

فصل سوم

مشتق

17-1-3 تمرین صفحه 192

(1) با استفاده از تعریف مشتق هر یک را حساب کنید.

$$f(x) = 3x + 1 \quad (1)$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x+h)+1-3x-1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{h} = 3$$

$$f(x) = \sqrt{3x+4} \quad (2)$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3(x+h)+4} - \sqrt{3x+4}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x+h)+4 - (3x+4)}{h\sqrt{3(x+h)+4} + \sqrt{3x+4}} = 3$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{h\sqrt{3(x+h)+4} + \sqrt{3x+4}} = \frac{3}{2\sqrt{3x+4}}$$

$$f(x) = \frac{3x}{x^2+1} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{2x}{x^2+1} - \frac{2x_0}{x_0^2+1}}{x-x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x x_0^2 + 2x - 2x_0 x^2 - 2x_0}{(x-x_0)(x^2+1)(x_0^2+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x x_0^2 + 2x - 2x_0 x^2 - 2x_0}{(x-x_0)(x^2+1)(x_0^2+1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2(1-x_0^2)}{(x_0^2+1)^2} = f'(x_0)$$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}} \quad (4)$$

$$\lim \frac{\frac{x}{\sqrt{x+1}} - \frac{x_0}{\sqrt{x_0+1}}}{x-x_0} = \frac{x\sqrt{x_0+1} - x_0\sqrt{x+1}}{(x-x_0)\sqrt{x+1}\sqrt{x_0+1}}$$

$$= \lim \frac{x-x_0}{(x-x_0)\sqrt{x+1}\sqrt{x_0+1}(x\sqrt{x_0+1} + x_0\sqrt{x+1})} = \frac{1}{2(x_0+1)\sqrt{x_0+1}}$$

(2) با استفاده از تعریف مشتق هر یک را در نقطه داده شده حساب کنید.

$$f(x) = 5x^2 + x \quad (1)$$

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 + x - 6}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(5x+6)(x-1)}{x-1} = 11$$

$$x=1, \quad f(x) = \sqrt{x^2+5} \quad (2)$$

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+5} - 3}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{(x-1)(\sqrt{x^2+5}+3)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$x=1, \quad f(x) = \frac{x+2}{2x+1} \quad (3)$$

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{x+2}{2x+1} - 1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1-x}{(x-1)(2x+1)} = -\frac{1}{3}$$

$$x=1, \quad f(x) = \frac{x}{x^2+1} \quad (4)$$

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}}{(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+1)^2}{(x+1)(2x+1)} = 0$$

(3) در توابع زیر اولاً، پیوستگی تابع را در نقطه داده شده بررسی کنید $(x=a)$ ثانیاً $f'(a)$ و $f^-(a)$ را در صورت وجود تعیین کنید.

$$x=a=4 \quad f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq -4 \\ -x-6, & x > -4 \end{cases} \quad (1)$$

$x=a=4$

حل) اولاً تابع در $a=-4$ پیوسته است. ثانیاً $f^+(-4) = -1$ و $f^-(-4) = 1$

$$a=2 \quad , \quad f(x) = \begin{cases} x^2-4, & x < 2 \\ \sqrt{x-2}, & x \geq 2 \end{cases} \quad (2)$$

حل) اولاً تابع در $a=2$ پیوسته است. ثانیاً $f^+(2) = +\infty$ و $f^-(2) = 4$

$$f^-(1) = 6 \quad \text{و} \quad f^+(1) = 1 \quad \text{و} \quad a=2, \quad f(x) = \begin{cases} 3x^2-4, & x < 1 \\ x-2, & x \geq 1 \end{cases} \quad (3)$$

(4) اولاً ثابت کنید $f(x) = |x|$ در $x=0$ پیوسته است ولی مشتق پذیر نیست.

حل) $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$ پس f پیوسته است.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$$

فصل دوم: حد و پیوستگی

پس $f^+'(0) = 1$ و $f^-'(0) = -1$ است. لذا تابع صفر مشتق ندارد

$$f'(x) = \frac{|x|}{x} \text{ : داریم هر } x \neq 0$$

(5) a و b را طوری تعیین کنید که هر یک از توابع زیر در نقطه داده شده مشتق پذیر باشد.

$$x=1 \text{ , } f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & x < 1 \\ ax - b & x \geq 1 \end{cases} \quad (1)$$

حل) باید تابع در $x=1$ پیوسته باشد. بنابراین $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$

$$\Rightarrow a + b = 1$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & x < 1 \\ a & x \geq 1 \end{cases} \text{ : از طرفی داریم}$$

$$\Rightarrow f^-'(1) = 2 = f^+'(1) = a \Rightarrow a = 2 \\ b = -1$$

$$x=3 \text{ در } f(x) = \begin{cases} ax^2 - 3 & x < 3 \\ bx - 6 & x \geq 3 \end{cases} \quad (2)$$

حل) شرط پیوستگی را نداریم: $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = f(3)$

$$\Rightarrow 9a + 3 = 3b + 6$$

حل المسائل ریاضی عمومی (۱)

۶

$$\text{از طرفی داریم: } f(x) = \begin{cases} 2ax & x < 3 \\ b & x \leq 3 \end{cases} \text{ پس داریم}$$

$$\begin{aligned} f^{-'}(3) = 6a & \Rightarrow b = 6a \Rightarrow 9a = 18a + 3 \\ f^{+'}(3) = b & \Rightarrow -9a = 3 \\ & \Rightarrow a = -\frac{1}{3} \\ & b = -2 \end{aligned}$$

(6) پیوستگی و مشتق پذیری تابع f را در $x=2$ تحقیق کنید اگر:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3 & x \leq 2 \\ 8x - 11 & x > 2 \end{cases}$$

(حل)

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (8x - 11) = 5 \Rightarrow f(2) = 8 - 3 = 5 \text{ تابع پیوسته است}$$

$$\text{از طرفی } f^{+'}(2) = f^{-'}(2) = 8 \text{ پس } f'(x) = \begin{cases} 4x & x \leq 2 \\ 8 & x > 2 \end{cases}$$

پس تابع در 2 مشتق پذیر است.

(7) در چه نقطه ای از مخفی $y = x^3 - 3x + 5$ ، خط مماس عمود بر $y = -\frac{x}{9}$ است.

(حل) باید $y'(x) = 9$ باشد پس:

$$3x^2 - 3 = -2 \Rightarrow 3x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

(8) در چه نقطه‌ای از منحنی $y = x^3 - 3x + 5$ ، خط مماس عمود بر $y = -\frac{x}{9}$ است.

(حل) باید $y'(x) = 9$ باشد پس:

$$3x^2 - 3 + 9 \Rightarrow 3x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

(9) معادله خط مماس بر منحنی $y = \sqrt[3]{x-2}$ را در نقطه $A(2, 0)$ بیابید.

$$m = y'(2) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-2)^2}}(2) = +\infty \quad (\text{حل})$$

پس $x = 2$ معادله خط مماس است.

3-1-18 تمرین صفحه 193

(1) مشتق پذیری هر یک از توابع داده شده را بررسی کنید.

$$f(x) = |x^2 - 1| \quad , \quad x_0 = 1 \quad (1)$$

در نتیجه

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & x < 1 \\ x^2 - 1 & x \geq 1 \end{cases} \quad (\text{حل})$$

$$f^+'(1) = 2$$

و $f^{-}'(1) = -2$ پس تابع مشتق پذیر نیست.

$$x_0 = 2 \quad , \quad f(x_0) = 4x + 1 + |x - 2| \quad (2)$$

(حل) مشتق پذیر نیست چون

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 3 & x < 2 \\ 5x - 1 & x \geq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f^+'(2) = 5 \\ f^{-}'(2) = 3 \end{cases}$$

$$x_0 = 0 \quad , \quad f(x) = \sqrt{x^3 + x^2} \quad (3)$$

(حل)

$$f(x) = |x|\sqrt{x+1} = \begin{cases} x\sqrt{x+1} & x \geq 0 \\ x\sqrt{x+1} & x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f^+'(0) &= 1 \\ f^{-}'(0) &= -1 \end{aligned} \Rightarrow \text{تابع مشتق پذیر نیست}$$

$$f(x) = \sqrt{(x-1)^2(x+1)} \quad x_0 = 1 \quad (4)$$

(حل)

$$f(x) = 1x - 11\sqrt{x+2} = \begin{cases} (x-1)\sqrt{x+2} & x \geq 1 \\ (1-x)\sqrt{x+2} & x < 1 \end{cases}$$

تابع مشتق پذیر نیست. $x < 1$

$$\Rightarrow f_+'(1) = 1, f_-'(1) = -1 \Rightarrow$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x < 1 \\ 4x-1 & x \geq 1 \end{cases} \quad x_0 = 1 \quad (5)$$

(حل)

تابع مشتق پذیر نیست چون $f_+'(1) = 4, f_-'(1) = 2$ است.

$$f(x) = \sqrt[3]{x-1} \quad x=1 \quad (6)$$

$$f(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}} \Rightarrow f'(1) = +\infty \Rightarrow \text{تابع مشتق پذیر نیست.}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x} & x > 0 \\ \frac{1+x}{1-x} & x \leq 0 \end{cases} \quad (2) \text{ فرض کنید}$$

تابع مشتق پذیر نیست.

(حل)

$$x > 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} \Rightarrow f'_+(0) = -1$$

تابع مشتق پذیر نیست. \Rightarrow

$$x < 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{-2}{(1-x)^2} \Rightarrow f'_-(0) = -2$$

$$(3) \text{ فرض کنید } f(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 1 \\ x^2 + 1 & x < 1 \end{cases} \text{ ثابت کنید } f \text{ در نقطه}$$

$x=1$ مشتق پذیر است و $f'(1)$ را حساب کنید.

(حل)

$$x > 0 \Rightarrow f'(x) = 2 \quad f'_+(1) = 2$$

پس تابع مشتق پذیر است و $f'(1) = 2$ است.

$$x < 0 \Rightarrow f'(x) = 2x \quad f'_-(1) = 2$$

$$(4) \text{ فرض کنید } x \neq 0, f(x) = (-1)^{[x]} \frac{x-1}{x}, \text{ آیا } f \text{ در نقطه } x=0 \text{ مشتق}$$

پذیر است؟

(حل) زیرا این نقطه در دامنه ی تابع قرار ندارد. تابع پیوسته نیست، پس مشتق پذیر نیست.

$$(5) \text{ درباره ی مشتق پذیری تابع } x \in R \text{ و } f(x) = x[x] \text{ بحث کنید.}$$

(حل) این تابع در اعداد صحیح مشتق پذیر نیست، چون در این نقاط پیوسته نیست.

$$\text{در نقطه ی صفر پیوسته است ولی داریم: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x[x] - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} [x]$$

که حد اخیر وجود ندارد.

در سایر نقاط اگر $x_0 = n + a$ باشد که $0 < a < 1$ است.

در همسایگی x_0 داریم $f(x) = nx$ پس $f'(x) = n$ که مشتق پذیر است.

(6) فرض کنید تابع f در نقطه‌ی a پیوسته باشد و $f(a) \neq 0$. ثابت کنید.

$g(x) = [x-1]f(n)$ در نقطه‌ی a مشتق پذیر نیست.

(حل)

بنابراین $f'(a) = f(a)$ و $f'(a) = -f(a)$ پس تابع مشتق پذیر نیست. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1x - af(x) - 0}{x - a}$

(7) مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که تابع $f(x) = \frac{1x - al}{x - a}$ در هر نقطه مشتق پذیر باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} & |x| \geq 1 \\ ax^2 + b & |x| < 1 \end{cases}$$

(حل) ابتدا شرط پیوستگی را بررسی می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = a + b = f(1) = 1$$

$$f'(1) = -1 = f'(1) = 2a$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \geq 1 \\ -\frac{1}{x} & x \leq -1 \\ ax^2 + b - 1 & -1 < x < 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow b = \frac{3}{2}$$

(8) فرض کنید $f(x) = x + (x-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}$. $f'(1)$ را حساب کنید.

(حل)

$$\begin{aligned}
 f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + (x-1) \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} - 1}{x-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(1 + \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} \right) = 1 + \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} \\
 &= 1 + \frac{p}{4}
 \end{aligned}$$

(9) فرض کنید $f(x) = x(x-1)(x-2)\dots(x-100)$ ، $f'(0)$ را حساب کنید.

حل) چون $f(0) = 0$ داریم.

$$\begin{aligned}
 f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-1)\dots(x-100)}{x} = (-1)(-2)\dots(-100) \\
 &= 100!
 \end{aligned}$$

(10) اگر $f(x) = [x] \sin x$ ، مقدار $f'\left(\frac{p}{2}\right)$ را حساب کنید.

$$\begin{aligned}
 f'\left(\frac{p}{2}\right) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{p}{2} + h\right) - f\left(\frac{p}{2}\right)}{h} = \frac{\left[\frac{p}{2} + h\right] \sin\left(\frac{p}{2} + h\right) - 2}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{p}{2} + h\right) - 1}{h} = (\sin x)' \left(\frac{p}{2}\right) = 0
 \end{aligned}$$

حل) داریم

(11) اگر برای $|x| < 1$ ، $x \leq f(x) \leq x = x^2$ ، مقدار $f'(0)$ را حساب کنید.

حل) واضح است که $0 \leq f(0) \leq 0$ پس $f(0) = 0$ است.

$$\begin{aligned} \Rightarrow 1 &\leq \frac{f(x)}{x} \leq 1+x \\ x > 0 &\Rightarrow f'_+(0) = 1 \\ x < 0 &\Rightarrow 1+x \leq \frac{f(x)}{x} \leq 1 \\ &\Rightarrow f'_-(0) = 1 \end{aligned}$$

پس $f'(0) = 1$ است.

(12) مقدار مشتق تابع $f(x) = x|x|$ را در صفر بدست آورید.

حل) داریم: $f(0) = 0$ و

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(0) = 0$$

3-4-11 تمرین صفحه ی 247

(1) مشتق توابع زیر را حساب کنید.

- 1) $y = \sin^5 x \quad \rightarrow \quad y' = 5 \cos x \sin^4 x$
- 2) $y = (tgx + \cos x)^3 \quad \rightarrow \quad y' = 3(\sec^2 x - \sin x)(tgx + \cos x)$
- 3) $y = tg(\sin x) \quad \rightarrow \quad y' = \cos x \cdot \sec^2(\sin x)$
- 4) $y = \sin(\sin x) \quad \rightarrow \quad y' = \cos x \cdot \cos(\sin x)$
- 5) $y = \cos^2(\sin 3x) \quad \rightarrow \quad y' = -6 \sin 3x \cdot \sin(\sin 2x) \cos(\sin 3x)$
- 6) $y = 5 \sin(\cos 4x) \quad \rightarrow \quad y' = -20 \sin 4x \cos(\cos 4x)$

$$7) \quad y = \frac{2\cos x - 1}{\cos x + 3} \quad \rightarrow y' = \frac{-2\sin x(\cos x + 3) + \sin x(2\cos x - 1)}{(\cos x + 3)^2}$$

$$= \frac{-7\sin x}{(\cos x + 3)^2}$$

$$8) \quad y = \frac{\sin x}{\cos x - \sin x} \Rightarrow y' = \frac{\cos x(\cos x - \sin x) + \sin x(\sin x + \cos x)}{(\cos x - \sin x)^2}$$

$$= \frac{1}{(\cos x - \sin x)^2}$$

$$9) \quad y = \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \Rightarrow y' = \frac{\cos x(1 - \sin x) + \cos x(1 + \sin x)}{(1 - \sin x)^2}$$

$$= \frac{2\cos x}{(1 - \sin x)^2}$$

$$10) \quad y = \frac{\tan x - 1}{\tan x + 1} \rightarrow y' = \frac{\sec^2 x(\tan x + 1) - \sec^2 x(\tan x - 1)}{(\tan x + 1)^2}$$

$$= \frac{2\sec^2 x}{(1 + \tan x)^2}$$

(2) در هر مورد $y' = \frac{dy}{dx}$ را بیابید.

$$1) \quad x \sin y + y \sin x = xy \quad y' = -\frac{\sin y + y \cos x - y}{x \cos y + \sin x - x}$$

$$2) \quad y = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{16} \quad y' = -\frac{\frac{3}{2\sqrt[3]{x}}}{\frac{2\sqrt[3]{y}}{3}} = -3\sqrt{\frac{y}{x}}$$

$$3) \quad y\sqrt{x} - x\sqrt{x} = 5 \quad y' = -\frac{\frac{y}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{2}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{y-3x}{4x}$$

$$4) \quad x^2y + \sin^2 y = y \quad y' = \frac{2xy}{x^2 + \sin 2y - 1}$$

(3) مشتق هر یک از توابع زیر را بیابید.

$$1) \quad y = \cos^{-1}(7x^2) \quad y' = -\frac{14x}{\sqrt{1-49x^4}}$$

$$2) \quad y = \sin^{-1}(\cos 2x) \quad y' = -\frac{3x^2 + 2}{\sqrt{1-(x^2 + 2x)^2}}$$

$$3) \quad y = \sin^{-1}(\cos 2x) \quad y' = \frac{-2\sin 2x}{\sqrt{1-\cos^2 2x}} = -2$$

$$4) \quad y = \tan^{-1}(x^5) \quad y' = \frac{5x^4}{1+x^{10}}$$

$$5) \quad y = \tan^{-1}(\cos x) \quad y' = \frac{-\sin x}{1+\cos^2 x}$$

$$6) \quad y = \cos\left(5\cos^{-1}x\right) \quad y' = \frac{-\frac{5}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-25\left(\cos^{-1}x\right)^2}}$$

$$7) \quad y = \operatorname{tg}^{-1}(\sqrt{x+1}) \quad y' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{1}{1+(\sqrt{x+1})^2} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}(x+2)}$$

$$8) \quad y = \sin^{-1}x + \cos^{-1}x \quad y = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow y' = 0$$

$$9) \quad y = \cos^{-1}(\sin x) \quad y' = \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = 1$$

$$10) \quad y = \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) \quad y' = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = -\frac{1}{x^2+1}$$

$$11) \quad x \sin y + x^2 = \tan^{-1} y \quad y' = -\frac{\sin y + 2x}{x \cos y + \frac{1}{1+y^2}}$$

$$12) \quad y \sin^{-1}(xy) = \cos^{-1}(x+y)$$

$$y' = -\frac{\frac{y^2}{\sqrt{1-x^2y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+(x+y)^2}}}{\frac{xy}{\sqrt{1-x^2y^2}} + \sin^{-1}(xy) + \frac{1}{\sqrt{1+(x+y)^2}}}$$

(4) هرگاه $f(x) = x^3 + x$ ، مطلوب است محاسبه $(f^{-1})'(2)$.

(حل)

$$\begin{aligned}
 y=2 & \Rightarrow x^3+x=2 & \Rightarrow x^3+x-2=0 \\
 & & \Rightarrow (x-1)(x^2+x+2)=0 \\
 & & \Rightarrow x=1 \\
 f'(x)=3x^2+1 & \Rightarrow (f^{-1})'(2)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

(5) اگر f مسافتی باشد که متحرک در زمان t طی می کند، مطلوب است محاسبه شتاب $a = \frac{d^2s}{dt^2}$ ، اگر $s = 50 + 80t + 16t^2$ باشد.

$$a = 32 \quad (\text{حل})$$

(6) اگر $x = t + t^2$ و $y = t + t^3$ ، مقدار $\frac{dy}{dx}$ و $\frac{d^2y}{dx^2}$ را در $b = 1$ محاسبه کنید.

(حل)

$$\begin{aligned}
 x = t + t^2 = f(t) & \quad f'(t) = 1 + 2t & , & \quad f''(t) = 2 \\
 & \Rightarrow \\
 y = t + t^3 = g(t) & \quad g'(t) = 1 + 3t^2 & , & \quad g''(t) = 6t
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}(1) = \frac{g'(1)}{f'(1)} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}(1) = \frac{g''(1)f'(1) - f''(1)g'(1)}{(f'(1))^3} = \frac{18 - 8}{9} = \frac{10}{9}$$

(7) اگر $y = 3x^2 + 4x + 1$ آنگاه Δy و dy را به ازای $x = 3$ و $\Delta x = 0/1$ محاسبه کنید.

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f(3 + 0/1) - f(3)$$

(حل)

$$\begin{aligned} &= 3(3/1)^2 + 4(3/1) + 1 - 27 - 12 - 1 \\ &= 3(9/61) + 12/4 - 39 \\ &= 28/83 + 12/4 - 39 = 2/23 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dy &= f'(x)\Delta x & \Rightarrow & \quad dy = 22 \times 0/1 = 2/2 \\ f'(x) &= 6x + 4 & \Rightarrow & \quad f'(3) = 22 \end{aligned}$$

(8) اگر معادله ی حرکت یک ذره $s = 20 + 30t + 3t^2$ باشد، سرعت و شتاب ذره را در $t = 2$ محاسبه کنید.

$$\begin{aligned} v &= \frac{ds}{dt} = 30 + 6t & \Rightarrow & \quad v(2) = 42 \\ a &= \frac{d^2s}{dt^2} = 6 & \Rightarrow & \quad a = 6 \end{aligned}$$

(9) اگر $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$ ، آنگاه $\frac{dy}{dx} = y'$ را در هر مورد بیابید

$$1) \quad y = f(x + \sqrt{x}) \qquad f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$$

$$y' = \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \frac{2(x + \sqrt{x}) + 1}{2\sqrt{(x + \sqrt{x})^2 + (x + \sqrt{x})}}$$

$$2) \quad y = f(\cos x + \cot x)$$

$$y' = (-\sin x - (1 + \cot^2 x)) \frac{2(\cos x + \cot x) + 1}{2\sqrt{(\cos x + \cot x)^2 + (\cos x + \cot x)}}$$

$$3) \quad y = f\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) \qquad \Rightarrow y = f\left(1 - \frac{2}{x^2+1}\right)$$

$$y' = \frac{4x}{(x^2+1)^2} \frac{2\left(1 - \frac{2}{x^2+1}\right)}{\sqrt{\left(1 - \frac{2}{x^2+1}\right)^2 + \left(1 - \frac{2}{x^2+1}\right)}}$$

$$4) \quad y = f\left(f\left(x^2\right)\right) \qquad \Rightarrow y' = 2xf'\left(x^2\right)f'\left(f\left(x^2\right)\right)$$

$$\Rightarrow y' = 2x \cdot \frac{2x^2+1}{\sqrt{x^f + x^2}} \cdot \frac{2\sqrt{x^4 + x^2} + 1}{\sqrt{\left(\sqrt{x^4 + x^2}\right)^2 + \sqrt{x^4 + x^2}}}$$

(10) معادله های خطهای مماس و قائم بر منحنی هر یک از تابع های به معادله ی

زیر در نقطه ای به طول یک واقع بر منحنی را بنویسید.

$$1) f(x) = (x^2 - 4x)^3$$

$$y = (1-4)^3 = 9$$

$$y' = 3(2x-4)(x^2-4x) \Rightarrow y'(1) = 3(-2)(-3) = 18$$

$$y-9 = 18(x-1) \Rightarrow y = 18x-9$$

$$2) f(x) = \frac{x^2+1}{2x^2-1}$$

$$y = \frac{1+1}{2-1} = 2$$

$$y' = 2 \frac{x(2x^2-1) - 4x(x^2+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{-6x}{(x^2+1)^2} \Rightarrow y'(1) = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$$

$$y-2 = -\frac{3}{2(x-1)} \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$$

$$3) f(x) = \sqrt[3]{(x^2-2)^2}$$

$$y = \sqrt[3]{(1-2)^2} = 1$$

$$y = (x^2-2)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow y' = \frac{2}{3} \times 2x(x^2-2)^{-\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow y'(1) = -\frac{4}{3}$$

$$y-1 = -\frac{4}{3}(x-1) \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x + \frac{7}{3}$$

$$4) f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$y = f(1) = 1 + 1 = 2$$

$$y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} \Rightarrow y'(1) = 0 \Rightarrow y = 2$$

11) در تابع به معادله $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ اگر y' و y'' مشتقات مرتبه اول و دوم لا باشند،

ثابت کنید رابطه $2y'^2 - yy'' = y^4$ برقرار است.

(حل)

$$y = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow y^2 = \frac{1}{x^2+1} \Rightarrow 2yy' = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

$$\Rightarrow yy' = -xy^4 \Rightarrow \frac{y'}{y^3} = -x$$

$$\Rightarrow y \frac{y^3 - 3(y')^2 y^2}{y^6} = -1 \Rightarrow y''y - 3(y')^2 = -y^4$$

$$\Rightarrow 3(y')^2 - yy'' = y^4$$

12) در تابع به معادله $y = \frac{x^2+1}{x}$ ثابت کنید $xy'' + 2y' = 2$

(حل)

$$y = \frac{x^2 + 1}{x} = x + \frac{1}{x}$$

$$y' = 1 - \frac{1}{x^2} \Rightarrow \frac{1}{x^2} = 1 - y'$$

$$y'' = \frac{2}{x^3} \Rightarrow xy'' = 2\left(\frac{1}{x^2}\right) = 2(1 - y') \Rightarrow xy'' + 2y' = 2$$

(13) فرض کنید $f, g : R \rightarrow R$ تابع های مشتق پذیر باشند و $g'(0) \neq 0$ و $f(0) = g(0) = 0$ ثابت کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(0)}{g'(0)}$$

(حل)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x) - 0}{x - 0}}{\frac{g(x) - 0}{x - 0}} = \frac{f'(0)}{g'(0)}$$

(14) فرض کنید تابع مشتق تابع را پیدا کنید.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} & x \leq 0 \\ \frac{5}{2}x^2 - 4x & x > 0 \end{cases}$$

(حل)

$$f'(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ 5x - 4 & x > 0 \end{cases}$$

تابع مشتق تابع را

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & x < 1 \\ (1-x)(2-x) & 1 \leq x \leq 2 \\ -(2-x) & x > 2 \end{cases} \quad (15) \text{ فرض کنید.}$$

بیابید.

(حل)

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & x < 1 \\ 2-x-(1-x) & 1 \leq x \leq 2 \\ +1 & x > 2 \end{cases}$$

(16) مشتق هر یک را تعیین کنید.

$$1) \quad y = \frac{\tan x}{\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow y = \tan x \cdot x^{-\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow y' = \sec^2 x \cdot x^{-\frac{2}{3}} - \frac{2}{3} x^{-\frac{5}{3}} \cdot \tan x$$

$$2) \quad y = \frac{\cos x}{1 + \sin x} \Rightarrow y' = \frac{-\sin x(1 + \sin x) - \cos^2 x}{(1 + \sin x)^2} = \frac{-\sin x - 1}{(1 + \sin x)^2}$$

$$= \frac{-1}{1 + \sin x}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad y = \sqrt{\text{Arc cot } \frac{x}{2}} &\Rightarrow y' = \frac{\frac{-\frac{1}{2}}{1 + \frac{x^2}{4}}}{\sqrt[2]{\text{Arc cot } \frac{x}{2}}} \\
 &\Rightarrow y' = \frac{-1}{(4 + x^2)\sqrt{\text{Arc cot } \frac{x}{2}}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4) \quad y = \text{Arc tan}(x - \sqrt{1 + x^2}) \\
 y' = \frac{1 - \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}}{1 + (x - \sqrt{1 + x^2})^2} = \frac{(\sqrt{1 + x^2} - x)}{\sqrt{1 + x^2}(1 + (x - \sqrt{1 + x^2})^2)}
 \end{aligned}$$

$$5) \quad y = \text{Arc sin } \frac{1}{|x|} \Rightarrow y' = \begin{cases} \text{Arc sin } \frac{1}{x} & x > 0 \\ -\text{Arc sin } \frac{1}{x} & x < 0 \end{cases}$$

$$y' = \begin{cases} \frac{-\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = \frac{-1}{x\sqrt{x^2 - 1}} & x > 0 \\ \frac{\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} & x < 0 \end{cases}$$

$$6) \quad \sin xy + \cos xy = 0 \Rightarrow y' = -\frac{y \cos xy - y \sin xy}{x \cos xy - x \sin xy} = -\frac{y}{x}$$

$$7) \quad x y = \operatorname{Arctg} \frac{x}{y} \Rightarrow y \tan(xy) - x = 0$$

$$\Rightarrow y' = -\frac{y^2 \sec^2(xy) - 1}{\tan(xy) + xy \sec^2(xy)}$$

$$8) \quad x - y = \operatorname{Arc} \sin x - \operatorname{Arc} \cos y$$

$$\operatorname{Arc} \sin x - \operatorname{Arc} \cos y - x + y = 0$$

$$y' = -\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1}{\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} + 1}$$

(17) فرض کنید $f(x) = \sin(n \operatorname{Arc} \sin x)$. ثابت کنید.

$$(1-x^2)f''(x) - x f'(x) + n^2 f(x) = 0$$

حل $\operatorname{Arc} \sin$ را دو طرف اثر می دهیم:

$$\operatorname{Arc} \sin f(x) = n \operatorname{Arc} \sin x \quad \text{مشتق} \Rightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}} = \frac{n}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{(f'(x))^2}{1-(f(x))^2} = \frac{n^2}{1-x^2} \quad \Rightarrow (1-x^2)(f'(x))^2 = n^2(1-f^2(x))$$

$$\text{مشتق} \Rightarrow 2(1-x^2)f''(x)f'(x) - 2x(f'(x))^2 = -2n^2 f'(x)f(x)$$

$$\Rightarrow (1-x^2)f''(x) - x(f'(x)) + n^2 f(x) = 0$$

(18) فرض کنید $x \in R$ $f(x) = [x] \sin^2 px$ تابع مشتق f راییبید.

حل) چون $\lim_{x \rightarrow n} \sin^2 px = 0$ برای هر n صحیح در تمام نقاط پیوسته است.

(19) فرض کنید $f(x) = \left| \left(x^2 - 1 \right)^2 (x+1)^3 \right|$ تابع مشتق f راییبید.

حل)

$$\begin{aligned} f(x) &= \left| \left(x^2 - 1 \right)^2 (x+1)^2 (x+1) \right| \\ &= \left(\left(x^2 - 1 \right)^2 (x+1)^2 (x+1) \right) \Big|_{x+1} \\ \Rightarrow f'(x) &= 2(2x(x+1) + (x^2-1))(x^2-1)(x+1) | (x+1)| \\ &\quad + \left((x^2-1)(x+1) \right) \frac{|x+1|}{x+1} \end{aligned}$$

(20) فرض کنید $f: R \rightarrow R$ ، n مرتبه مشتق پذیر باشد. ثابت کنید.

$$[f(ax+b)]^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax+b)$$

حل) با استقرا روی n این مطلب را نشان می دهیم:

$$n=1 \quad \Rightarrow (f(ax+b))' = af'(ax+b)$$

$$k=n \quad \Rightarrow (f(ax+b))^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax+b)$$

با مشتق گیری از دو طرف فرض داریم:

$$[f(ax+b)]^{(n+1)} = a^{n+1} f^{(n+1)}(ax+b)$$

پس حکم برقرار است.

(20) در هر مورد مشتق مرتبه n ام تابع داده شده را به دست آورید.

$$1) \quad y = \sin x \quad \Rightarrow \quad y^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{p}{2}\right)$$

$$2) \quad y = \cos x \quad \Rightarrow \quad y^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{p}{2}\right)$$

$$3) \quad y = \sin^2 x \quad \Rightarrow \quad y^{(n)} = \sin 2x \left(x + n\frac{p}{2}\right) \Rightarrow y^{(n)} = 2^{n-1} \sin\left(2x + n\frac{p}{2}\right)$$

$$4) \quad y = \cos^2 x \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2} \times 2^n \cos\left(2x + n\frac{p}{2}\right)$$

$$= 2^{n-1} \cos\left(2x + n\frac{p}{2}\right)$$

$$5) \quad y = \frac{1+x}{1-x} \quad y' = \frac{-2}{(1-x)^2}, \quad y'' = \frac{4}{(1-x)^3}$$

$$y''' = \frac{-12}{(1-x)^4}, \quad y^{(4)} = \frac{48}{(1-x)^5}$$

$$\dots\dots\dots y^{(n)} = (-1)^n \frac{2n!}{(1-x)^{n+1}}$$

(22) مقادیر c, b را طوری تعیین کنید که نمودار $y = x^2 + bx + c$ در نقطه $A(1,1)$ بر

خط $y = x$ مماس باشد.

(حل) $(1, 1)$ روی نمودار قرار دارد پس $1 = 1 + b + c$

از طرفی شیب برابر 1 است پس داریم $1 = 2 + b$

$$\Rightarrow \begin{cases} b + c = 0 \\ b = -1 \end{cases} \rightarrow c = 1$$

(23) در چه نقاطی از منحنی $y = x^3 + x - 2$ خط مماس بر منحنی موازی خط $y = 4x - 1$ است؟

(حل) باید $y'(x) = 4$ باشد پس

$$3x^2 + 1 = 4 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

(24) معادله ی مماس بر منحنی $y = x^3 + 3x^2 - 5$ را بنویسید که بر خط $2x - 6y + 1 = 0$ عمود باشد.

(حل) $6y = 2x + 1 \Rightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}$

پس شیب خط داده شد برابر $\frac{1}{3}$ است لذا شیب خط مماس برابر -3 است پس

$$3x^2 + 6x = -3 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$(x+1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow y = -3$$

$$y'(-1) = 3 - 6 = -3 \Rightarrow y + 3 = -3(x+1) \Rightarrow y = -3x - 6$$

(25) در مورد تابع $f: R \rightarrow R$ میدانیم $|f(x)| \leq x^2, x \in R$ ثابت کنید f در $x = 0$

مشتق پذیر است $f'(0)$ را بیابید.

(حل)

$$f(x) \leq x^2 \Rightarrow |f(x)| \leq |x|^2 \Rightarrow -|x| \leq \frac{f(x)}{x} \leq |x|$$

$$\Rightarrow \left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq |x|$$

از طرفی داریم: $\lim_{x \rightarrow 0} (-|x|) = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$ پس

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 0}{x - 0} = f'(0) = 0$$

(26) در مورد تابع $f: R \rightarrow R$ می دانیم $-|x| \leq \frac{f(x)}{x} \leq |x|$ آیا $\left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq |x|$

می توانیم نتیجه بگیریم که f در نقطه $x = 0$ مشتق پذیر است؟(حل) خیر؛ مثلاً $f(x) = |x|$ را در نظر بگیرید این تابع در $x = 0$ مشتق ندارد.

(27) اگر $f(x) = [x] \sin x$ مقدار $f\left(\frac{p}{4}\right)$ را حساب کنید.

(حل) چون $0 < \frac{p}{4} < 1$ است پس $f\left(\frac{p}{4}\right) = 0$

$$f'\left(\frac{p}{4}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{p}{4}} \frac{f(x) - f\left(\frac{p}{4}\right)}{x - \frac{p}{4}} = \lim_{x \rightarrow \frac{p}{4}} \frac{[x] \sin x}{x - \frac{p}{4}} = 0$$

(28) اگر $f: R \rightarrow R$ یک تابع و $f'(a)$ موجود باشد، حاصل

را حساب کنید. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h) - f(a-h)}{h}$

(حل)

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h) - f(a-h)}{h} &= 2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h) - f(a)}{2h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a) - f(a-h)}{h} \\ &= 2f'(a) + f'(a) = 3f'(a) \end{aligned}$$

(29) اگر به ازای $|x| < 1$ ، $x \leq f(x) \leq x + x^2$ مقدار $f'(0)$ را حساب کنید.

(حل) با توجه به نامساوی داریم: $0 < f(0) \leq 0$ پس $f(0) = 0$.

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$$

$$\text{زیرا } 1 \leq \frac{f(x)}{x} \leq 1 + x$$

(30) اگر $f(a) = 0$ ، $f'(a) = 4$ ، $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h) - f(a)}{5h}$ را

حساب کنید.

(حل)

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h) - f(a)}{5h} &= \frac{2}{5} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h) - f(a)}{5h} \\ &= \frac{2}{5} f'(a) = 4 \Rightarrow f'(a) = 10 \end{aligned}$$

(31) اگر f بر R دو مرتبه مشتق پذیر باشد و $g(x) = f(xf(x))$ آنگاه $g''(0)$ را

حساب کنید.

حل) قرار دهید:

$$\begin{aligned} u(x) &= xf(x) \Rightarrow u(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \\ u'(x) &= f(x) + xf'(x) \Rightarrow u'(\mathbf{0}) = f(\mathbf{0}) \\ g(x) &= f(u) \Rightarrow g'(x) = u' f'(u) \\ g''(x) &= u''f'(u) + (u')^2 f''(u) \\ \Rightarrow g''(\mathbf{0}) &= 2f'(\mathbf{0})f'(\mathbf{0}) + (f(\mathbf{0}))^2 f''(\mathbf{0}) \\ \Rightarrow g''(\mathbf{0}) &= 2(f'(\mathbf{0}))^2 + (f(\mathbf{0}))^2 f''(\mathbf{0}) \end{aligned}$$

(۳۲) اگر توابع f و g بر R مشتق پذیر باشند و

$$2g'(-2) = f(a) = f'(a) = -2$$

مقدار $(g \circ f)'(a)$ را حساب کنید.

حل)

$$\begin{aligned} (g \circ f)'(a) &= g'(f(a)) \cdot f'(a) \\ &= g'(-2) \cdot (-2) = (-1)(-2) = 2 \end{aligned}$$

(33) اگر $\begin{cases} x = (t+2)^2 \\ y = t^3 \end{cases}$ مقدار $\frac{dy}{dx}$ را به ازای $t = 3$ حساب کنید.

حل)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2}{2(t+2)} \Rightarrow \frac{dy}{dx}(3) = \frac{27}{2 \times 5} = \frac{27}{10}$$

(34) اگر $f'(1) = f(1) = -2$ و $g'(-2) = 3$ ، حاصل $(g \circ f)'(1)$ را حساب کنید.

(حل)

$$\begin{aligned} (g \circ f)'(1) &= g'(f(1)) \cdot f'(1) \\ &= g'(-2) \cdot (-2) = 3 \times (-2) = -6 \end{aligned}$$

(35) اگر f تابعی مشتق پذیر در a باشد. مقدار $\lim_{x \rightarrow a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a}$ را حساب کنید.

(حل) مقدار $xf(x)$ را به صورت اضافه و کم کنید:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{xf(a) - xf(x) + xf(x) - af(x)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} f(x) \frac{x - a}{x - a} - x \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= f(a) - af'(a) \end{aligned}$$

(36) ضریب زاویه خط مماس بر نمودار منحنی پارامتری به معادله $\begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = \sqrt{t^2 + 1} \end{cases}$ در

$t = 2$ را حساب کنید.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t}{\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}} \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx}(2) &= \frac{4 \times \sqrt{5}}{2} = 2\sqrt{5} \end{aligned} \quad (\text{حل})$$