^2 \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx = 0$$

چون تابع زیر انتگرال فرد است:

$$f(-x) \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1}) = \ln \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = -\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = -f(x)$$

2. مشتق چهارم  $f(x) = x^2 \ln x$  را محاسبه کنید.

$$f'(x) = 2x \ln x + x$$

$$f''(x) = 2 \ln x + 3$$

$$f'''(x) = \frac{2}{x}, \quad f^{(4)}(x) = -\frac{2}{x^2}$$

3. مشتق پنجم  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$  را محاسبه کنید.

$$f'(x) = \frac{1 - x \ln x}{x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x}$$

$$f''(x) = -\frac{2}{x^3} - \left( \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x} \right)$$

$$f'''(x) = \frac{6}{x^4} + \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x}$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{-24}{x^5} - \frac{6}{x^4} - \frac{2}{x^3} - \left( \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x} \right)$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{120}{x^6} + \frac{24}{x^5} + \frac{6}{x^4} + \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x}$$

(حل)

4. با به کار گیری قضیه مقدار میانگین در مشتق نشان دهید که اگر  $0 < a < b$  آنگاه

$$\frac{b-a}{b} < \ln \frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}$$

(حل) تابع  $f(x) = \ln x$  روی بازه  $[a, b]$  شرایط قضیه مقدار میانگین را داراست. پس داریم:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \Rightarrow \frac{\ln b - \ln a}{b-a} = \frac{1}{c}, \quad a < c < b$$

چون  $a < c < b$  پس  $\frac{1}{b} < \frac{1}{c} < \frac{1}{a}$  در نتیجه:

$$\frac{1}{b} < \frac{\ln \frac{b}{a}}{b-a} < \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{b-a}{b} < \ln \frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}$$

5. نشان دهید به ازای هر  $x > 0$  نامساوی زیر برقرار است:

$$x - \frac{1}{2}x^2 < \ln(1+x) < x$$

حل) تابع  $f(t) = \ln(1+t) - t$  روی فاصله  $[0, x]$  شرایط قضیه مقدار میانگین را داراست پس:

$$\begin{aligned} 0 < c < x, \quad f'(c) &= \frac{f(x) - f(0)}{x} \\ \Rightarrow \frac{\ln(1+x) - x}{x} &= \frac{1}{1+c} - 1 = \frac{-c}{1+c} \end{aligned}$$

$$-\frac{x}{1+x} < \frac{-c}{1+c} < 0 \quad \text{چون } 0 < c < x \text{ پس}$$

$$-\frac{1}{2}x < \frac{-x}{1+x} \quad \text{اگر } x < 1 \text{ آنگاه}$$

$$-\frac{1}{2}x < \frac{-x}{1+x} \quad \text{اگر } x > 1 \text{ آنگاه}$$

$$-\frac{1}{2}x < \frac{\ln(1+x) - x}{x} < 0 \quad \text{پس}$$

$$x - \frac{1}{2}x^2 < \ln(1+x) < x \quad \text{لذا:}$$



6. انتگرال های معین زیر را محاسبه کنید.

$$1) I = \int_{e^2}^{e^4} \frac{dx}{x \ln x (\ln(\ln x))}$$

$$u = \ln(\ln x) \Rightarrow du = \frac{dx}{x \ln x}$$

$$\Rightarrow I = \int_{\ln 2}^{\ln 4} \frac{du}{u} = \ln u \Big|_{\ln 2}^{\ln 4} = \ln(\ln(\ln 4)) - \ln(\ln 2)$$

$$2) \int_0^p \frac{\cos x}{2 + \sin x} dx = \ln(2 + \sin x) \Big|_0^p + \ln(2 + \sin x) \Big|_0^p$$

$$= \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{2}{3} = 0$$

$$3) \int_4^9 \frac{dx}{(1 + \sqrt{x})\sqrt{x}} \quad u = 1 + \sqrt{x} \Rightarrow 2du = \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$= 2 \int_3^5 \frac{du}{u} = 2 \ln u \Big|_3^5 = 2 \ln \frac{5}{3}$$

$$4) \int_{-3}^0 \frac{dy}{y^2 + 3y - 4} = \int_{-3}^0 \frac{dy}{(y+4)(y-1)} = \frac{1}{5} \int_{-3}^0 \left( \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+4} \right) dy$$

$$= \frac{1}{5} \ln \left| \frac{y-1}{y+4} \right| \Big|_{-3}^0 = \frac{1}{5} (\ln \frac{1}{4} - \ln 4)$$

$$= \frac{1}{5} \ln \frac{1}{16}$$

$$5) \int_0^1 \frac{dx}{x^2 - 5x + 6} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-2)(x-3)} = \int_0^1 \left( \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2} \right) dx$$

$$= \ln \left| \frac{x-3}{x-2} \right| \Big|_0^1 = \ln 2 - \ln \frac{3}{2} = \ln \frac{4}{3}$$

7. انتگرال های نامعین داده شده را محاسبه کنید.

$$1) \int \frac{1 + \ln x}{5 + x \ln x} dx \quad u = 5 + x \ln x \Rightarrow du = (1 + \ln x) dx$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{du}{u} = \ln(5 + x \ln x) + c$$

$$2) J = \int \frac{4 \ln^3 x + 3}{x(\ln^4 x + 3 \ln x)} dx$$

$$u = \ln^4 x + 3 \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}(4 \ln^3 x + 3) dx$$

$$\Rightarrow J = \int \frac{du}{u} = \ln(\ln^4 x + 3 \ln x) + c$$

$$3) \int \frac{2x^3}{x^2 - 4} dx$$

$$u = x^2 - 4 \Rightarrow du = 2x dx, \quad x^2 = u + 4$$

$$I = \int \frac{(u+4)}{u} du = \int \left(1 + \frac{4}{u}\right) du = u + 4 \ln u + c$$

$$(x^2 - 4) + 4 \ln(x^2 - 4) + c$$

8. ثابت کنید به ازای هر  $x > 0$ ,  $x \neq 1$  داریم:

$$x - 1 - \ln x > 0, \quad 1 - \ln x - \frac{1}{x} < 0$$

حل) اگر قرار دهیم  $f(x) = \ln x$ ,  $g(x) = x - 1$  آنگاه:

$$x > 1 \quad \left. \begin{array}{l} g(1) = f(1) = 0 \\ g'(x) = 1 > \frac{1}{x} = f'(x) \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) < g(x)$$

$$x < 1 \quad g'(x) = 1 < \frac{1}{x} = f'(x) \Rightarrow f(x) < g(x)$$

در نتیجه  $\ln x < x - 1$

حال اگر به جای  $\frac{1}{x}$ ،  $x$  قرار دهیم، داریم:

$$\ln \frac{1}{x} < \frac{1}{x} - 1 \Rightarrow -\ln x < \frac{1}{x} - 1$$

$$\Rightarrow 1 - \ln x - \frac{1}{x} < 0$$

و از آنجا نتیجه بگیرید: که

$$1 - \frac{1}{x} < \ln x < x - 1$$

نامساوی اول داریم  $\ln x < x - 1$  و از نامساوی دوم داریم:  $1 - \frac{1}{x} < \ln x$

$$1 - \frac{1}{x} < \ln x < x - 1$$

پس:

9. ثابت کنید  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$  (بدون استفاده از قاعده هوییتال)

حل) طبق مسأله قبل اگر به جای  $x$ ، قرار دهیم  $x+1$ ، داریم:

$$\frac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x$$

$$\frac{1}{x+1} < \frac{\ln(1+x)}{x} < 1$$

پس

چون داریم:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$ ، طبق قضیه فشردگی،

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

10. ثابت کنید  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$  (بدون استفاده از هوییتال)

$$\frac{x-1}{x} < \ln x < x-1 \quad \text{حل) طبق تمرین 8 داریم:}$$

دو طرف را بر  $x$  تقسیم می کنیم.  $\frac{x-1}{x^2} < \frac{\ln x}{x} < \frac{x-1}{x}$  ، از طرفی داریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x^2} = 0$$

طبق قضیه فشردگی داریم:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$