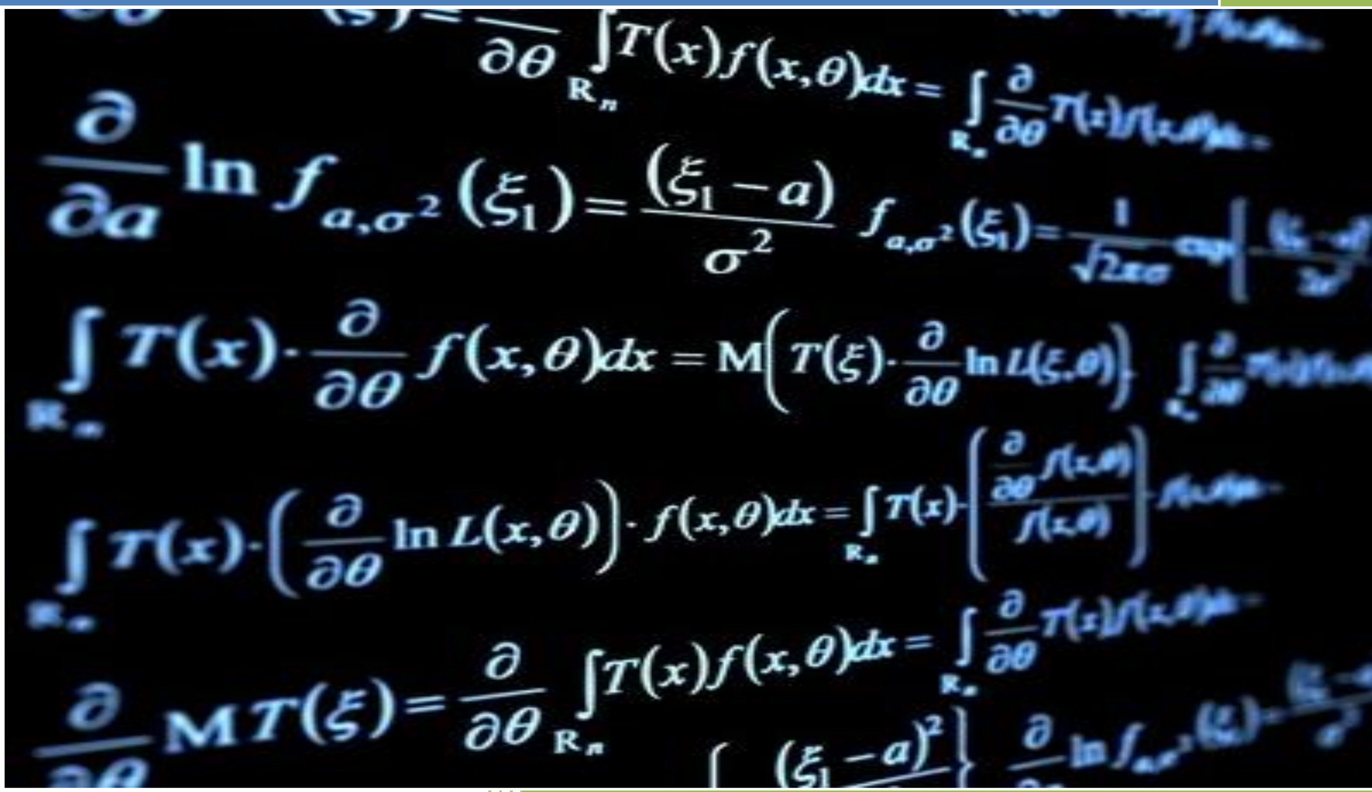
فصل ششم:
انتگرال های چندگانه

باشگاه مهندسان سمنان

www.sem-eng.com

جزوه ریاضی 2



نویسنده جزوه: ایمان شریعت پناهی

اسکن جزوه: محمدرضا خالصی

استاد: دکتر محمود بیدخام

Subject:
Year. Month. Date.

فصل پنجم

انتگرال ۲ گانه و انتگرال چند گانه

باش

ابتدا ۲ قضیه مهم را بیان می کنیم:

۱- اگر تابع دو متغیره $f(x,y)$ بر روی ناحیه بسته و متناهی R پیوسته باشد آنگاه $f(x,y)$ در R انتگرال پذیر است.

۲- (قضیه فوبینی) اگر $f(x,y)$ بر ناحیه مستطیلی $c \le y \le d$, $a \le x \le b$: R پیوسته باشد داریم:

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$$

* این قضیه بیان می کند که انتگرال های روی مستطیل ها را می توان به صورت دو بار انتگرال گیری محاسبه کرد.

* و بیان می کند برای انتگرال گیری در انتگرال ۲ گانه ترتیب را می توان عوض کرد.

مثال) مطلوب است محاسبه $\iint_R f(x,y)\,dA$ به ازای $f(x,y) = 1 - 6x^2y$ و

$R: \; 0 \le x \le 2 \;,\; -1 \le y \le 1$

بنابه قضیه ۲ خواهیم داشت:

$$\iint f(x,y)\,dA = \int_{-1}^{1}\int_0^2 (1 - 6x^2y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} \left[x - 2x^3y\right]_0^2 dy$$

$$= \int_{-1}^{1} (2 - 16y)\,dy = \left[2y - 8y^2\right]_{-1}^{1} = 4$$

حال با معکوس کردن ترتیب انتگرال گیری همین نتیجه بدست خواهد آمد:

$$\int_0^2\int_{-1}^{1}(1-3x^2y)\,dy\,dx$$

$$=\int_0^2\left[y-3x^2y^2\right]_{-1}^{1}dx=\int_0^2\left[(1-3x^2)-(-1-3x^2)\right]dx$$

$$=\int_0^2 2\,dx=4$$

قضیه ۱- اگر ناحیه R عبارت باشد: $a\le x\le b$ ، $f_1(x)\le y\le f_2(x)$ با این شرط که f_1 و f_2 بر $[a,b]$ پیوسته باشند آنگاه

$$\iint_R f(x,y)\,dA=\int_a^b\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

*(فرض شده $f(x,y)$ بر R پیوسته باشد)

۲- اگر ناحیه R عبارت باشد $c\le y\le d$ ، $g_1(y)\le x\le g_2(y)$ با این شرط که g_1 و g_2 بر $[a,b]$ پیوسته باشند آنگاه

$$\iint_R f(x,y)\,dA=\int_c^d\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

خواص مهم انتگرال) اگر $f(x,y)$ و $g(x,y)$ توابع انتگرال پذیر باشند که به ازای هر نقطه (x,y) در R داشته باشیم $f(x,y)\le g(x,y)$ آنگاه خواهیم داشت $\iint_R f(x,y)\,dA\le\iint_R g(x,y)\,dA$

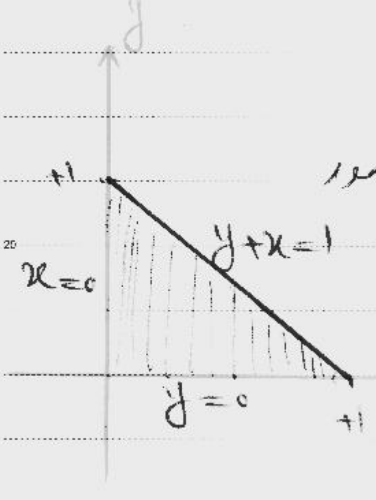
توضیحی برای تعیین حدی و در حالت کلی عمود دلیل شکل تابع نسبت به محور y ها منظم است یعنی هر خطی موازی محور y ها اگر رسم شود اگر تابع را قطع کند حداکثر در ۲ نقطه باید قطع کند. در تشخیص و ترسیم برای شکل بستر حل مسائل برای ارتباط وقتی شکل را رسم کردیم برای امتحان این که شکل را باید تشخیص داده شود صحیح است یا خیر ابتدا خطی موازی محور yها رسم کرده و باید از پائین به عمودی $f_1(x)$ و از بالا به عمودی $f_2(x)$ برسیم.

حال برای حالت دوم نیز همین شکل است فقط باید خطی موازی محور xها رسم کنیم و اندازه آن است که شکست ببینیم ابتدا به $g_1(y)$ و سپس به $g_2(y)$ برسیم. نمونه مثال زیر این موضوع به طور کامل توضیح داده خواهد شد.

مثال) با فرض اینکه $f(x,y)=x^2y+x$ مطلوب است انتگرال ۲ گانه این تابع در ناحیه:

$$R:\{(x,y) \mid x\geq 0,\ y\geq 0,\ y+x\leq 1\}$$

حل) ابتدا ناحیه را رسم کنید.



برای محاسبه انتگرال ۲ گانه $\iint f(x,y)dA$ ۲ راه داریم. یعنی یک بار موازی محور xها پیش رویم و یک بار موازی محور yها پیش رویم و با ترتیب فوبینی! حاصل این ۲ انتگرال برابر خواهد بود.

روش اول

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_0^1\int_0^{1-x}(x^2y+x)\,dy\,dx$$

این انتگرال را نسبت به محور y ابتدا حل میکنیم یعنی موازی محور y ها اگر پیش رویم ابتدا به $y=0$ و سپس به $y=1-x$ خواهیم رسید.

$$\int_0^1\int_0^{1-x}(x^2y+x)\,dy\,dx=\int_0^1\left[\frac{1}{2}x^2y^2+xy\right]_0^{1-x}dx$$

$$\frac{1}{2}x^2(1-x)^2+x(1-x)=x(1-x)\left(\frac{1}{2}x(1-x)+1\right)$$

$$=(-x^2+x)\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x^2+1\right)$$

$$\Rightarrow\int_0^1\left(\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{2}x^2-x^3+x\right)dx=\frac{1}{10}$$

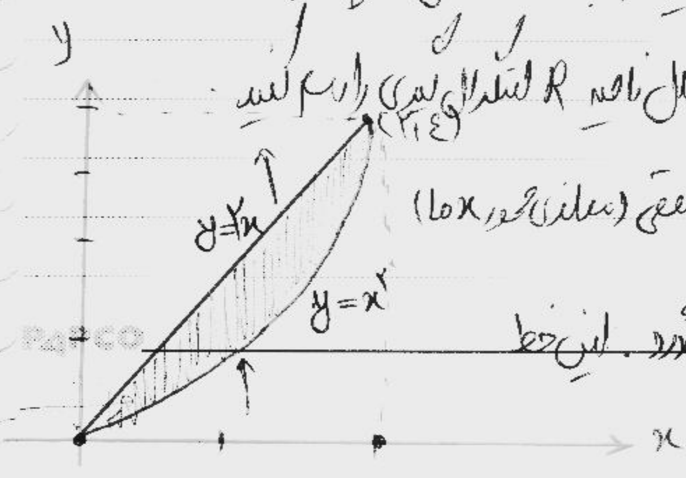
حال بار دیگر انتگرال را ابتدا نسبت به x ‏(dx) یعنی موازی محور xها قطع می کنیم و حساب می کنیم:

$$\int_0^1\int_0^{1-y}(x^2y+x)\,dx\,dy=\int_0^1\left(\frac{x^3y}{3}+\frac{x^2}{2}\right)_0^{1-y}dy=1/10$$

مثال) ناحیه‌ای را رسم کنید که انتگرال گیری زیر روی آن صورت می گیرد و انتگرال معادلی بیابید که در آن ترتیب انتگرال گیری معکوس باشد. هر دو انتگرال را محاسبه کنید.

$$\int_0^2\int_{x^2}^{2x}(4x+2)\,dy\,dx$$

این انتگرال یعنی ابتدا خطوط موازی محور yها رسم کنیم ابتدا نمودار $y=x^2$ و سپس نمودار $y=2x$ را رسم می کنیم و $0\le x\le 2$ می باشد حال ناحیه R انتگرال گیری را رسم کنید:



حال برای یافتن حدود انتگرال گیری با ترتیب معکوس خطوط افقی (موازی محور xها) در نظر بگیرید که از چپ به راست از ناحیه مورد نظر می گذرد. این خط

در $y = x/2$ ، x به ناحیه وارد و در $x=\sqrt{y}$ از آن خارج می‌شود. و بازای حدود y نیز از $y=0$ تا $y=4$ تغییر کند. بنابراین جهت انتگرال به شکل زیر تغییر خواهد کرد:

$$\int_0^4\int_{y/2}^{\sqrt{y}} (4x+2)\,dx\,dy$$

مقدار انتگرال اول: $$\int_0^2\int_{x^2}^{2x}(4x+2)\,dy\,dx = \int_0^2 \Big[4xy+2y\Big]_{x^2}^{2x} dx$$

$$= \int_0^2 (8x^2+4x-4x^3-2x^2)\,dx = \Big[2x^3+2x^2-x^4\Big]_0^2 = 8$$

مقدار انتگرال دوم: $$\int_0^4\int_{y/2}^{\sqrt y}(4x+2)\,dx\,dy = \int_0^4 \Big[2x^2+2x\Big]_{x=y/2}^{x=\sqrt y} dy$$

$$=\int_0^4 \left(2y+2\sqrt y - \frac{y^2}{2} - y\right)dy = \int_0^4 \left(y+2\sqrt y - \frac{y^2}{2}\right)dy = \left[\frac{y^2}{2}+\frac{4}{3} y^{3/2} - \frac{y^3}{6}\right]_0^4$$

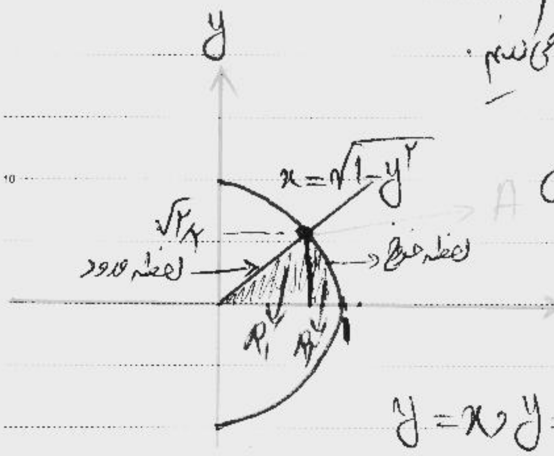
$$= 8+\frac{4}{3}(8)-\frac{32}{3}=8 \Longrightarrow$$ (مقدار ۲ انتگرال برابر خواهد بود)

تذکر: از این روش معکوس کردن انتگرال‌گیری بیشتر جاهایی کاربرد دارد که انتگرال‌گیری نسبت به متغیر انتگرال ده، انتگرال‌گیری زیر انتگرال سخت است، ما این انتگرال‌گیری را معکوس کرده تا کار راحت‌تر شود. به مثال‌های زیر توجه کنید.

مثال) انتگرال معادلی برای انتگرال زیر بیابید که حدود آن و ترتیب انتگرال گیری روی ناحیه مفروض معکوس آن باشد.

$$\int_0^{\sqrt{2}/2}\int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy$$

در این انتگرال برای رسم ناحیه انتگرال گیری باید دقت شود که اگر ابتدا موازی محور x ها حرکت کنیم باید به نمودار $x=y$ برسیم و در نقطه خارج شدن دهمین را ستا به نمودار $x=\sqrt{1-y^2}$ برسیم. حال شکل را رسم می کنیم.



حال خوب اگر به شکل دقت شود برای معکوس کردن حدود انتگرال باید موازی محور y حرکت کنیم. در نقطه ی ورود $y=0$ x برخورد می کنیم اما در نقطه ی خروج ۲ نمودار $y=\sqrt{1-x^2}$ و $y=x$ برخورد خواهیم کرد. یعنی خط بالا در نقطه A دو نمودار تعویض شده است. پس بنا به خاصیت انتگرال روی R که می توان آن را به چند زیر ناحیه تبدیل نمود حاصل انتگرال روی R برابر حاصل انتگرال جمع روی زیر ناحیه ها است. پس خواهیم داشت:

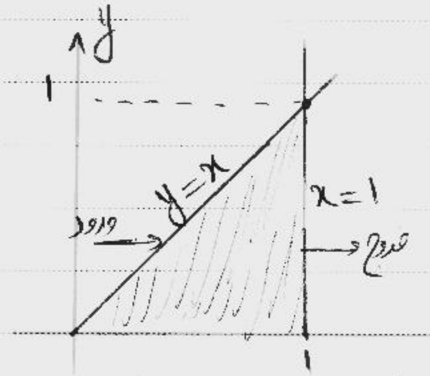
$$\iint_R f(x,y)\,dA=\iint_{R_1} f(x,y)\,dA+\iint_{R_2} f(x,y)\,dA$$

$$=\int_0^{\sqrt{2}/2}\int_0^{x} f(x,y)\,dy\,dx+\int_{\sqrt{2}/2}^{1}\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx$$

Subject: Year. Month. Date.

✓ مثال) مطلوب است محاسبه انتگرال $\int_0^1\int_y^1 e^{x^2}\,dx\,dy$

حل) اگر دقت شود ملاحظه می‌کنید که $\int e^{x^2}dx$ قابل حل نمی‌باشد بنابراین باید انتگرال را معکوس کرد تا قابل حل شود پس شکل آن را رسم می‌کنیم. در رسم شکل هم باید اگر به موازات محور x ها حرکت کنیم ابتدا به خط $y=x$ و سپس به $x=1$ برسیم. حال شکل را رسم می‌کنیم.



حال برای معکوس کردن انتگرال باید به موازات محور y ها حرکت کنیم در این صورت خواهیم داشت ابتدا به $y=0$ و سپس به $y=x$ خواهیم رسید.

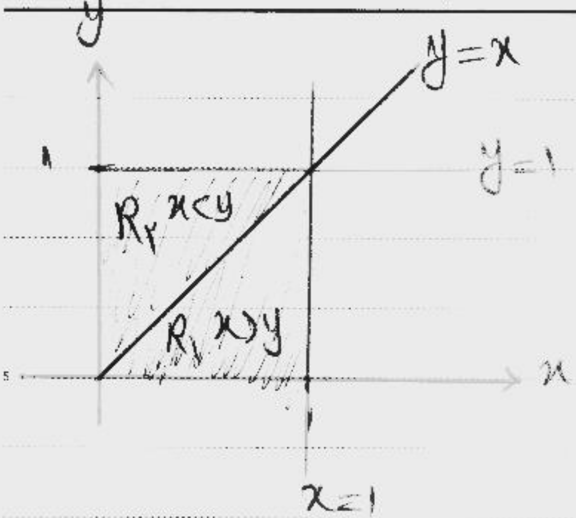
$$\int_0^1\int_y^1 e^{x^2}dx\,dy=\int_0^1\int_0^x e^{x^2}dy\,dx=\int_0^1 \left(e^{x^2}y\right)\Big|_0^x dx$$

$$=\int_0^1 xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 2xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}(e-1)$$

✓ مثال) مطلوب است محاسبه انتگرال $\int_0^1\int_0^1 |y-x|\,dx\,dy$

برای حل این انتگرال ابتدا باید یک قدر مطلق برداشته شود که معمولاً کمک می‌گیریم. خواهیم داشت اگر به موازات محور x ها حرکت کنیم ابتدا به $x=0$ و سپس به $x=1$ خواهیم رسید. و $0\le y\le 1$ می‌باشد.

حال شکل را رسم می‌کنیم.



برای حل انتگرال و از بین بردن قدرمطلق آن را به ۲ ناحیه R_1 به ازای $x>y$ و R_2 به ازای $x<y$ تقسیم می کنیم. و از جمع انتگرال روی این ۲ ناحیه انتگرال کل بدست خواهد آمد.

در ناحیه R_1 اگر به موازات محور y ها حرکت کنیم ابتدا به $y=0$ و سپس به $x=y$ خواهیم رسید. و در ناحیه R_2 به موازات محور y ها اگر حرکت کنیم ابتدا به $y=x$ و سپس به $y=1$ خواهیم رسید. بنابراین خواهیم داشت:

$$\int_0^1\int_0^1 |y-x|\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^y (x-y)\,dx\,dy + \int_0^1\int_y^1 (y-x)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2 - yx\right)\Big|_0^y dy + \int_0^1 \left(yx - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_y^1 dy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}y^2 - y^2\right) dy + \int_0^1 \left(y - 1 - y^2 + y^2/2\right) dy = \int_0^1 \left(-y^2/2\right) dy + \int_0^1 \left(y - 1 + y^2/2\right) dy$$

$$= \left(\frac{-y^3}{4}\right)\Big|_0^1 + \left(\frac{y^2}{2} - \cancel{y} + \frac{y^3}{4}\right)\Big|_0^1 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{4} = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

تمرین 8: در انتگرال زیر ترتیب انتگرال گیری را عوض کنید!

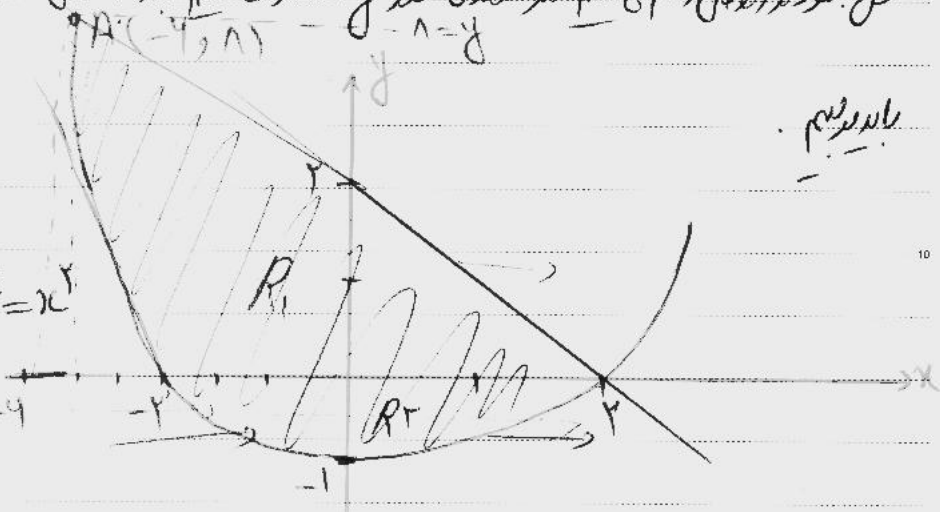
$$\int_{-6}^{2} dx \int_{x^2/4-1}^{2-x} f(x,y)\,dy = \int_{-6}^{2}\int_{x^2/4-1}^{2-x} f(x,y)\,dy\,dx$$

حل: نمودار ناحیه را رسم می‌کنیم اگر به موازات محور y ها حرکت کنیم ابتدا به سهمی $\frac{x^2}{4}-1$ و سپس به $2-x$ باید برسیم.

$y = 2-x$

$y = \frac{x^2}{4}-1 \Rightarrow 4y+4 = x^2$

$-6 \leq x \leq 2$



حال اگر به موازات محور x ها حرکت کنیم به ۲ ناحیه برخورد می‌کنیم که در $x=2$ این ۲ ناحیه از هم جدا شده‌اند.

$$\int_{-6}^{2}\int_{x^2/4-1}^{2-x} f(x,y)\,dy\,dx = \int_{8}^{0}\int_{\sqrt{4y+4}}^{2-y} f(x,y)\,dx\,dy + \int_{0}^{-1}\int_{2\sqrt{y+1}}^{2\sqrt{y+1}} f(x,y)\,dx\,dy$$

حاصل انتگرال دوم مشخص است که صفر می‌شود چون قسمتی در $x+$ و قسمتی در $x-$ نشان داده شده که همدیگر را خنثی می‌کنند.

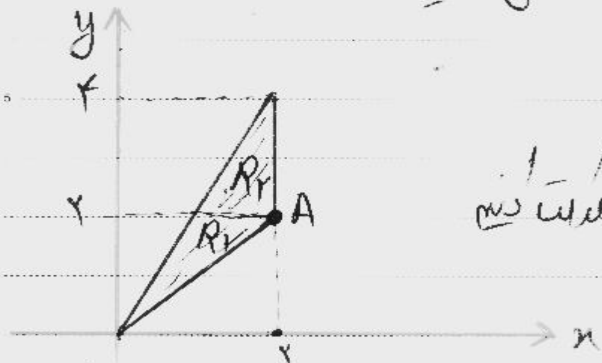
$$\Longrightarrow \int_{-6}^{2}\int_{x^2/4-1}^{2-x} f(x,y)\,dy\,dx = \int_{8}^{0}\int_{2\sqrt{y+1}}^{2-y} f(x,y)\,dx\,dy$$

مثال) انتگرال حاصل زیر به صورت انتگرال معکوس بنویسید؟

$$\int_0^2\int_x^{2x} f(x,y)\,dy\,dx$$

یعنی اگر موازی محور y ها حرکت کنیم ابتدا به $x=y$ و سپس به $y=2x$ می رسیم

و $0\le x\le 2$ می باشد.



برای معکوس کردن متغیرهای انتگرال گیری باید موازی محور x ها حرکت کنیم

که در این صورت خواهیم داشت نقطه ورود به $x=y/2$ برخورد

خواهیم کرد اما نقطه خروج در نقطه A به ۲ منحنی برخورد می کنیم $x=2$ و دیگری $y=x$ بنابراین انتگرال

را از حاصل جمع ۲ انتگرال گیری روی ۲ ناحیه R_1 و R_2 بدست می آوریم

$$\int_0^2\int_x^{2x} f(x,y)\,dy\,dx=\int_0^2\int_{y/2}^{y} f(x,y)\,dx\,dy+\int_2^4\int_{y/2}^{2} f(x,y)\,dx\,dy$$

مثال) حاصل عبارت زیر را بدست آورید؟

$$\int_0^{1/4}\int_1^2 \frac{\sin(xy)}{x}\,dx\,dy+\int_{1/4}^{1}\int_1^{1/\sqrt{y}} \frac{\sin(xy)}{x}\,dx\,dy$$

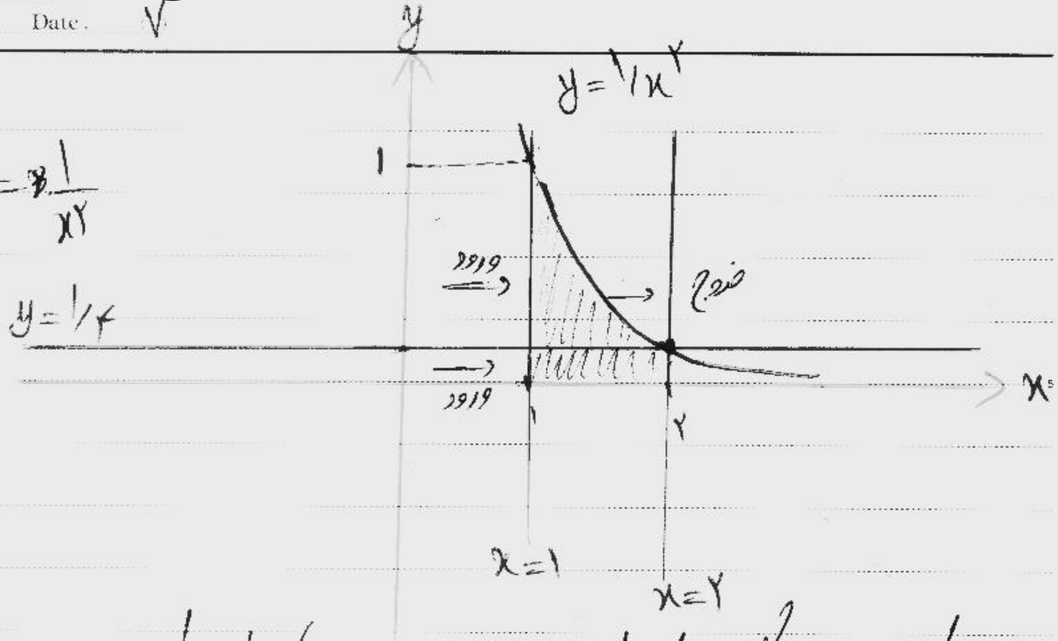
می دانیم که حاصل انتگرال $\int \frac{\sin(xy)}{x}dx$ ممکن نیست بنابراین باید انتگرال گیری را معکوس کنیم. برای انتگرال اول

اگر موازی محور x ها حرکت کنیم ابتدا به $x=1$ و سپس به $x=2$ خواهیم رسید و برای انتگرال دوم ابتدا به $x=1$

و سپس به $x=\frac{1}{\sqrt{y}}$ خواهیم رسید. حال شکل هر ۲ انتگرال را روی یک دستگاه رسم می کنیم.

Subject: Year. Month. Date.

$$x=\frac{1}{\sqrt{y}} \rightarrow y=\frac{1}{x^2}$$



حال اگر می‌خواهیم انتگرال را معکوس کنیم باید موازی محور y حرکت کنیم که از xها به $y=0$ خواهیم رسید

و در خارج شدن به عمود از $y=\frac{1}{x^2}$ منتهی خواهد شد پس برابری خواهیم داشت.

$$\int_0^{1/4}\int_1^2 \frac{\sin(xy)}{x}\,dx\,dy+\int_{1/4}^{1}\int_1^{1/\sqrt{y}}\frac{\sin(xy)}{x}\,dx\,dy=\int_1^2\int_0^{1/x^2}\frac{\sin(xy)}{x}\,dy\,dx$$

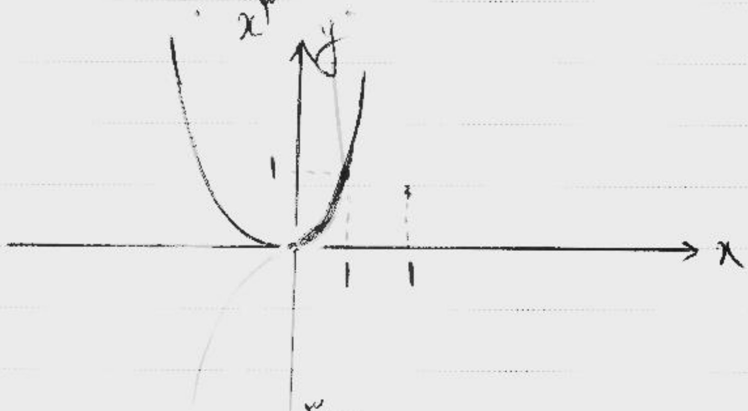
$$=\int_1^2\left(-\frac{\cos(xy)}{x^2}\right)\Bigg|_0^{1/x^2}dx=\int_1^2\left(\frac{-\cos({}^1/x)}{x^2}+1\right)dx$$

$$=\Big[\sin({}^1/x)+x\Big]_1^2=\sin(\tfrac{1}{2})+2-\sin(1)-1=$$

$$=\sin(0.5)-\sin(1)+1$$

تمرین ۲) در انتگرال های زیر ترتیب انتگرال گیری را عوض کنید

c) $\int_0^1 dx \int_{x^3}^{x^2} f(x,y)\,dy = \int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} f(x,y)\,dy\,dx$



$$\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)\,dx\,dy$$

d) $\int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4x}} f(x,y)\,dy = \int_0^2 \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{2\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\,dx$

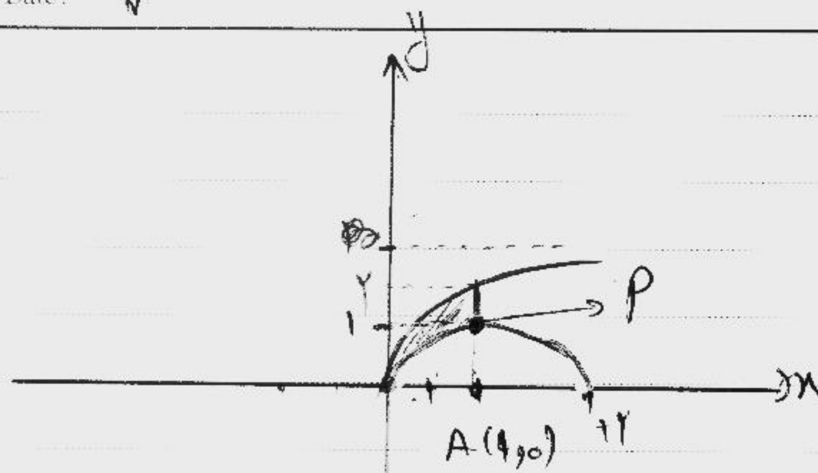
$y = 2\sqrt{x}$

$y = \sqrt{2x-x^2} \Rightarrow y^2 = 2x - x^2 \Rightarrow y^2 + x^2 - 2x + 1 - 1 = 0$

$\Rightarrow y^2 + (x-1)^2 = 1$ دایره شعاع $r=1$ مرکز $A(1,0)$

$y \geq 0$

Year . Month . Date .

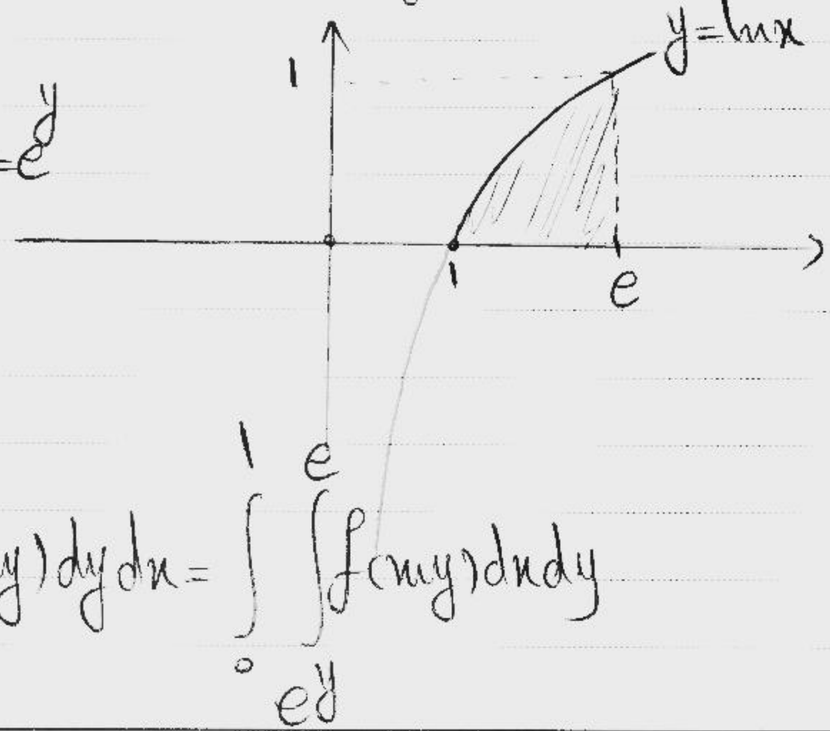


نقطه P که موازی محور x ها
حرکت میکند به ناحیه برخورد خواهیم کرد که ابتدا یک بار طولی با انتها میشود.

$$\int_0^2 \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4x}} f(x,y)\,dy\,dx = \int_2^1 \int_{y^2/4}^{1} f(x,y)\,dx\,dy + \int_1^0 \int_{y^2/4}^{\sqrt{1-y^2}+1} f(x,y)\,dx\,dy$$

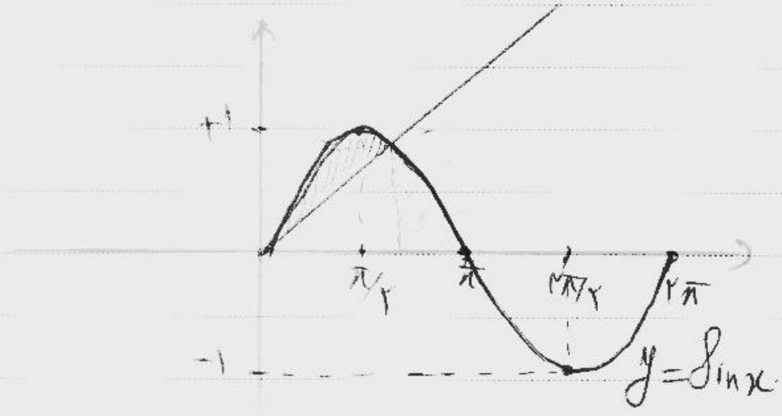
$$\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x,y)\,dy = \int_1^e \int_0^{\ln x} f(x,y)\,dy\,dx$$

$y=\ln x \rightarrow x=e^y$



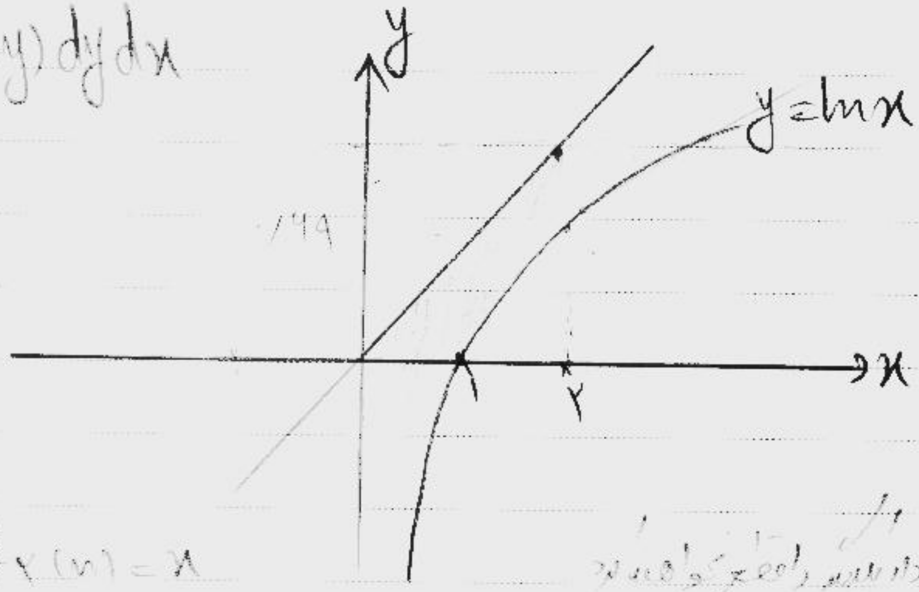
$$\int_1^e \int_0^{\ln x} f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^1 \int_{e^y}^{e} f(x,y)\,dx\,dy$$

g) $$\int_0^{2\pi} dx \int_x^{\sin x} f(x,y)\,dy = \int_0^{2\pi}\int_x^{\sin x} f(x,y)\,dy\,dx$$



Subject:
Year. Month $\ln x$ Date. ✓

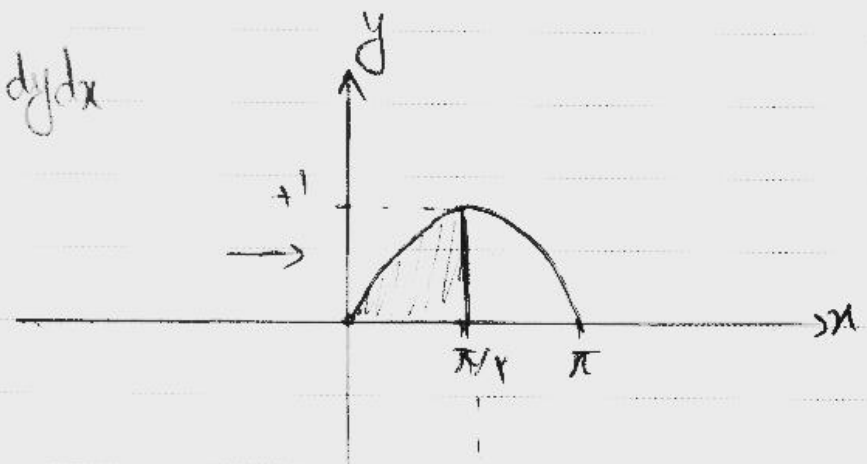
h) $\int_{0} \int_{x} f(x,y)\,dy\,dx$



$f_1(x)=\ln x \quad f_2(x)=x$ [illegible]

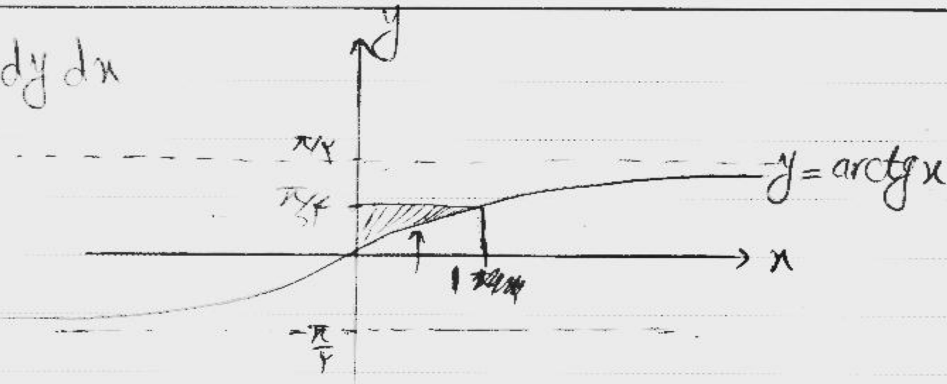
$\Rightarrow g(x)=\ln x-x$ [illegible] $\Rightarrow g(x)=0$

K) $\int_{0}^{\pi/2} \int_{0}^{\sin x} f(x,y)\,dy\,dx$



$$\int_{0}^{1} \int_{\arcsin y}^{\pi/2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{0}^{\pi/2} \int_{0}^{\sin x} f(x,y)\,dy\,dx$$

m) $\displaystyle\int_0^1\int_{\operatorname{arctg} x}^{\pi/4} f(x,y)\,dy\,dx$



$$\int_0^1\int_{\operatorname{arctg} x}^{\pi/4} f(x,y)\,dy\,dx=\int_0^{\pi/4}\int_0^{tg\,y} f(x,y)\,dx\,dy$$

تمرین) در انتگرال های زیر ابتدا ترتیب انتگرال گیری را عکس کنید سپس در صورت امکان هر انتگرال را حساب کنید.

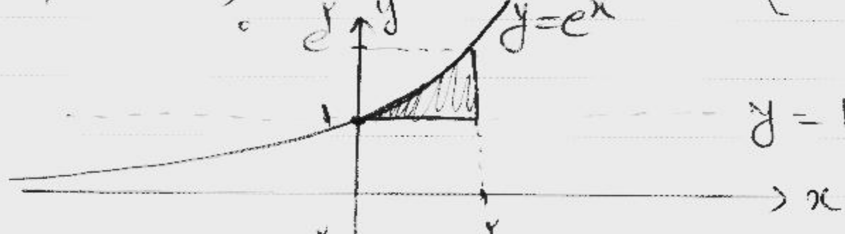
a) $\displaystyle\int_0^2\int_1^{e^x} dy\,dx$

این انتگرال را همین طور هم می توان حل کرد. ابتدا این حالت را حل می کنیم

و بعد با عکس کردن انتگرال گیری آن را حل خواهیم کرد.

$$\int_0^2\int_1^{e^x} dy\,dx=\int_0^2 (y)_1^{e^x}\,dx=\int_0^2 (e^x-1)\,dx=(e^x-x)_0^2=\left[(e^2-2)-(1)\right]$$

$$=e^2-3$$



$$\int_0^2\int_1^{e^x} dy\,dx=\int_1^{e^2}\int_{\ln y}^{2} dx\,dy=\int_1^{e^2}(2-\ln y)\,dy$$

تذکر: چند انتگرال مهم زیر را برای حل مسائل استفاده کنید

1) $\int \ln x \, dx = x\ln x - x + C$

2) $\int x\ln x \, dx = \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) + C$

5) $\int \frac{\ln^n x \, dx}{x} = \frac{\ln^{n+1} x}{n+1} + C$

3) $\int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2}\ln^2 x + C$

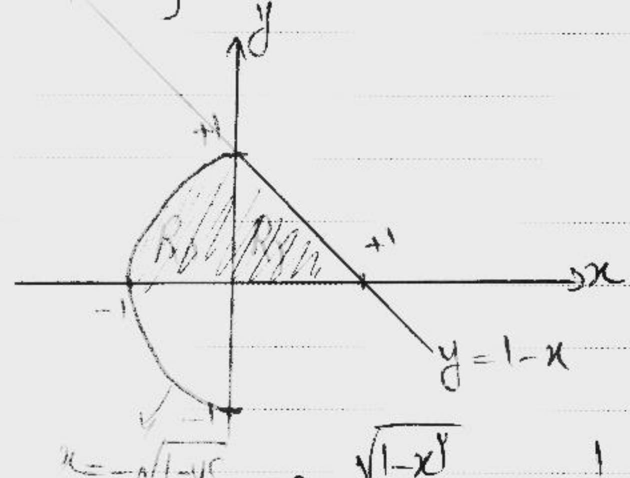
4) $\int \frac{dx}{x\ln x} = \ln(\ln x) + C$

حل سوال قبل $\Rightarrow \int_1^{e^2} (2 - \ln y)\, dy = \int_1^{e^2} 2\, dy - \int_1^{e^2} \ln y \, dy$

$= 2y\Big|_1^{e^2} - \left[y\ln y - y\right]_1^{e^2} = 2e^2 - 2 - \left[2e^2 - e^2 + 1\right] = e^2 - 3$ ✓

نتیجه $\Longrightarrow \int_1^2 \int_1^{e^x} dy\,dx = \int_1^{e^2} \int_{\ln y}^{2} dx\,dy = e^2 - 3$.

c) $\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} dx\,dy$



$\iint_R dy\,dx = \iint_{R_1} dy\,dx + \iint_{R_2} dy\,dx = \int_{-1}^{0} \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy\,dx + \int_0^1 \int_0^{1-x} dy\,dx$

می دانیم $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}$

$$\Longrightarrow \int_{-1}^{0}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} dy\,dx + \int_{0}^{1}\int_{0}^{1-x} dy\,dx = \int_{-1}^{0}(\sqrt{1-x^2})\,dx + \int_{0}^{1}(1-x)\,dx$$

$$= \left[\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{1}{2}\sin^{-1}x\right]_{-1}^{0} + \left[x-\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1}$$

$$= \left[0 - \frac{3\pi}{4}\right] + \left[1-\frac{1}{2}\right] = -\frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2}$$

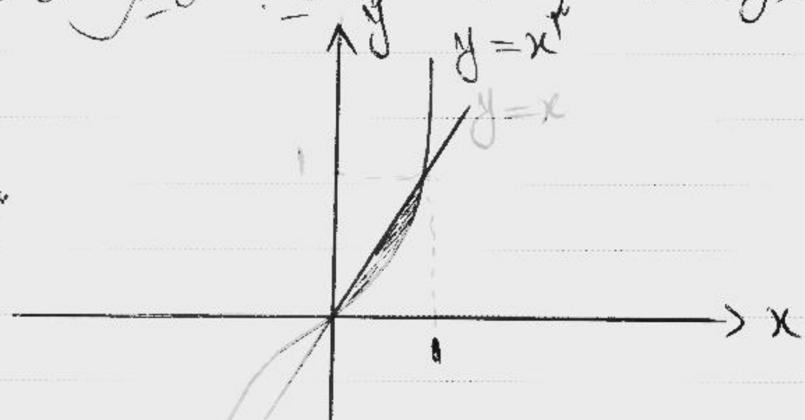
d) $\int_{0}^{1}\int_{y}^{\sqrt[3]{y}} \sin x^2\,dx\,dy$

* این انتگرال با این ترتیب انتگرال گیری قابل حل نمی باشد یا سخت می باشد چون محاسبه انتگرال $\int \sin x^2\,dx$ دشوار است. پس ترتیب انتگرال گیری را عوض خواهیم کرد.

$0 \le y \le 1$

$x = \sqrt[3]{y} \Rightarrow y = x^3$

$x = y$



$$\int_{0}^{1}\int_{y}^{\sqrt[3]{y}} \sin x^2\,dx\,dy = \int_{0}^{1}\int_{x^3}^{x} \sin x^2\,dy\,dx = \int_{0}^{1} \left(y\sin x^2\right)_{x^3}^{x}\,dx$$

ولی حاصل این انتگرال و محاسبه انتگرال سخت است (غیرعملی)

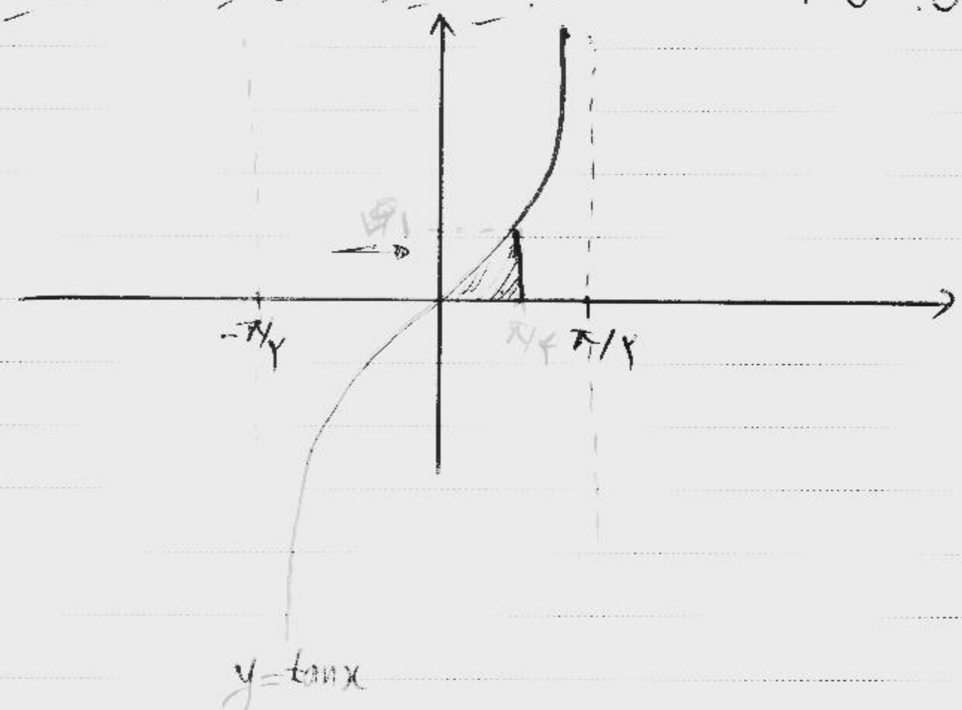
Subject:
Year. Month. Date.

f) $\int_0^{\pi/4}\int_0^{tgx} \sec x\,dy\,dx = \int_0^{\pi/4} (y\sec x)\Big|_0^{tgx} dx = \int_0^{\pi/4} tgx \sec x\,dx$

$$= \int_0^{\pi/4} \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x}\right)dx = -\int_0^{\pi/4}\left(\frac{-\sin x}{\cos^2 x}\right)dx = -\left(\frac{1}{\cos x}\right)\Big|_0^{\pi/4} = -\left[\sqrt{2}-1\right]$$

$= 1-\sqrt{2}$

* بنابراین دلیلی ما برای حل انتگرال عادی معکوس کردن انتگرال نبود و حاصل انتگرال به راحتی بدست آمد. اما اگر بخواهیم ترتیب انتگرال گیری را معکوس کنیم خواهیم داشت:

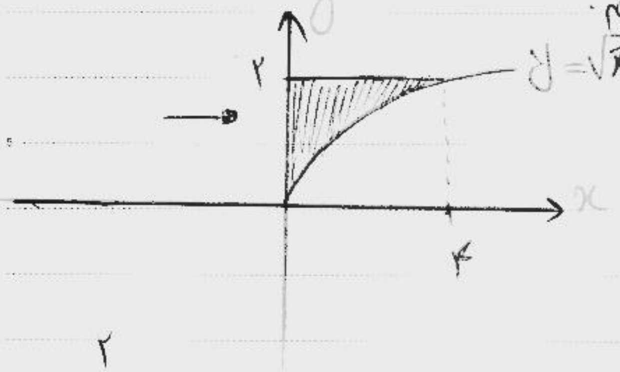


$$\int_0^{\pi/4}\int_0^{tgx} \sec x\,dy\,dx = \int_0^{1}\int_{Arctgy}^{\pi/4} \sec x\,dx\,dy$$

* در اینجا حل این انتگرال خیلی دشوار است.

g) $\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \sin(\pi y^3)\,dy\,dx$

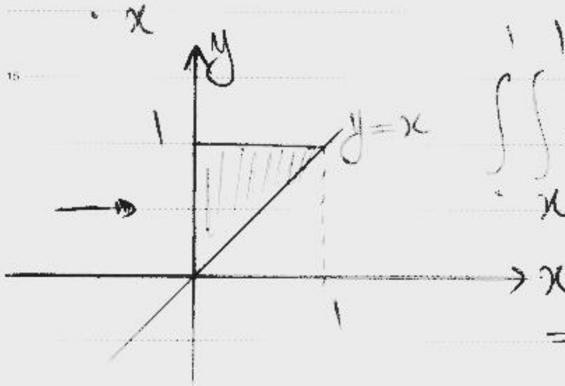
حل انتگرال به ترتیب داده شده غیرممکن می باشد زیرا $\int \sin(\pi y^3)\,dy$ محاسبه آن غیر ممکن است. لذا ترتیب انتگرال گیری را معکوس می کنیم



$$\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \sin(\pi y^3)\,dy\,dx = \int_0^2 \int_0^{y^2} \sin(\pi y^3)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^2 y^2 \sin(\pi y^3)\,dy = -\frac{1}{3\pi}\cos(\pi y^3)\Big|_0^2 = -\frac{1}{3\pi}\cos(8\pi) + \frac{1}{3\pi}$$

i) $\int_0^1 \int_x^1 \sin(y^2)\,dy\,dx$ * چون محاسبه $\int \sin y^2\,dy$ مشکل است ترتیب انتگرال گیری را معکوس می کنیم *



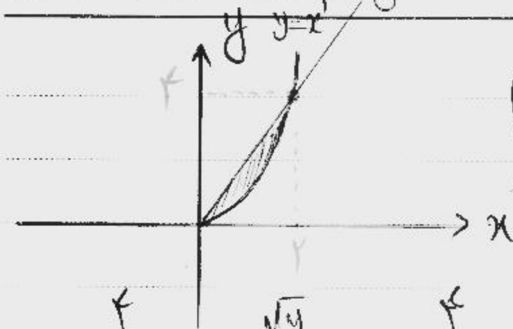
$$\int_0^1 \int_x^1 \sin(y^2)\,dy\,dx = \int_0^1 \int_0^y \sin(y^2)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 y(\sin(y^2))\,dy = -\frac{1}{2}\cos(y^2)\Big|_0^1$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\cos(1) - 1\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(1)$$

j) $\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (2x+2)\,dy\,dx = \int_0^2 (2x^2 - 2x^3 + 4x)\,dx = \left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{x^4}{4} + 2x^2\right)\Big|_0^2 = \frac{14}{3}$

حال اگر بخواهیم با عوض کردن ترتیب انتگرال مقدار آن را محاسبه کنیم حاصل باید $\frac{14}{3}$ شود. خواهیم داشت:

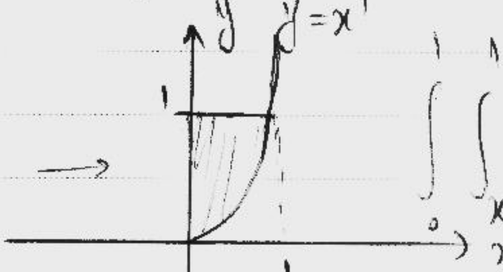


$$\int_0^2\int_{x^2}^{2x}(2x+2)\,dy\,dx=\int_0^4\int_{y/2}^{\sqrt{y}}(2x+2)\,dx\,dy$$

$$=\int_0^4 (x^2+2x)\Big|_{y/2}^{\sqrt{y}}dy=\int_0^4\left(2\sqrt{y}-y^2/4\right)dy=\left[\frac{4}{3}y^{3/2}-\frac{y^3}{12}\right]_0^4$$

$$=\frac{4}{3}\sqrt[3]{2^6}-\frac{(4)^3}{12}=\frac{4}{3}\times 8-\frac{4^3}{12}=\frac{32}{3}-\frac{16}{3}=\frac{16}{3}$$

l) $\displaystyle\int_0^1\int_{x^2}^1 x^3\sin(y^3)\,dy\,dx$ * محاسبه $\int\sin(y^3)dy$ دشوار است بنابراین ترتیب انتگرال را عکس می‌کنیم *.



$$\longrightarrow \int_0^1\int_{x^2}^1 x^3\sin(y^3)\,dy\,dx=\int_0^1\int_0^{\sqrt{y}}x^3(\sin(y^3))\,dx\,dy$$

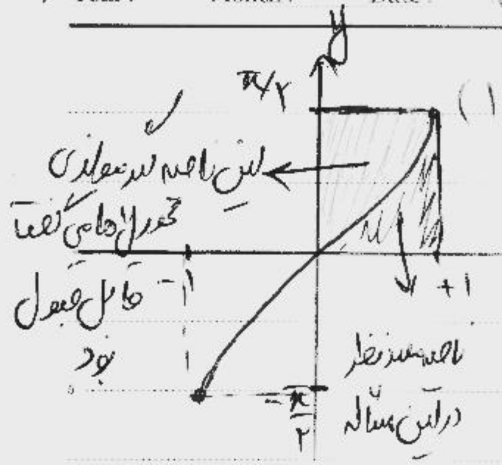
$$=\int_0^1\left(\frac{x^4}{4}\sin(y^3)\right)\Big|_{x=0}^{\sqrt{y}}dy=\int_0^1\frac{y^2}{4}\sin(y^3)\,dy$$

$$=\frac{-\cos(y^3)}{12}\Big|_0^1=-\frac{1}{12}\cos 1+\frac{1}{12}$$

m) $\displaystyle\int_0^1\int_{\arcsin y}^{\pi/2}\cos x\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx\,dy$

Subject: Year. Month. Date.

* ترتیب انتگرال گیری را معکوس می کنیم *



$$\int_0^1 \int_{\arcsin y}^{\pi/2} \cos x \sqrt{1+\cos^2 x}\, dx\, dy$$

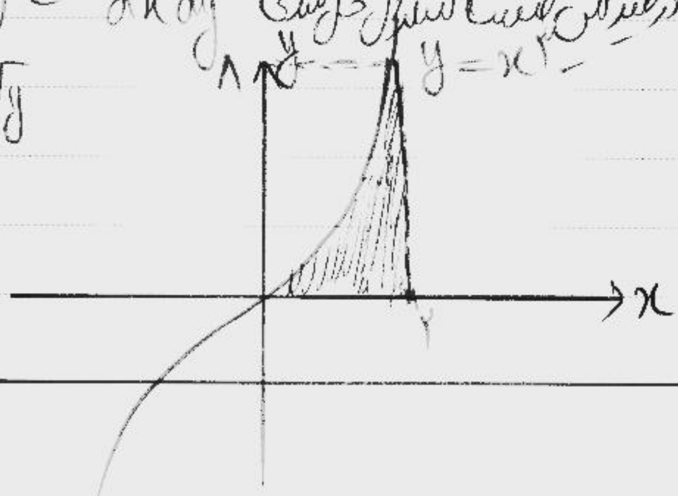
$$= \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sin x} \cos x \sqrt{1+\cos^2 x}\, dy\, dx = \int_0^{\pi/2} \sin x \cos x \sqrt{1+\cos^2 x}\, dx$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \sin 2x \sqrt{1+\cos^2 x}\, dx = \int_0^{\pi/2} \sin x \cos x \sqrt{1+\cos^2 x}\, dx$$

$$= -\frac{2}{3} \int_0^{\pi/2} \frac{3}{2} \sin x \cos x \sqrt{1+\cos^2 x}\, dx = -\frac{2}{3} (1+\cos^2 x)^{3/2} \Big|_0^{\pi/2}$$

$$= -\frac{2}{3} \left[1 - (2\sqrt{2}) \right] = -\frac{2}{3} + \frac{4}{3}\sqrt{2}$$

n) $\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^{2} e^{x^4}\, dx\, dy$ * ترتیب انتگرال گیری را باید معکوس کرد در غیر این صورت انتگرال حل نشدنی * خواهد بود



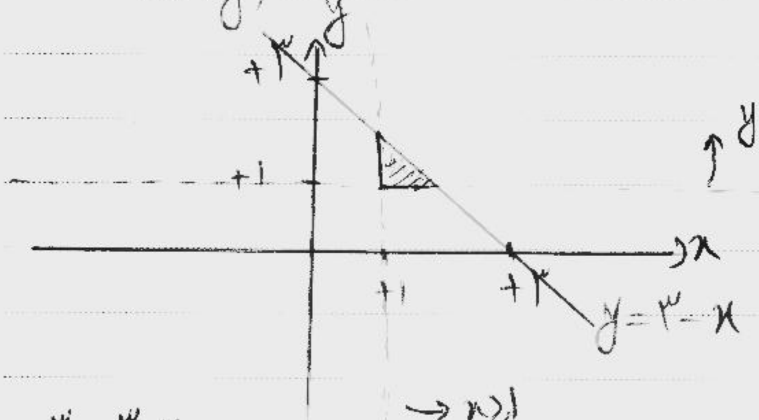
Subject:
Year. Month. Date.

$$\int_0^8\int_{\sqrt[3]{y}}^2 e^{x^4}\,dx\,dy = \int_0^2\int_0^{x^3} e^{x^4}\,dy\,dx = \int_0^2 x^3 e^{x^4}\,dx = \frac{1}{4}\left(e^{x^4}\right)\Big|_0^2$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{16}-1\right)$$

تمرین) انتگرال های ۲ گانه زیر را حل کنید؟

a) $\iint \frac{dx\,dy}{(x+y)^3}$ در ناحیه $x \geq 1,\ y \geq 1,\ x+y \leq 3$



که مقادیر محور y ها حالت تعیین انتگرال پذیر خواهد بود:

$$\int_1^3\int_1^{3-x} \frac{dy\,dx}{(x+y)^3} = \int_1^3 \left[-\frac{1}{2}(x+y)^{-2}\right]_1^{3-x} dx$$

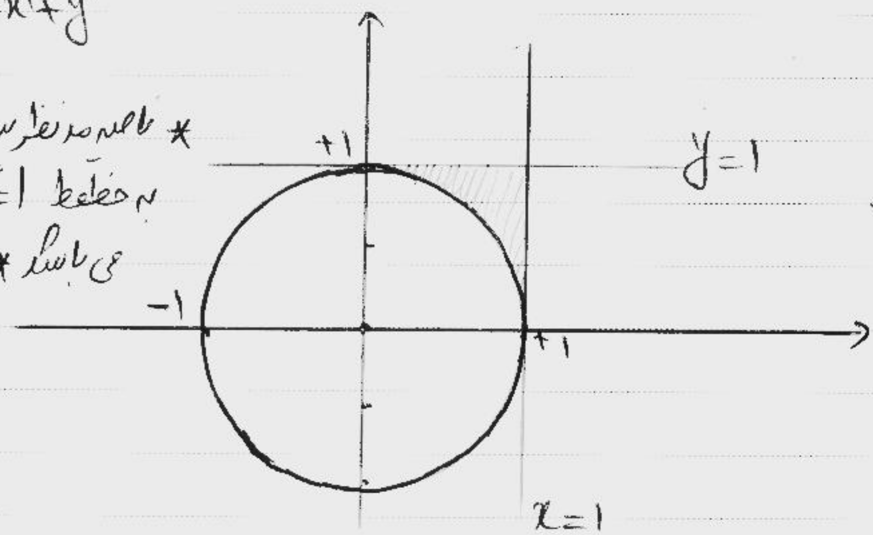
$$= \int_1^3 \left[-\frac{1}{2}\left[(3)^{-2} - (x+1)^{-2}\right]\right] dx = \int_1^3 \left(-\frac{1}{18} + \frac{1}{2}(x+1)^{-2}\right) dx$$

$$= \int_1^3 -\frac{1}{18}\,dx + \frac{1}{2}\int_1^3 (x+1)^{-2}\,dx = -\frac{1}{18}x\Big|_1^3 + \left(-\frac{1}{2}(x+1)^{-1}\right)\Big|_1^3 =$$ حاصل را محاسبه کنید.

بیرون دایره

b) $\iint \frac{xy\,dx\,dy}{1+x^2+y^2}$ در ناحیه $1 \ge x$ و $1 \ge y$ و $x^2+y^2 \ge 1$

* ناحیه مورد نظر بیرون دایره و محدود به خطوط $y=1$ و $x=1$ می باشد *



اگر نسبت به x انتگرال بگیریم خواهیم داشت:

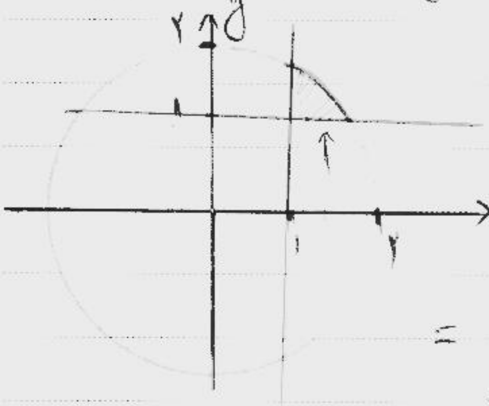
$$\int_1^0\int_{\sqrt{1-y^2}}^1 \frac{xy\,dx\,dy}{1+x^2+y^2} = \int_1^0 \left(\frac{1}{2}y\ln(1+x^2+y^2)\right)\Big|_{\sqrt{1-y^2}}^{1} dy$$

$$= \int_1^0 \frac{1}{2}y\left(\ln(2+y^2) - \ln(2)\right) dy = \int_1^0 \frac{1}{2}y\ln(2+y^2)\,dy - \int_1^0 \frac{1}{2}y\ln(2)\,dy$$

$$= \begin{cases} 2+y^2=u \\ \Rightarrow du=2y\,du \end{cases} \Rightarrow \int_1^0 \frac{1}{4}\ln(u)\,du = \frac{1}{4}u\ln u - \frac{1}{4}u$$

$$= \left[\frac{1}{4}(2+y^2)\ln(2+y^2) - \frac{1}{4}(2+y^2)\right]\Big|_1^0 - \frac{1}{4}y^2\ln 2\Big|_1^0$$

c) $\iint (x^2+y^2)\,dx\,dy$ ؛ در ناحیه $1\le x$ ، $1\le y$ و $x^2+y^2\le 4$



$$\int_1^2 \int_1^{\sqrt{4-x^2}} (x^2+y^2)\,dy\,dx$$

* معادله محدوده y را مشخص کنیم

$$= \int_1^2 \left(x^2 y + y^3/3\right)\Big|_1^{\sqrt{4-x^2}} dx$$

* حاصل این انتگرال را = دیگر توان است
می‌توان آن را به صورت معمولی حل کرد

$x^2+y^2=r^2 \qquad dr\,d\theta = dx\,dy$

$$= \int_{?}^{\pi/2} \int_{-2}^{2} r^2\,dr\,d\theta = \frac{8\pi}{3}$$

$$= \int_1^2 \left(x^2\sqrt{4-x^2} + \frac{\left(\sqrt{4-x^2}\right)^3}{3} \right) dx \qquad (I)$$

می‌دانیم: $\displaystyle \int x^2\sqrt{ax+b}\,dx = \frac{2(15a^2x^2-12abx+8b^2)}{105a^3}\sqrt{(ax+b)^3}+C$

در حالت کلی $\displaystyle \int x^m\sqrt{ax+b}\,dx = \frac{2x^m}{(2m+3)a}(ax+b)^{3/2} - \frac{2mb}{(2m+3)a}\int x^{m-1}\sqrt{ax+b}\,dx$

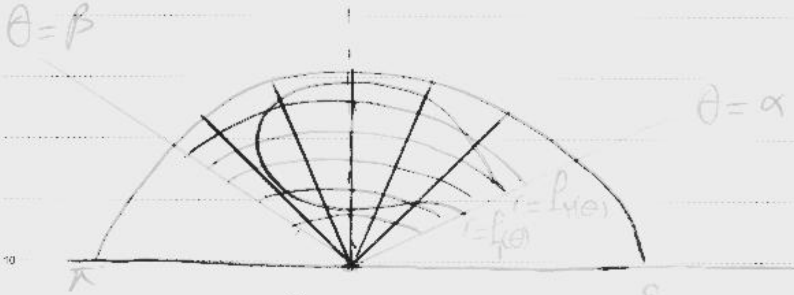
می‌دانیم: $\displaystyle \int (ax+b)^{m/2}\,dx = \frac{2(ax+b)^{(m+2)/2}}{a(m+2)}+C$

* حال می‌توان انتگرال I را با دو انتگرال نامعین گفته شده حل کرد اما کاری دشوار است *

انتگرال ۲ گانه به صورت قطبی و فرض کنید تابع $f(r,\theta)$ روی ناحیه‌ای چون R تعریف شده به پرتوهای

$\theta=\alpha$, $\theta=\beta$ و منحنی‌های پیوسته $r=f_1(\theta)$ و $r=f_2(\theta)$ محدود شود. در این صورت ناحیه داریم

شکلی به نام Q قرار دارد که با این نامساوی‌های $a \le r \le b$ و $\alpha \le \theta \le \beta$ تعریف می‌شود



* همانند عملیات انتگرال‌های دوگانه معمولی که در آن با x و y حرکت می‌کردیم در این دستگاه باید از قطب شروع کرده و در جهت‌های پرتوهای مختلف حرکت کرده تا ببینیم به چه خم‌های محدود خواهیم رسید *

* حال زمانی که ناحیه معینی داشته باشیم که حدود آن مشخص است مجموع‌ها به آن میل می‌کنند همان انتگرال‌گیری

$$\iint_R f(r,\theta)\,dA = \int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta} \int_{r=f_1(\theta)}^{r=f_2(\theta)} f(r,\theta)\, r\,dr\,d\theta$$

که در آن r و θ به دست آمد

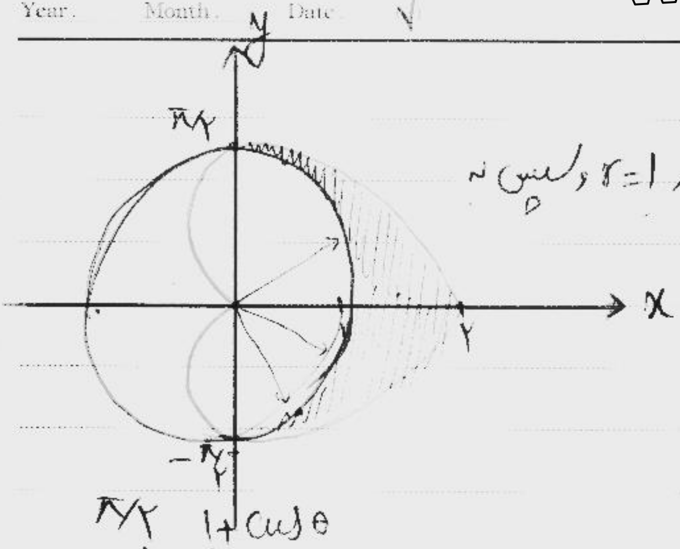
مثال) مطلوب است حدود انتگرال‌گیری برای انتگرال دوگانه تابعی چون $f(r,\theta)$ روی ناحیه D که

درون دلنمای $r = 1+\cos\theta$ و بیرون دایره $r = 1$ واقع است

ابتدا ناحیه مورد نظر را شناسایی کرده و شکل آن را رسم کنید. سپس در راستای پرتوها حرکت کرده یعنی در امتداد

پرتوهای شعاعی یعنی با متغیر انتگرال‌گیری dr حرکت خواهیم کرد.

Subject:
Year. Month. Date



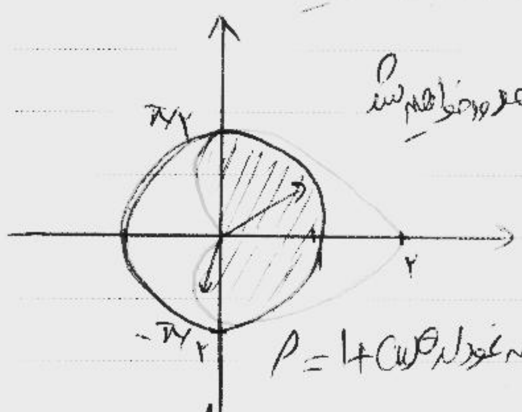
اگر در امتداد شعاع حرکت کنیم خواهیم دید که ابتدا به عوامل $r=1$ و سپس به عوامل $r=1+\cos\theta$ محدود خواهیم شد

و θ نیز از $-\frac{\pi}{2}$ تا $\frac{\pi}{2}$ تغییرات دارد.

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{1}^{1+\cos\theta} F(r,\theta)\, r\,dr\,d\theta$$

* حال اگر $F(r,\theta)$ مقدار ثابتی مثل ۱ باشد حاصل این انتگرال مساحت روی ناحیه R را بدست خواهد داد. *

مثال) مساحت ناحیه محدود به درون $r=1$ و درون $\rho=1+\cos\theta$ را بدست آورید.



وقتی در جهت پیکان‌های شعاعی حرکت کنیم خواهیم دید که به ۲ ناحیه محدود خواهیم شد

اگر در بازه $-\pi/2<\theta<\frac{\pi}{2}$ حرکت کنیم از قطب به عوامل $r=1$ محدود می‌شویم اما اگر $\pi/2 \le \theta \le \frac{3\pi}{2}$ حرکت کنیم به عوامل $\rho=1+\cos\theta$ محدود می‌شویم. به دلیل تقارن شکل می‌توانیم بالای محور x را حساب کرده در ۲ ضرب کنیم.

$$2\left(\int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{1} r\,dr\,d\theta+\int_{\pi/2}^{0}\int_{0}^{1+\cos\theta} r\,dr\,d\theta\right)$$

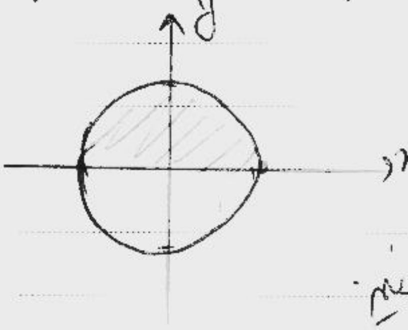
$$=2\left[\frac{\pi}{4}+\int_{\pi/2}^{0}\frac{(1+\cos\theta)^2}{2}\,d\theta\right]=2\left[\frac{\pi}{4}+2\left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)^2\Big|_{\pi/2}^{0}\right.$$

$$= 2\left[\frac{\pi}{4} + \int_{\pi/2}^{0} 2\cos^4\frac{\theta}{2}\, d\theta\right] = 2\left[\frac{\pi}{4}+\right.$$

مثال) مطلوب است انتگرال دوگانه $F(\theta,\rho) = e^{\rho^2}$ درون ناحیه $R \begin{cases} x^2+y^2 \le 1 \\ y \ge 0 \end{cases}$ بدست آورید.

$$x=\rho\cos\theta \quad , \quad y=\rho\sin\theta \Rightarrow x^2+y^2=\rho^2 \le 1$$

* بنابراین ناحیه R می‌شود نواحی درونی دایره‌ای به شعاع یک به مرکز مبدأ مختصات تا و نواحی مثبت محور x ها.



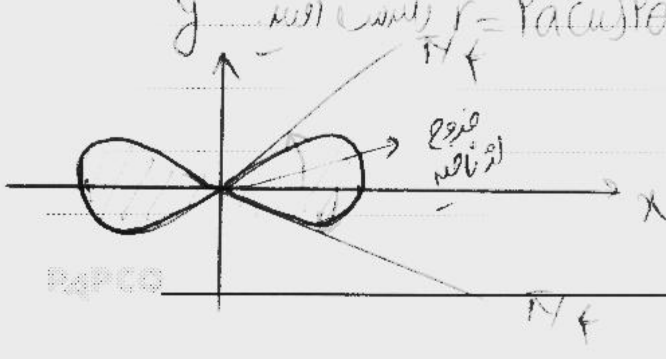
$$\int^{1}\int^{\sqrt{1-x^2}} e^{x^2+y^2}\,dy\,dx$$

چون محاسبه انتگرال فوق مشکل است آن را به مختصات قطبی تبدیل می‌کنیم.

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} e^{x^2+y^2}\,dy\,dx = \int_0^{\pi}\int_0^{1} e^{\rho^2}\rho\, d\rho\, d\theta = \int_0^{\pi}\left[\frac{1}{2}e^{\rho^2}\right]_0^1 d\theta$$

$$= \frac{\pi}{2}(e-1)$$

مثال) مطلوب است مساحت ناحیه محصور در برونه $r^2 = 2a^2\cos 2\theta$ را بدست آورید.



دقت شود که ناحیه مابین $-\frac{\pi}{4} < \theta$ تا $\theta \le \frac{\pi}{4}$ تعریف شده است. و بعد از آن خارج از ناحیه است.

بنابراین تمام مقادیر θ از ناحیه $r=\sqrt{2a^2\cos 2\theta}$ خارج خواهیم شد بنابراین انتگرال برابر خواهد بود

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\int_{0}^{\sqrt{2a^2\cos 2\theta}} r\,dr\,d\theta = \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=\sqrt{2a^2\cos 2\theta}} d\theta$$

$$= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} a^2\cos 2\theta\,d\theta = \frac{a^2}{2}\sin 2\theta\Big]_{-\pi/4}^{+\pi/4} = a^2$$

حالتهای با مختصات قطبی و حالتهای چندگانه قطبی حالت خاص است از روش عمومی‌تر که

در مورد انتگرال های دوگانه روشی که تغییر متغیر ها را با حساب تبدیل های چندگانه می‌باشد

فرض کنید ناحیه G در صفحه uv با معادلات زیر به ناحیه R در صفحه xy تبدیل شود.

$$x=g(u,v) \qquad y=h(u,v)$$

بنابراین به ترتیب هر تابعی چون $f(x,y)$ که روی R تعریف می‌شود تابعی چون

$f(g(u,v),h(u,v))$ خواهد داشت که روی G تعریف می‌شود

حالا کار ما در این موضوع این است که امکان دارد بخواهیم انتگرال هایی را در صفحه uv

محاسبه کنیم اما این انتگرال ها در این صفحه دشوار باشد می‌توانیم این انتگرال

را در دستگاه xy تبدیل کرد و مسئله را حل کرد. البته این تبدیلات بیشتر با استفاده‌های دانسته در زیر بیان خواهد شد

$$\iint_R F(x,y)\,dx\,dy = \iint_C f(g(u,v),h(u,v))\,|J(u,v)|\,du\,dv$$

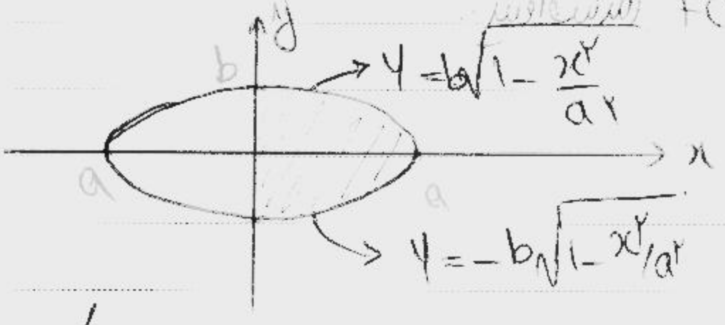
* عامل $|J(u,v)|$ که قدر مطلق این بیان شده در واقع است ژاکوبیان

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

نکته: $J(u,v)$ را ژاکوبین گویند. که ژاکوبین برای مختصات کروی (یعنی اگر بخواهیم تغییر در ناحیه را به قطبی انتقال دهیم با یادگیری ژاکوبی استفاده کرد) برابر ρ یا r می‌باشد.

مثال) مساحت ناحیه R که به صورت $R: \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 ,\ x \geq 0 \right\}$ تعریف می‌شود را بیابید

انتگرال $F(x,y) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$



حل: اگر این انتگرال را مستقیم بخواهیم در دستگاه مختصات کارتزین حل کنیم

با مشکل انتگرال‌گیری مواجه خواهیم شد. حال با روش تغییر متغیر و دستگاه می‌توان آن را به سادگی حل کرد.

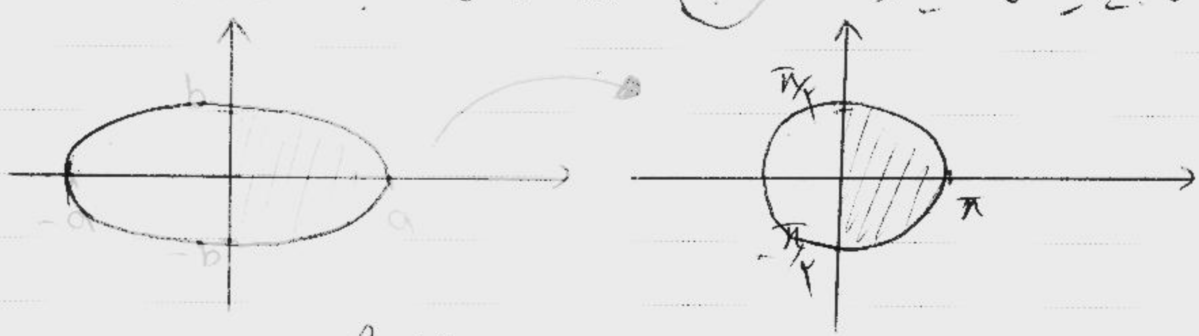
$x = a\rho\cos\theta \qquad y = b\rho\sin\theta$

ژاکوبین $I = ab\rho$

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \iint \sqrt{1-\rho^2}\,ab\rho\,d\rho\,d\theta$$

Subject
Date

حال با بردن شکل ناحیه در مختصات قطبی که انتگرال عامل آن محاسبه می‌گردد رسم شود.



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \xrightarrow[y=a\rho\sin\theta]{x=a\rho\cos\theta} \rho^2=1 \Longrightarrow \boxed{\rho=\pm 1}$$

نکته 8 بنابراین ناحیه انتگرال گیری در xy به ناحیه ای نیم دایره در مختصات قطبی تبدیل شد که انتگرال گیری بسیار ساده تر خواهد شد.

$$ab\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{0}^{1}\sqrt{1-\rho^2}\,\rho\, d\rho\, d\theta$$

تمرین) انتگرال دوگانه $f(\theta,\rho)=1$ را در هر یک از ناحیه‌های زیر حساب کنید!

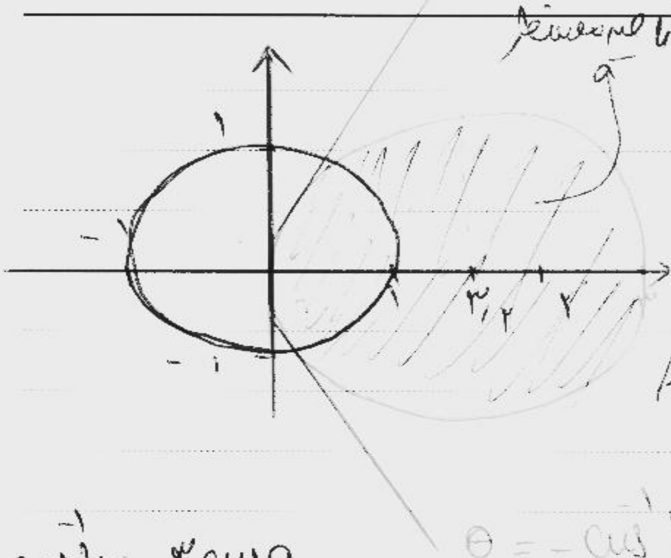
a) ناحیه مسطحی که درون دایره $\rho=3\cos\theta$ و بیرون دایره $\rho=1$ جای دارد؟

$$\rho=3\cos\theta \Longrightarrow \rho^2=3\rho\cos\theta \Longrightarrow x^2+y^2=3x$$

$$\Longrightarrow x^2-3x+y^2=0 \Longrightarrow \left(x^2-3x+\frac{9}{4}\right)+y^2=\frac{9}{4}$$

$$\Longrightarrow \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2=\frac{9}{4}$$ دایره‌ای به شعاع $\frac{3}{2}$ و مرکز $(\frac{3}{2},0)$

حال شکل را رسم کرده و ناحیه را مشخص می‌کنیم.



$\rho = ۳\cos\theta \rightarrow \cos\theta = \frac{\rho}{۳}$

* θ دلخواه است با حاصلی که ۲ عمود بر هم منتهی

می‌گویند دایره‌ای که با هم می‌سازند که عمود بر $\rho = ۳\cos\theta$

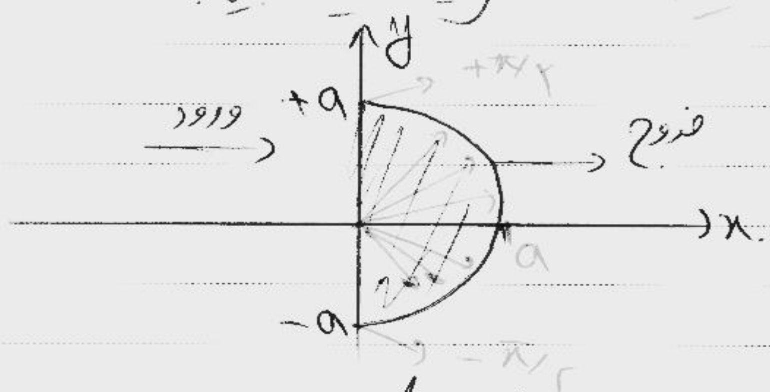
در $\rho = ۱$ همدیگر را قطع می‌کنند در هم

* $\theta = \cos^{-1} ۱/۳$ خواهیم داشت .

$$\int_{-\cos^{-1}۱/۳}^{\cos^{-1}۱/۳} \int_{۱}^{۳\cos\theta} \rho\, d\rho\, d\theta$$

تمرین) انتگرال‌های زیر را از طریق تبدیل به دستگاه مختصات قطبی حل کنید؟

$$a)\int_{-a}^{+a} \int_{0}^{\sqrt{a^۲-y^۲}} (x^۳+y^۲)^{۳/۲}\, dx\, dy$$



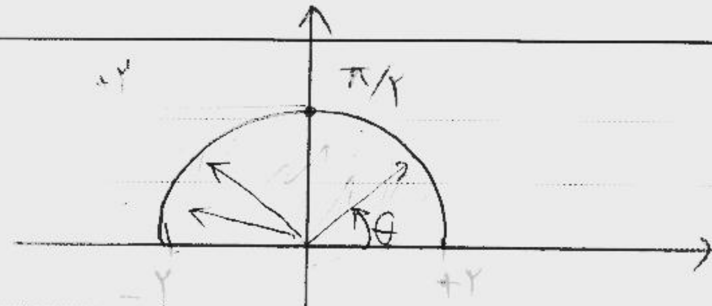
حل: در شکل بالا اشکال سایه زده شکل‌ها در مختصات دکارتی است و آنچه در مورد تبدیل به مختصات قطبی است . بنابراین خواهیم داشت:

$$\int_{-a}^{a} \int_{0}^{\sqrt{a^۲-y^۲}} (x^۳+y^۳)^{۳/۲}\, dx\, dy = \int_{-\pi/۲}^{\pi/۲} \int_{0}^{a} (a^۳\cos^۳\theta + a^۳\sin^۲\theta)^{۳/۲}\, a\, dr\, d\theta$$

* حل انتگرال بالا به سادگی انجام می‌شود *

Subject
Date

c) $\displaystyle\int_{0}^{2}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} x^2y^2\,dx\,dy$



$$\int_{0}^{2}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} x^2y^2\,dx\,dy = \int_{0}^{\pi}\int_{0}^{2} (\rho\cos\theta)^2(\rho\sin\theta)^2\rho\,d\rho\,d\theta$$

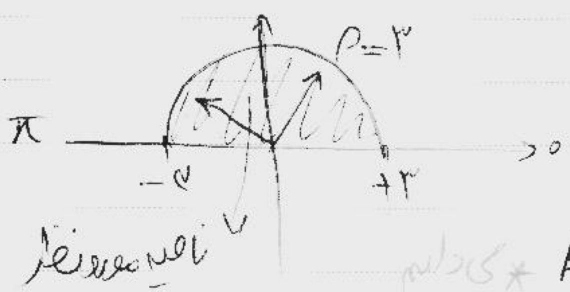
$$= \int_{0}^{\pi}\int_{0}^{2} \rho^5\cos^2\theta\,(1-\cos^2\theta)\,d\rho\,d\theta =$$

* ادامه حل این تمرین با شما *
* به عهده شما *

d) $\displaystyle\int_{-3}^{3}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)dy\,dx$ مهم *

$$y^2+x^2=9 \Rightarrow \rho^2=9 \Rightarrow \rho=+3 \qquad \theta=\tan^{-1}\frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{y}{x}=\tan\theta}$$



ناحیه معتبر

می دانیم * $\operatorname{Arctan}(\tan\theta)=\theta$

$$\Rightarrow \int_{-3}^{3}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)dy\,dx = \int_{0}^{\pi}\int_{0}^{3} \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\theta)\rho\,d\rho\,d\theta$$

$$= \int_{0}^{\pi}\int_{0}^{3} \theta\rho\,d\rho\,d\theta = \int_{0}^{\pi} \theta\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^3 d\theta = \frac{9}{4}\pi^2$$

Subject:

Year. Month. Date.

تمرین ۵ انتگرال های زیر را با استفاده از تغییر متغیر مناسب حل کنید.

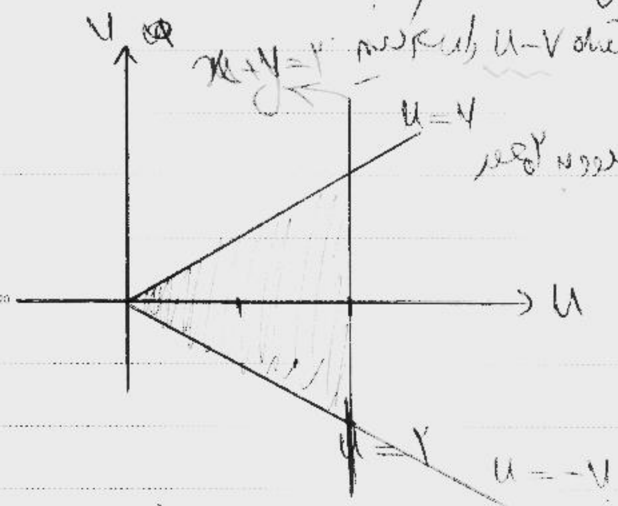
a) $\iint_R e^{\frac{y-x}{y+x}}\,dx\,dy$ که در آن R ناحیه محدود به خط $x+y=2$ و محورهای مختصات است؟

چون حل به این انتگرال ها دشوار است آن را به دستگاه دیگر انتقال می دهیم

فرض کنید:
$$\begin{cases} x+y=u \\ -x+y=v \end{cases} \Longrightarrow u+v=2y \Longrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{u+v}{2} \\ x=\dfrac{u-v}{2} \end{cases} \qquad u=2$$

$$\Longrightarrow J=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{2}$$

حال باید ناحیه مشخص شده و انتقال داده شده در صفحه $u-v$ را رسم کنیم



چون طبق صورت سوال ناحیه محدود به $x-y$ را خط محدود به ۲ می‌دهد

مختصات یعنی $x=0$ و $y=0$ را حال در دستگاه $u-v$ خواهیم داشت.

$$\Longrightarrow \begin{cases} x+y=u \\ y-x=v \end{cases} \xrightarrow{y=0} \begin{cases} u=x \\ v=-x \end{cases} \Longrightarrow \boxed{u=-v}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x+y=u \\ y-x=v \end{cases} \xrightarrow{x=0} \begin{cases} u=y \\ v=y \end{cases} \Longrightarrow \boxed{u=v}$$

Subject:

Year. Month. Date.

چون ۲ ناحیه متقارن می باشد، قسمت بالای محور u ها را حساب کرده و در ۲ ضرب خواهیم کرد.

که معادل محور v ها عوض کنیم خواهیم داشت:

$$\int_{-2}^{2}\int_{0}^{4} e^{v/u}\left(-\tfrac{1}{2}\right)dv\,du$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\int_{0}^{4} e^{(v/u)}\,dv\,du = -\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\frac{1}{u}e^{v/u}\Big|_{0}^{4}du$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\left[\frac{1}{u}e-\frac{1}{u}\right]du = -\frac{1}{2}(e-1)\int_{-2}^{2}\frac{1}{u}du$$

$$-\frac{1}{2}(e-1)\ln u\Big|_{-2}^{2} = -\frac{1}{2}(e-1)\left[\ln(2)-\ln(-2)\right]$$

$$= -\frac{1}{2}(e-1)\ln(-1)$$

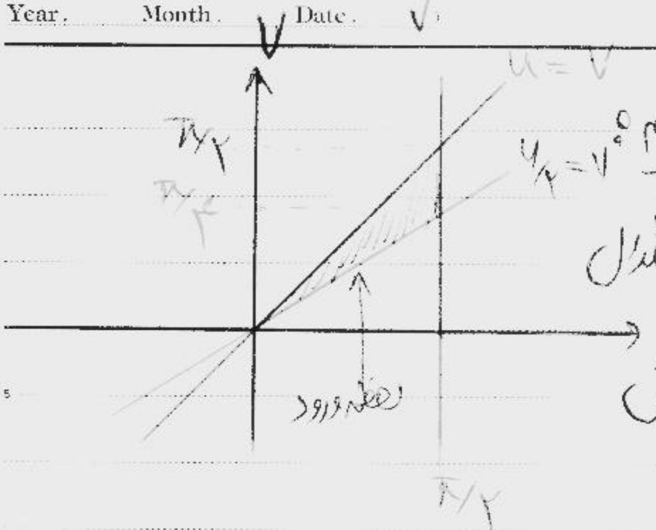
b) $\iint_R \frac{x^2}{y}\sin(xy)\,dx\,dy$ که R ناحیه محصور بین منحنی های $x^2=\frac{\pi}{2}y$ ، $y^2=\frac{x}{2}$ ، $y^2=x$ می باشد.

حل: فرض کنید داشته باشیم:

$$\frac{x^2}{y}=u,\quad v=xy$$

$$\Longrightarrow \frac{u}{v}=\frac{x^2}{y^2x}=\frac{x}{y^2}\Longrightarrow u=\frac{x}{y^2}\times v$$

حال تشخیص ناحیه مستطیل u-v $\Longrightarrow \frac{x^2}{y}=u=\frac{\pi}{2}$ (1) $\quad \frac{u}{v}=\frac{x}{y^2}=\begin{cases}u=v & (2)\\ u=2v & (3)\end{cases}$



* حال ناحیه مفروض را در دستگاه u-v رسم می کنیم:

قسمت هاشور خورده ناحیه حاصل می باشد که حاصل انتگرال

روی این ناحیه برابر حاصل انتگرال روی ناحیه مفروض

در صورت سوال می باشد *

حال باید ژاکوبین (یا همان ضریب ثابت) را بدست آوریم:

$$u = \frac{x^2}{y} \Rightarrow y = \frac{x^2}{u}$$

$$v = xy \Rightarrow x = \frac{v}{y} \Rightarrow x^2 = \frac{v^2}{y^2}$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{u^2 v^2}{x^4} \Rightarrow x^6 = u^2 v^2 \Rightarrow x^3 = uv \Rightarrow x = \sqrt[3]{uv}$$

$$y = \frac{\sqrt[3]{(uv)^2}}{u} \qquad J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = A \text{ فرض}$$

$$\iint_R \frac{x^2}{y} \sin(xy)\, dx\, dy = \int_0^{\pi/2} \int_{u/2}^{u} u \sin(v) |A| \, dv\, du$$

* حاصل انتگرال با ناحیه u-v برابر است با حاصل انتگرال صورت مسئله در صفحه (x-y)

Subject:
Year. Month. Date.

c) $\iint_R \frac{x^2}{y^4}\,dx\,dy$ که R ناحیه محصور بین $xy=2$ ، $xy=4$ و $y^2=x$ و $y^2=3x$ است؟

d) $\iint_R \cos\frac{x-y}{x+y}\,dy\,dx$ که R ناحیه محصور بین $x=0$ ، $y=0$ ، $x+y=1$ ، $y=1-x$ ، $x=1$ ... است؟

فرض کنید $\begin{cases} x-y=u \\ y+x=v \end{cases} \Rightarrow u+v=2x \Rightarrow \boxed{x=\frac{u+v}{2}}$ *

$\boxed{y=\frac{v-u}{2}}$ *

$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{1}{2} \qquad \frac{\partial x}{\partial v}=\frac{1}{2}$

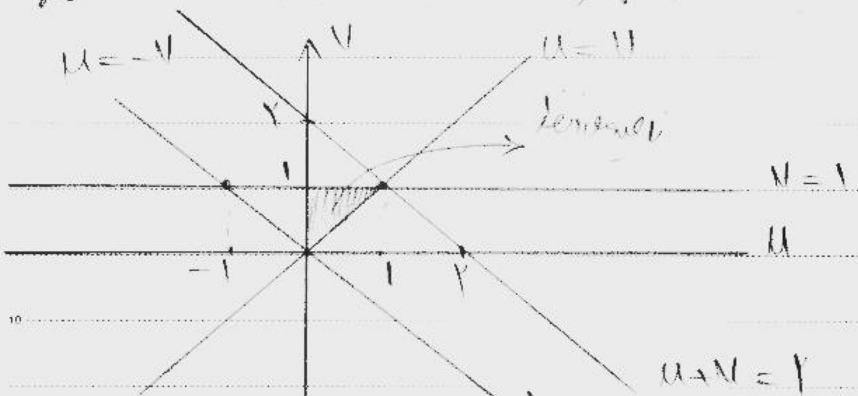
$\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{-1}{2} \qquad \frac{\partial y}{\partial v}=\frac{1}{2}$

$I=-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{2}$

$y+x=1 \Rightarrow v=1$ (۱)   حال این خطوط را در دستگاه مختصات v-u مشخص می‌کنیم

$u=v$ (۲) $u=-v$ (۳) $u+v=2$ (۴)

ناحیه انتگرال در دستگاه v-u محدود به خطوط $v=1$ و $u=v$ و $u=-v$ و $u+v=2$ می‌باشد



$$\iint_R \cos\frac{x-y}{x+y}\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^v \cos\frac{u}{v}\,du\,dv = \frac{1}{2}\int\left[v\sin\frac{u}{v}\Big|_0^v\right]dv$$

$$= \frac{1}{2}\sin 1\int v\,dv = \frac{1}{2}\left[\frac{v^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

۸- انتگرال $\int_0^2\int_{y/2}^{\frac{y+4}{2}} y^3(2x-y)e^{(2x-y)^2}\,dx\,dy$ را با تغییر متغیر $u=x-\frac{1}{2}v$ و $y=v$ ، $x=u+\frac{1}{2}v$ حل کنید.

$0<y<2$ $\begin{cases} x=y/2 \\ x=\frac{y+4}{2} \end{cases}$

حل کنید!

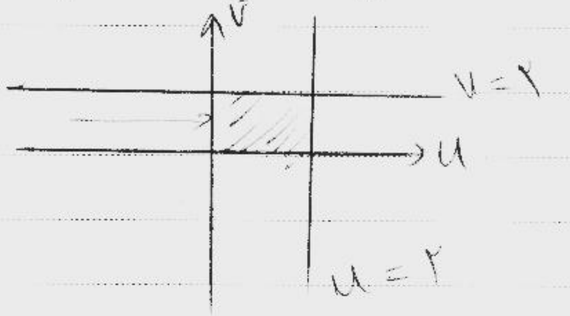
حال با توجه به معادلات، ناحیه را در دستگاه v-u رسم می‌کنیم

$\begin{cases} v=0\ ,\ v=2 \\ u=\frac{y}{2}-\frac{1}{2}y=0\ ,\ u=\frac{y}{2}+2-\frac{1}{2}y=2 \end{cases}$

Subject:
Year. Month. Date.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad \begin{cases} y = v \\ 2u = 2x - y \end{cases}$$

$$\iint y^3 (2x-y) e^{(2x-y)^2} = \int_0^2 \int_0^2 2v^3 u \, e^{4u^2} du\,dv = 16(e^{16}-1)$$



مثال) تبدیل $\int_0^4 \int_{y/2}^{y/2+1} \frac{2x-y}{2} \, dx\,dy$ را با استفاده از تبدیل $v = \frac{y}{2}$ ، $u = \frac{2x-y}{2}$

و انتگرال گیری روی ناحیه مناسب در صفحه uv بیابید؟

ابتدا ناحیه انتگرال گیری در صفحه xy را رسم کرده و مرزهایش را مشخص می کنیم: برای استفاده از انتگرال

متناظر ما احتیاج به ناحیه متناظر G در صفحه uv و نیز فرمول تبدیل را بیابیم. برای یافتن

آن ما نخست از روابط $v = \frac{y}{2}$ و $u = \frac{2x-y}{2}$ ، x و y را برحسب u و v بدست آورده:

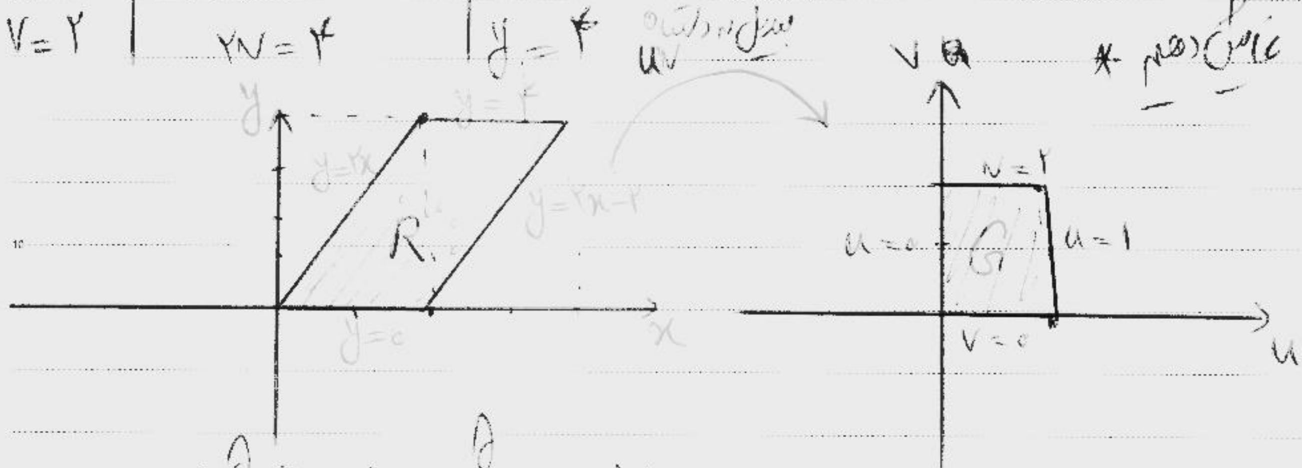
$$\longrightarrow \begin{cases} u + v = x \\ y = 2v \end{cases}$$

Subject:
Year. Month. Date.

حال به مشخص نمودن ناحیه و مرزها در دستگاه uv می پردازیم:

مرزها در uv	مرز ساده در G	مرز R
$u=0$	$u+v=\frac{2v}{2}=v$	$x=y/2$
$u=1$	$u+v=\left(\frac{2v}{2}\right)+1=v+1$	$x=(y/2)+1$
$v=0$	$2v=0$	$y=0$
$v=2$	$2v=4$	$y=4$

* حال می توانیم ناحیه و مرزها را در دستگاه uv نمایش دهیم *



$$J(u,v)=\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial u}(u+v) & \frac{\partial}{\partial v}(u+v)\\ \frac{\partial}{\partial u}(2v) & \frac{\partial}{\partial v}(2v)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=2$$

و ژاکوبی تبدیل برابر است با: ۲

* حال می توان انتگرال داده شده در مسئله را به دستگاه uv برد و حل کرد

$$\int_0^4\int_{y/2}^{(y/2)+1}\frac{2x-y}{2}\,dx\,dy=\int_0^2\int_0^1 u\,|J(u,v)|\,du\,dv=\int_0^2\int_0^1 u(2)\,du\,dv$$

$$=2$$

* حاصل انتگرال را که می خواستیم در دستگاه yx حل می کردیم به چندین زحمت باید تبدیل می کردیم (اگر شکل yx به صورت متوازی الاضلاع بود مطالب واضح تر بود) که با استفاده از این روش کار را تا حد زیادی ساده می کند

PAPCO

Subject :
Year . Month . Date .

انتگرال سه گانه : حجم ناحیه محصور و بسته ای چون D در فضا از فرمول زیر بدست می آید

$$D \text{ حجم } = \iiint_D dv$$

* برای محاسبه انتگرال ۳ گانه بصورت ۳ بعدی تصویر فوق را به ناحیه ۲ بعدی می بریم و با استفاده از انتگرال های مکرر انتگرال ۳ گانه را حل می کنیم *

روش : فرض کنید ناحیه ای چون D داریم که از پایین بوسیله $z=f_1(x,y)$ و از بالا بوسیله $z=f_2(x,y)$ و از اطراف با استوانه C که مولدی محور z است محدود شده باشد می خواهیم از تابع پیوسته ای چون $F(x,y,z)$ روی این ناحیه انتگرال بگیریم فرض می کنیم R تصویر قائم D روی صفحه xy باشد. R ناحیه ای در صفحه xy است که C آن را احاطه کرده است بنابراین انتگرال F روی D به صورت زیر در می آید

$$\iiint_D F(x,y,z)\,dv = \iint_R \int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} F(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

تذکر : این انتگرال بیان می کند که $F(x,y,z)$ از پایین محدود به صفحه xy و نقطه های روی آن یعنی R شده است و اگر موازی محور z ها حرکت کنیم خط ورود به ناحیه حتماً برابر $f_1(x,y)$ و خط خروج از این ناحیه برابر $f_2(x,y)$ خواهد بود.

* حال برای تعیین حدود انتگرال در ناحیه R که حجم را در دستگاه ۲ بعدی xy تصویر کنید و از آن روند

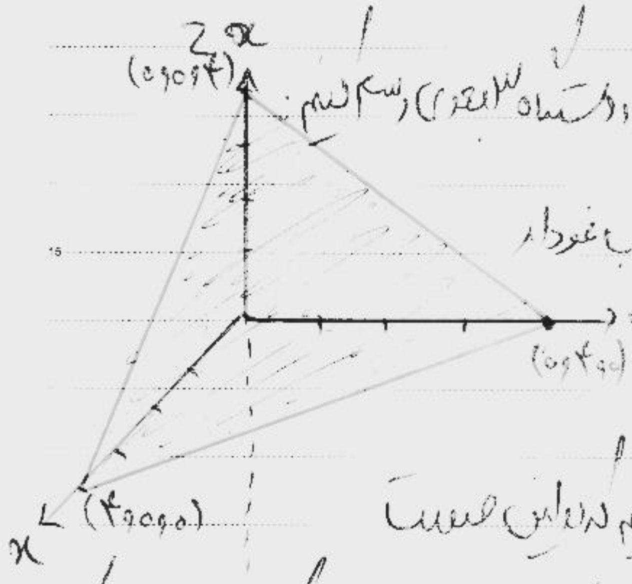
درک نمایید. و همانند روش های انتگرال ۲ گانه که با موازی محور y حرکت کنیم ابتدا به $y=f_1(x)$ و

سپس به $y=f_2(x)$ برخورد می‌کنیم و یا با موازی محور x حرکت کنیم ابتدا به خط $x=g_1(y)$ و سپس

به $x=g_2(y)$ برخورد خواهیم کرد حاصل این انتگرال ۲ بعدی را بدست می‌آوریم.

مثال) در ناحیه V محدود به صفحات مختصات حجم چهاروجهی صفحات مختصات و صفحه $x+y+z=4$

مقدار تابع $f(x,y,z)=xyz$ را بدست آورید.



حل) ابتدا برای تشخیص حدود انتگرال گیری شکل را در دستگاه ۳ بعدی رسم کنیم.

صفحه $x+y+z=4$ صفحه‌ای است که به طور مورب محورهای

z را در ۴ و x و y را نیز در ۴ قطع می‌کند حال برای

تعیین حدود انتگرال گیری z با موازی محور z حرکت کنیم که از این سمت

لحظه ورود به حجم مورد نظر به صفحه xy برخورد می‌کنیم یعنی $z=0$ که حد پایینی انتگرال

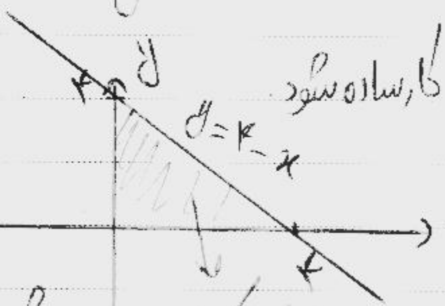
است و لحظه خروج از حجم حاصل به نمودار $z=4-x-y$ برخورد خواهیم کرد که حد فوقانی

(صفحه ۴)

انتگرال گیری می‌باشد. حال برای این که حدود انتگرال گیری نسبت به dx و dy را راحت‌تر تشخیص

Subject :
Year . Month . Date .

دهیم آن قسمتی از حجم حاصله را که توسط رویه بالای آن محدود شده سایه اش در صفحه xy) در صفحات



xy می افتد را در نظر داشته جدا xy رسم می کنیم تا کار ساده شود

حال برای تعیین حدود انتگرال گیری نسبت به x و y

شکل مقابل را نگاه می کنیم . انتگرال گیری حد y را ما فرض   * این ناحیه کف حجم حاصل را نشان می دهد *

کنیم است که $y=0$ برخورد خواهیم کرد. و در نقطه خروج به خط $y = 4 - x$ برخورد می کنیم .

و مقادیر x نیز از صفر تا ۴ تغییر خواهد کرد. حالا می توان مقدار انتگرال سه گانه را بدست آورد

$$\iiint F(x,y,z)\,dV = \int_0^4 \int_0^{4-x} \int_0^{4-x-y} xyz\,dz\,dy\,dx$$

یک مقداری

$$= \int_0^4 \int_0^{4-x} \left[xy\frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=4-x-y} dy\,dx = \int_0^4 \int_0^{4-x} \frac{xy}{2}(4-x-y)^2\,dy\,dx = A$$

که حاصل انتگرال بالا به راحتی قابل محاسبه است

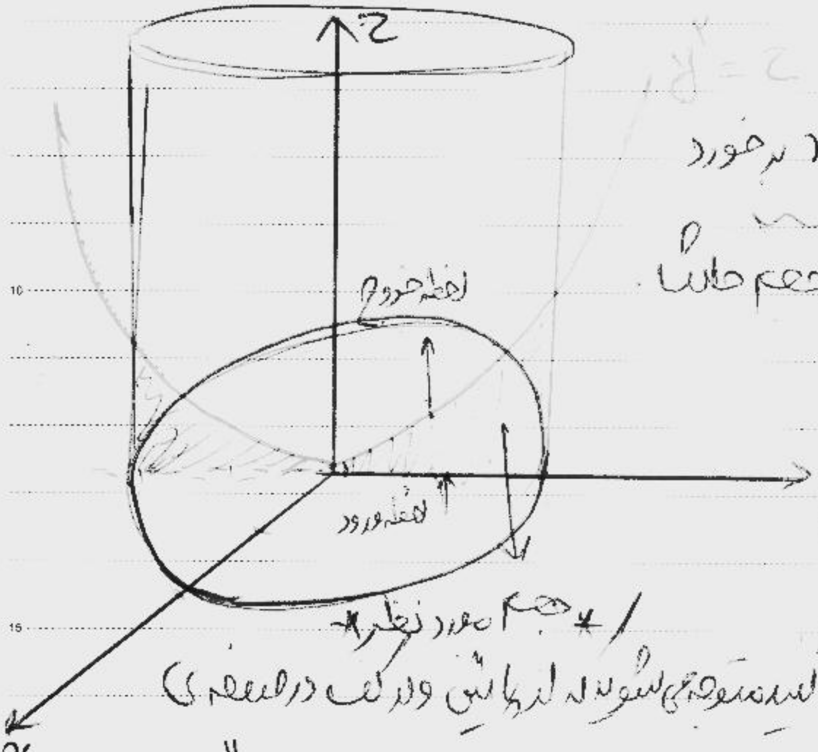
(مثال) با استفاده از انتگرال سه گانه مطلوب است حجم ناحیه محصور به معادله $x^2+y^2=4$ و صفحه $z=0$

و سهمی $z=y^2$ را بدست آورید؟

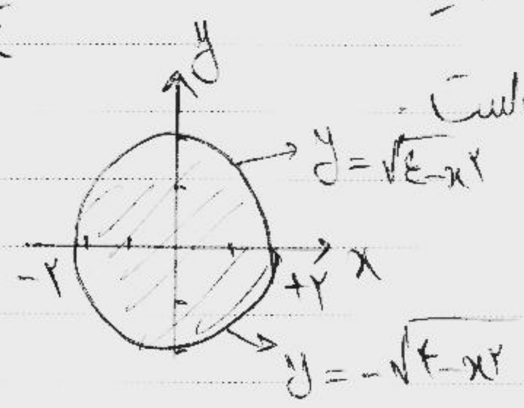
نکته : که حجم یک ناحیه حجمی را اگر بخواهیم $f(x,y,z)$ را یک در نظر گرفته و حجم برابر

خواهد بود با : $V = \iiint_V dy\,dx\,dz$

حل: برای تشخیص حدود انتگرال برای z باید نمودار شکل را در صفحات (z y x) دستگاه ۳ بعدی رسم کرده. $x^2+y^2=4$ یک استوانه به مرکز مبدأ مختصات با محور z می باشد که فقط قسمت بالای محور z آن قابل قبول است و $z=y^2$ نیز یک سهمی می باشد در صفحه zy.



که در شکل دقت شود نقطه ورود به صفحه xy برخورد خواهیم کرد یعنی $z=0$ و در نقطه خروج که حجم حالا به نمودار $z=y^2$ برخورد خواهیم کرد حال که حجم را از یک سطح است رسم شده صفحه ی xy رسم می کنیم. که در شکل ملاحظه می شود که از بالا نگاه کنیم ولی کف در صفحه ی xy هم حجم مورد نظر مطابق یک دایره با شعاع ۲ محدود شده است. که اگر موازی محور y حرکت شود ابتدا به نمودار $y=-\sqrt{4-x^2}$ برمی خوریم و در نقطه خروج به نمودار $y=\sqrt{4-x^2}$ برخورد خواهیم کرد. حال می توان حجم حالا را محاسبه کرد.



$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{0}^{y^2} dz\,dy\,dx$$

* می توانیم برای محاسبه انتگرال که حجم یعنی همان دایره در صفحه xy که تغییر متغیر قطبی استفاده کنیم.

$$\iint_R \int_0^{y^2} dz\,dy\,dx = \iint_R y^2\,dy\,dx \quad *$$

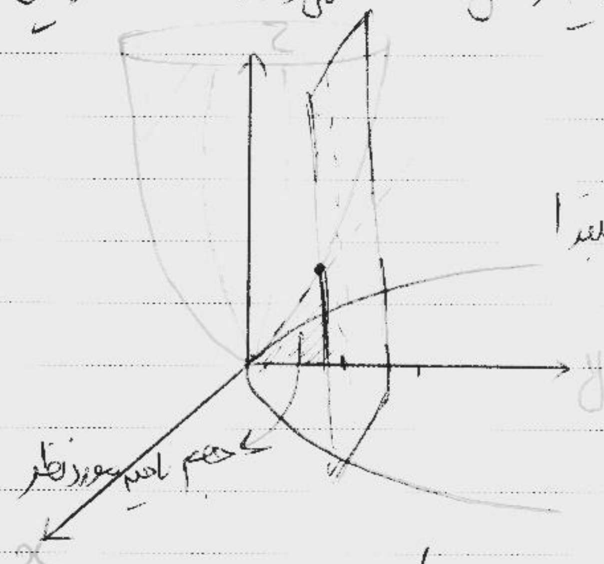
حال می توان انتگرال * را در ناحیه R یعنی نواحی درون دایره $x^2+y^2=4x$ با روش قطبی حل کرد.

$$y=\rho\sin\theta \Rightarrow \int_0^{2\pi}\int_0^{2} \rho^3\sin^2\theta\,d\rho\,d\theta$$

مثال) حجم جسم محدود به رویه های $z=x^2+y^2$ و $y=x^2$ و صفحه $z=0$ و $y=1$

را بدست آورید. ابتدا شکل را در دستگاه ۳ بعدی رسم خواهیم کرد. $z=x^2+y^2$ رویه ای است که از پایین

به مبدأ مختصات محدود شده است.



اگر به شکل دقت شود معادله ای همچون میله حرکت کنیم ابتدا

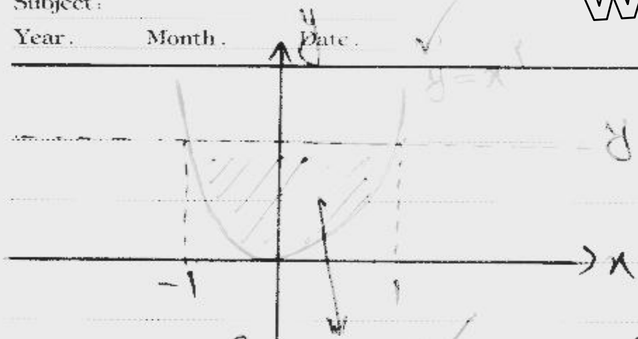
به $z=0$ برخورد خواهیم کرد و در لحظه خروج از حجم

مورد نظر به رویه $z=x^2+y^2$ برخورد خواهیم کرد.

حال که این حجم که تصویر شده در صفحه xy را نیاز خواهیم کرد

این مساحت که تشکیل می شود بین رویه $y=x^2$ و $y=1$ می باشد را در دستگاه ۲ بعدی xy

رسم می کنیم تا حدود انتگرال بین dx و dy را در راستای مشخص کنیم



حال انتگرال‌های حدود y را مشخص کنیم $1 = y$

ابتدا به صورت $x^2 = y$ و در نقطه خروج

خط $y = 1$ برخورد خواهیم کرد و x هم بین ±۱ تغییر می‌کند. که مقطع حالت

حال می‌توان حجم مورد نظر را بررسی کرد:

$$\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1}\int_{0}^{x^2+y^2} dz\,dy\,dx = \int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1}(x^2+y^2)\,dy\,dx$$

$$=\int_{-1}^{1}\left[x^2y+\frac{1}{3}y^3\right]_{x^2}^{1}dx = \int_{-1}^{1}\left[x^2+\frac{1}{3}-x^4-\frac{1}{3}x^3\right]dx = \int_{-1}^{1}\left(x^2-x^4-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}\right)dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}-x^3+\frac{1}{3}x\right]_{-1}^{1} = \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-1+\frac{1}{3}\right)=\frac{-26}{15}$$

مثال) مطلوب است انتگرال سه‌گانه $\iiint_V \sqrt{x^2+y^2}\,dv$ در ناحیه E جسم محدود به صفحه $z=0$

و سطح $z = 9 - x^2 - y^2$ می‌باشد را حساب کنید.

در این گونه مسائل مانند انتگرال دوگانه محل ناحیه را پیدا می‌کنیم و شکل را رسم می‌کنیم.

$z = 9 - x^2 - y^2$ این یک کمی وارونه می‌باشد که بالای $z = 9$ محدود شده است زیرا $x^2 + y^2$ همواره

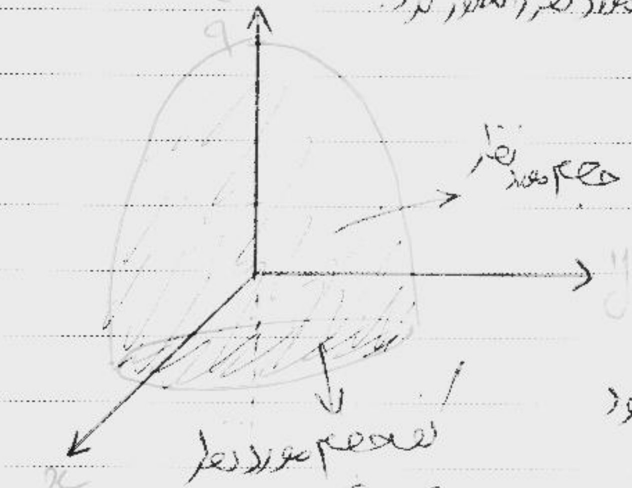
یک عبارت مثبت است که از ۹ کم می‌شود پس همواره z از ۹ کمتر است و شاخه‌های کمی وارونه

پایین باز می‌شود. همچنین در صفحه $z = 0$ سهمی وار پایین محدود شده است.

این حجم وقتی روی صفحه xy یا $z=0$ به صورت یک دایره خواهد شد

$z=0 \Rightarrow x^2+y^2=9$

که شعاع این دایره ۳ می باشد. حال می توان حجم مورد نظر را تصور کرد.

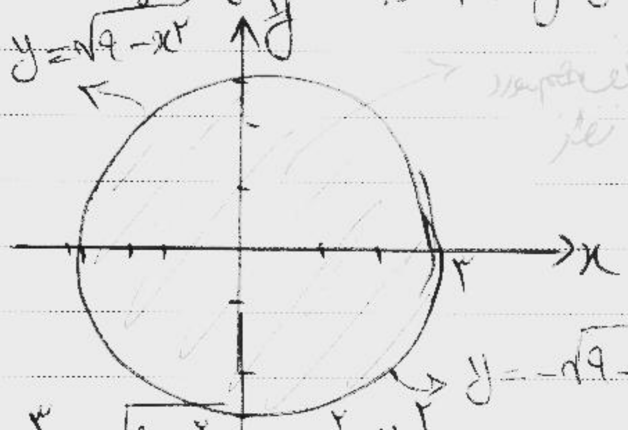


اگر موازی محور z ها حرکت کنیم ابتدا به صفحه $z=0$

برخورد می کنیم و سپس به سطح $z=9-x^2-y^2$

برخواهیم خورد. حال کف این حجم یک دایره می شود

به شعاع ۳ و مرکز مبدأ مختصات که اگر در صفحه ۲ بعدی xy رسم شود بشکل زیر دیده می شود:



که اگر موازی محور y ها حرکت کنیم ابتدا به $y=-\sqrt{9-x^2}$

و سپس به $y=\sqrt{9-x^2}$ برخواهیم خورد.

و تغییرات x از ۳- تا ۳+ خواهد بود.

$$\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{0}^{9-x^2-y^2}\sqrt{x^2+y^2}\,dz\,dy\,dx=\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}(\sqrt{x^2+y^2})(9-x^2-y^2)\,dy\,dx$$ بود.

حال که حاصل انتگرال ۲ گانه را دیدیم که حساب کردن آن به روش معمولی سخت است. با تغییر متغیر قطبی به راحتی حل می کنیم:

$$\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}(\sqrt{x^2+y^2})(9-x^2-y^2)\,dy\,dx=\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{3}(9-\rho^2)\rho^2\,d\rho\,d\theta$$

حال (هم) مطلوب است حجم ناحیه بیرون استوانه $x^2+y^2=1$ و محدود به صفحه سطح $S_1 = 9-x^2-y^2$

و $S_2=2x^2+2y^2$ را بدست آورید ؟ ابتدا باید ناحیه را شناسایی کرد. معادله سطح $S_1=9-x^2-y^2$ برابر

خواهد بود با یک سهموی که از نقطه ۹ روی محور z شروع شده و شاخه هایش به سمت پایین باز می شوند.

و سطح S_2 یک سهموی دیگری است که شاخه هایش از مبدأ مختصات شروع شده و به سمت بالا می رود.

این ۲ سطح S_1 و S_2 یکدیگر را با مقطع دایره ای در صفحه موازی صفحه xy قطع می کنند که معادله

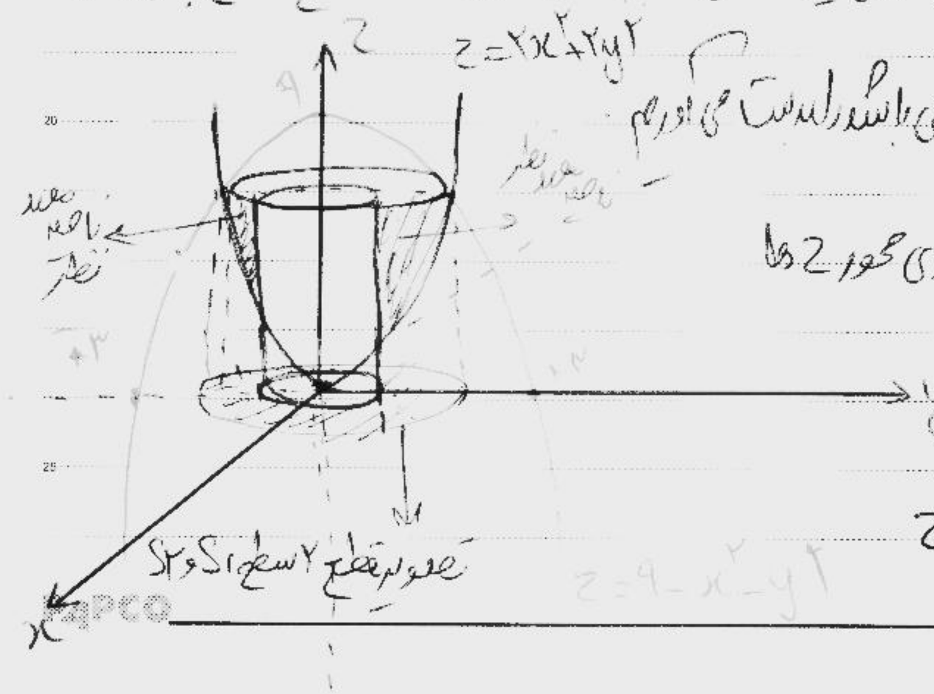
این دایره از قطع S_1 و S_2 بدست خواهد آمد.

$$9-x^2-y^2=2x^2+2y^2 \Longrightarrow x^2+y^2=3$$

بنابراین مقطع S_1 و S_2 دایره ای خواهد شد به مرکز مبدأ مختصات و شعاع $\sqrt{3}$ برای یافتن

و تعیین حدود x و y این سطح مقطع که حجم داخل آن می شود را به صفحه xy انتقال می دهیم.

و استوانه $x^2+y^2=1$ درون این حجم قرار می گیرد. حال حجم مورد نظر از اختلاف (تقاطع) ۲ سطح جسمی S_1 و S_2



و ناحیه بیرون استوانه $x^2+y^2=1$ می باشد را بدست می آوریم

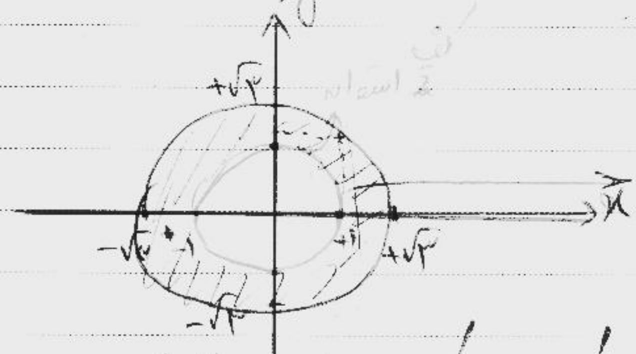
حال می توانیم شکل را برای شکل موازی محور z ها

حرکت کنیم ابتدا به سطح

$z=2x^2+2y^2$ و سپس به $z=9-x^2-y^2$

می رسیم

حال برای انتگرال‌گیری حدود انتگرال بر dx و dy باید در دستگاه مختصات ۲ بعدی برویم.



حال که حجم مورد نظر در صفحه xy را شناسایی کردیم. ناحیه بین ۲ دایره $x^2+y^2=1$ و $x^2+y^2=3$ می‌باشد. حال اگر معادلات را بر حسب y حل کنیم ۴/۱ کل (ربع کل) حل کنیم ۲ ناحیه باید تقسیم کنیم یک کل و کل $y=0$ و محدود $y=+\sqrt{3-x^2}$ و در ناحیه دوم اول و محدود $y=\sqrt{1-x^2}$ و محدود به $y=\sqrt{3-x^2}$ خواهد شد. حاصل این انتگرال را در ۴ ضرب می‌کنیم تا مساحت کل حجم حاصل شود.

$$\iint_R \int_{2x^2+2y^2}^{9-x^2-y^2} dz\,dy\,dx = \iint_R (2x^2+2y^2-9+x^2+y^2)\,dy\,dx$$

$$= \iint_R (3x^2+3y^2-9)\,dy\,dx = 3\iint_R (x^2+y^2-9)\,dy\,dx$$

$$\iint_R (x^2+y^2-9)\,dy\,dx = 4\left[\int_0^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}} dy\,dx + \int_1^{\sqrt{3}} \int_0^{\sqrt{3-x^2}} dy\,dx\right]$$

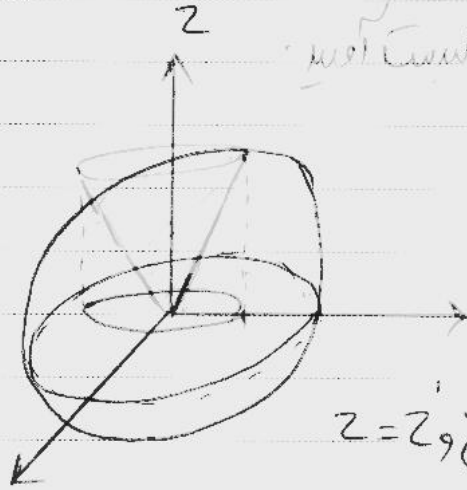
جواب کل $= 12\left[\int_0^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}} dy\,dx + \int_1^{\sqrt{3}} \int_0^{\sqrt{3-x^2}} dy\,dx\right]$ → حاصل حجم مورد نظر

Subject:
Year. Month. Date.

انتگرال سه‌گانه در دستگاه استوانه‌ای و کروی :

مختصات استوانه‌ای برای توصیف استوانه‌هایی که محورشان در امتداد محور z است و صفحاتی که شامل محور z یا عمود بر آن مناسب است . ضرب حجمی برای تقسیم‌بندی ناحیه‌ای در فضا با مختصات استوانه‌ای در نظر می‌گیریم عبارت است از : $\iiint f(\rho,\theta,z)\,\rho\,dz\,d\rho\,d\theta$ $\quad dV = dz\,r\,dr\,d\theta$

مثال) مطلوب است انتگرال سه‌گانه تابع $w = zy$ در دستگاه مختصات استوانه‌ای در ناحیه محدود به $z=\sqrt{x^2+y^2}$ و کره $x^2+y^2+z^2=4$ است آمده



حل : ابتدا ناحیه را مشخص می‌کنیم.

$z=\sqrt{x^2+y^2}$ قسمت بالایی یک مخروط می‌باشد

در دستگاه استوانه‌ای می‌دانیم $y = \rho\sin\theta$ و $z = z$

می‌باشد بنابراین خواهیم داشت $\iiint zy\,dx\,dy\,dz = \iiint z\rho^2\sin\theta\,dz\,d\rho\,d\theta$

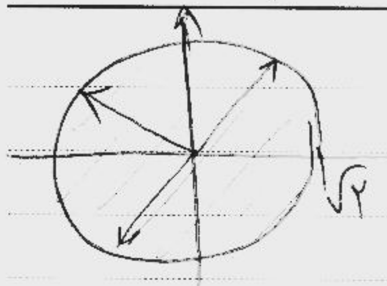
برای تعیین حدود z باید به موازات محور z حرکت کنیم. در لحظه ورود به سطح مخروط خواهیم رسید

یعنی $z=\rho$ و در لحظه خروج به ناحیه کره برخورد خواهیم کرد $z=\sqrt{4-\rho^2}$

برای تشخیص حدود ρ و θ سطح مقطع حجم حاصل را انتقال می‌دهیم به صفحه xy و در ناحیه

۲ بعدی حدود آن را مثل انتگرال ۲ بعدی تعیین خواهیم کرد

Subject :
Year . Month ۲/۲۸ Date . ✓



اگر از قطب شروع به حرکت کنیم تا به سطح دایره برسیم متوجه خواهیم شد که ρ از صفر تا $\sqrt{2}$ تغییر خواهد کرد.

محل تلاقی دایره از تقاطع ۲ حجم خود مسئله بدست می‌آید که برابر خواهد بود با:

$$\begin{cases} z^2 = x^2+y^2 \\ z^2+x^2+y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow 2x^2+2y^2 = 4 \Rightarrow x^2+y^2 = 2 \rightarrow r = \sqrt{2}$$

و θ نیز از ۰ تا 2π تغییر خواهد کرد. بنابراین خواهیم داشت:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\int_{\rho}^{\sqrt{4-\rho^2}} z\rho^2 \sin\theta \, dz\, d\rho\, d\theta$$

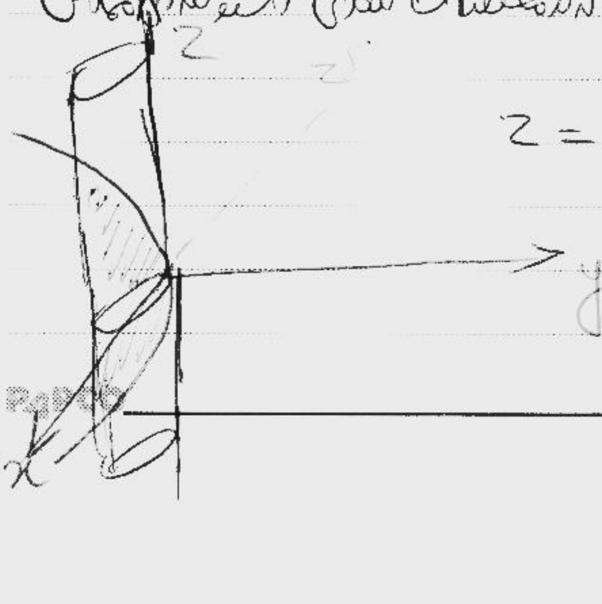
✓ مثال) با استفاده از انتگرال ۳ گانه حجم ناحیه محدود به $\begin{cases} x^2+y^2=2x \\ z^2=4x \end{cases}$ را بدست آورید.

حل) ابتدا ناحیه را شناسایی کنیم.

$x^2+y^2=2x \Rightarrow \rho = 2\cos\theta,$

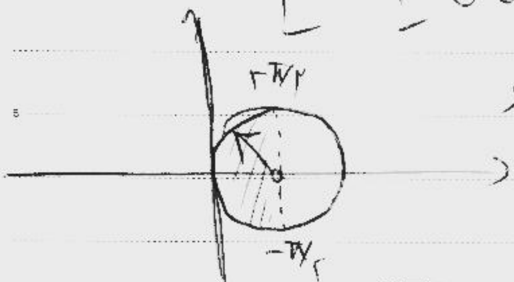
$\rho=2\cos\theta$ دایره‌ای مماس بر محور z ها خواهد بود. که معادله سهمی استوانه‌ای مماس بر محور z ها خواهد بود $z = 2\sqrt{x} = 2\sqrt{\rho\cos\theta}$

چون ۲ حجم متقارن داریم ابتدا بالایی را حساب کرده و در ۲ ضرب می‌کنیم.



اگر معادلات حجم را حساب کنیم ابتدا $z=0$ و سپس با صفحه $z=2\sqrt{\rho\cos\theta}$ برخورد خواهیم کرد

و برای تعیین حدود ρ و θ مقطع را در دستگاه ۲ بعدی انتقال می‌دهیم. خواهیم داشت:



اگر از نقطه شروع کنیم ρ از صفر تا $2\cos\theta$ تغییر خواهد کرد

و تغییرات θ نیز از $-\pi/2$ تا $\pi/2$ خواهد بود.

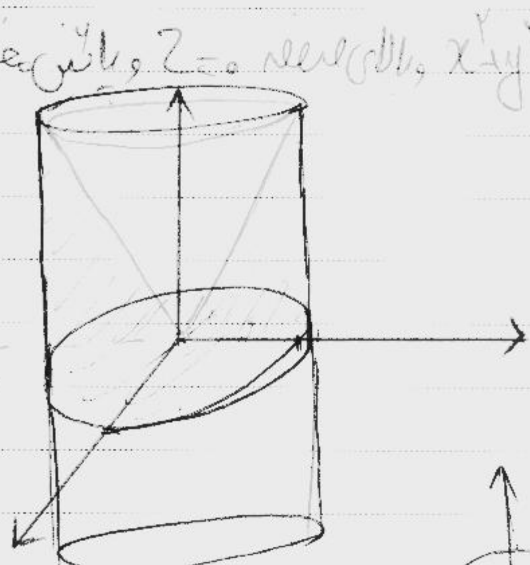
پس خواهیم داشت:

$$V=2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{0}^{2\cos\theta}\int_{0}^{2\sqrt{\rho\cos\theta}}\rho\,dz\,d\rho\,d\theta$$

تمرین ۵: با استفاده از انتگرال ۳ گانه در دستگاه مختصات استوانه‌ای مطلوب است

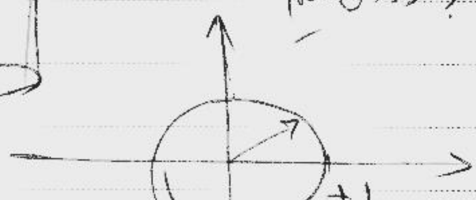
$\iiint x^2\,dv$ که در آن E جسمی درون استوانه $x^2+y^2=1$ و بالای صفحه $z=0$ و پائین مخروط

$z^2=4x^2+4y^2$ داریم: اگر



اگر معادلات حجم را حساب کنیم ابتدا $z=0$

و سپس با $z=2\rho$ برخورد می‌کنیم.



و در دستگاه ۲ بعدی مقابل در سطح

مقطع حجم حالت را ملاحظه می‌کنید

از نقطه شروع کنیم ρ از صفر تا ۱ تغییر خواهد کرد و θ نیز از صفر تا 2π

Subject:
Year. Month. Date.

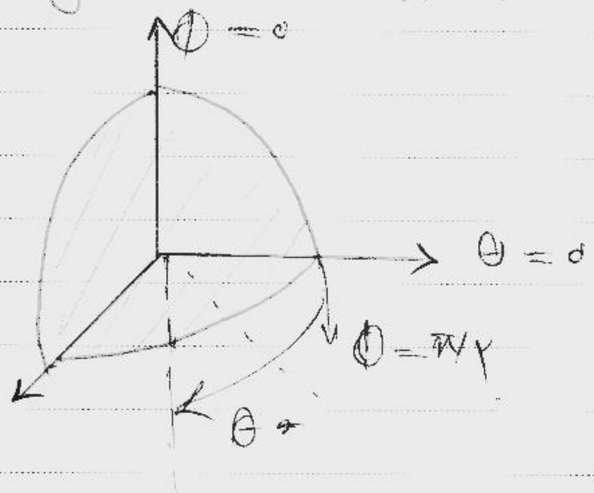
بنابراین خواهیم داشت:

$$\int_0^{2\pi}\int_0\int_0 \rho^3\cos^2\theta\, dz\, d\rho\, d\theta$$

مثال) با استفاده از انتگرال سه گانه در دستگاه کروی مطلوب است حجم کره به معادله:

$x^2+y^2+z^2=a^2$

حل: چون کره به ۸ ناحیه متقارن است حجم را با $\frac{1}{8}$ آن حساب کرده و در انتها ۸ برابر می‌کنیم



$$\iiint F(\rho,\phi,\theta)\,dv = \iiint F(\rho,\phi,\theta)\,\rho^2\sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$z=\rho\cos\phi \qquad x=\rho\sin\phi\cos\theta \qquad y=\rho\sin\theta\sin\phi$

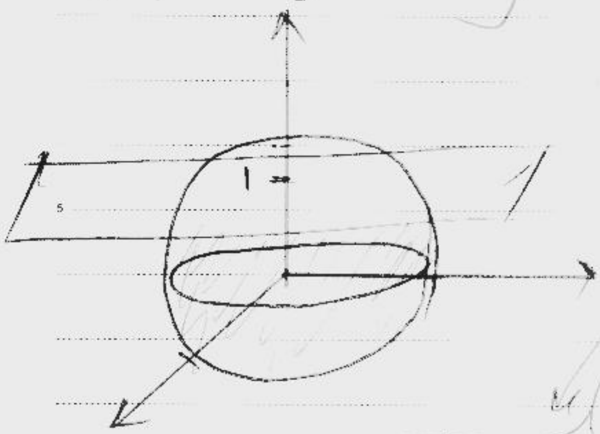
اگر از قطب حرکت کنیم ρ از صفر تا a تغییر خواهد کرد. ϕ از صفر تا $\pi/2$ و θ از صفر تا $\pi/2$ تغییر خواهد کرد.

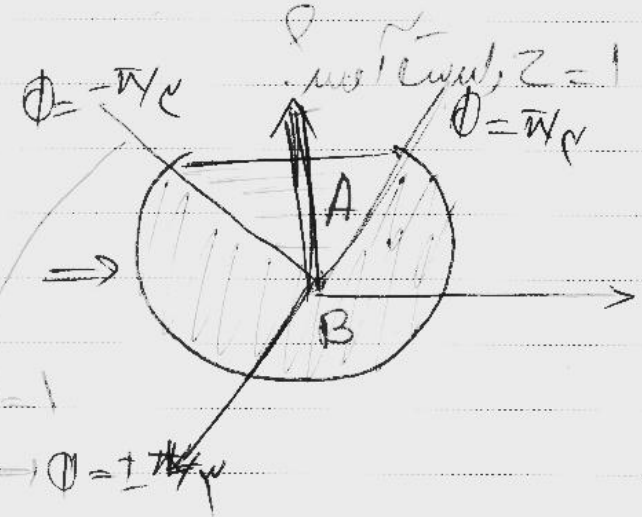
$$8\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{a} \rho^2\sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date.

حجم جسم را با استفاده از انتگرال سه‌گانه در مختصات کروی درون $x^2+y^2+z^2=4$ و پایین صفحه $z=1$ را بدست آورید.





$z=1 \Rightarrow \rho\cos\phi = 1$

به دلیل تقارن شکل نیم سمت راست را محاسبه کرده و در ۲ ضرب می‌کنیم

$$V = 2\iiint \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta = 2\left[\iiint_A \rho^2 \sin\phi \, dV + \iiint_B \rho^2 \sin\phi \, dV\right]$$

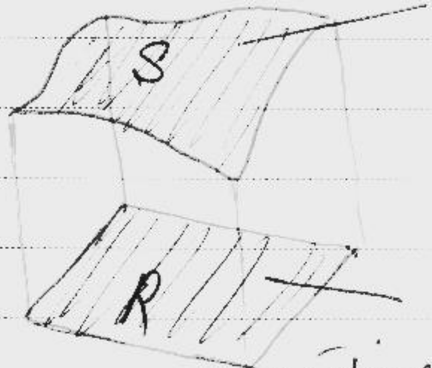
$$= 2\left[\int_0^{\pi}\int_0^{\pi/3}\int_0^{1/\cos\phi} \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta + \int_0^{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\int_0^{2} \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta\right]$$

انتگرال سطح و انتگرال رویه‌ای: می‌خواهیم تعریفی کنیم از انتگرال تابع روی رویه‌ای مثل مسطح انتگرال گیری کنیم. روش حل این نوع انتگرال‌ها این است که آن را به صورت یک انتگرال دوگانه روی ناحیه‌ای واقع در یکی از صفحات مختصات که رویه بر آن تصویر می‌شود. از این راه انتگرال رویه‌ای به صورت انتگرال دوگانه تبدیل خواهد شد که روش حل راحتی داریم. کمی شبیه همان انتگرال دوگانه‌ای که محاسبه می‌کنیم.

PaPCO

مساحت یک رویه چه قدر است.

* مساحت رویه $F(x,y,z)=c$ واقع در بالای ناحیه سطحی چون R برابر است با انتگرال دوگانه روی R که استفاده آن عبارت است از خارج قسمت اندازه گرادیان F بر مؤلفه عمودی گرادیان عمود بر R.



$F(x,y,z)=c$ رویه

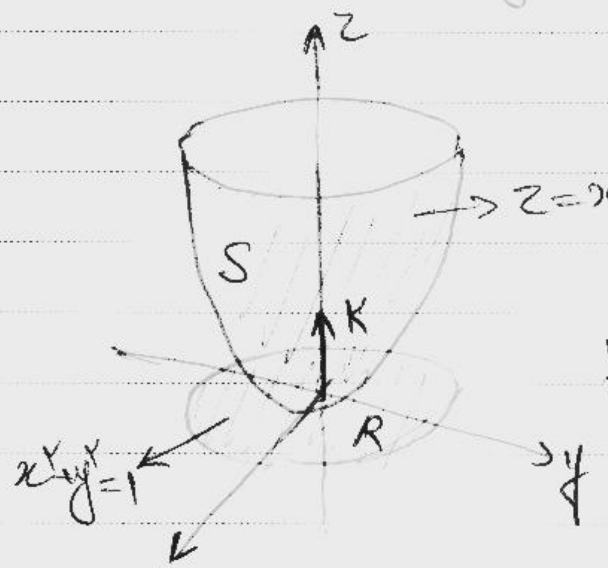
مساحت رویه $\displaystyle\iint_R \frac{|\nabla F|}{|\nabla F\cdot p|}\cdot dA$

«تصویر قائم ناحیه S روی یکی از صفحات»

* P بردار یکه قائم بر سطح R می باشد *

سوال) مطلوب است مساحت قسمت پائینی سهمی وار $z=x^2+y^2$ که به صفحه $z=1$ محدود است؟

حل: رویه و ناحیه زیر آن را روی یکی از صفحات مختصات بیابیم



$\to z=x^2+y^2$

در اینجا و مطابق شکل بهترین صفحه انتخابی صفحه xy می باشد.

$F(x,y,z)=x^2+y^2-z=0$

ناحیه R قرص $x^2+y^2\le 1$ است و بردار یکه قائم بر سطح R مطابق شکل $P=\hat{k}$ می باشد

$F(x,y,z)=x^2+y^2-z \Rightarrow \vec{\nabla F}=2xi+2yj-\hat{k}$

$$|\nabla F| = \sqrt{(2x)^2+(2y)^2+(1)^2} = \sqrt{4x^2+4y^2+1}$$

$$|\nabla F\cdot p| = |\nabla F\cdot k| = |-1| = +1$$

بنابراین مساحت رویه برابر خواهد شد با:

$$S = \iint_R \frac{|\nabla F|}{|\nabla F\cdot p|}\,dA = \iint_{x^2+y^2\le 1} \sqrt{4x^2+4y^2+1}\;dx\,dy$$

ناحیه R که dA روی آن باید اعمال شود داخل یک دایره است. چون $4(x^2+y^2)$ داخل

انتگرال غیر معمول است بهتر است از مختصات قطبی استفاده شود.

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{1} \sqrt{4r^2+1}\;r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{12}(4r^2+1)^{3/2}\right]_0^1 d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{12}\left(5^{3/2}-1\right) d\theta = \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right)$$

انتگرال سطحی رویه‌ای: فرض کنید مثلاً بار الکتریکی بر رویه $F(x,y,z)=C$ طوری روی این رویه پخش شده که

تابع توزیع آن باشد. تابع $g(x,y,z)$ بار واحد سطح در نقاط روی S را مشخص کند. کل بار روی

S را می‌توان به روش زیر به صورت یک انتگرال بدست آورد

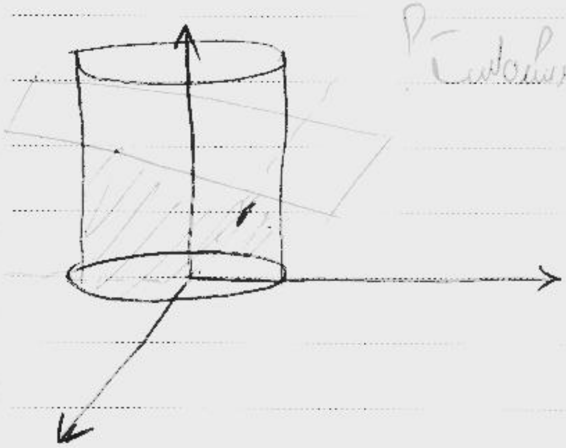
$$\iint_R g(x,y,z)\,\frac{|\nabla F|}{|\nabla F\cdot p|}\,dA$$

انتگرال بالا را انتگرال g روی رویه C می‌نامیم

Subject:
Year. Month. Date.

مثال) مطلوبست محاسبه انتگرال $\iint z\,dA$ که S از اطراف محدود است به استوانه معادله $x^2+y^2=4$ و از

پایین به صفحه $z=0$ و از بالا به صفحه $x+2=z$ محدود شده است



$S_1:\ x^2+y^2=4$

$S_2:\ z=0$

$S_3:\ z=2+x$

$$\iint_S z\,dz=\iint_{S_1} z\,dz+\iint_{S_2} z\,dz+\iint_{S_3} z\,dz$$

$$\iint_{S_1} z\,dz=2\int_0^{2\pi}\int_0^{2+2\cos\theta} z\,dz\,d\theta$$

* انتگرال رویه‌ای برای حجم ساده شار F نسبت به S در جهت n عبارتست از:

$$\iint_S F\cdot n\,ds \qquad ds=\frac{|\nabla G|}{|\nabla G\cdot p|}\,dA \text{ — روی ناحیه } R$$

که S سطحی که به روی تراز $G(x,y,z)=c$ باشد و ناحیه R ناحیه‌ای است که روی آن تصویر کرده‌ایم

بستگی به اینکه کدام یک از آنها جهت مطلوبست باشد به علامت ± اشاره دارد

برون سو

$$n=\pm\frac{\nabla G}{|\nabla G|}$$

درون سو

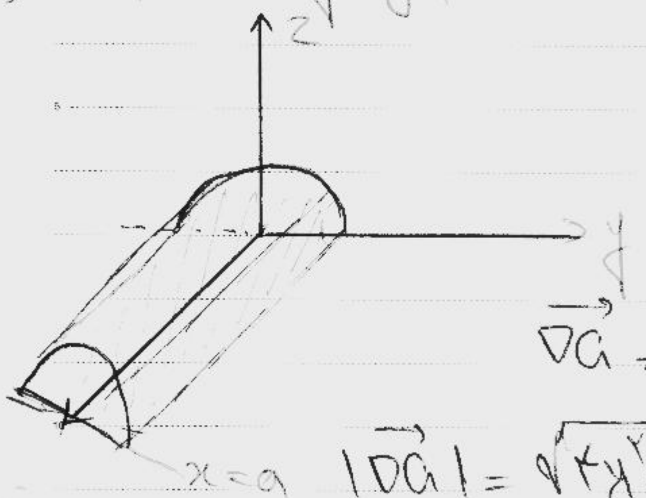
PAPCO

Subject:
Year. Month. Date.

مثال) سطح S عبارت است از سطحی که صفحات $x=0$, $x=a$ از استوانه $y^2+z^2=a^2$

و $z\geq 0$ جدا می‌کند مطلوب است شار برون سوی $\vec{F} = yz\hat{j} + z^2\hat{k}$ را بدست آورید

حل) ابتدا شکل مورد نظر را رسم می‌کنیم:



$G(x,y,z) = y^2+z^2-a^2=0$

$\vec{\nabla} G = (0, 2y, 2z)$

$|\vec{\nabla} G| = \sqrt{4y^2+4z^2} = 2a$

$n = + \frac{\nabla G}{|\nabla G|} = (0, y/a, z/a)$ $\quad g = \vec{F}\cdot\vec{n} = \frac{y^2z}{a} + \frac{z^3}{a} = \frac{z}{a}(\underbrace{y^2+z^2}_{a^2})$

$= az$

شار برون سو است

برای این که ببینیم $G(x,y,z)$ را درست انتخاب کرده باشیم (چون می‌توانستیم $G(x,y,z)=a^2-z^2-y^2$

در نظر بگیریم) می‌دانیم $P=K$ می‌باشد بنابراین بردار قائم n به ازای $y=0$ و $z=a$

باید برابر بردار قائم k باشد $K=(1,0,0)$ $\quad n=(0, y/a, z/a) \Rightarrow n\big|_{z=a,\, y=0} = (0,0,1)=K$

بنابراین $G(x,y,z)$ را درست انتخاب کرده‌ایم.

$R:\{(x,y):\ 0\leq x\leq a\ ,\ -a\leq y\leq a\}$

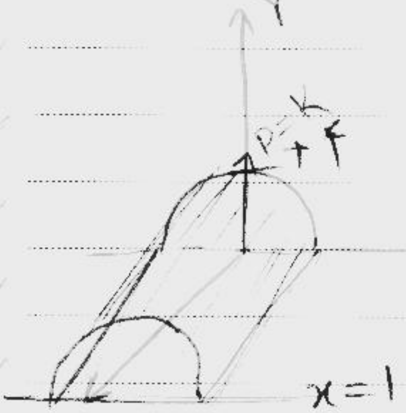
$|\vec{\nabla} G\cdot\vec{P}| = 2z \qquad \frac{|\nabla G|}{|\nabla G\cdot P|} = \frac{2a}{2z} = \frac{a}{z}$

PaPCO

$$\iint_R \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds = \iint_R F\cdot n \frac{|\nabla G|}{|\nabla G\cdot p|}\,dA = a^2\int_{0}^{a}\int_{-a}^{a} dy\,dx$$

تمرین) مطلوب است شار بالاسو (بیرون سو) میدان $F(x,y,z) = z^2\vec{i} + xy\vec{j} - 3z\vec{k}$

گذرنده از سطح محصور به صفحات $x=0$، $x=1$ و $z=0$ که استوانه $z=4-y^2$ محدود



$$G(x,y,z) = z + y^2 - 4 = 0$$

جهت گیری بالاست کدام؟

$$\nabla G = (0, 2y, 1)$$

$$|\nabla G| = \sqrt{1+4y^2} \qquad n = +\frac{\nabla G}{|\nabla G|} = \left(0, \frac{2y}{\sqrt{4y^2+1}}, \frac{1}{\sqrt{4y^2+1}}\right)$$

$$\vec{F}\cdot\vec{n} = \frac{2xy}{\sqrt{4y^2+1}} - \frac{3z}{\sqrt{4y^2+1}} \qquad \vec{F} = z^2\hat{i} + xy\hat{j} - 3z\hat{k}$$

$$ds = \frac{|\nabla G|}{|\nabla G\cdot p|}\,dA = \frac{\sqrt{4y^2+1}}{1}\,dA$$

$$\iint \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds = \iint (2xy - 3z)\,dA = \iint \left[2xy - 3(4-y^2)\right] dA$$

$$= (2xy + 3y^2 - 12)\,dA$$