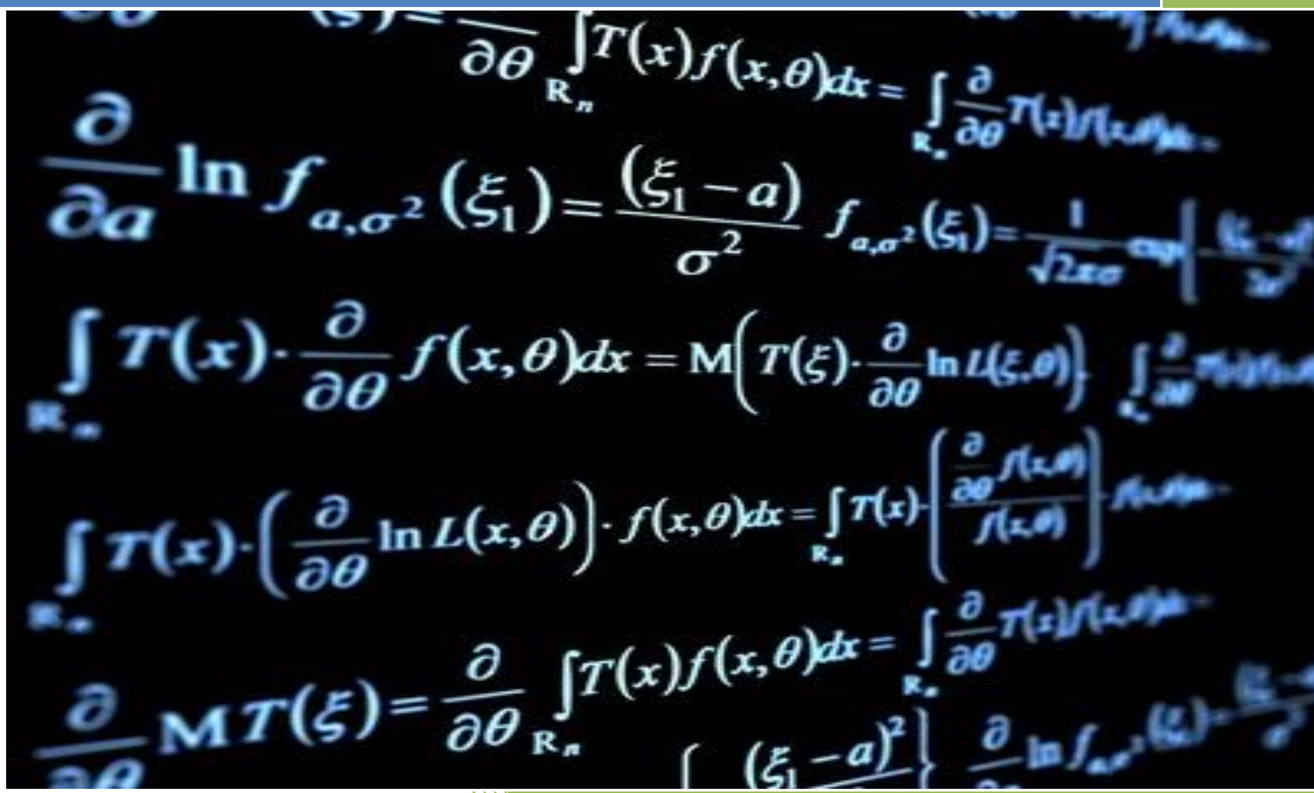
# فصل پنجم:
# انتگرال خط

باشگاه مهندسان سمنان

www.sem-eng.com

## جزوه ریاضی 2




نویسنده جزوه: ایمان شریعت پناهی

اسکن جزوه: محمدرضا خالصی

استاد: دکتر محمود بیدخام

Subject:

Year. Month. Date.

فصل چهارم ‌ ‌ انتگرال خط

فرض کنید منحنی $C$ در فضا ۳ بعدی با معادله برداری $R(t)=f(t)\vec{i}+g(t)\vec{j}+h(t)\vec{k}$ نشان داده شود

و طول قوس $C$ را در نظر بگیرید و متعلق به دامنه تابع $F(x,y,z)$ باشد آنگاه خواهیم داشت:

اگر $S$ طول قوس منحنی $C$ باشد: $\frac{ds}{dt}=|R'(t)|=\sqrt{(f'(t))^2+(g'(t))^2+(h'(t))^2}$

$$\int_C F(x,y,z)\,ds=\int_{t=a}^{t=b}F(f(t),g(t),h(t))\,|R'(t)|\,dt \quad *$$

نکته: اگر جرم و مختصات مرکز ثقل و ممان اینرسی (گشتاور لختی) نسبت به محور $x$ و $y$ و $z$ را به ترتیب با $M$، $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$، $I_x$، $I_y$ و $I_z$ نشان دهیم خواهیم داشت

$$M=\int_C f(x,y,z)\,ds=\int_{t=a}^{t=b}f(f(t),g(t),h(t))\,|\vec{R'(t)}|\,dt \qquad a\le t\le b$$

$$\bar{X}=\frac{1}{M}\int_C x f(x,y,z)\,ds \quad * \quad \bar{Y}=\frac{1}{M}\int_C y f(x,y,z)\,ds \quad *$$

$$\bar{Z}=\frac{1}{M}\int_C z f(x,y,z)\,ds \quad * \quad I_x=\int_C (y^2+z^2) f(x,y,z)\,ds \quad *$$

$$I_y=\int_C (x^2+z^2) f(x,y,z)\,ds \quad * \quad I_z=\int_C (y^2+x^2) f(x,y,z)\,ds \quad *$$

Subject:

Year. Month. Date.

برداریه $R(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}$ $\qquad a \le t \le b$

$$\begin{cases} I_x = \int_a^b (g^2(t) + h^2(t))\, F(f(t), g(t), h(t))\, |R'(t)|\, dt \\ I_y = \int_a^b (f^2(t) + h^2(t))\, F(f(t), g(t), h(t))\, |R'(t)|\, dt \\ I_z = \int_a^b (f^2(t) + g^2(t))\, F(f(t), g(t), h(t))\, |R'(t)|\, dt \end{cases}$$

شکل برداری انتگرال خط

فرض کنید C یک منحنی به معادله برداری $\vec{R}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j}$ باشد

و فرض کنید نیروی در امتداد منحنی C که به یک جسم فرضی وارد می شود باشد. $F(x,y) = M(x,y)\vec{i} + N(x,y)\vec{j}$

آنگاه کار انجام شده توسط این نیرو در امتداد این منحنی در بازه $[a,b]$ که M و N توابعی پیوسته هستند

برابر خواهد بود با:

$$W = \int_a^b [M(f(t), g(t))\, f'(t) + N(f(t), g(t))\, g'(t)]\, dt$$

$$= \int_a^b \vec{F}(f(t), g(t)) \cdot \vec{R'}(t)\, dt$$

تعریف بالا نشان می دهد می توان نشان داد که هر گاه انتگرال خط $F(x,y)$ را در مسیر دلخواه C بنامیم ...

Subject :
Year . Month . Date .

که روی منحنی C یک معادله پارامتری به صورت $R(t)$ بیان شده باشد، برابر است با:

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{R} = \int_C M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = \int_a^b \vec{F}(f(t),g(t))\cdot \vec{R'}(t)\,dt$$

* البته در قضیه بالا دقت شود توابع $M(x,y)$ ، $N(x,y)$ پیوسته باشند *

* می‌توان قضایای بالا را برای فضای ۳ بعدی نیز تعمیم داد: $\vec{R}(t)=f(t)\vec{i}+g(t)\vec{j}+h(t)\vec{k}$

$$\vec{F}(x,y,z) = M(x,y,z)\,\vec{i} + N(x,y,z)\,\vec{j} + Q(x,y,z)\,\vec{k} \quad *$$

که توابع $N$ و $M$ و $Q$ باید در ناحیه تعریف شده پیوسته باشند. حال انتگرال $F$ در امتداد $C$ برابر خواهد بود:

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_C M(x,y,z)\,dx + N(x,y,z)\,dy + Q(x,y,z)\,dz$$

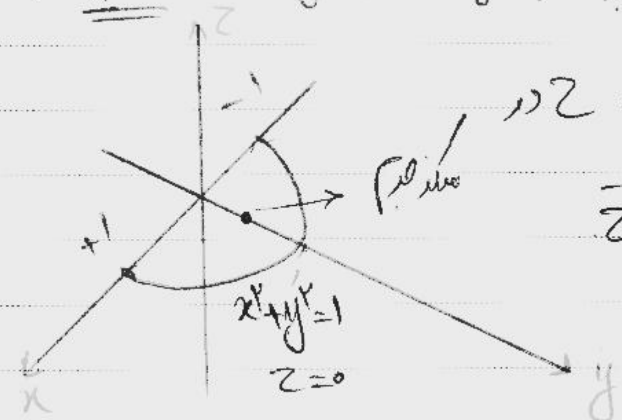
$$= \int_a^b \vec{F}(f(t),g(t),h(t))\cdot \vec{R'}(t)\,dt \quad \longleftarrow \text{انتگرال خطی فضای سه بعدی}$$

استقلال انتگرال از مسیر

اگر $M(x,y,z)$ ، $N(x,y,z)$ ، $R(x,y,z)$ تابع‌هایی در فضای $\mathbb{R}^3$ پیوسته باشند و $M_y$ ، $M_z$ ، $N_x$ ، $N_z$ ، $R_x$ ، $R_y$ در آن ناحیه پیوسته باشند، بنابراین میدان برداری $M(x,y,z)\vec{i} + N(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ پایستار در ناحیه مفروض است هنگامی که شرایط صفحه بعد را داشته باشیم:

$$\begin{cases} M_y(x,y,z) = N_x(x,y,z) \\ M_z(x,y,z) = R_x(x,y,z) \\ N_z(x,y,z) = R_y(x,y,z) \end{cases}$$

مثال) سیم کمانی به شکل نیم‌دایره $x^2+y^2=1$ ، $z=0$ ، $y \geq 0$ در صفحه $xy$ واقع است. چگالی کمان در نقطه $(x,y,z)$ واقع در روی آن برابر باشد با $f(x,y,z)=2-y$ ، مرکز جرم را بدست آورید؟




چون در صفحه $xy$ قرار گرفته بنابراین مختصه $z$ در مختصات مرکز جرم صفر خواهد بود یعنی $\bar{z}=0$

چون جرم نسبت به محور $y$ به صورت متقارن روی $x$ توزیع شده بنابراین مرکز جرم باید جایی روی محور $y$ ها باشد یعنی $\bar{x}=0$ پس فقط باید $\bar{y}$ را بدست آوریم. ابتدا چون باید از انتگرال خط استفاده شود معادله پارامتری دایره را می‌نویسیم.

$$C:\ R(t) = (\cos t)\vec{i} + (\sin t)\vec{j} \qquad 0 \leq t \leq \pi$$

$$ds = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + (0)^2}\,dt = dt$$

می‌دانیم $\quad ds = \sqrt{(x')^2+(y')^2+(z')^2}\,dt \Longrightarrow S = \int \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2 + h'(t)^2}\,dt$

Subject:

Year. Month. Date.

$$m=\int_C F(x,y,z)\,dS=\int_C (2-y)\,dS=\int_0^{\pi}(2-\sin t)\,dt=\Big[2t+\cos t\Big]_0^{\pi}=2\pi-2$$

$$\bar{y}=\frac{1}{m}\int y\,F(x,y,z)\,dS=\frac{1}{2\pi-2}\int_0^{\pi}\sin t\,(2-\sin t)\,dt$$

$$=\frac{1}{2\pi-2}\int_0^{\pi}(2\sin t-\sin^2 t)\,dt=\frac{1}{2\pi-2}\int_0^{\pi}\Big(2\sin t-\frac{1}{2}+\frac{\cos 2t}{2}\Big)dt$$

$$=\frac{1}{2\pi-2}\Big[-2\cos t+\frac{\sin 2t}{4}-\frac{t}{2}\Big]_0^{\pi}=\frac{1}{2\pi-2}\Big(\frac{8-\pi}{2}\Big)=\frac{8-\pi}{4\pi-4}\simeq 0.157$$

مختصات مرکز جرم $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(0,\ 0.157,\ 0)$

مثال) کار میدان $F(x,y)=(x-y)\vec{i}+x\vec{j}$ را در امتداد دایره زیر بیابید:

$$R(t)=(\cos t)\vec{i}+(\sin t)\vec{j}\qquad 0\le t\le 2\pi$$

$$F(f(t),g(t))=(\cos t-\sin t)\vec{i}+\cos t\,j$$

$$R'(t)=-\sin t\,\vec{i}+\cos t\,j$$

$$\text{کار}=\int_0^{2\pi}\Big[(\cos t-\sin t)\vec{i}+\cos t\,\vec{j}\Big]\cdot\Big[(-\sin t)\vec{i}+\cos t\,\vec{j}\Big]dt$$

$$=\int_0^{2\pi}(-\sin t\cos t+\sin^2 t+\cos^2 t)\,dt=\Big[t-\frac{\sin^2 t}{2}\Big]_0^{2\pi}=2\pi$$

فرمول کلی شار نیرو از منحنی بسته واقع در صفحه $\vec{F}=M\vec{i}+N\vec{j}$ نیروی C می باشد.

اگر در هر صورت پارامتری دلخواه $R(t)$ که C را یک بار در خلاف جهت عقربه‌های ساعت طی کند می‌توان شار نیرو از این خم بسته را به صورت زیر محاسبه کرد:

شار نیرو $\oint M\,dy - N\,dx$ *

مثال) مطلوب است شار میدان $\vec{F}(x,y)=(x-y)\vec{i}+x\vec{j}$ نیروی C واقع در صفحه $xy$

$C: R(t)=(\cos t)\vec{i}+(\sin t)\vec{j} \quad 0\leq t\leq 2\pi$ واقع است.

$$M=\cos t-\sin t \qquad N=\cos t$$

$$dy=\cos t\,dt \qquad dx=-\sin t\,dt$$

$$\text{شار نیرو } \varphi=\oint_0^{2\pi}(\cos t-\sin t)(\cos t\,dt)-(\cos t)(-\sin t\,dt)$$

$$=\int_0^{2\pi}(\cos^2 t-\sin t\cos t+\cos t\sin t)\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt=\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt=\left[\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{2\pi}=\pi$$

* چون $\pi>0$ و مولفه مثبت است بنابراین شار خالص نیرو از خم رو به بیرون می باشد *

Subject:
Year. Month. Date.

فرض کنید $M(x,y,z)$ , $N(x,y,z)$ , $R(x,y,z)$ در ناحیه B تعریف شده باشند

و $M_y$ , $M_z$ , $N_x$ , $N_z$ , $R_x$ و $R_y$ در B پیوسته باشند و تابعی مانند $\phi$ باشد که

$$\vec{\nabla}\phi(x,y,z) = M(x,y,z)\vec{i} + N(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$$

و C یک مسیر باشد در B از نقطه $(x_1,y_1,z_1)$ تا نقطه $(x_2,y_2,z_2)$ در این صورت انتگرال خط

$$\int_C M(x,y,z)\,dx + N(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$$

مستقل از مسیر است. و حاصل انتگرال بالا برابر خواهد بود:

$$\phi(x_2,y_2,z_2) - \phi(x_1,y_1,z_1)$$

نکته: طبق قضیه بالا اگر $\vec{F}(x,y,z) = M(x,y,z)\vec{i} + N(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ یک میدان گرادیان

باشد آنگاه انتگرال خط یک میدان گرادیان مستقل از مسیر خواهد بود. بنابراین اگر از میدان

گرادیان F روی خم بسته C انتگرال بگیریم همواره حاصل صفر خواهد بود.

$$\oint_C M(x,y,z)\,dx + N(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz = 0$$

مثال) حاصل انتگرال زیر را روی خم C به معادله $y = x^2$ بدست آورید.

$$\int_C (x^2+y^2)\,dx + 3x^2y\,dy$$

حل 8) در این گونه مسائل که معادله خم یا c داده نیست پارامتری نداده اند ابتدا معادلات پارامتری c را بدست آوریم.

$C:\ y = x^2 \quad \text{if } x = t \longrightarrow y = t^2$

$x \in [1, 2]$

معادلات پارامتری $C$ : $\begin{cases} x = f(t) = t \\ y = g(t) = t^2 \end{cases} \Longrightarrow R(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j}$

$$\int_C F(x,y)\,ds = \int_1^2 F(f(t), g(t)) \cdot R'(t)\,dt$$

$$= \int_1^2 \left[(t^2 + t^4)\vec{i} + (3t^2 t^2)\vec{j}\right] \cdot \left[(t\vec{i}) + (t^2\vec{j})\right] dt$$

$$= \int_1^2 (4t^5 + t^4 + t^2)\,dt = \left[t^6 + \frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{3}t^3\right]_1^2 = \left(2^6 + \frac{1}{5}2^5 + \frac{1}{3}2^3\right) - \left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right)$$

$\cong 71{,}53$

مثال) ابتدا ثابت کنید بردار زیر گرادیان می تواند باشد و سپس برداری را بیابید که گرادیان آن بردار معرفی

پاسخ:

$\vec{\nabla} f(x,y) = (y^2 + 2x + 4)\vec{i} + (2xy + 4y - 3)\vec{j}$

$M(x,y) = y^2 + 2x + 4 \Longrightarrow M_y(x,y) = 2y$

$N(x,y) = 2xy + 4y - 3 \Longrightarrow N_x(x,y) = 2y$

$\Longrightarrow M_y = N_x$ ✓

Subject:
Year. Month. Date.

$$f_x(x,y) = y^2 + 2x + 4 \xrightarrow{\text{انتگرال نسبت به } x} f(x,y) = xy^2 + x^2 + 4x + f(y) \quad (1)$$

$$f_y(x,y) = 2xy + 4y - 5$$

$$\xrightarrow[\text{مشتق}]{\text{(1) نسبت به } y} f_y(x,y) = 2xy + f_y(y) = 2xy + 4y - 5$$

$$\Longrightarrow f_y(y) = 4y - 5 \Longrightarrow f(y) = 2y^2 - 5y + C \quad (2)$$

$$\xrightarrow{\text{(2) در (1)}} f(x,y) = xy^2 + x^2 + 4x + 2y^2 - 5y + C$$

مثال) تابعی بیابید که گرادیان آن باشد $\nabla f(x,y,z) = (yz+x)\vec{i} + (xz+y)\vec{j} + (xy+z)\vec{k}$

شرایط گرادیان برقرار می باشد چون خود سوال وقتی می گوید تابع گرادیان $f(x,y,z)$ یعنی شرایط گرادیان را دارا می باشد

$$f_x(x,y,z) = yz + x \xrightarrow{\int dx} f(x,y,z) = yxz + \frac{x^2}{2} + g(y,z) \quad (1)$$

$$f_y(x,y,z) = xz + y$$

$$f_z(x,y,z) = xy + z$$

$$\xrightarrow[\text{مشتق می گیریم}]{\text{از (1) نسبت به } y} f_y(x,y,z) = xz + g_y(y,z) = xz + y \longrightarrow g_y(y,z) = y \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(2)\ \int dy} g(y,z) = \frac{1}{2}y^2 + h(z) \quad (3)$$

$$\xrightarrow{\text{(3) در (1)}} f(x,y,z) = yxz + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + h(z) \quad (4)$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date.

$\xrightarrow[z \text{ در}]{\text{مشتق ۴ نسبت}} f_z(x,y,z) = yx + h_z(z) = yx + z$

$\Rightarrow h_z(z) = z \xrightarrow{\int dz} h(z) = \frac{z^2}{2} + C$ (۵)

$\xrightarrow{\text{۵ در ۴}} f(x,y,z) = xyz + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} + C$ ← جواب سوال

تمرین

۱ـ در مسائل زیر انتگرال خط روی منحنی داده شده را حساب کنید.

a) $\int_C 9x^2y\,dx + (5x^2 - y)\,dy$ منحنی $y = x^3 + 1$ $A(1,2) \to B(3,28)$

$$C \begin{cases} x = t = f(t) \\ y = t^3 + 1 = g(t) \end{cases} \quad 1 \leq t \leq 3 \longrightarrow R(t) = t\vec{i} + (t^3+1)\vec{j}$$

$$R'(t) = \vec{i} + 3t^2\vec{j}$$

$$F(x,y) = (9x^2y)\vec{i} + (5x^2 - y)\vec{j} \Rightarrow F(f(t), g(t)) = 9t^2(t^3+1)\vec{i} + (5t^2 - t^3 - 1)\vec{j}$$

$$\int_C 9x^2y\,dx + (5x^2 - y)\,dy = \int_1^3 \left[(9t^5 + 9t^2)\vec{i} + (5t^2 - t^3 - 1)\vec{j}\right] \cdot \left[\vec{i} + 3t^2\vec{j}\right] dt$$

$$= \int_1^3 (9t^5 + 9t^2 + 15t^4 - 3t^5 - 3t^2)\,dt = \left[t^6 + \frac{9}{3}t^3 + \frac{15}{5}t^5 - t^3\right]_1^3$$

$$= \left(3^6 + 3(3)^3 + 3(3)^5 - 3^3\right) - (1 + 3 + 3 - 1) = 1506$$

Subject:

Year. Month. Date.

(b) $\int_C (x-y)\,dx+(y+x)\,dy$ ; که $C$ عبارتست از دایره $x^2+y^2=4$

$$\begin{cases} x=2\cos t=f(t) \\ y=2\sin t=g(t) \end{cases} \qquad 0\le t\le 2\pi$$

$$F(f(t),g(t))=2(\cos t-\sin t)\vec{i}+2(\sin t+\cos t)\vec{j}$$

$$R(t)=2\cos t\,\vec{i}+2\sin t\,\vec{j} \qquad R'(t)=-2\sin t\,\vec{i}+2\cos t\,\vec{j}$$

$$\int_C (x-y)\,dx+(y+x)\,dy=4\int_0^{2\pi}\left[(\cos t-\sin t)\vec{i}+(\sin t+\cos t)\vec{j}\right]\cdot$$

$$\left[-\sin t\,\vec{i}+\cos t\,\vec{j}\right]dt=4\int_0^{2\pi}\left[-\sin t\cos t+\sin^2 t+\sin t\cos t+\cos^2 t\right]dt$$

$$=4\int_0^{2\pi}dt=4(2\pi)=8\pi$$

(c) $\int_C \frac{(x+y)\,dx-(x-y)\,dy}{x^2+y^2}$ ; که $C$ عبارتست از دایره $x^2+y^2=a^2$

$$\begin{cases} x=f(t)=a\cos t \\ y=g(t)=a\sin t \end{cases} \qquad 0\le t\le 2\pi \qquad \begin{aligned} R(t)&=a\cos t\,\vec{i}+a\sin t\,\vec{j} \\ R'(t)&=-a\sin t\,\vec{i}+a\cos t\,\vec{j} \end{aligned}$$

$$R'(t)=-a\sin t\,\vec{i}+a\cos t\,\vec{j} \qquad F(x,y)=\frac{x+y}{x^2+y^2}\,\vec{i}-\frac{(x-y)}{x^2+y^2}\,\vec{j}$$

Subject:
Year. Month. Date.

$$F(f(t),g(t)) = \frac{1}{a^2}\left(a(\cos t+\sin t)\vec{i} + a(\sin t-\cos t)\vec{j}\right)$$

$$= \frac{1}{a}\left[(\cos t+\sin t)\vec{i} - (\cos t-\sin t)\vec{j}\right]$$

$$\int_C \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2} = \frac{1}{a}\int_0^{2\pi}\left[(\cos t+\sin t)\vec{i}+(\sin t-\cos t)\vec{j}\right].$$

$$\left[-a\sin t\,\vec{i} + a\cos t\,\vec{j}\right]dt = \int_0^{2\pi}(-\sin t\cos t - \sin^2 t+\sin t\cos t-\cos^2 t)\,dt$$

$$= -\int_0^{2\pi} dt = -t\Big|_0^{2\pi} = -2\pi$$

e) $\int_C (x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy$ ; C عبارتست از منحنی $y=x^2 \quad (-1\le x\le 1)$

$$\begin{cases} x = t = f(t) \\ y = t^2 = g(t) \end{cases} \quad -1\le t\le 1 \qquad R(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j}$$

$$R'(t) = \vec{i} + 2t\vec{j}$$

$$F(f(t),g(t)) = (t^2-2t^3)\vec{i} + (t^4-2t^3)\vec{j}$$

$$\int_C (x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy = \int_{-1}\left[(t^2-2t^3)\vec{i}+(t^4-2t^3)\vec{j}\right]\cdot\left[\vec{i}+2t\vec{j}\right]dt$$

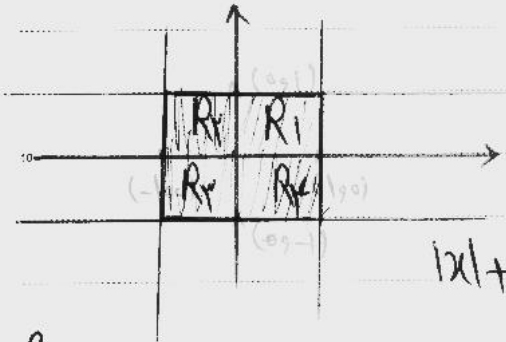
Subject:
Year. 1 Month. Date.

$$= \int_{-1}^{1} (t^2 - 2t^3 + 2t^5 - 2t^4)\,dt = \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^4 + \frac{1}{3}t^6 - \frac{2}{5}t^5\right]_{-1}^{1}$$

$$= \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{2}{5}\right] - \left[-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{5}\right] = \boxed{\frac{-1}{10}}$$

(d $\int_C \frac{dx+dy}{|x|+|y|}$ ؛ C عبارتست از مربعی با رئوس $(0,1)$ و $(1,0)$ و $(0,-1)$ و $(-1,0)$

در جهت مثلثاتی.



حل: منحنی C عبارتست از مربع به شکل مقابل با معادله $|x|+|y|=1$

می باشد. حال چون می خواهیم مقدار انتگرال خط را تعیین کنیم خود را به چهار ناحیه تبدیل کرده خواهیم داشت:

$$R_1: \quad C: \quad x+y=1 \quad \begin{cases} x = t = f(t) \\ y = 1-t = g(t) \end{cases} \quad 0<t<1$$

$$R(t) = t\vec{i} + (1-t)\vec{j} \qquad R'(t) = \vec{i} - \vec{j}$$

$$F(f(t), g(t)) = \vec{i} + \vec{j}$$

$$\int_{R_1} \frac{dx+dy}{x+y} = \int_0^1 (\vec{i}+\vec{j})\cdot(\vec{i}-\vec{j})\,dt = \int 2\,dt = \cancel{2}\,0$$

$R_2$: $C$: $-x+y=1$ $\begin{cases} x=t=f(t) \\ y=1+t=g(t) \end{cases}$ $R(t)=t\vec{i}+(1+t)\vec{j}$ $R'(t)=\vec{i}+\vec{j}$ $\quad -1\leq t\leq 0$

$F(f(t),g(t))=\vec{i}+\vec{j}$

$$\int_C \frac{dx+dy}{|x|+|y|}=\int_{-1}^{0}(\vec{i}+\vec{j})(\vec{i}+\vec{j})dt=\int_{-1}^{0}2dt=2$$

$R_3$ $C$: $-x-y=1 \Rightarrow \begin{cases} x=t=f(t) \\ y=-x-1=-t-1=g(t) \end{cases}$ $-1\leq t\leq 0$

$R(t)=t\vec{i}+(-t-1)\vec{j}$ $\quad R'(t)=\vec{i}-\vec{j}$

$F(f(t),g(t))=\vec{i}+\vec{j}$

$$\int_C \frac{dx+dy}{|x|+|y|}=\int_{-1}^{0}(\vec{i}+\vec{j})(\vec{i}-\vec{j})dt=0$$

$R_4$ : $C$ . $x-y=1$ $\begin{cases} x=t=f(t) \\ y=t-1=g(t) \end{cases}$ $0\leq t\leq 1$

$F(f(t),g(t))=\vec{i}+\vec{j}$ $\quad \int_0^1(\vec{i}+\vec{j})\cdot(\vec{i}+\vec{j})dt=2$

بنابراین مجموع انتگرال های خط $=0+2-2+0=0$

* انتگرال خطی روی یک مسیر بسته برابر صفر است *

Subject :

Year . Month . Date .

$\int_C \dfrac{x\,dx+y\,dy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$ ; C عبارتست از منحنی با معادله برداری

$\vec{R}(t)=e^{t}\cos t\,\vec{i}+e^{t}\sin t\,\vec{j}$

از $(1,0)$ تا $(e^{2\pi},0)$

$$\begin{cases} f(t)=e^{t}\cos t=x \\ g(t)=e^{t}\sin t=y \end{cases}$$

$$\vec{R}'(t)=(e^{t}\cos t-e^{t}\sin t)\vec{i}+(e^{t}\sin t+e^{t}\cos t)\vec{j}$$

$$=e^{t}\left[(\cos t-\sin t)\vec{i}+(\cos t+\sin t)\vec{j}\right]$$

$$F(f(t),g(t))=\frac{e^{t}\cos t}{(e^{t})^{3}}\vec{i}+\frac{e^{t}\sin t}{(e^{t})^{3}}\vec{j}=\frac{\cos t}{e^{2t}}\vec{i}+\frac{\sin t}{e^{2t}}\vec{j}$$

$$\int_C \frac{x\,dx+y\,dy}{(x^2+y^2)^{3/2}}=\int_1^{e^{2\pi}}\left[\frac{\cos t}{e^{2t}}\vec{i}+\frac{\sin t}{e^{2t}}\vec{j}\right]\cdot\left[(e^{t}\cos t-\sin t)\vec{i}+\right.$$

$$\left.(e^{t}\sin t+e^{t}\cos t)\vec{j}\right]dt=\int_1^{e^{2\pi}}\left(\frac{\cos^2 t-\cos t\sin t}{e^{t}}+\frac{\sin^2 t+\sin t\cos t}{e^{t}}\right)dt$$

$$=\int_1^{e^{2\pi}}\frac{dt}{e^{t}}=\int_1^{e^{2\pi}}e^{-t}\,dt=-e^{-t}\Big|_1^{e^{2\pi}}=-\left(e^{-e^{2\pi}}-e^{-1}\right)$$

$\int_C (x^2+y^2)dx+(x-y)dy$ ; C عبارتست از منحنی $(0\le x\le 2)$ $y=1-|1-x|$

شامل ۲ پاره‌خط است که در ۲ بازه جداگانه تقسیم کرده خواهیم داشت.

PaPCO

$y = 1-(x-1) \qquad 0 \leq x \leq 1 \qquad y = -x+2$ (1)

$C: \; y = -x+2 \quad \begin{cases} x = t = f(t) \\ y = -(t)+2 = g(t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1 \quad \vec{R}(t) = t\vec{i} + (-t+2)\vec{j}$

$\vec{R}'(t) = \vec{i} - \vec{j}$

$F(f(t), g(t)) = (t^2 + (-t+2)^2)\vec{i} + (t^2 - (-t+2)^2)\vec{j}$

$$\int_C (x^2+y^2)dx + (x^2-y^2)dy = \int_0^1 \left[(t^2+(-t+2)^2)\vec{i} + (t^2-(-t+2)^2)\vec{j}\right]\cdot\left[\vec{i}-\vec{j}\right]dt$$

$$= \int_0^1 \left[t^2 + (-t+2)^2 - t^2 + (-t+2)^2\right]dt = 2\int_0^1 (4 + t^2 - 4t)\,dt = 2\left[\frac{1}{3}t^3 + 4t - 2t^2\right]_0^1$$

$$= 2\left[\frac{1}{3} + 4 - 2\right] = 2\left(\frac{1}{3}+2\right) = \frac{14}{3}$$

(2) $y = 1-(1-x) \Rightarrow y = x \qquad 1 \leq x \leq 2 \quad \begin{cases} f(t) = t = x \\ g(t) = t = y \end{cases} \quad 1 \leq t \leq 2$

$$\int_1^2 (2t^2\vec{i})\cdot(\vec{i}+\vec{j})\,dt = \int_1^2 2t^2\,dt = \frac{2}{3}t^3\Big|_1^2 = \frac{2}{3}(8-1) = \frac{14}{3}$$

$$\int_C (x^2+y^2)dx + (x^2-y^2)dy = \boxed{\frac{14}{3} + \frac{14}{3} = \frac{28}{3}}$$

Subject:
Year. Month. Date.

۲- کل کار انجام شده در حرکت جسمی در امتداد قوس C دا در هر یک از حالت‌ها به وسیله میدان نیروی داده شده حساب کرده است.

a) $F(x,y,z) = (y+z)\vec{i} + (x+z)\vec{j} + (x+y)\vec{k}$ ؛ C پاره‌خط از مبدأ تا نقطه $(1,1,1)$ است.

حل: معادله پارامتری C از مبدأ تا نقطه $(1,1,1)$ برابر خواهد شد با:

$0 \le t \le 1$

$x=t,\ y=t,\ z=t$

$R(t) = t\hat{i} + t\vec{j} + t\vec{k} \qquad R'(t) = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$

$F(f(t),g(t),h(t)) = F(t,t,t) = (2t)\hat{i} + (2t)\hat{j} + (2t)\hat{k}$

$w = \int F(f(t),g(t)) \cdot R'(t)\,dt = \int_{t=0}^{t=1} (2t+2t+2t)\,dt = 6\int_0^1 t\,dt = 3t^2\Big|_0^1 = 3$