فصل دوم

حد و پیوستگی

1. همسایگی‌های زیر را به صورت مجموعه بنویسید. پس آنها را روی یک خط نشان دهید.

الف) $N(1,\frac{1}{2})=\left\{x \middle| |x-1|<\frac{1}{2}\right\}$

ب) $N(0,3)=\{x \mid |x|<3\}$

ج) $N'(1,3)=\{x \mid |x-1|\le 3\}$

د) $N'(1,5)=\{x \mid |x-1|\le 5\}$

2) مجموعهٔ $A=\{x\in \mid |2x+3|<1\}$ یک همسایگی متقارن a به شعاع r است. a و r را تعیین کنید.

حل:

$$|2x+3|=2\left|x+\frac{3}{2}\right|=2\left|x-(-\frac{3}{2})\right|<1$$

$$\Rightarrow \quad \left|x-(-\frac{3}{2})\right|<\frac{1}{2} \ \Rightarrow \ a=-\frac{3}{2} \ , \ r=\frac{1}{2}$$

مجموعهٔ $A=\{x\in R \ |13x-1|<|1x+1|\}$ یک همسایگی متقارن به مرکز a و به شعاع r است. a و r را تعیین کنید:

حل:

$$|3x-1|<|x+1| \qquad \Rightarrow \qquad \frac{|3x-1|}{|x+1|}<1$$

$$\Rightarrow \left|\frac{3x-1}{x+1}\right|<1 \qquad \Rightarrow \qquad -1<\frac{3x-1}{x+1}<1$$

$$\Rightarrow\ -1<3\frac{-4}{x+1}<1 \quad \Rightarrow \quad 3-\frac{4}{x+1}<1$$

$$\Rightarrow\ 2<\frac{4}{x+1} \quad \Rightarrow \quad 1<\frac{2}{x+1}\ \Rightarrow\ 0<\frac{1-x}{x+1}$$

$$\Rightarrow\ -1<x<1$$

$$-1<3-\frac{4}{x+1}-4<\frac{-4}{x+1} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x+1}<1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x+1}-1<0 \Rightarrow \frac{-x}{x+1}<0 \Rightarrow -1<x<0$$

$$(-1,1)\ \mathbf{U}\ (-1,0)\ =\ (-1,1)$$

جواب= $a=0 \quad , \quad r=1$

اگر $(2a-4\ ,\ a+2)$ یک همسایگی متقارن 5 باشد. شعاع همسایگی را تعیین کنید:

حل:

$$N(5,7)\ =\ (2a-4\ ,\ a+2)$$
$$\Rightarrow\ (5-7\ ,\ 5+r)\ =\ (2a-4\ ,\ a+2)$$
$$\Rightarrow\ \begin{cases}5-r=2a-4\\ 5+r=a+2\end{cases} \Rightarrow\ 10=3a-2\ \Rightarrow\ \begin{matrix}a=4\\ r=1\end{matrix}$$

5) مجموعه $A=\{x\in R \quad | \quad |2x+3|<6\}$ یک همسایگی a به شعاع 4 است.

a و r را تعیین کنید:

$$|2x+3|<6 \Rightarrow 2\left|x+\frac{3}{2}\right|<6 \quad \Rightarrow \quad \left|x+\frac{3}{2}\right|<3$$

$$\Rightarrow \quad a=-\frac{3}{2}\ ,\ r=3$$

تمرین. 2-2-6 صفحهٔ 63

با استفاده از تعریف حد ثابت کنید:

1) $\lim_{x\to 1}(5x+4)=9$ $\qquad |5x+4-9|=5|x-1|<4$

$$\Rightarrow \quad |x-1|<\frac{4}{5}$$

پس قرار می‌دهیم $d\le\frac{e}{5}$

2) $\lim_{x\to -2}(3x+2)=-4$

$$|3x+2+4|=3|x+2|<4 \quad \Rightarrow \quad |x+2|<\frac{4}{3}$$

قرار می‌دهیم $d\le\frac{e}{3}$

3) $\lim_{x\to 2}x^2=4$

$$|x^2-4|=|x+2||x-2|$$

ماکزیمم $|x+2|$ را در همسایگی $-1<x-2<1$ به دست می‌آوریم.

$$-1<x-2<1 \quad \Rightarrow \quad 1<x<3 \quad \Rightarrow \quad \max(x+2)=5$$
$$\Rightarrow |x^2-4|\le 5|x-2|<4$$

کافی است $d\le\min\left\{1,\frac{e}{5}\right\}$ را در نظر بگیریم.

4) $\lim_{x\to -2}x^2=4$ $\qquad |x^2-4|=|x-2||x+2|$

ماکزیمم $|x-2|$ را در همسایگی زیر می‌یابیم.

$$-1<x+2<1 \quad \Rightarrow \quad -3<x<-1 \Rightarrow \max|x-2|=3$$

کافی است $d \le \min\left\{1,\dfrac{e}{3}\right\}$ را در نظر بگیریم.

5) $\lim \dfrac{3x+1}{x+2}=\dfrac{4}{3}$

$$\left|\frac{3x+1}{x+2}-\frac{4}{3}\right|=\left|\frac{9x+3-4x-8}{x+2}\right|=\frac{5|x-1|}{|x+2|}$$

$$-1<x-1<1 \quad \Rightarrow \quad 0<x<2 \quad \Rightarrow \quad \max\frac{5}{|x+2|}=\frac{5}{2}$$

کافی است $d \le \min\left\{1,\dfrac{e}{5}\right\}$ را در نظر بگیریم.

4) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+2}{5x-8}=3$

$$\left|\frac{x^2+2}{5x-8}-3\right|=\left|\frac{x^2+2-15x+24}{5x-8}\right|=\frac{|x-13||x-2|}{|5x-8|}$$

$$-1<x-2<1 \quad 1<x<3$$

ماکزیمم $\left|\dfrac{x-13}{5x-8}\right|$ روی این بازه به علت صعودی بودن برابر است با:

$$\left|\frac{3-13}{15-8}\right| = \left|\frac{-10}{7}\right| = \frac{10}{7}$$

پس کافی است. $d \le \min\left\{1,\dfrac{e}{10}\right\}$ در نظر گرفته شود.

$$7)\quad \lim_{x\to 2}\frac{x^2-3}{x^2-3x+3}=1$$

$$\left|\frac{x^2-3}{x^2-3x+3}\right|=\left|\frac{x^2-3-x^2+3x-3}{x^2-3x+3}\right|=\frac{3}{\left|x^2-3x+3\right|}|x-2|$$

$$-1<x-2<1 \quad \Rightarrow 1<x<3$$

تابع x^2-3x+3 می‌بینیم خود را در $x=\dfrac{3}{2}$ دریافت می‌کند پس:

$$\max\frac{3}{\left|x^2-3x+3\right|}=\frac{3}{(\frac{3}{2})^2-3(\frac{3}{2})+3}=\frac{3}{\frac{9}{4}-\frac{18}{4}+3}=\frac{3}{\frac{3}{4}}=4$$

پس کافی است $d\le\min\left\{1,\dfrac{e}{4}\right\}$ در نظر گرفته شود.

$$8)\quad \lim_{x\to 0}x\left[\frac{1}{x}\right]=1$$

$$\frac{1}{x}-1<\left[\frac{1}{x}\right]\le\frac{1}{x} \quad\Rightarrow\quad 1-x\langle x\left[\frac{1}{x}\right]\le 1 \quad\Rightarrow\quad x<0 \quad\Rightarrow -x<x\left[\frac{1}{x}\right]-1\le 0$$

$$x\langle 0 \quad\Rightarrow\quad 1\le x\left[\frac{1}{x}\right]<1-x \quad\Rightarrow\quad x\left[\frac{1}{x}\right]-1<-x \quad\Rightarrow\quad \left|x\left[\frac{1}{x}\right]-1\right|<|x|$$

اگر $d\le e$ باشد مسأله حل است.

$$9)\quad \lim_{x\to 3}(-1)^{[x]}\frac{x^2-9}{x^2+3}=0$$

$$\left|(-1)^{[x]}\frac{(x-3)(x+3)}{x^2+3}\right|=\frac{|x+3|}{x^2+3}|x-3|$$

$$-1<x-3<1 \quad\Rightarrow\qquad 2<x<4$$

$$\max\left\{\frac{x+3}{x^2+3}\right\}=\frac{7}{4+3}=1$$

پس کافی است $d\le\min\{1,e\}$ در نظر گرفته شود.

10) $\lim\limits_{x\to 3} (x^2-10x)=-21$

$|x^2-10x+21|=|x-7|\,|x-3|$

$-1\langle x-3\langle 1 \quad\Rightarrow\quad 2\langle x\langle 4 \quad\Rightarrow\quad \max|x-7| = |4-7| = 3$

کافی است $d \le \min\left\{1,\dfrac{e}{3}\right\}$ در نظر گرفته شود.

11) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-2}{x-2}=7$

$\left|\dfrac{x^2-2}{x-2}-7\right| = \left|\dfrac{x^2-2-7x+14}{x-2}\right| = \dfrac{|x-4|\,|x-3|}{|x-2|}$

$-1<x-4<1 \quad\Rightarrow\quad 3<x<5$

$\max\left|\dfrac{x-3}{x-2}\right| = \left|\dfrac{5-3}{5-2}\right| = \dfrac{2}{3}$

پس قرار می‌دهیم $d \le \min\left\{1,\dfrac{3}{2}e\right\}$

12) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{4x-1}{5x-3}=\dfrac{3}{2}$

$\left|\dfrac{4x-1}{5x-3}-\dfrac{3}{2}\right| = \left|\dfrac{8x-2-15x+9}{5x-3}\right| = \dfrac{7}{|5x-3|}\,|x-1|$

$-1<x-1<1 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{0}<x<2$

$\max\dfrac{7}{|5x-3|} = \dfrac{7}{|\mathbf{0}-3|} - \dfrac{7}{3}$

پس $d \le \min\left\{1,\dfrac{3}{7}e\right\}$ را در نظر می‌گیریم.

13) $\lim\limits_{x\to 2} (-1)^{[x]}\dfrac{x^2-4}{x+2}=\mathbf{0}$

$\left|(-1)^{[x]}\dfrac{x^2-4}{x+2}-\mathbf{0}\right| = |x-2|$

کافی است $d = e$ در نظر گرفته شود.

14) $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9} = \dfrac{1}{6}$

$$\left|\frac{\sqrt{x}-3}{x-9} - \frac{1}{6}\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{x}+3} - \frac{1}{6}\right| = \left|\frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}\right|$$

$$= \frac{|x-9|}{(\sqrt{x}+3)^2}$$

$$-1 < x-9 < 1 \Rightarrow \quad 8 < x < 10$$

$$\max \frac{1}{(\sqrt{x}+3)^2} = \frac{1}{(\sqrt{8}+10)^2}$$

کافی است $d \le \min\{1,\ (\sqrt{8}+10)^2 e\}$ در نظر گرفته شود.

15) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{2}{x-3} = 2$

$$\left|\frac{2}{x-3} - 2\right| = \left|\frac{2-2x+6}{x-3}\right| = \frac{2|x-4|}{|x-3|}$$

$$-\frac{1}{2} < x-4 < \frac{1}{2} \ \rightarrow \ \frac{7}{2} < x < \frac{9}{2}$$

$$Max \frac{2}{|x-3|} = \frac{2}{\left|\frac{7}{2}-3\right|} = 4$$

پس $d \le \min\left\{\frac{1}{2}\,,\, e\right\}$

16) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x+1}{2x-1}=3$

$$\left|\frac{2x+1}{2x-1}-3\right| = \left|\frac{2x+1-6x+3}{2x-1}\right| = \frac{4}{|2x-1|}\,|x-1|$$

$$-\frac{1}{4} < x-1 < \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{4} < x < \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow \max\frac{4}{|2x-1|} = \frac{4}{\left|2(\frac{3}{4})-1\right|} = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8$$

پس $d \le \min\left\{\frac{1}{4}\;,\;\frac{e}{8}\right\}$

17) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x}{x-3}=2$

$$\left|\frac{x}{x-3}-2\right| = \left|\frac{x-2x+6}{x-3}\right| = \frac{|x-6|}{|x-3|}$$

$$-1 < x-6 < 1 \quad \Rightarrow \quad 5 < x < 7$$

$$\Rightarrow \quad \max\frac{1}{|x-3|} = \frac{1}{|5-3|} = \frac{1}{2}$$

پس $d \le \min\{1, 2e\}$

$$18)\quad \lim_{x\to -4} \frac{1}{x+3} = -1$$

$$\left|\frac{1}{x+3}+1\right| = \left|\frac{x+4}{x+3}\right| = \frac{|x+4|}{|x+3|}$$

$$-\frac{1}{2} \langle x+4 \langle \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad -\frac{9}{2} \langle x \langle -\frac{7}{2}$$

$$\max \frac{1}{|x+3|} = \frac{1}{\left|-\frac{9}{2}+3\right|} = \frac{2}{3}$$

پس $d \le \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}e\right\}$

$$19)\quad \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{5-x}} = \frac{1}{2}$$

$$\left|\frac{1}{\sqrt{5-x}} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2-\sqrt{5-x}}{\sqrt{5-x}}\right| = \left|\frac{(2-\sqrt{5-x})(2+\sqrt{5-x})}{2\sqrt{5-x}(2+\sqrt{5-x})}\right|$$

$$= \frac{|x-1|}{2\sqrt{5-x}(2+\sqrt{5-x})}$$

$$-1 < x-1 < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < x < 2$$

$$\max \frac{1}{2\sqrt{5-x}(2+\sqrt{5-x})} = \frac{1}{2\sqrt{5-2}(2+\sqrt{5-2})}$$

پس $d \le \min\{1 \;,\; (2\sqrt{3}(2+\sqrt{3}))e)$

$$20)\quad \lim_{x\to -4} \frac{x^2-16}{x+4} = -8$$

$$\left|\frac{x^2-16}{x+4}+8\right| = \left|\frac{x^2-16+8x+32}{x+4}\right| = \left|\frac{(x+4)^2}{x+4}\right|$$

$$= |x+4|$$

کافی است $d = e$.

تمرین 2-3-29 صفحه 80.

حدهای زیر را حساب کنید.

$$1)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+3x-4} = \lim\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+4)} = \lim \frac{x+1}{x+4} = \frac{2}{5}$$

$$2)\ \lim_{x\to -1}\frac{x+\sqrt{x+2}}{x+1} = \lim\frac{(x^2-x-2)}{(x+1)(x-\sqrt{x+2})} = \lim\frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x-\sqrt{x+2})}$$
$$= \lim\frac{x-2}{x-\sqrt{x+2}} = \frac{-1-2}{-1-\sqrt{-1+2}} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

$$3)\ \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x^2-3x-4} = \lim\frac{\sqrt{x}-2}{(x+1)(x-4)} = \lim\frac{\sqrt{x}-2}{(x+1)(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$$
$$= \lim\frac{1}{(x+1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{5\times 4} = \frac{1}{20}$$

$$4)\ \lim_{x\to -1}\frac{x^2-9x-10}{x^2+3x+2} = \lim\frac{(x-10)(x+1)}{(x+2)(x+1)} = \lim\frac{x-10}{x+2} = \frac{-11}{1}$$

$$5)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^2+19x-20}{x^2-1} = \lim\frac{(x-1)(x+20)}{(x-1)(x+1)} = \lim\frac{x+20}{x+1} = \frac{21}{2}$$

$$6)\quad \lim_{x\to 9}\frac{x^2-81}{\sqrt{x}-3}=\lim\frac{(x-9)(x+9)}{\sqrt{x}-3}=\lim\frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{3}+3)(x+9)}{\sqrt{x}-3}$$
$$=\lim\ (\sqrt{x}+3)(x+9)=108\{$$

$$7)\quad \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x-2}-1}{x^2-x-6}=\lim\frac{(\sqrt{x-2}-1)(\sqrt{x-2})+1)}{(x+2)(x-3)(\sqrt{x-2}+1)}=\lim\frac{x-3}{(x+2)(x-3)(\sqrt{x-2}+1)}$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{1}{(x+2)(\sqrt{x-2}+1)}=\frac{1}{5\times 2}=\frac{1}{10}$$

$$8)\quad \lim_{x\to -2}\frac{x^3+x^2+4}{x^2-4}=\lim\frac{(x+2)(x^2-x+2)}{(x^{\circ}-2)(x+2)}$$
$$=\lim_{x\to -2}\frac{x^2-x+2}{x-2}=\frac{8}{-4}=-2$$

$$9)\quad \lim_{x\to 1}\frac{3x^2-2x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(3x+1)(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\lim\frac{3x+1}{x+1}=2$$

$$10)\quad \lim_{x\to 1}\frac{x^{20}-4x+3}{x^{15}-5x+4}=\lim\frac{x^{20}-x-3x+3}{x^{15}-x-4x+4}$$
$$=\lim\frac{x(x^{19}-1)-3(x-1)}{x(x^{14}-1)-4(x-1)}=\lim\frac{(x-1)(x(x^{18}+x^{17}+\ldots+x+1-3)}{(x-1)(x(x^{13}+x^{12}+\ldots+x+1-4)}$$
$$=\frac{19-3}{14-4}=\frac{16}{10}=\frac{8}{5}$$

$$11)\quad \lim_{x\to 1}\frac{x^{4}+x^{3}-x-1}{x^{3}+3x^{2}-x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{x^{4}-1+x(x^{2}-1)}{x(x^{2}-1)+3(x^{2}-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x^{2}-1)(x^{2}+1+x)}{(x^{2}-1)(x+3)}=\frac{3}{4}$$

$$12)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{x+1}}{x}=\lim\frac{-2x}{x(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}=\frac{-2}{2}=-1$$

$$13)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}=\lim\frac{2x(\sqrt[3]{(1+x)^{2}}+\sqrt[3]{1-x^{2}}+\sqrt[3]{(1-x)^{2}}}{2x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\frac{3}{2}$$

$$14)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt{x+1}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt[3]{(x+1)^{2}}+\sqrt[3]{x+1}+1)}=\frac{2}{3}$$

تمرین صفحه 106

حد هر یک از توابع زیر را بیابید.

1) $\lim\limits_{x\to 3}[x]$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^+}[x]=3\\ \lim\limits_{x\to 3^-}[x]=2\end{array}\right\} \Rightarrow$$ **تابع حد ندارد.**

2) $\lim\limits_{x\to 1}[2x+1]$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^+}[2x+1]=3\\ \lim\limits_{x\to 1^-}[2x+1]=2\end{array}\right\} \Rightarrow$$ تابع حد ندارد.

3) $\lim\limits_{x\to 1}[3-2x]=3+\lim\limits_{x\to 1}[-2x]$ $\Rightarrow$ حد ندارد.

4) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{|x-5|}{5-x}$ $\Rightarrow$ حد ندارد.

5) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(-1)^{[x]}}{x-2}=\dfrac{(-1)^1}{1-2}=\dfrac{-1}{-1}=1$

6) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(-1)^{[x]}}{x-2}=\dfrac{(-1)^0}{1-2}=\dfrac{1}{-2}=-1$

7) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x-|2-x|-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x-(2-x)-2}{x-2}=\lim\dfrac{2x-4}{x-2}=2$

8) $\lim\dfrac{\sin x}{\sin 2x}=\lim\dfrac{\sin x}{x}\times\dfrac{2x}{\sin 2x}\times\dfrac{1}{2}=1\times1\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$

9) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x^2-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)\dfrac{\sin(x^2-1)}{x^2-1}=2$

10) 10) $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)^2\sin\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-2}}=0$ (کراندار در حد صفر)

11) $\lim\limits_{x\to 2}(x-[x])$ $\Rightarrow$ حد وجود ندارد.

12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x[x]}{2x+|x|}$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{4x[x]}{2x+|x|}=\dfrac{0}{2x+x}=0$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{4x[x]}{2x+|x|}=\dfrac{-4x}{2x-x}=-4$

$\Rightarrow$ حد ندارد.

12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|\sin x|}{x}$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|\sin x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{x}=1$

$\Rightarrow$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|\sin x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-\sin x}{x}=-1$

14) $\lim\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt[4]{x+1}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(\sqrt[4]{(x+1)^3}+\sqrt[4]{(x+1)^2}+\sqrt[4]{(x+1)}+1}{x(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1)}=\dfrac{4}{3}$

$$15)\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}=\lim\frac{1-\cos x}{x^2(1+\sqrt{\cos x}}=\lim\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}}.\frac{1}{1+\sqrt{\cos x}}=\frac{1}{8}$$

$$16)\quad \lim\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}=\lim\frac{\sqrt[6]{\cos^3 x}-\sqrt[6]{\cos^2 x}}{\sin^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\cos x}(\sqrt[6]{\cos x}-1)}{\sin^2 x}=\lim\frac{(\cos x-1)}{\sin^2 x(\sqrt[6]{\cos^{0} x}+\ldots+\sqrt[6]{\cos x}+1)}$$

$$\lim\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2 x}\times\frac{1}{6}=-\frac{1}{6}$$

$$17)\quad \lim_{x\to 1}\frac{\sin(1-x)}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}(\sqrt{x}+1)\frac{\sin(1-x)}{x-1}=-2$$

$$18)\quad \lim_{x\to 1}(1-x)tg\frac{\Pi}{2}x$$

$$1-x=\quad\Rightarrow x=1-t\quad\Rightarrow\qquad=\lim_{t\to 0}t\ \ tg\,\frac{p}{2}(1-t)$$

$$=\lim_{t\to 0}\ \ t\ \cot\frac{p}{2}t$$

$$=\lim\frac{t}{\sin\frac{p}{2}t}.\cos\frac{p}{2}t=\frac{2}{p}$$

$$19)\quad \lim_{x\to\frac{p}{2}}\ tg(2x)\ \ tg\ \ (\frac{p}{4}-x)=0\times-1=0$$

$$20)\quad \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+X^2}+x)^n-(\sqrt{1+x^2}-x)^n}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+\frac{x^2}{2}+x)^n-(1+\frac{x^2}{2}-x)^n}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-(1-x)^n}{x}=2n$$

$$21)\quad \lim_{x\to 1}\frac{\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-1}{\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{2}-1}=\frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}}=1$$

$$22)\quad \lim_{x\to 0^+}(x\left[\frac{2}{x}\right]+\frac{x}{2}-2)=2-2=0$$

$$23)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\frac{2}{2}=1$$

$$24)\quad \lim_{x\to 1}((-1)^{[x]}\frac{x-1}{x}=0$$ (تابع کراندار در تابع با حد صفر ضرب شده)

$$25)\quad \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{[x]}=\frac{1}{-1}=-1$$

$$26)\quad \lim_{x\to 8}\frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}=\lim_{x\to 8}\frac{(\sqrt[3]{x})^3-2^3}{\sqrt[3]{x}-2}=\lim\frac{(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{\sqrt[3]{x}-2}$$

$$=\sqrt[3]{64}+2\sqrt[3]{8}+4=4+4+4=12$$

صفحه 127

27) $(a \neq 1)\ \lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{(x-1)(x-a)}{(x-a)(x^2+ax+a^2)} = \dfrac{a-1}{3a^2}$

28) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{|x^3-1|+3(1-x^2)[x-1]}{x-1}$ حد وجود ندارد.

29) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}}{1+x\sin x-\cos x}$

$= \lim \dfrac{2x^2}{2\sin^2\frac{x}{2}+2x\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \lim \dfrac{x^2}{x^2(\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}+\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\ ,\ \cos\frac{x}{2})} = \dfrac{1}{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}} = \dfrac{4}{3}$

30) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x} = \lim \dfrac{\sqrt{2\sin^2\frac{x^2}{2}}}{2\sin^2\frac{x}{2}} = \lim \dfrac{\sqrt{2}\sin\frac{x^2}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \times \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

31) $\lim \dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}} = \lim \dfrac{1-\cos x}{2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}(1+\sqrt{\cos x})} = \lim \dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}} . \dfrac{1}{2} = 0$

32) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{2x-2}{|x-2|+[x-2]} = \lim \dfrac{2(x-1)}{-(x-2)-1} = \dfrac{2}{-1}$

$= -2$

33) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\dfrac{\sin x}{x} = 0$

34) $\lim\limits_{x\to 1^-} Arcty\ \dfrac{1}{1-x} = \lim\ Arcty\ \dfrac{1}{0^+} = \lim\ Arcty(+\infty) = \dfrac{p}{2}$

$$35)\quad \lim_{x\to 1^+} Arcty\,\frac{1}{1-x} = \lim\ Arcty\,\frac{1}{0^-} = \lim\ Arctg\,(-\infty) = -\frac{p}{2}$$

$$36)\quad \lim_{x\to 1^-}\ \frac{Arc\cos(1-x)}{\sqrt{x}} = \lim$$

$$37)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-1}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{x}{2}-1}{\sin 2x} = \lim\frac{-\frac{x}{2}}{\sin 2x} = \lim\frac{-\frac{x}{2}}{\sin 2x} = -\frac{1}{4}$$

2-4-32 تمرین صفحه 108

(1) ثابت کنید که اگر $\lim_{x\to a}|f(x)| = 0$ آنگاه $\lim_{x\to a}\ f(x) = 0$

حل: با توجه به نامساوی $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$ و با استفاده از قضیه فشردگی

چون $\lim_{x\to a}|\ f(0)\ | = \lim -|f(x)| = 0$است پس $\lim_{x\to a}\ f(x) = 0$

2) مقدار a را طوری تعیین کنید که تابع f در x=1 دارای حد باشد.

$$f(x) = \begin{cases} 3x+4\ , & x\langle 1 \\ [x]\ -a & x\rangle 1 \end{cases}$$

حل :

$$\lim_{x\to 1^-}\ f(x)\ =\ \lim_{x\to 1^-}\ (3x+4)\ =\ 7$$

$$\lim_{x\to 1^+}\ f(x)\ \ \lim_{x\to 1^+}\ ([x]-a) = 1-a$$

$$\Rightarrow\quad 1-a = 7\quad a = -6$$

3) فرض کنید $f(x) = \begin{cases} ax+b & x\langle -1 \\ x^2-b & x\rangle -1 \end{cases}$ ، مقادیر a و b را طوری تعیین کنید

که $\lim_{x\to -1} f(x)=2$

حل)

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}(x^2-b)=1-b=2$$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}(ax+b)=-a+b=2$$

$$\Rightarrow b=-1 \qquad \Rightarrow \qquad a=-3$$

4) فرض کنید: $f(x)=\begin{cases} 2x-a & x<-3 \\ ax+2b & -3\le x\langle 3 \\ b-q\,x & 3<x \end{cases}$ a و b را طوری تعیین کنید که $\lim f(x)$ و $\lim f(x)$ موجود باشند.

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a+3b=-15 \\ -2a+2b=-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=-5 \\ -a+b=-3 \end{cases} \Rightarrow 2b=-8$$

$$\Rightarrow b=-4 \qquad a=-1$$

5) فرض کنید $F(x)=\begin{cases} x^2+3 & , \ x\le 1 \\ x+1 & , \ x>1 \end{cases}, \ g(x)=\begin{cases} x^2 & , \ x\le 1 \\ x & , x>1 \end{cases}$

نشان دهید، این توابع در $x=1$ حد ندارند ولی تابع $f(x)g(x)$ در $x=1$ حد دارد.

حل.

$$\begin{rcases} \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(x^2+3)=4 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x+1)=2 \end{rcases} \Rightarrow$$ f حد ندارد

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1^-} g(x)=\lim\limits_{x\to1^-} x^2 =1\\ \lim\limits_{x\to1^+} g(x)=\lim 2=\end{array}\right\} \Rightarrow$$ g حد ندارد

تابع $f(x)g(x)$ را در نظر می‌گیریم:

$$f(x).g(x)=\begin{cases}x^2(x^2+3) & , \ x\le 1\\ 2(x+1) & , \ x>1\end{cases}$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x).g(x)=\lim x^2(x^2+3)=4$$

تابع حد دارد. $\Rightarrow$

$$\lim_{x\to1^+} f(x).g(x)=\lim 2(x+1)=4$$

(6) فرض کنید $f(x)=\begin{cases}1 & , \quad x>0\\ 0 & , \quad x=0\\ 1 & , \quad x>0\end{cases}$ ، مقدار $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}^+} x\left(x^2-2\right)$

را حساب کنید.

حل) چون $f\left(x^2-2\right)=1$ است. پس

$$\lim\left(x\, f\left(x^2-2\right)\right)=\sqrt{2}\times1=\sqrt{2}$$

(7) حدود زیر را حساب کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to4}\left([x]-\left[\frac{x}{4}\right]\right)$

حل)

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to4^+}\left([x]-\left[\frac{x}{4}\right]\right)=4-1=3\\ \lim\limits_{x\to4^-}\left([x]-\left[\frac{x}{4}\right]\right)=3-0=3\end{array}\right\}\Rightarrow$$

3= حد

ب) $\lim([3x]+[-3x])$

حل) توجه کنید اگر $3x \notin z$ آنگاه $[3x]+[-3x]=-1$ پس حد برابر 1− است.

(8) در مورد تابع $f: R \to R$ می‌دانیم:

$$f(x+y) = f(x)+f(y) \qquad x\ ,\ y \notin R$$

ثابت کنید که اگر f در نقطه صفر حد داشته باشد آنگاه در هر نقطه دیگر هم حد دارد.

همچنین ثابت کنید که اگر $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ وجود داشته باشد. برابر صفر است.

حل: نقطه دلخواه x_0 را در نظر بگیرید و فرض کنید $t > 0$ باشد.

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{t \to 0^+} f(x_0+t) = \lim_{t \to 0^+}\left(f(x_0)+f(t)\right) = f(x_0)+0$$

پس $\lim f(x) = f(x_0)$ یعنی تابع در هر نقطه حد دارد.

در فوق از این نکته استفاده کرده‌ایم که $\lim\limits_{\text{ط} \to 0} f(x)=0$ می‌شود زیرا:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = \lim_{x\to 0} f\left(\frac{x}{2}\right) + \lim f\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} f(x) + \lim_{x\to 0} f(x)$$

$$\Rightarrow \qquad \lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

9) فرض کنید $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ اگر $A \neq 0$ ثابت کنید عددی مثبت مانند d وجود دارد که هرگاه $0<|x-a|<d$ ، آنگاه d وجود دارد که

$$0<|x-a|<d \qquad \Rightarrow \qquad |f(x)-A|<\frac{|A|}{2}$$

$$\big||f(x)|-|A|\big| \leq |f(x)-A|<\frac{|A|}{2}$$

$$\Rightarrow \qquad -\frac{|A|}{2}<|f(x)|-|A|$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{|A|}{2}<|f(x)|$$

(10) فرض کنید $f(x)=\begin{cases} x-|x| & , \quad |x| \\ x-|x+1|, & \quad |x| \end{cases}$ ، همه نقاطی را بیابید که f در آنها حد دارد.

حل) تابع f به صورت زیر قابل بیان است.

$$f(x)=\begin{cases} x-|x| & |x| \\ x-|x+1|-1 & |x| \end{cases}$$

این تابع در اعداد صحیح حد دارد. یرا اگر $x_0 = x$ عدد صحیح باشد. اگر n زوج باشد

$$x\to x_0^{\,+} \quad \Rightarrow \quad [x]=n \qquad \text{فرد} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to x_0^{+}} f(x)=n-n=0$$

$$x\to x_0^{\,+} \quad \Rightarrow \quad [x]=n-1 \qquad \text{فرد} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to x_0^{-}} f(x)=n-(n-1)-1=0$$

مشابهاً اگر n فرد باشد. حد موجود است.

در اعداد غیر صحیح نیز این تابع حد دارد. چون در سمت راست یا چپ x_{m0} ، $[x]$ زوج یا فرد باقی می‌ماند.

پس این تابع روی R حد دارد.

(11) فرض کنید. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ و B عددی حقیقی باشد که $A>B$. پ

ثابت کنید عددی مثبت مانند وجود دارد که اگر $0<|x-a|<d$ ، آنگاه

$f(x)>\frac{A+B}{2}$.

حل) چون $A>B$ پس $A>B$ پس $A-B>0$ اگر قرار دهیم $e=\frac{A-B}{2}$ چون

حدود وجود دارد. پس $d>0$ وجود دارد که:

$$0<|x-a| \quad \Rightarrow \quad \left|f(x)-A<\frac{A-B}{2}\right|$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{A-B}{}<f(x)-A<f\,\frac{A-B}{}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{A-B}{2}<f(x) \Rightarrow \frac{A+B}{2}<f(x)$$

(12) فرض کنید $\sqrt{1+x^2}\le f(x)\le 1+|x|$. $\lim f(x)$ را حساب کنید

حل) داریم: $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1+x^2}=\lim\limits_{x\to 0}(1+|x|)=1$

پس طبق قضیه فشردگی $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$

7-5-2 تمرین صفحه 115

ب) استفاده از تعریف ثابت کنید:

1) $$\lim_{x\to -1} x\frac{2\sqrt{2}}{(x+1)^2}=+\infty$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{(x+1)^2}>M \quad \Rightarrow \quad (x+1)^2<\frac{2\sqrt{2}}{M} \quad \Rightarrow \quad |x+1|<\frac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt{M}}$$

پس کافی است. $d \le \frac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt{M}}$

2) $$\lim_{x\to -2} \frac{-3}{(x+2)^4} = -2$$

$$\frac{-3}{(x+2)^4} < -M \quad \Rightarrow \quad \frac{-3}{(x+2)^4} > M \quad \Rightarrow \quad (x+2)^4 < \frac{3}{M}$$

$$\Rightarrow \quad |x+2| < \sqrt[4]{\frac{3}{M}}$$

پس کافی است. $d \le \sqrt[4]{\frac{3}{M}}$

$$\frac{2x+3}{x-2} = 2 + \frac{5}{x+2} > M \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{x-2} > M-2 \quad \Rightarrow \quad x-2 < \frac{5}{M-2}$$

کافی است. $d \le \frac{5}{M-2}$

4) $$\lim_{x\to 1^+} \frac{-2}{\sqrt{x-1}} = -\infty$$

$$\frac{1-4x}{x-4} = \frac{15+16-4x}{x-4} = -4 - \frac{15}{x-4} > M \quad \Rightarrow \quad -\frac{15}{x-4} > M+4$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{15}{M+4} > x-4$$

6) $$\lim_{x\to 2^-} \frac{3x}{x-2} = -\infty$$

$$\frac{3x}{x-2} = 3 + \frac{6}{x-2} < -M \quad \Rightarrow \quad \frac{6}{x-2} < -(3+M)$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{6}{x+M} < x-2 \quad \Rightarrow \quad d = \frac{3}{3+M}$$

(7 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2-5}{2x^2-1}$$

$$\left|\frac{4x^2-5}{2x^2-1}-2\right|=\left|\frac{4x^2-5-4x^2+2}{2x^2-1}\right|=\left|\frac{3}{\left|2x^2-1\right|}\right|<e$$

$$\Rightarrow\quad \frac{3}{e}<2x^2-1 \quad\Rightarrow\quad \frac{3+e}{2e}<x^2$$

$$\Rightarrow\quad \sqrt{\frac{1-e}{e}}<x$$

کافی است $M>\sqrt{\frac{3+e}{2e}}$

(8 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+1}{x^2+1}=2$$

$$\left|\frac{2x^2+1}{x^2+1}-2\right|=\frac{1}{x^2+1}<e \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{e}<x^2+1$$

$$\Rightarrow\quad \sqrt{\frac{1-e}{e}}<x$$

کافی است. $\sqrt{\frac{1-e}{e}}<M$

(9 $$\lim_{x\to+\infty}\left(x^2+8x\right)=+\infty$$

$$x^2+8x=\left(x+4\right)^2-16 \quad >M \quad\Rightarrow\quad x>\sqrt{M+16}-4$$

کافی است $N>\sqrt{M+16}-4$

(10 $$\lim_{x\to+\infty}\left(-x^2+4x\right)=-\infty$$

$$-x^2+4x=-(x-2)^2+<-m$$
$$\Rightarrow \quad M+4<(x-2)^2$$
$$\Rightarrow \quad 2+\sqrt{m+4}<x$$

پس $N>2+\sqrt{M+4}$

(11 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+1}{x^2+1}=1$

$$\left|\frac{x^2+1}{x^2-1}\right|=\frac{2}{x^2-1}<e\Rightarrow\frac{2}{e}<x^2-1$$
$$\Rightarrow \quad \frac{2+e}{4e}< \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{2+e}{e}}<x$$

پس $M\sqrt{\dfrac{2+e}{e}}$

(12 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{2-x}=+\infty$

$$\frac{x^2}{2-x}>M \qquad \Rightarrow \qquad x^2>2M-Mx$$
$$\Rightarrow \qquad x^2>Mx+\frac{M^2}{e}>2M+\frac{M^2}{e}$$
$$\Rightarrow \qquad \left(x+\frac{M}{2}\right)^2>2M+\frac{M^2}{2}$$
$$\Rightarrow \qquad x>\sqrt{2M+\frac{M^2}{e}}-\frac{M}{2}$$

کافی است $N < \sqrt{2M + \frac{M^2}{e}} - \frac{M}{2}$

13) $\lim_{x \to +\infty} \left(x^5 - 3\right) = +\infty$

$$x^5 - 3 > M \quad \Rightarrow \quad x^5 > M + 3$$
$$\Rightarrow \quad x > \sqrt[5]{M + 3}$$

پس $N > \sqrt[5]{\ } M + 3$

14) $\lim_{x \to +\infty} \left(x^5 + x\right) = +\infty$

$$x^5 + x > M \quad \Rightarrow$$

به علت اینکه $x \to +\infty$ پس x را می‌توان نادیده گرفت.

$$x^5 x > x^5 + 1 > M \quad \Rightarrow \quad x > \sqrt[5]{M - 1} \quad \Rightarrow \quad N \geq \sqrt[5]{M - 1}$$

15) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x + 5}{2x - 4} = \frac{1}{2}$

$$\left| \frac{x + 5}{2(x + 1)} - \frac{3}{2} \right| = \left| \frac{2}{x + 1} \right| < e$$
$$\Rightarrow \quad \frac{4}{e} - 2 < x \quad \Rightarrow \quad M \geq \frac{4}{e} - 2$$

17) $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty$

$$\sqrt{x^2 + 1} > N \quad \Rightarrow x^2 > N - 1 \quad \Rightarrow x > \sqrt{N - 1} \qquad \Rightarrow M \geq \sqrt{N - 1}$$

18) $\lim_{x \to -\infty} -\sqrt{x^2 - 6x + 2} = +\infty$

$$-\sqrt{x^2 + 1} > N \quad \Rightarrow \quad (x - 3)^2 - 7 > N^2$$
$$\Rightarrow \quad x > \sqrt{N^2 + 7} + 3 \qquad M \geq \sqrt{N^2 + 7} + 3$$

(19 $$\lim_{x\to-\infty} -\sqrt{x^2-6x+2} = +\infty$$

$$-\sqrt{x^2-4} < -N \quad \Rightarrow \quad x^2-4 > N^2 \quad \Rightarrow \quad x > \sqrt{N^2+4}$$
$$\Rightarrow \quad M \geq \sqrt{N^2-4}$$

(20 $$\lim_{x\to-\infty} -\sqrt{x^2-2x-2} = +\infty$$

$$-\sqrt{x^2-2x-2} < N \quad \Rightarrow \quad (x-1)^2-3 > N^2 \quad \Rightarrow \quad x-1 > \sqrt{N^2+3}$$
$$\Rightarrow \quad x > 1+\sqrt{N^2-3}$$

(21 $$\lim_{x\to-\infty} -\sqrt{x^2-x} = -\infty$$

$$-\sqrt{x^2-x} > -N \quad \Rightarrow \quad \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} > N^2$$
$$\Rightarrow \quad x > \sqrt{\frac{1}{4}+N^2} + 1$$

پس $M \geq \sqrt{\frac{1}{4}+N^2} + 1$

25-5-2 تمرین صفحه 136

حدود زیر را حساب کنید.

1) $$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+4}}{x-2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|}{x-2} = \lim \frac{-x}{x} = -1$$

2) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+4}}{x+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|}{x+2} = \lim \frac{-x}{x} = 1$$

3) $$\lim_{x\to 2^+} \frac{|x|-1}{|x|-x} = \lim \frac{2-1}{0^-} = +\infty$$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+1}-x\right)=\lim \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}+^2\sqrt[3]{x^3+1}+^2}=\mathbf{0}$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left|x^2\right|-\left|x\right|^2}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left|n^2\right|-\left|n^2\right|}{n^2-1}=\mathbf{0}$

6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x}}=\lim\dfrac{\sqrt{x}\ \sqrt{1+\sqrt{\dfrac{1}{x}+\dfrac{\sqrt{x}}{x^2}}}}{\sqrt{x}}=1$

7) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{5+x^2}}{x^2}=\lim\dfrac{|x|}{2x}=\lim\dfrac{-x}{2x}=-\dfrac{1}{2}$

8) $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x-1}{\sqrt{3x-x^2}-1}=\mathbf{0}$

9) $\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{3+x}{x^2-5x+6}=\dfrac{6}{1\times\mathbf{0}^-}=\dfrac{6}{\mathbf{0}^-}=-\infty$

10) $\lim\limits_{x\to\mathbf{0}}\dfrac{\sqrt{x^2+4}=}{x^2}=\dfrac{2}{\mathbf{0}^+}=+\infty$

11) $\lim\limits_{x\to8}\dfrac{\sqrt{x+1}-3}{\sqrt{7+\sqrt[3]{x}}-3}=\lim\limits_{x\to8}\dfrac{(x-8)\left(\sqrt{7+\sqrt[3]{x}}+3\right)}{\left(\sqrt[3]{x}\right)\left(\sqrt{x+1}+3\right)}=\dfrac{6}{6}\lim\dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}=$

$\lim\limits_{x\to8}\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)=4+4+4=12$

12) $\lim\limits_{x\to27}\dfrac{\sqrt{\sqrt[3]{x+6}}-3}{(x-27)^3}=\lim\dfrac{\sqrt[3]{x}-3}{(x-27)(x-27)^2\left(\sqrt{\sqrt[3]{x}+6+3}\right)}=$

$\lim\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)$

13) $$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}-\sqrt{x}\right)=\lim\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x\sqrt{x+}}}}\ \sqrt{x}}$$

$$=\lim\frac{\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{x}}{x^2}}}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{x}}{x^2}}+1\right)}=\frac{1}{2}$$

14) $$\lim_{x\to 0^-}\frac{2[\cos x]}{x}=\frac{2-1}{0^-}=-\infty$$

15) $$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-1}=\lim\frac{\sqrt[12]{x^3}-\sqrt[12]{x^4}}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[12]{x^3}\left(1-\sqrt[12]{x}\right)}{\sqrt{x}-1}$$

$$=-\lim\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt[12]{x^{11}}+\sqrt[12]{x10}+\dots+\sqrt[12]{x+1})}=\frac{1-}{12}=\frac{-1}{6}$$

16) $$\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt{x^{2}+1})}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{x^4}{4}-1-\frac{x^2}{2}}{x^2}=\lim\left(\frac{x^2}{4}-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$$

2-6-28 تمرین صفحه 163

(1) در مورد پیوستگی هر یک از توابع زیر سسسروی بازده داده شده تحقیق کنید.

الف) $f(x)=\dfrac{7}{x-3}$ روی بازه های $[0\ ,\ 3]\ ,\ (x)\ ,\ (\infty+\ ,\ 2],[2\ ,+\infty)\ ,\ (-\infty\ ,\ 2]$

ب) تنهـــا نقطـــه ناپیوســـتگی $x=3$ اســـت، پـــس تـــابع فقـــط روی $(-2,2)\ [0,2)\ ,\ [0\ ,\ 2]\ ,\ (-\infty\ ,\ 2]\ [2\ ,+\infty)$.

حل) نقـــاط $x=\pm 2$ نقـــاط ناپیوســـتگی تـــابع اســـت. پـــس بـــازه‌هـــای $(-2\ ,-\infty)\ ,\ (0,2]\ (-2,2)$ بازه‌های پیوستگی‌اند.

ج) $f(x)=\sqrt{\dfrac{2+x}{25-x^2}}$ روی بـازه هـای $(-\infty\ ,\ -5)$ و $[-\infty,-5]$, $[-5,-2]$ و $[-2,5)$, $(-2,5)$, $[5,\infty)$, $(5,+\infty)$

حل) ابتدا دامنه تابع را به دست می آوریم.

$D_f=(-\infty,-5)\cup[-2,5)$

	-5	-2	5	
$25-x^2$	-	+	+	-
$2+x$	-	-	+	+

طبق دامنه: تابع روی $[-5,-2],[-2,5],(-\infty+,5],(5,+\infty)$ ناپیوسته است.

تابع روی $(-\infty,-5)$, $[-2,5)$, $(-2,5)$ پیوسته است.

(2) فواصلی را تعیین کنید که تابع داده شده روی آنها پیوسته باشد.

1) $f(x)=\sqrt{x^2-x-12}$

حل) دامنه تابع برابر $D_f=(-\infty,-3)\cup[4,+\infty)$ است. این بازه‌ها فواصل پیوستگی اند.

2) $f(x)=\dfrac{7}{x^2-9}$.

حل) $D_f=R-\{\pm 3\}=(-\infty,-3)\cup(-3,3)\cup(3,+\infty)$ این فواصل فواصل پیوستگی اند.

3) $f(x)=\sqrt[3]{x^2+x-1}$.

حل) چون فرجه رادیکال فرد و زیر رادیکال همه جا پیوسته است. فاصله پیوستگی R است.

4) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-3x+2}{x-4}}$

$D_f=[1,2]\cup(4,+\infty)$

		۱	۲	۴
x-4	-	-	-	+
x^2-3x+2	+	-	+	+

(3) نقاط ناپیوستگی توابع زیر را تعیین کنید.

1) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$. حل) x=2 نقطه ناپیوستگی است.

2) $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x-1}$. حل) x=1 نقطه ناپیوستگی است.

3) $f(x)=\dfrac{x}{x}$. حل) x=1 نقطه ناپیوستگی است.

4) $f(x)=\dfrac{(x-1)(x^2-5x+6)}{x^2-3x+2}$.

حل) $x=1,2$ نقاط ناپیوستگی اند.

5) $$f(x)=\begin{cases}-2x+1 & x\le -1\\ \sqrt{1-x^2} & -1<x<1\\ 2x+1 & 1<x\end{cases}$$

حل) تابع در x=-1 و x=1 ناپیوستگی دارد. چون تابع در x=1 تعریف نشده و در x=-1 حد ندارد.

6) $f(x)=\begin{cases}[x] & -2<x<0 \\ x-[x] & 0\le x<2\end{cases}$

حل) تابع در نقاط x=-1 و x=1 از دامنه اش ناپیوسته است.

این تابع در x=0 پیوسته است چون $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)=0$

4) پیوستگی تابع داده شده را در نقطه یا فاصله داده شده بررسی کنید.

1) $f(x)=x-[x] \qquad x_0=1 \;, \qquad x_0=2$

حل) تابع در هر دو عدد صحیح داده شده ناپیوسته است.

2) $f(x)=\begin{cases}x+\dfrac{|x-1|}{x-1} & x\neq 1 \\ 0 & x=1\end{cases} \qquad x_0=1$

این تابع در $x_0=1$ ناپیوسته است چون $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=2\neq 1=f(1)$

3) $f(x)=\begin{cases}x^2+\dfrac{2x}{|x|} & , \quad x\neq 0 \\ 2 & x=0\end{cases} \qquad x_0=0$

این تابع در $x_0=0$ ناپیوسته است چون $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-2\neq 2=f(0)$

4) فاصله $(4,6)$ و $f(x)=\dfrac{5}{\sqrt{2-x^2}}$.

دامنه تابع برابر $(-\sqrt{2}\,,+\sqrt{2})$ است پس تابع f روی $(4,6)$ ناپیوسته است.

5) در فاصله $[1,+\infty)$, $f(x)=\sqrt{x^2-1}$.

دامنه تابع برابر $(-\infty\,,\,0-1]\cup[1\,,+\infty)$ است پس تابع روی $[1\,,+\infty)$ پیوسته است.

6) در فاصله $(-\infty,2]$ ، $f(x)=\sqrt{2-x}$.

چون $D_f=(-\infty,2]$ است پس تابع روی $(-\infty,2]$ پیوسته است.

7) در فاصله $[-5,5]$ ، $f(x)=\sqrt{25-x^2}$.

دامنه تابع برابر $[-5,5]$ است که تابع روی آن پیوسته است.

8) $x_0=1$ $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{4}{|x|} & x>1\\ 2[2x]+1 & x<1\end{cases}$$

تابع در $x_0=1$ تعریف نشده است پس در این نقطه ناپیوسته است.

(5) اگر تابع f با ضابطه $f(x)=\dfrac{3x^2-12}{x-2}$ پیوسته باشد. $f(2)$ را حساب کنید.

حل) $$f(2)=\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{3(x-2)(x+2)}{x-2}=12$$

(6) تابع f با ضابطه $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-|x|}{x} & , & x\neq 0\\ 2 & , & x=0\end{cases}$ در نقطه x=0 چه نوع ناپیوستگی دارد؟

حل) ناپیوستگی اساسی چون حد وجود ندارد زیرا:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=0$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim\frac{2x}{x}=2$$

(7) به ازاء چه مقدار a تابع f با ضـابطه $f(x)=\begin{cases}2x\cos\frac{1}{x} & , \quad x\neq 0\\ a & , \quad x=0\end{cases}$ در x=0 پیوسته است.

حل) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} 2x \cos\frac{1}{x} = 0 \Rightarrow a=0$

(8) $f(x)=\begin{cases}-2\sin & -p\le x\le -\frac{p}{2}\\ a\sin x+b & -\frac{p}{2}<x<\frac{p}{2}\\ \cos x & \frac{p}{2}\le x\le p\end{cases}$ مقدار a و b را بیابید.

$$\lim_{x\to \frac{p}{2}^-} f(x)=a+b=f(\frac{p}{2})=0 \qquad \Rightarrow \qquad a+b=0$$

$$\lim_{x\to -\frac{p}{2}^+} f(x)=-a+b=f(-\frac{p}{2})=2 \quad \Rightarrow -a+b=2$$

$$\Rightarrow b=1 \qquad , \qquad a=-1$$

(99) تابع با ضابطه $f(x)=\left[\frac{x+1}{2}\right]+\left[\frac{x-1}{2}\right]$ در $x=1$ چه نوع بستگی دارد؟

حل) داریـــم: $f(1)=1$ تعریــــف شــــده اســــت. ناپیوســـتگی اساســـی است.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 1^-} f(x)=-1$$

(10) اگر $f(x)=\begin{cases}2x+ax\ , & x>2\\ ax^2+1\ , & x\le 2\end{cases}$ در R پیوسته باشد مقدار a را حساب کنید.

حل) چون ضابطه ها روی R پیوسته اند کافی است پیوستگی در x=2 بررسی شود.

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(2x+ax)=4+2a=f(2)=4a+1$$
$$\Rightarrow 4+2a=4a+1 \Rightarrow 2a=3 \Rightarrow a=\frac{3}{2}$$

11) به ازاء چه مقدار a تابع f با ضابطه $f(x)=\begin{cases}[[x]-x]\ , & x\notin z\\ a\ , & x\in z\end{cases}$ همواره پیوسته است؟

حل) با توجه به خواص جزء صحیح همواره $0\le x-[x]<1$ پس $-1<[x]-x\le 0$ بنابراین برای $x\notin z$ همواره داریم $[[x]-x]=-1$ پس باید $a=-1$ باشد.

12) اگر تابع $f(x)=\begin{cases}2x+a\ , & x>1\\ 3\ , & x=1\\ bx-1\ , & x<1\end{cases}$ در x=1 پیوسته باشد a و b را حساب کنید.

حل)
$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=f(1) \Rightarrow \lim_{x\to 1^+}(2x+a)=3 \Rightarrow 1+a=3$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=f(1) \Rightarrow \lim_{x\to 1^-}(bx-1)=3 \Rightarrow b-1=3$$
$$\Rightarrow \quad a=2\ ,\quad b=4$$

13) به ازاء چه مقدار a تابع $f(x)=\begin{cases}e^x+e^{-x}\ , & x\ge 0\\ 2a-x\ , & x<0\end{cases}$ در نقطه x=0 پیوسته

است.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(2a-x)=2a=f(0)=1+1=2$$

حل) $\Rightarrow a=1$

14) a و b را چنان تعیین کنید که تابع زیر در نقطه $x_0=4$ پیوسته باشد.

$$f(x)=\begin{cases} a[x-2]+b & , \quad x<4 \\ \left[\dfrac{x}{3}\right]+b & , \quad x=4 \\ \dfrac{x^2-16}{x-4} & , \quad x>4 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 4^+} f(x)=\lim_{x\to 4^+}\frac{x^2-16}{x-4}=8=f(4)=1+b$$

حل) $\lim_{x\to 4^-} f(x)=\lim_{x\to 4^-}(a[x-2]+b)=5a+b=f(4)=1+b$

$$1+b=8 \qquad \Rightarrow b=7 \qquad 5a=1\Rightarrow a=\frac{1}{5}$$

15) اگر تابع با ضابطه $f(x)=(a^2-4a)[x]+3[x]+\dfrac{x}{x^2+1}$ در R پیوسته باشد مقدارهای a را پیدا کنید.

حل) نقطه $x_0=0$ را در نظر بگیرید داریم: $f(0)=0$ و

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=-(a^2-4a)-3=f(0)=0$$

$$\Rightarrow a^2-4a+3=0 \qquad \Rightarrow \qquad a=1 \quad a=3$$

16) پیوستگی تابع $f(x)=[x+[x]].[1-x+[x]]$ را در X=0 بررسی کنید.

حل) واضح است که $f(0)=0$ است.

فرض کنید $x=0/1$ از راست نزدیک صفر باشد. و $f(0/1)=[0/1+0].[1-0/1+0]=0$ اگر $x=-0/1$ را از چپ نزدیک صفر در نظر بگیریم.

$$f(-0/1)=[-0/1-1][1+0/1+1]=0$$

بنابراین: $$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=0$$

پس تابع در $x_0=0$ پیوسته است.

17) تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}4x^3-9x^2+5x+1 & , \quad x\in z\\ 1 & , \quad x\notin z\end{cases}$ مفروض است. این تابع در چند نقطه صحیح پیوسته است. آیا این تابع در $x_0=\frac{5}{4}$ و $x_0=\sqrt{2}$ و $x_0=\frac{7}{3}$ پیوسته است.

حل) چون برای $x\notin z$، داریم $f(x)=1$، اگر x_0 عددی صحیح باشد آن گاه $\lim_{x\to x_0} f(x)=1$. پس باید اعداد صحیحی را بیابیم که $f(x_0)=1$ باشد.

$$4x^{3x}-9x^2+5x+1=1\Rightarrow \qquad 4x^3-9x^2+5x=0 \qquad \Rightarrow x(4x^2-9x+5)=0$$

$$\Rightarrow x_0=0 \quad , \quad x_0=1 \quad , \quad x_0=\frac{5}{4}$$

این تابع در اعداد صحیح $x_0=0$ و $x_0=1$ پیوسته است.

این تابع در نقاط $x_0=\frac{5}{4}$, $x_0=\sqrt{2}$, $x_0=\frac{7}{3}$ پیوسته است زیرا این اعداد

صحیح نیستند و برای همه آنها $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = 1$ است.

18) مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که تابع زیر در $x_0 = -2$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{\sqrt{x^2 + 4x + 4}} & , \quad x < -2 \\ a & , \quad x = -2 \\ b + [x^2] & , \quad x > -2 \end{cases}$$

حل) $\lim_{x \to -2^+} f(x) = b + 4 = f(-2) = a$

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} \frac{x^2 - 4}{|x + 2|} = \lim_{x \to -2^-} -\frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)} = 4 = a$$

$$\Rightarrow a = 4 \quad , \quad b = 0$$

19) a و b را طوری پیدا کنید که تابع زیر همواره پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} 2ax^2 + bx - 3 & , \quad x < 1 \\ x^3 - x + 4a & , \quad 1 \le x < 2 \\ 5x - 2b & , \quad x \ge 2 \end{cases}$$

حل) چون ضابطه ها چند جمله ای اند هر کدام همواره پیوسته اند باید پیوستگی در $x_0 = 1$ و $x_0 = 2$ برقرار باشد.

$$\lim_{x\to1^-} f(x)= \lim_{x\to1^-}(2ax^2+bx+3)=2a+b+3$$

$$\lim_{x\to2^-} f(x) = \lim_{x\to2^-}(x^3-x+4a)=8-2+4a$$

$$f(1)=1-1+4a=4a \quad , \qquad f(2)=10-2b$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2a+b+3=4a\\6+4a=10=2b\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}-2a+b=-3\\4a+2b=4\end{cases}$$

$$\Rightarrow 4b=-2 \quad\Rightarrow\quad b=-\frac{1}{2},\quad a=\frac{5}{4}$$

2-6-32 تمرین صفحه 170.

1) فرض کنید تابع g در نقطه 0 پیوسته باشد $g(0)=0$, f تابعی باشد که در یک همسایگی نقطه صفر در نامساوی $|f(x)|\le g(x)$ صدق کند. ثابت کنید f در نقطه 0 پیوسته است.

حل)

$$|f(x)|\le g(x) \quad\Rightarrow\quad |f(0)|\le g(0)=0 \quad\Rightarrow\quad |f(0)|=0$$

$$-|f(x)|\le f(x)\le|x| \Rightarrow \quad 0\le f(0)\le 0 \quad\Rightarrow\quad f(0)=0|$$

حال چون g پیوسته است پس $\lim_{x\to0} g(x)=0$ از طرفی داریم:

$$-g(x)\le f(x)\le g(x)$$

چون $f(0)=\lim f(x)=0$ $\lim g(x)=\lim -g(x)=0$ در نتیجه پس f در صفر پیوسته است.

2) فرض کنید تابع f در نقطه a پیوسته است.

الف) فرض کنید تابع f در نقطه a پیوسته است.

الف) اگر $f(a) > 0$ ثابت کنید f در یک همسایگی a مثبت است.

حل)

چون $f(a) > 0$ است اگر $e = \frac{f(a)}{2}$ را در نظر بگیریم : $d > 0$ موجود است به طوری که

$$|x-a| < 4 \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - f(a)| < \frac{f(a)}{2}$$
$$\Rightarrow \quad -\frac{f(a)}{2} < f(x) - f(a) < \frac{f(a)}{2}$$
$$\Rightarrow \qquad \frac{f(a)}{2} < f(x) < \frac{3}{2} f(a)$$

چون $f(a) > 0$ پس f در همسایگی d از a ، مثبت است.

ب) اگر $f(a) < 0$ ثابت کنید f در یک همسایگی a منفی است.

حل)

چون $f(a) < 0$ پس $-f(a) > 0$ اگر قرار دهیم $e = -\frac{f(a)}{2}$ چون f در a پیوسته است. $4 > 0$ موجود است به طوری که

$$|x-a| < 4 \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - f(a)| < -\frac{f(a)}{2}$$
$$\Rightarrow f(a) + \frac{f(a)}{2} < f(x) < f(a) - \frac{f(a)}{2}$$

پس $\frac{3}{2} f(a) < f(x) < \frac{f(a)}{2}$

حال چون $f(a) < 0$ پس در همسایگی d از a ، f منفی است.

3) فرض کنید تابع f در x_0 پیوسته باشد و در هر همسایگی x نقاطی مانند x_1 , x_2 وجود داشته باشد که $f(x_1) < 0$, $f(x_2) > 0$. ثابت کنید $f(x_0) = 0$.

حل) اگر $f(x_0) \neq 0$ طبق مسأله (2) همسایگی هایی حول x_0 وجود دارد که روی آنها $f(x) > 0$ یا $f(x) < 0$. بنابراین نقاط x_1 , x_2 با شرایط فوق وجود ندارد پس $f(x_0) = 0$ است.

4) مقدار a را طوری تعیین کنید که تابع زیر در نقطه $x = 0$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1} & , \quad x \neq 0 \\ a & , \quad x = 0 \end{cases}$$

حل) $$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{1+\frac{x}{2}-1}{1+\frac{x}{3}-1} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

5) فرض کنید در نقاط دیگر

$$f(x) = \begin{cases} [x+1]\sin\dfrac{1}{x} & , \quad x \in (-1,0) \cup (0,1) \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

پیوستگی f در نقطه های 0 , 1 بررسی کنید.

حل) $$x_0 = 0 \qquad , \qquad \lim_{0\to -} [x+1]\sin\frac{1}{x} = 0 \times k = 0$$

حد راست این تابع وجود ندارد پس تابع در صفر پیوسته نیست.

برای $x_0 = 1$ حد راست برابر 0 است زیرا:

$$x \to 1^+ \Rightarrow \quad x > 1 \quad \Rightarrow \quad f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1 \times \sin 1 = \sin 1 \neq 0$$

پس تابع در نقطه 1 پیوسته نیست.

6) $$f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \\ -1 & , \quad x < 0 \end{cases}$$

ناپیوستگی تابع های fog و gof را تعیین کنید.

حل: چون همواره $0 \le x - [x] < 1$ پس $g(x) > 0$ است لذا $fog(x) = f(g(x)) = 1$ این تابع همواره پیوسته است.

برای gof داریم:

$$gof(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 1 & x = 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases}$$

پس $gof(x) = 1$ همواره پیوسته است.

توجه: این مثال نشان می دهد ممکن است دو تابع ناپیوسته باشند ولی ترکیب آنها پیوسته باشد.

7) ثابت کنید تابعی مانند f در نقطه a پیوسته است اگر و فقط اگر

$$\lim_{x \to 0} f(x + a) = f(a)$$

حل) اگر f در a پیوسته باشد. به ازای $e > 0$ داده شده $d > 0$ موجود است که

$$|x-a| < d \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - f(a)| < e$$

اگر به جای x , $x+a$ قرار دهیم داریم:

$$|x-0| = (x+a) - a < d \Rightarrow \qquad |f(x+a) - f(a)| < e$$

و این یعنی $\lim\limits_{x\to 0} f(x+a) = f(a)$

حال فرض کنید: $\lim\limits_{x\to 0} f(x+a) = f(a)$

اگر به جای x قرار دهیم t-a هرگاه $x \to 0$ آن گاه $t \to a$.

پس $\lim\limits_{t\to a} f(t) = f(a)$ پس f در a پیوسته است.

8) نقاط ناپیوستگی هر یک از توابع زیر را تعیین کنید.

1) $f(x) = \begin{cases} x & |x| \le 1 \\ 1 & |x| > 1 \end{cases}$

حل) داریم: $f(1) = f(-1) = 1$

تابع در 1 پیوسته است.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x = 1$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} 1 = 1 \Rightarrow$$

تابع در $x = -1$ ناپیوسته است.

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+} x=-1$$
$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim 1=1 \qquad \Rightarrow$$

2) $f(x)=\begin{cases}\cos\frac{p}{2}x & , |x|\le 1\\ |x-1| & , |x|>1\end{cases}$

حل) داریم $f(-1)=f(1)=0$.

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}\cos\frac{p}{2}x=0$$
$$\Rightarrow$$
$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}|x-1|=2$$

تابع در 1- ناپیوسته است.

3) $f(x)=x[x]$

حل) تابع در اعداد صحیح به غیر از صفر ناپیوسته است. در صفر:

$$\lim_{x\to 0} x[x]=0\times Q=0 \ = f(0)$$

4) $f(x)=x-[x]$

حل) تابع در تمام اعداد صحیح ناپیوسته است.

5) $f(x)=\left[\frac{1}{x}\right] \qquad , \qquad x\in R-\{0\}$

این تابع در نقاط به صورت $\frac{1}{n}$ که $n\in \mathrm{Z}$ است ناپیوسته است.

6) $f(x)=\sqrt{x}-\left[\sqrt{x}\right]$ این تابع در تمام نقاطی که $\sqrt{x}=n$ و n عددی طبیعی یا صفر است ناپیوسته است.

7) $$f(x)=\begin{cases} x^2 & , \quad x\in Q \\ -x^2 & , \quad x\notin Q \end{cases}$$

حل) این تابع فقط در صفر پیوسته است چون هر دنباله $\{a_n\}$ گویا یا اسم که به صفر میل کند $a_n{}^2$, $-a_n{}^2$ نیز به صفر میل می کند.

برای سایر نقاط: اگر $x_0\in Q$ باشد $a_n=x_0+\frac{1}{n}$ در Q قرار دارد و

$$f(a_n)=(x_0+\frac{1}{n})^2\rightarrow x_0{}^2 = f(x_0)$$

و $b_n=x_0+\frac{1}{\sqrt{n}}$ در Q قرار ندارد و

$$f(b_n)=-(x_0+\frac{1}{\sqrt{n}})^2\rightarrow -x\neq f(x_0)$$

مشابه این تابع در اعداد اصم نیز ناپیوسته است.

8) $$f(x)=\begin{cases} x^4 & x\in[0\,,1] \\ x+1 & x\in(1,3) \end{cases}$$

حل) این تابع در $x_0=1$ ناپیوسته است چون

$$\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}(x+1)=2 \quad\Rightarrow$$
$$f(1)=1$$
تابع پیوسته نیست

توجه کنید دامنه تابع برابر $[0,3]$ است که در $x_0=1$ پیوسته نیست.

9) $$x\in[0,1]\ ,\quad f(x)=\frac{1}{2}-x+\frac{1}{2}[2x]-\frac{1}{2}[1-2x]$$

حل) داریم

$$f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2} \quad , \quad f(1)=1 \quad , \quad f(0)$$

$$f(x)=\frac{1}{2}-x+\frac{1}{2}[2x]-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}[-2x]$$

$$=-x+\frac{1}{2}([2x]-[-2x])$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=0-(\frac{-1}{2})=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

تابع در صفر ناپیوسته است.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)= -1+\frac{1}{2}(2-(-3))=-1+\frac{5}{2}$$

تابع در 1 پیوسته نیست

$\Rightarrow$

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}^+} f(x) = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1-(-2))=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=1$$

تابع در $\frac{1}{2}$ پیوسته نیست $\Rightarrow$

9) فرض کنید $f(x)=\sqrt{x-4}$ ثابت کنید f روی بازه $[4,10]$ پیوسته است.

حل) چـون بـرای هـر $x\in[4,10]$, $x-e\geq 0$ اسـت و تـابع $x-4$ پیوسته است پس f روی این بازه پیوسته است.

10) فرض کنید $f:[0,+\infty]\to R$ تـابعی دلخـواه باشـد و $g(x)=f(|x|)$, ثابـت کنید f در نقطه 0 از راست پیوسته است اگر و فقط اگر g در نقطه 0 پیوسته باشد.

حل) فـرض کنیـد f در 0 از راسـت پیوسـته باشـد. چـون $|x|\geq 0$ اسـت پـس

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0} f(|x|)=f(0)=g(0)$$

پس g در صفر پیوسته است.

اگر g در صفر پیوسته باشد. آن گاه

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} f(|x|) = \lim_{x\to 0} g(x) = g(0) = f(0)$$

پس f از راست در 0 پیوسته است.

11) آیا معادله $x^5 - 18x + 2 = 0$ ریشه ای در بازه $[-1 , 1]$ دارد؟

حل) بله اگر $f(x) = x^5 - 18x + 2$ در نظر بگیریم:

$$\begin{array}{l} f(0) = 2 \\ f(1) = -15 \end{array} \quad \Rightarrow \quad f(0)f(1) < 0 \quad \Rightarrow$$ تابع دارای ریشه است

12) ثابت کنید معادله $x^5 - 3x^2 - x + 1 = 0$ حداقل یک ریشه درباره $(0,2)$ دارد.

حل) $f(x) = x^5 - 3x^2 - x + 1$ را در نظر بگیرید.

حداقل یک ریشه دارد.

$$\begin{array}{l} f(0) = 1 \\ f(1) = 1 - 3 - +1 = -2 \quad \Rightarrow \quad f(0)f(1) < 0 \quad \Rightarrow \end{array}$$

13) فرض کنید تابع $f : [1,2] \to [0,3]$ پیوسته باشد و $f(2) = 3$ و $f(1) = 0$

ثابت کنید عددی مانند x_0 در بازه $(1,2)$ موجود است که $f(x_0) = x_0$.

حل) اگر تابع $h(x) = f(x) - x$ را در نظر بگیرید. داریم:

$$h(1) = f(1) - 1 = 0 - 1 = -1$$
$$h(2) = f(2) - 2 = 3 - 2 = 1$$

چون $h(1)h(2) < 0$ است. پس x در $(1و2)$ موجود است که $h(x_0) = 0$ پس

$$f(x_0) = x_0$$

14) فرض کنید $f(x)=\frac{x^3}{4}-\sin(px)+3$. آیا عددی مانند x_0 در بازه (2 و 2-) وجود دارد که $f(x_0)=\frac{7}{3}$ ؟

حل) چون $f(2)=2+3=5$, $f(-2)=-2+3=1$ و تابع f روی (2 و 2-) پیوسته است و $1<\frac{7}{3}<5$ پس x_0 وجود دارد.

15) فرض کنید تابع $f:[-1,1]\to R$ پیوسته باشد, $f(0)=0$, $x\in[-1,1]$, $f(x)\neq 2$.

حل) اگر به ازای x_0 , $f(x_0)>2$ شود, طبق قضیه مقدار میانی تابع هر مقدار بین $f(0)=0$, $f(x_0)$ را خصوصا مقدار 2 را می گیرد یعنی x ی وجود دارد که $f(x)=2$. و این تناقض است. پس همواره $f(x)<2$ است.

16) فرض کنید تابع $f:[3,5]\to R$ پیوسته باشد. $f(3)=30$, $x\in[3,5]$, $f(x)\neq 4$ ثابت کنید $f(5)<4$.

حل) اگر $f(5)>4$ باشد, چون تابع پیوسته است مقادیر بین $f(3)=3$ و $f(5)$ را خصوصا مقدار 4 را می گیرد , یعنی x وجود دارد که $f(x)=4$ که تناقض با فرض است. پس $f(5)<4$ است.

17) فرض کنید تابع $f:[0,3]\to R$ پیوسته باشد، $f(0)=1$ و معادله $f(x)=0$ هیچ ریشه ای دربازه $[0,3]$ نداشته باشد ثابت کنید برای هر $x\in[0,3]$ ، داریم $f(x)>0$

حل) برای $x\in[0,3]$ $[0,x]$ را در نظر بگیرید, f روی این بازه پیوسته است. چون $f(0)=1$, اگر $f(x)<0$ باشد, حتماً f روی این بازه ریشه داردکه تناقض است،

پس همواره $f(x)>0$.

(18) فرض کنید $f:R\to R$, $f(0)=0$

$$f(x+y)\le f(x)+f(y)\ ,\ x,y\in R$$

ثابت کنید اگر f در نقطه 0 پیوسته باشد در هر نقطه دیگر هم پیوسته است

$$\lim_{x\to 0}\ f(x+a)=f(a)$$

حل) نقطه دلخواه a را در نظر بگیرید نشان می دهیم

برای $e>0$ داده شده , $d>0$ وجود دارد که

$$|x|<d\quad\Rightarrow\quad |f(x)|<e$$

$$f(x+a)\le f(x)+f(x)$$

$$\Rightarrow\quad f(x+a)-f(a)\le f(x)$$

$$\Rightarrow\quad |x|<d\quad\Rightarrow |f(x+a)-f(a)|\le |f(a)|<e$$

و این یعنی $\lim_{x\to 0}\ f(x+a)=f(a)$ پس f در a پیوسته است.

(19) فرض کنید I بازه ای باز باشد، تابع‌های $f,g:I\to R$ پیوسته باشد. و:

$$s(x)=Min\{f(x),g(x)\}\ \ x\in I$$

$$t(x)=Max\{f(a),g(x)\}\ \ x\in I$$

ثابت کنید s و t پیوسته اند:

حل) توابع s و t را می توان به صورت زیر نوشت:

$$s(x)=\frac{f(x)+g(x)}{2}-\frac{|f(x)-g(x)|}{2}$$

$$t(x)=\frac{f(x)+g(x)}{2}-\frac{|f(x)-g(x)|}{2}$$

با توجه به فرض پیوستگی f و g همه توابع سمت راست پیوسته اند.

(20) دو تابع مانند f و g در نظر بگیرید. آیا ممکن است؟

الف) f در نقطه a پیوسته باشد و g در نقطه a پیوسته نباشد اما fog در نقطه a پیوسته باشد.

حل) تابع $f(x)=x^2$ و $g(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}$ را در نظر می‌گیریم

f در $a=0$ پیوسته است ولی g در $a=0$ پیوسته نیست اما:

$$fog(x)=1$$

همه جا پیوسته است.

ب) f در a پیوسته باشد و g در a پیوسته نباشد اما fog در a پیوسته باشد.

حل) مثال قسمت الف را در نظر بگیرید اینبار $gof(x)=1$.

ج) نه f در a پیوسته باشد ونه g اما fog در a پیوسته باشد.

حل) تمرین (6) مثال مورد نظر است

(21(الف) ثابت کنید هر چند جمله ای از درجه فرد حد اقل یک ریشه حقیقی دارد.

حل) اگر f(x) چند جمله ای درجه فرد باشد آنگاه

حداقل یک ریشه دارد.

ب) فـرض کنیـد $p(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ و $d<0$ ثابـت کنیـد معادلـه $p(x)=0$ حد اقل دو ریشه متمایز دارد.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

$$\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

حل) چـــــــــــــــــــون $f(0)=d<0$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty>0$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\infty>0$ و.

پس حد اقل ریشه در بازه $(-\infty,0)$ و یک ریشه در بازه $(0,+\infty)$ دارد.

22) فـــــــــرض کنیـــــــد n عــــــــــددی زوج باشـــــــــد $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+.....+a_1x+a_0$ و $a_na_0\neq 0$. ثابـت کنیـد معادلـه $f(x)=0$ حداقل دو ریشع حقیقی دارد.

حل) چـــون $a_na_0<0$ فــرض کنیـد $a_0<0$ و $a_n>0$. چـــون n زوج اســـت و $a_n>0$ پس

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} a_n x^n=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(a)=\lim_{x\to+\infty} a_n x^n=+\infty$$

از طرفی $f(0)=a:<0$ پس حد اقـل یـک ریشـه حقیقـی در $(-\infty\ ,\ 0)$ و یـک ریشـه حقیقی در $(0\ ,\ +\infty)$ وجود دارد.