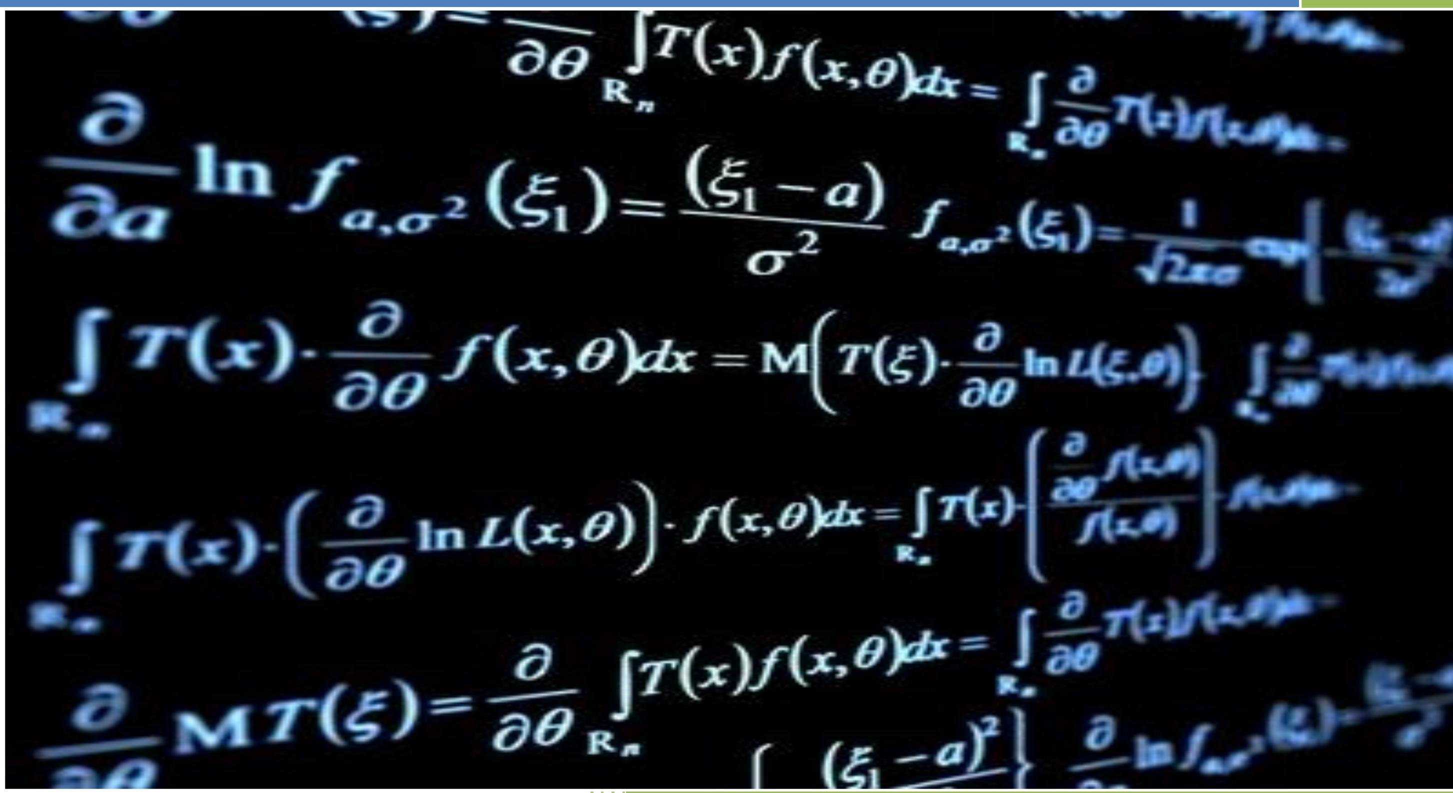
فصل چهارم:

مشتق جهتی

باشگاه مهندسان سمنان

www.sem-eng.com

جزوه ریاضی 2



نویسنده جزوه:ایمان شریعت پناهی

اسکن جزوه:محمدرضا خالصی

استاد:دکتر محمود بیدخام

میان ترم به بعد

مشتق جهتی: فرض کنید $\vec{u}=\cos\theta\,\vec{i}+\sin\theta\,\vec{j}$ بردار یکه‌ای از دو متغیر x و y بوده، آنگاه مشتق f در جهت u را با $D_u f$ نشان داده و چنین تعریف می‌کنیم:

$$D_u f(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h\cos\theta,\ y+h\sin\theta)-f(x,y)}{h} \quad *$$

مشروط بر این که حد موجود باشد.

* فرض کنید می‌خواهیم مشتق جهتی تابع (رویه) $z=f(x,y)$ در نقطه $B(x_1,y_1)$ در جهت بردار یکه $\vec{u}=\cos\theta\,\vec{i}+\sin\theta\,\vec{j}$ را محاسبه کنیم. ابتدا نقاطی مثل A و D به مختصات به ترتیب $(x_1,y_1,0)$ و $(x_1+h\cos\theta,\ y_1+h\sin\theta,\ 0)$ را در نظر می‌گیریم. حال صفحه‌ای که شامل ۳ نقطه A و D و B است را در نظر بگیرید که موازی با محور z است و با محور x زاویه θ می‌سازد. حال این صفحه f سطح رویه را در یک خم یا منحنی C قطع می‌کند. معادله این خم را با $z(h)$ نمایش دهیم. چون این خم به وجود آمده روی همان رویه است $z=f(x,y)$ است اما چون صفحه حاوی آن ۳ نقطه آن را به وجود آورده است پس معادله خم همان معادله سطح رویه است اما به ازای x,y صفحه در آن صفحه قرار دارد یعنی

$$* \quad z(h)=f(x_1+h\cos\theta,\ y_1+h\sin\theta)$$

Subject:
Year. Month. Date.

حال مشتق جهتی تابع f را در نقطه ای مثل (x_1,y_1) در جهت $\vec{u}$ را محاسبه می کنیم:

$$D_u f(x_1,y_1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1+h\cos\theta,\ y_1+h\sin\theta)-f(x_1,y_1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{z(h)-z(0)}{h} = z'(0)$$

* بنابراین مشتق جهتی f در جهت u در نقطه (x_1,y_1) همان شیب خط مماس بر منحنی C در نقطه $A(x_1,y_1,f(x_1,y_1))$ در صفحه A, B, D است. *

مشتق جزئی f نسبت به x می باشد در جهت i $\Rightarrow$

if $\theta=0$ $\quad \vec{u}=i$

$$D_i f(x,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} = f_x(x,y)$$

مشتق جزئی f نسبت به y می باشد در جهت j $\Rightarrow$

if $\theta=\frac{\pi}{2}$ $\quad \vec{u}=j$

$$D_j f(x,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h} = f_y(x,y)$$

تعریف دیگری از مشتق جهتی: اگر $z=f(x,y)$ در همسایگی $P_0(x_0,y_0)$ مشتقات جزئی پیوسته داشته باشد و u یک بردار یکه باشد آنگاه مشتق f در P_0 در جهت u عبارت است از حاصلضرب داخلی گرادیان f در P_0 و u می باشد.

$$(D_u f)_{P_0} = (\vec{\nabla} f)_{P_0} \cdot \vec{u}$$

Subject :
Year . Month . Date .

مثال) مشتق $f(x,y,z) = x^3 - xy^2 - z$ را در $P_0(1,1,0)$ در جهت بردار $A = 2i - 3j + 6k$ بیابید.

حل) ابتدا ما باید بردار یکه یا همان جهتی A که مشتق را می خواهیم در آن جهت حساب کنیم بدست آوریم

* و جهت A را تقسیم کردن A بر طولش به دست می آید

$$|A| = \sqrt{(2)^2 + (-3)^2 + (6)^2} = \sqrt{49} = 7$$

$$u = \frac{A}{|A|} = \frac{2}{7} i - \frac{3}{7} j + \frac{6}{7} k$$

* مرحله بعدی باید مشتقات جزئی و پیوستگی آن ها را در P_0 امتحان کنیم

$$f_x = 3x^2 - y^2$$

$$f_y = -2xy$$

$$f_z = -1$$

بنابراین چون هر 3 مشتق جزئی یک چندجمله ای می باشد بنابراین مشتقات جزئی در فضای R^3 پیوسته بوده. و شرط استفاده از فرمول برای محاسبه مشتق جهتی تابع برقرار است. *

$$\nabla f = f_x \vec{i} + f_y \vec{j} + f_z \vec{k} = (3x^2 - y^2)\vec{i} + (-2xy)\vec{j} + (-1)\vec{k}$$

$$\nabla f \Big|_{(1,1,0)} = 2i - 2j - k$$

مشتق f در جهت A در نقطه P_0:

$$(D_u f)\Big|_{(1,1,0)} = \nabla f \Big|_{(1,1,0)} \cdot u$$
$$= (2i - 2j - k) \cdot \left(\frac{2}{7} i - \frac{3}{7} j + \frac{6}{7} k\right)$$
$$= \frac{4}{7} + \frac{6}{7} - \frac{6}{7} = \boxed{\frac{4}{7}}$$

Subject:
Year. Month. Date.

قضیه (این قضیه بیان حالت کلی همان قضیه قبل استفاده گرادیان است) ←

اگر f تابعی مشتق پذیر از x و y و $\vec{u}=\cos\theta\vec{i}+\sin\theta\vec{j}$ باشد آنگاه:

$$D_u f(x,y) = f_x(x,y)\cos\theta + f_y(x,y)\sin\theta \quad *$$

$$= \underbrace{\left(f_x(x,y)\vec{i} + f_y(x,y)\vec{j}\right)}_{\nabla f} \cdot \underbrace{\left(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}\right)}_{u}$$

$$= \nabla f \cdot u \longrightarrow$$ به همان تعریف قبلی رسیدیم *

مهم: اگر بخواهیم بیشترین مقدار و کمترین مقدار مشتق جهتی f در جهت u را بدست آوریم داریم:

$$D_u f(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot u = |\nabla f(x,y)||u|\cos\alpha$$

که α زاویه بین بردار گرادیان و u می باشد.

$$\Rightarrow D_u f(x,y) = |\nabla f(x,y)|\cos\alpha$$

$\max(D_u f(x,y)) = |\nabla f(x,y)|$ زمانی که $\alpha = 0$ یعنی u و ∇f هم جهت باشند

$\min(D_u f(x,y)) = -|\nabla f(x,y)|$ زمانی که $\alpha = \pi$ یعنی u و ∇f خلاف جهت همدیگر باشند.

* نتیجه می شود گرادیان یک تابع در جهتی است که تابع بیشترین تغییرات را در آن جهت داشته باشد *

Subject :
Year . Month . Date .

$$\to \begin{cases} D_u f(x,y) = 0 \\ \text{زمانی که } \alpha = \pi/2 \\ \text{یعنی بردار } u \text{ و } \nabla f \text{ بر هم عمود باشند.} \end{cases}$$

بنابراین نتیجه می شود تغییرات تابع f در جهت عمود بر بردار گرادیان صفر است. (یعنی گرادیان همون شد عمودی که شیب را نشان می دهد بنابراین میزان در جهت عمود بر شیب صفر خواهد بود معمولی)

نکته: اگر در سوالی از ما خواستند که در چه جهتی حرکت کنیم که بیشترین تغییرات را داشته باشیم چون جهت مطرح شده یعنی بردار u یعنی باید بردار u را طوری بدست آوریم که اگر در آن جهت حرکت کنیم بیشترین یا کمترین تغییرات (یا همان $D_u f$) را داشته باشیم. حال می دانیم که بیشترین تغییرات در جهت بردار گرادیان است. بنابراین بردار u که $\vec{u}$ را این طور بیان می کنیم:

$$\vec{u} = \frac{\vec{\nabla} f(x,y)}{|\vec{\nabla} f(x,y)|}$$

* اگر در جهت این بردار حرکت کنیم بیشترین تغییرات را خواهیم داشت *

و اگر در خلاف جهت $\vec{u}$ حرکت کنیم کمترین تغییرات را خواهیم داشت.

و اگر در سوال میزان بیشترین تغییرات را از ما خواستند (مثلاً در نقطه $A(x_1,y_1)$) خواهیم داشت

$$D_u f(x_1,y_1) = |\nabla f(x_1,y_1)| \quad \text{میزان بیشترین تغییرات *}$$

$$D_u f(x_1,y_1) = -|\nabla f(x_1,y_1)| \quad \text{میزان کمترین تغییرات *}$$

* اگر در مسئله میزان رشد یا افزایش یا صعود یا نزول یا مشتق سوئی یا کاهش یا افزایش میزان آن تابع در جهت خاص مورد نظر باشد باید مشتق سوئی آن تابع را در آن نقطه حساب کنیم و در آن جهت خواسته شده سپس اگر مقدار مثبت بود رشد یا افزایش داشته و اگر منفی بود کاهش یا نزول داشته. *

* اگر در مسئله جهتی را خواسته که در آن جهت تغییر نداشته باشد یا در آن جهت ثابت بماند (یا امکان تقاطع) آنگاه ابتدا بردار یکه $\vec{u}$ مجهول گرفته شامل $\vec{u} = \cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j}$ و سپس مقدار $D_u f(x,y)$ را برابر صفر قرار می‌دهیم به دلیل نداشتن تغییرات.

$$D_u f(x,y) = \vec{\nabla} f(x,y) \cdot \vec{u} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} f(x,y) \cdot \vec{u} = 0 \quad (2)$$

از معادله ۲ مقادیر θ را بدست آورده و در $\vec{u}$ جایگذاری می‌کنیم ولی $\vec{u}$ های مطلوب مسئله می‌باشد

صفحه 8 (تعمیم مشتق سوئی برای توابع 3 متغیره) : هرگاه f تابعی مشتق‌پذیر با ۳ متغیر x, y, z باشد و $\vec{u} = \cos\alpha \vec{i} + \cos\beta \vec{j} + \cos\gamma \vec{k}$ باشد آنگاه

$$D_u f(x,y,z) = \vec{\nabla} f(x,y,z) \cdot \vec{u}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma \quad *$$

مثال) جهتهای را بیابید که در آنها تابع $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ در نقطه (۱و۱و۱)

کدام یک سریع ترین افزایش یا کاهش را دارد. در این جهت ها آهنگ تغییر f چیست؟

$$\nabla f = 2xi + 2yj + 2zK$$

* سریع ترین افزایش در است در راستای گرادیان است

$$\nabla f = 2i + 2j + 2K \qquad |\nabla f| = 2\sqrt{3}$$

جهت ∇f : $\vec{u} = \dfrac{\vec{\nabla f}}{|\nabla f|} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(i+j+K)$

حال مقدار سریع ترین افزایش در این جهت رخ می دهد که برابر است با :

$$D_u f = |\nabla f| = 2\sqrt{3}$$

حال جهتی که تابع تکان سریع ترین کاهش را دارد برابر است با :

$$-\vec{u} = -\frac{1}{\sqrt{3}}(i+j+K)$$

مقدار سریع ترین کاهش در این جهت رخ می دهد $\Rightarrow D_u f = +2\sqrt{3}$

مثال) الف) مطلوب است مشتق $f(x,y) = x^2+y^2$ در نقطه $P(1,1)$ در جهت بردار واحد $u = u_1 i + u_2 j$

ب) تابع f در چه جهتی که در (۱و۱) بیشترین افزایش را دارد؟ مشتق f در این جهت چیست؟

چهارم

۴) جهت‌هایی را بیابید که مشتق در آن در (۱،۱) صفر باشد

الف) $f(x,y)=x^2+y^2$

$f_x(1,1)=2x|_{(1,1)}=2 \qquad f_y(1,1)=2y|_{(1,1)}=2$

$(\nabla f)_{(1,1)}=f_x(1,1)\vec{i}+f_y(1,1)\vec{j}=2\vec{i}+2\vec{j}$

$(D_u f)_{(1,1)}=(\nabla f)_{(1,1)}\cdot(\vec{u})=(2\vec{i}+2\vec{j})\cdot(u_1\vec{i}+u_2\vec{j})$

$=2u_1+2u_2$

ب) تابع در جهت ∇f یعنی $\vec{u}=\dfrac{\nabla f}{|\nabla f|}$ در (۱،۱) بیشترین افزایش را دارد.

$\left(\dfrac{\nabla f}{|\nabla f|}\right)_{(1,1)}=\dfrac{2i+2j}{\sqrt{8}}=\dfrac{2}{\sqrt{8}}\hat{i}+\dfrac{2}{\sqrt{8}}\hat{j}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{i}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$

بیشترین مشتق f (یعنی تغییرات f) در همین جهت بیشترین تغییرات $=D_u f(1,1)=|\nabla f|=2\sqrt{2}$

پ) مشتق f در جهت‌های عمود بر ∇f صفر است. برای این جهت‌ها به دست می‌آید که مؤلفه‌های $(\nabla f/|\nabla f|)_{(1,1)}$ را باهم عوض کنیم و علامت نخستین مؤلفه جدید را تغییر دهیم. بدین ترتیب داریم:

$n=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}i+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i$

برای آزمایش $\Leftarrow \nabla f\cdot n=(2i+2j)\cdot\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}i+\dfrac{1}{\sqrt{2}}j\right)=0$ ✓

Subject:
Year. Month. Date. ✓

اکسترمم های توابع چند متغیره

آزمون های مشتق

برای یافتن مقادیر اکسترمم یک تابع پیوسته $f(x,y)$ در یک ناحیه R

۳ نکات زیر را ملاحظه کنید:

۱- فرض می کنیم که شامل نقاطی باشد که به ازای آنها f، max موضعی یا min موضعی داشته باشد. ماکسیمم ها و مینیمم های موضعی تنها به ازای نقاط زیر بدست می آیند:

✓ ۱- نقاطی که در آنها $f_x = f_y = 0$ ✓ ۲- نقاط مرزی R که به ازای آنها نقاط مرزی

f_x , f_y وجود ندارند. (نقاط بحرانی)

۲- اگر R بسته و کراندار باشد در قسمت بالا به دنبال مقادیر max و min از f می گردیم. لیکن مقادیر max , min مطلق f در R خواهند بود. حال اگر بخواهیم بدانیم کدام یک از مقادیر max یا min موضعی است باید به مرحله بعدی برویم

۳- اگر R بسته و کراندار نباشد آزمون مشتق دوم را که در زیر آمده بکار می بریم

در حقیقت اگر $f_x = f_y = 0$ به ازای یک نقطه درونی (a,b) از R به ازای یک همسایگی معین

مشخص نمی کند که f در آن نقطه یک مقدار ext داشته باشد اما اگر f مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم

آن بر R پیوسته باشد آزمون مشتق دوم به شرح زیر اعمال کنیم و

اگر $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ ، آنگاه :

۱- f در (a,b) یک max موضعی دارد هرگاه در (a,b) داشته باشیم $f_{xx}<0$ و
$f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2>0$

۲- f در (a,b) یک min موضعی (نسبی) دارد هرگاه در (a,b) داشته باشیم $f_{xx}>0$
و $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2>0$

۳- f در (a,b) یک نقطه زینی دارد هرگاه در (a,b) داشته باشیم $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2<0$

۴- این آزمون در (a,b) بی‌تفاوت است هرگاه در (a,b) داشته باشیم $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=0$

یعنی لازم است برای تعیین رفتار f در (a,b) به راه دیگری متوسل شویم

* عبارت $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2$ را مبین f نامیم

$$f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$$

قضیه: اگر f در X اکسترمم نسبی داشته باشد آنگاه خواهیم داشت

$f_x(X) = 0 \qquad f_y(X) = 0$

$f_i(X) = 0$ درست است وجود $(i = 1, 2, \dots, n)$

Year. Month. Date.

یک تابع دو متغیره نقاط بحرانی (نقاطی که در آن ها مشتق صفر است یا مشتق وجود ندارد)

علاوه و خود دارای اکسترمم نسبی است و اگر دارای نقاط بحرانی دارای اکسترمم نسبی نباشد آن را

(X) را یک نقطه زینی می نامیم. نقاط بحرانی

تذکر: مثلاً فرض کنید برای پیدا کردن مینیمم تابع چند متغیره مثل $f(x,y)=y^2-x^2$ ابتدا

باید مشتقات جزئی آن را حساب کرده و برابر صفر قرار داده. سپس بازای نقاطی که همزمان

تمام مشتقات جزئی در آن نقطه صفر شوند و نقاطی که در دامنه تعریف تابع در آن تعریف

نشده می شود نقاط بحرانی تابع بدست می آید.

$$f_x(x,y)=-2x$$

$$f_y(x,y)=2y$$

از کل $\mathbb{R}$ تعریف شده است، تنها نقطه بحرانی آن $(0,0)$ که در آن همزمان f_x و f_y صفر خواهند شد

مثال) مقدار اکسترمم تابع زیر را بیابید؟ $f(x,y)=xy$

چون این تابع همه جا مشتق پذیر است. و دامنه اش هیچ نقطه مرزی ندارد. f تنها در نقاطی می تواند ext داشته باشد که: $f_x=y=0$, $f_y=x=0$ پس تنها در مبدأ ممکن است

اکسترمم داشته باشد. باید بررسی کنیم که آیا در مبدأ شرایط اکسترمم برقرار است یا خیر؟

Subject:
Year: Month: Date:

$f_{xx}=0 \quad f_{yy}=0 \quad f_{xy}=1$

مبین $f_{xx}*f_{yy}-f_{xy}^2=-1<0$

*مبین منفی است. بنابراین تابع در $(0,0)$ یک نقطه زینی دارد. نتیجه اینکه $f(x,y)=xy$ اصلاً مقدار اکسترمم ندارد. ←

مثال) مطلوب است مقادیر ext تابع: $f(x,y)=x^2+y^2$

دامنه f هیچ نقطه مرزی ندارد. زیرا دامنه آن R^2 می باشد. مشتقهای $f_x=2x$ و $f_y=2y$ همه جا وجود دارند. پس max و min نسبی در نقاطی می توانند باشند:

$f_y=2y=0 \quad , \quad f_x=2x=0$

تنها نقطه بحرانی مبدا است. که در آن مقدار f صفر است. چون f هرگز منفی نمی شود.

در این جا اصلاً نیازی به آزمون مشتق دوم نیست. اگر از این آزمون هم استفاده کنیم خواهیم داشت:

$f_{xx}=2 \quad f_{xy}=0 \quad f_{yy}=2 \quad f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=4>0$

پس نقطه $(0,0)$ یک min نسبی تابع است. اما می توان استنباط کرد که $(0,0)$ یک min مطلق است. برای رسیدن به این استنباط به اطلاعات بیشتری نیاز داریم.

PqPCO

Subject:
Year. Month. Date.

مثال) مقادیر اکسترمم تابع زیر را بیابید!

$$f(x,y) = xy - x^2 - y^2 - 2x - 2y + 4$$

این تابع به ازای تمام مقادیر x و y تعریف شده (نقطه مرزی ندارد) و مشتق دارد پس این تابع تنها نقاطی ext نسبی دارد که f_x و f_y صفر شوند. (با هم صفر شوند)

$$f_x = y - 2x - 2 = 0 \qquad f_y = x - 2y - 2 = 0$$

$$\boxed{x = y = -2}$$

بنابراین نقطه $(-2,-2)$ تنها نقطه‌ای است که ممکن است f یک مقدار ext داشته باشد.

$$f_{xx} = -2 \qquad f_{yy} = -2 \qquad f_{xy} = f_{yx} = 1$$

$$D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = (-2)(-2) - 1^2 = 3 > 0$$

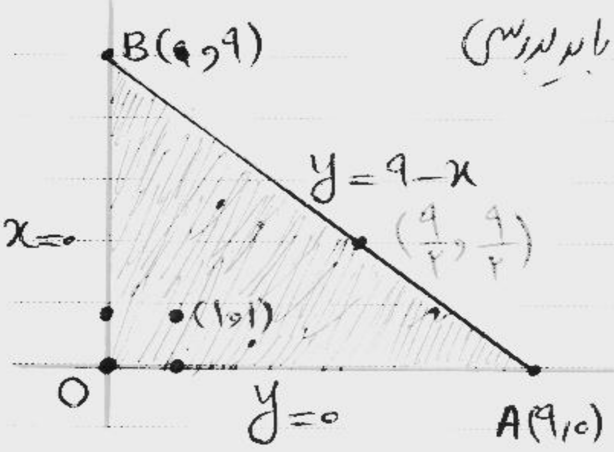
بنابراین چون $\Rightarrow$ $D > 0$ و $f_{xx} < 0$

این ۲ نامساوی بالا نشان می‌دهند تابع در نقطه $(-2,-2)$ یک max نسبی دارد. که مقدار f در این نقطه برابر است با $f(-2,-2) = 8$

*مثال ۲) مقادیر max و min مطلق تابع زیر را در ناحیه ~~[illegible]~~ مثلثی شکل واقع در ربع اول که توسط خطوط $x=0$ و $y=0$ و $y=9-x$ را بیابید!

$$f(x,y) = 2 + 2x + 2y - x^2 - y^2$$

Subject:
Year. Month Date



حل) نقاط مرزی: چون تابع ما نقاط مرزی دارد بنابراین باید بررسی شوند. تک تک اضلاع مثلث را در نظر می‌گیریم.

۱- در ضلع OA داریم $y=0$ حال تابع

$$f(x,y)=f(x,0)=2+2x-x^2$$

را می‌توان به صورت تابعی از x در نظر گرفت که در بازه بسته $0 \le x \le 9$ تعریف می‌شود.

مقادیر ext این تابع ممکن است به ازای نقاط انتهایی: $x=0$ که در آن $f(0,0)=2$

$x=9$ که در آن $f(9,0)=2+18-81=-61$ روی خط OA منظور است

همه ازای نقاط بحرانی که در آن‌ها $f'(x,0)=2-2x=0$ شود. بدست آیند. تنها نقطه بحرانی که در آن $f'(x,0)=0$ می‌شود $x=1$ است. و داریم $f(x,0)=f(1,0)=3$

۲- در ضلع OB داریم $x=0$ و لذا:

$$f(x,y)=f(0,y)=2+2y-y^2$$

از تقارن f نسبت به x و y، و از تحلیل قسمت بالا می‌فهمیم که مقادیر ext احتمالی واقع بر این ضلع عبارت‌اند از: $f(0,0)=2$، $f(0,9)=-61$ و $f(0,1)=3$

۳- چون در حالت فوق مقادیر f در نقاط انتهایی AB در نظر گرفته شد بنابراین

(۱و۱) ، max می باشد پس ← $f(1,1)=4$ ← $(a,b)=(1,1)$

(a',b') min می باشد ← $f(a',b')=-4$ ← $(a',b')=(0,9)$ یا $(a',b')=(9,0)$

نکته : اگر تابع $f(x,y)$ در نقطه (a,b) شرایط $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$

را داشته باشد این شرطی است لازم برای این که f در یک نقطه (a,b) که مقدار ext داشته باشد.

اما به خاطر داشته باشید این شرط لازم است نه کافی. یعنی در یک نقطه زینی هم این مشتقات صفر

هستند. مقدار یک تابع می‌تواند در نقاطی که باید مشتق آن وجود نداشته باشد نیز ext باشد

مقادیر اکسترمم توابع پارامتری :

برای یافتن مقادیر ext یک تابع $f(x,y)$ بر روی منحنی $x=x(t)$ و $y=y(t)$ ، f را به صورت

تابعی از یک متغیر t تلقی و از قاعده زنجیری برای حل $df/dt=0$ استفاده می‌کنیم و مانند درس

قبل هم تابع تک متغیره‌ای مقادیر اکسترمم f از بین مقادیر f در نقاط زیر بدست خواهد آمد.

الف) نقاط بحرانی (نقاطی که $df/dt=0$ یا وجود ندارد)

ب) نقاط انتهایی پارامتر (دامنه)

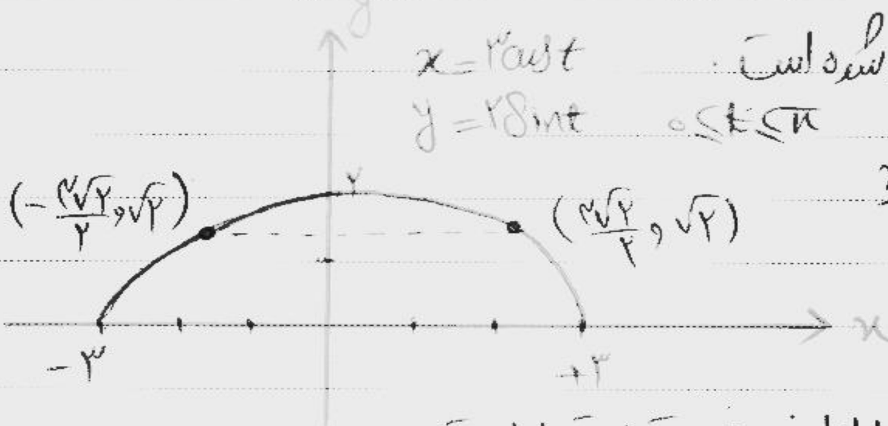
مثال) مقادیر max و min مطلق تابع $f(x,y)=xy$ را روی منحنی زیر بیابید؟

$x=3\cos t \quad y=2\sin t \quad 0\le t\le \pi$

حل) این خم در شکل زیر نشان داده شده است:

$x = 3\cos t$
$y = 2\sin t \quad 0 \le t \le \pi$

معادله f به صورت $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ خواهد شد که خود یک بیضی است و



بنا به دامنه t فقط مقادیر بالای محور x ها از این بیضی قابل قبول است:

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dt} = (2\sin t)(-3\sin t) + (3\cos t)(2\cos t)$$

$$= -6\sin^2 t + 6\cos^2 t = 6\cos 2t$$

مشتق به ازای تمام مقادیر t تعریف شده است. و وقتی $\cos 2t = 0$ ، برابر است با صفر در دامنه $[0,\pi]$،

مقادیر t که این مشتق را صفر می‌کند برابر است با:

$$\cos 2t = 0 \Longrightarrow \begin{cases} t = \pi/4 \\ t = \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

بنابراین مقادیر $f(t)$ احتمالی برای این خم در این نقاط بحرانی عبارتند از:

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 6\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4} = 3\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$$

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 6\cos\frac{3\pi}{4}\sin\frac{3\pi}{4} = 3\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -3$$

مقادیر تابع در نقاط انتهایی دامنه یا دامنه برابر خواهند بود با:

$$f(0) = 3\sin(0) = 0$$

$$f(\pi) = 3\sin(\pi) = 0$$

Subject:
Year. Month. Date. ✓

مقایسه این مقادیر نشان می‌دهد که روی خم مسیر C، f در نقطه

$$\left(3\cos\frac{\pi}{4}, 2\sin\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$$

* دارای max مطلق ۳ و در نقطه

$$\left(3\cos\frac{3\pi}{4}, 3\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$$

* دارای مقدار min مطلق ۳- است.

ضرایب لاگرانژ: گاه مجبوریم max و min توابعی را بیابیم که دامنه‌هایشان درون زیرمجموعه خاصی از صفحه - نظیر یک قرص یا یک مثلث - قرار دارند. این روش حالت min و max توابع که در دامنه‌هایشان مقید به صفحات و یا رویه‌ای مشخص باشند را آسان انجام می‌دهد.

روش: این روش بیان دارد که مقادیر اکسترمم نسبی چون $f(x,y,z)$ که متغیرهایش مقید به صفحه $g(x,y,z)=0$ هست در نقاطی قرار دارند که روی $g=0$ هستند که در آن نقاط عددی چون λ (معروف به ضریب لاگرانژ) داشته باشیم $\nabla f = \lambda \nabla g$

قضیه: فرض کنید $f(x,y,z)$ مشتقات جزئی پیوسته در ناحیه‌ای که شامل خم هموار $C: R(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ ویرا در بر دارد پیوسته باشد

* اگر P_0 نقطه‌ای از C باشد که در آن f نسبت به مقادیرش بر C یک max یا min نسبی داشته باشد آنگاه در P_0، ∇f بر C عمود است.

بیان ساده‌تری از روش حل مسائل ضرایب لاگرانژ: فرض کنید $f(x,y,z)$ و $g(x,y,z)$

مشتقات جزئی مرتبه اولشان پیوسته باشد. برای یافتن مقادیر max یا min نسبی f با قید

$g(x,y,z)=0$، مقادیر x و y و z و λ را چنان می‌یابیم که به طور همزمان در معادلات زیر صدق کنند

$$g(x,y,z)=0 \quad \text{و} \quad \nabla f = \lambda \nabla g \quad *$$

مثال) مطلوب است بزرگترین و کوچکترین مقادیری که تابع $f(x,y)=xy$ روی بیضی زیر

$$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$$

اختیار می‌کند

برای انجام این کار است مقادیر x، y و λ را چنان می‌یابیم که $\nabla f=\lambda\nabla g$ و $g(x,y)=0$

$$\Rightarrow y\hat{i}+x\hat{j}=\frac{\lambda}{4}x\hat{i}+\lambda y\hat{j} \Rightarrow \begin{cases} y=\frac{\lambda}{4}x \\ x=\lambda y \end{cases}$$

$$\Rightarrow y=\frac{\lambda}{4}(\lambda y)=\frac{\lambda^2}{4}y \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ \lambda=\pm 2 \end{cases}$$

حال باید ۲ حالت در نظر بگیریم:

حالت اول - اگر $y=0$ آنگاه $x=y=0$ اما نقطه $(0,0)$ در بیضی واقع نیست.

نتیجه $y\neq 0$

حالت ۲ - اگر $y\neq 0$ آنگاه: $\lambda=\pm 2$ و $\boxed{x=\pm 2y}$

Subject:
Year Month Date ✓

با قرار دادن این مقادیر در معادله $\boxed{g(x,y)=0}$ داریم.

$$\frac{(\pm 2y)^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1 \Rightarrow 4y^2+4y^2=8 \Rightarrow y=\pm 1$$

* پس تابع $f(x,y)=xy$ روی این بیضی مقادیر ext خود را در چهار نقطه $(\pm 2, 1)$ و $(\pm 2, -1)$ بدست می‌آید مقادیر ext عبارتند $xy=2$ و $xy=-2$ *

مهم ✓ مثال) مقادیر max و min تابع $f(x,y)=3x+4y$ را بر دایره واحد بیابید

$x^2+y^2=1$ $\qquad f(x,y)=3x+4y \qquad g(x,y)=x^2+y^2-1$

از روش ضرایب لاگرانژ داریم:

$$\longrightarrow \nabla f=\lambda \nabla g \Rightarrow 3i+4j=2x\lambda i+2y\lambda j$$

$$g(x,y)=0 \qquad \begin{cases} 2x\lambda=3 \Rightarrow \lambda\neq 0 \\ 2y\lambda=4 \Rightarrow \lambda \neq 0 \end{cases} \qquad x=\frac{3}{2\lambda} \quad y=\frac{2}{\lambda}$$

* از این ۲ نتیجه بالا می‌فهمیم که x و y هم علامت هستند *

$$\xrightarrow[g(x,y)=0]{\text{در معادله}} \left(\frac{3}{2\lambda}\right)^2+\left(\frac{2}{\lambda}\right)^2=1 \Rightarrow \frac{9}{4\lambda^2}+\frac{4}{\lambda^2}=1$$

$$\Rightarrow 4\lambda^2=25 \Rightarrow \lambda=\pm\frac{5}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=\pm 3/5 \\ y=\pm 4/5 \end{cases}$$

بنابراین نتیجه نقطه بدست آمده فقط ۲ تای آن ها مقادیر ext تابع را مشخص می کنند زیرا ما قبلاً دریافته بودیم که x و y باید هم علامت باشند پس نقاطی $f(x,y)$ را در ext ها ماکس بیان می کند.

$$A_1\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right) \qquad A_2=\left(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$$

مقادیر max و min تابع $f(x,y)$ به مقید شدن آن به تابع $g(x,y)=x^2+y^2=1$ برابر خواهد بود با:

$$3\left(\frac{3}{5}\right)+4\left(\frac{4}{5}\right)=\frac{25}{5}=5 \quad max$$

$$3\left(-\frac{3}{5}\right)+(+4)\left(-\frac{4}{5}\right)=-\frac{25}{5}=-5 \quad min$$

ضرایب لاگرانژ با ۲ قید: اگر متغیرهای $f(x,y,z)$ دو قید مقید ها:

$$g_2(x,y,z)=0 \quad , \quad g_1(x,y,z)=0$$

داشته باشند. می توانیم max ها و min های ماکس و مقید f را با ضرایب لاگرانژ λ و μ بدست آوریم. برای این کار با یافتن مقادیر x و y و z و λ و μ که همزمان در معادلات زیر صدق کند، نقاطی چون $P(x,y,z)$ را می یابیم که در آنها f مقادیر ext مقید خود را بدست آورد.

$$\nabla f=\lambda\nabla g_1+\mu\nabla g_2 \qquad g_1(x,y,z)=0$$

$$g_2(x,y,z)=0$$

* لازم است f و g_1 و g_2 پیوسته باشند و مشتقات جزئی پیوسته داشته باشند.

قضیه: اگر تابع دو متغیره f در ناحیه D پیوسته باشد آنگاه در این ناحیه f حداقل یک min مطلق و یک max مطلق حتماً دارد که برای بدست آوردن مقادیر آن‌ها ابتدا از روش مشتق‌گیری نقاط بحرانی را پیدا می‌کنیم و ext های نسبی را بدست می‌آوریم سپس در بین مقادیر بدست آمده در بین نقاط بحرانی آن که بیشترین مقدار را دارد max مطلق و آن که کمترین مقدار را دارد min مطلق خواهد بود.

Subject :
Year . Month . Date . ۷

۱- کدام جهت را از نقطه (۱و۱) باید برای آن که جهت مشتق جهتی $f(x,y)=e^{2xy}$ برابر صفر شود؟

$\vec{\nabla} f = 2ye^{2xy}\vec{i} + 2xe^{2xy}\vec{j}$ $\quad \vec{\nabla} f|_{(1,1)} = 2e^{2}\vec{i} + 2e^{2}\vec{j}$

می دانیم اگر مشتق جهتی را در جهت بردار عمود بر بردار گرادیان حساب کنیم حاصل صفر خواهد شد.

$D_u f(x,y) = \vec{\nabla} f \cdot \vec{u} = |\vec{\nabla} f| \cos\alpha \longrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$

جهت بردار گرادیان $= \frac{\vec{\nabla} f}{|\vec{\nabla} f|} = \frac{2e^{2}\vec{i}+2e^{2}\vec{j}}{\sqrt{4e^{4}+4e^{4}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$

بنابراین برداری که عمود بر جهت گرادیان (بردار یکه گرادیان) یعنی $\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$ باشد

مشتق جهتی در آن جهت صفر خواهد شد. یعنی از این جهت ما وقتی بدست می آید که $\theta + \frac{\pi}{2}$ شود

یعنی $\vec{u} = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$ به جای θ ، $\theta + \frac{\pi}{2}$ اگر قرار دهیم برداری بدست

می آید که بر $\vec{u}$ عمود است. چون اگر آن را n فرض کنیم خواهیم داشت:

$\vec{n} = \cos(\theta + \frac{\pi}{2})\vec{i} + \sin(\theta + \frac{\pi}{2})\vec{j} = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}$

بنابراین نتیجه می گیریم که اگر مؤلفه های $\frac{\vec{\nabla} f}{|\vec{\nabla} f|}$ را با هم جابجا کنیم و

مؤلفه اول را قرینه کنیم برداری بدست خواهد آمد که بر گرادیان عمود است و مشتق جهتی در آن

$\boxed{\vec{n} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}}$ جواب مسئله * جهت صفر خواهد شد

۲۸

Subject:
Year. Month. Date. ✓

✓ ۲- در چه جهت‌هایی تابع $f(x,y)=xy$ در نقطه $(2,0)$ دارای نرخ تغییر ۱- است؟
جهت‌هایی را بیابید که این نرخ تغییر مساوی ۳- شود؟

$$D_u f(2,0) = \vec{\nabla} f(2,0) \cdot \vec{u}$$

$$\vec{\nabla} f = y\vec{i} + x\vec{j} \qquad \vec{\nabla} f\big|_{(2,0)} = 2\vec{j}$$

$$\Longrightarrow -1 = |\vec{\nabla} f(2,0)| \cos\alpha \longrightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{2} \quad \begin{cases} \alpha = \frac{2\pi}{3} \\ \alpha = \frac{4\pi}{3} \end{cases}$$

✓ بنابراین اگر مشتق جهتی باشد با بردار یکه‌ای که $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ یا $\alpha = \frac{4\pi}{3}$ می‌سازد
نرخ تغییر ۱- خواهد بود. (کاهش یافته)

ب) $-3 = |\vec{\nabla} f(2,0)| \cos\alpha$

$$\Longrightarrow \cos\alpha = -\frac{3}{2} \qquad \text{غ ق ق}$$

*بنابراین نرخ تغییر ۳- نمی‌تواند
داشته باشد تابع *

* ۳- با فرض اینکه z تابعی از x و y و با معادله $(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2=0$ داده شده باشد
مشتق جهتی تابع فوق را در نقطه $M(1,-1,2)$ در جهت بردار یکه‌ای که [illegible] است؟

$$D_u f(1,-1,2) = |\vec{\nabla} f| \longrightarrow \vec{\nabla} f = (2(x+y)+2(z+x))\vec{i} + (2(x+y)+2(z+y))\vec{j}$$

$$+ (2(y+z)+2(x+z))K \qquad \vec{\nabla} f = 4\vec{i} + 2\vec{j} - 8K$$

راه حل غلط است

$$D_u f(x,y,z) = |\vec{\nabla} f| = \sqrt{4^2+8^2+2^2} = \sqrt{109}$$

۴ـ در چه جهتی مشتق جهتی تابع $f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ در نقطه $P(1,1)$ برابر صفر است؟

جهتی که از این نقطه مشتق جهتی max است؟

$$f_x(x,y)=\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2} \qquad f_y(x,y)=\frac{-4x^2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\vec{\nabla} f\,|_{(1,1)}=\vec{i}-\vec{j}$$

برای اینکه مشتق جهتی صفر شود باید جهت عمود بر بردار گرادیان باشد.

۲ راه را برای بدست آوردن $\vec{u}$ نشان می‌دهیم.

اول) $\vec{u}$ برداری است عمود بر بردار یکه جهتی ∇f، از ∇f خواهیم داشت:

$$\frac{\vec{\nabla} f}{|\vec{\nabla} f|}=\frac{\sqrt{2}}{2}i-\frac{\sqrt{2}}{2}j$$

از همین اول می‌دانیم که برداری که بر این بردار عمود است از عوض کردن مؤلفه‌های $\frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ و قرینه کردن مؤلفه اول آن بدست خواهد آمد یعنی

$$\vec{u}=\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}j$$

راه حل دوم) زمانی $D_u f$ صفر خواهد شد که زاویه بین $\vec{u}$ و $\vec{\nabla} f$ برابر $\pi/2$ شود پس داریم

$$\text{if } \alpha=\frac{\pi}{2}\longrightarrow\begin{cases}|\vec{\nabla} f\times\vec{u}|=1\\ \vec{\nabla} f\cdot\vec{u}=0\end{cases} \qquad \vec{\nabla} f=i-j$$

فرض کنید $\vec{u}=a\vec{i}+b\vec{j}$

Subject:
Year. Month. Date.

$$\longrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ a-b=0 \end{cases} \Longrightarrow a=b=\frac{1}{2}$$

$$\vec{u}=\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}j$$

اما برای مشتق جهتی ما به جهت یا همان بردار یکه $\vec{u}$ احتیاج داریم

$$\vec{u}\ \text{جهت} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$$

و برای قسمت دوم سوال) مشتق جهتی در جهت بردار گرادیان همواره max است.

$$\text{جهت گرادیان} = \frac{\vec{\nabla f}}{|\vec{\nabla f}|} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$$

۵ـ تابع $f(x,y)=x^y$ و نقطه $P(e,1)$ مفروض است. مشتق در چه جهتی از نقطه P صفر و در چه جهتی از نقطه P max می‌شود؟

$$f(x,y)=x^y$$

$$f_y(x,y)=x^y\ln x \qquad \nabla f(x,y)=(yx^{y-1})\vec{i}+(x^y\ln x)\vec{j}$$

$$f_x(x,y)=yx^{y-1} \qquad \nabla f\big|_{(e,1)}=\vec{i}+e\vec{j}$$

$$\Longrightarrow \nabla f\ \text{جهت} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{\vec{i}+e\vec{j}}{\sqrt{1+e^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+e^2}}\vec{i}+\frac{e}{\sqrt{1+e^2}}\vec{j}$$

* جهتی است که مشتق جهتی ماکزیمم

* جهت صفر خواهد شد.

Subject:
Year. Month. Date.

$D_u f(x,y) = \vec{\nabla} f(x,y) \cdot \vec{u} = |\nabla f(x,y)| \cos\alpha = 2$ طبق جواب قسمت الف سوال ۵

$\Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{2}{|\nabla f(x,y)|} = \dfrac{2}{\sqrt{1+e^2}}$ $\quad \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{\dfrac{e^2-3}{1+e^2}}$

$\vec{u} = \cos\alpha\,\hat{i} + \sin\alpha\,\hat{j} = \dfrac{2}{\sqrt{1+e^2}}\,\hat{i} + \sqrt{\dfrac{e^2-3}{1+e^2}}\,\hat{j}$

۶- طرح: $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3y^2 - 3x - 9y$ مفروض است. A نقطه‌ای از محور x

با max مشتق جهتی f در A برابر ۹ است. A را بیابید.

$\vec{\nabla} f(x,y) = (3x^2-3)\,\vec{i} + (3y^2+6y-9)\,\vec{j}$

چون A روی محور x بوده پس عرض آن صفر است. $A = (a,0)$ فرض کنید A

و می‌دانیم max مشتق جهتی برابر اندازه گرادیان می‌باشد.

$|\vec{\nabla} f|_{(a,0)} = \sqrt{(3a^2-3)^2 + (-9)^2} = 9$

$\Rightarrow (3a^2-3)^2 + 81 = 81 \Rightarrow 3a^2-3 = 0 \Rightarrow a = \pm 1$

۷ مشتق تابع $f(x,y,z)$ در نقطه P در جهت بردار $\vec A = 2\vec i - \sqrt{3}\vec j + 3\vec k$ بیشترین است فصل چهارم

و مقدار آن در این جهت ۸ می باشد. مشتق f در P در جهت $\vec B = \vec i + \vec j - 2\vec k$ را بیابید؟

می دانیم که وقتی مقدار مشتق جهتی بیشترین مقدار است که بردار گرادیان و بردار جهتی $\vec u$ هم جهت باشند پس داریم:

$$\max D_u f(x,y) = \vec\nabla f \cdot \vec A = |\vec\nabla f||\vec u_A|\cancel{\cos\beta}^{1}$$

$$= |\vec\nabla f| = 8$$

بنابراین مقدار گرادیان برابر ۸ می باشد. پس بردار گرادیان و بردار یکه $\vec u_A$ با هم هم جهت هستند

حال سوال از ما مقدار مشتق جهتی در همان نقطه در جهت بردار B را می خواهد.

$$D_u f(x,y) = \vec\nabla f \cdot \vec u_B = |\vec\nabla f|\cos\alpha$$

در این جا α زاویه بین بردار گرادیان و بردار یکه B می باشد و ما از قسمت بالا می دانیم که بردار گرادیان و بردار A با هم هم جهت هستند پس می توان این طور نتیجه گرفت که در اصل α زاویه بین بردار A و B می باشد که از روش زیر آن را محاسبه می کنیم.

$$\cos\alpha = \frac{A\cdot B}{|A||B|} = \frac{2-\sqrt{3}-6}{\sqrt{16}\times\sqrt{6}} = \frac{-4-\sqrt{3}}{4\times 6} = \frac{-(4+\sqrt{3})}{24}$$

بنابراین مشتق جهتی f در جهت بردار یکه B $\Rightarrow D_{u_B} f(x,y) = \vec\nabla f \cdot \vec u_B = |\vec\nabla f|\cos\alpha$

$$D_{u_B} f(x,y) = 8x - \frac{(4+\sqrt{3})}{96} = \frac{-(14+\sqrt{3})}{12}$$ مشتق جهتی f در P در جهت بردار $\vec{B}$ *

۸ـ مشتق $f(x,y)$ در $P_0(3,-4)$ در جهت بردار $2\vec{i}+\vec{j}$ مساوی $\frac{\sqrt{5}}{5}$ و در جهت بردار $\vec{j}-\vec{i}$ مساوی $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ است. مشتق f در P_0 در جهت $-\vec{i}+2\vec{j}$ را بدست آورید.

$2\vec{i}+\vec{j}$ جهت بردار: $\frac{2\vec{i}+\vec{j}}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{i}+\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{j}$

فرض کنید

$$\vec{\nabla} f = f_x\vec{i}+f_y\vec{j}$$

$-\vec{i}+\vec{j}$ جهت بردار: $\frac{-\vec{i}+\vec{j}}{\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}\vec{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$

$$D_u f(x,y) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{i}+\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{j}\right)\cdot\left(f_x\vec{i}+f_y\vec{j}\right) = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\Longrightarrow 2f_x+f_y=1 \quad \text{I}$$

$$D_u f(x,y) = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\vec{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}\right)\cdot\left(f_x\vec{i}+f_y\vec{j}\right) = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$\Longrightarrow f_y-f_x=10 \quad \text{II}$$

$$\text{I},\text{II} \Longrightarrow \begin{cases} 2f_x+f_y=1 \\ -f_x+f_y=10 \end{cases} \Longrightarrow \begin{array}{l} f_x=-\frac{4}{3} \ * \\ f_y=\frac{11}{3} \ * \end{array}$$

$-\vec{i}+2\vec{j}$ مشتق f در جهت $D_u f(x,y) = \left(-\frac{4}{3}\vec{i}+\frac{11}{3}\vec{j}\right)\cdot\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}\vec{i}+\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}\right)$

$$* = \frac{26}{3\sqrt{5}}$$

(۹) سطح $x^2+y^2=z^2$ مفروض است. بردار یکه قائم بر این سطح در نقطه $P(3,4,-5)$ را $\vec{n}$ می‌نامیم. مشتق تابع $h=\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$ در نقطه P در جهت $\vec{n}$ را بدست آورید.

$$z^2-x^2-y^2=0 \qquad \nabla h=\frac{-2x}{(x^2+y^2+z^2)^2}\vec{i}-\frac{2y}{(x^2+y^2+z^2)^2}\vec{j}-\frac{2z}{(x^2+y^2+z^2)^2}\vec{k}$$

$$\vec{\nabla} h\Big|_{(3,4,-5)}=\frac{1}{50}\left(-6\vec{i}-8\vec{j}+10\vec{k}\right)$$

۱۰- مشتق جهتی تابع $f(x,y,z)=xy+yz+\ln z$ در نقطه $P(1,1,1)$ در جهت بردار $\vec{AB}$ که در آن $A(2,5,2)$ ، $B(-1,2,0)$ است را بدست آورید.

$$\vec{\nabla} f=(y+0)\vec{i}+(x+z)\vec{j}+\left(y+\frac{1}{z}\right)\vec{k}$$

$$\vec{\nabla} f\Big|_{(1,1,1)}=\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k} \qquad \vec{AB}=-3\vec{i}-3\vec{j}-2\vec{k}$$

Subject:
Year. Month. Date.

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \left(\frac{-3}{\sqrt{22}}\vec{i} - \frac{3}{\sqrt{22}}\vec{j} - \frac{2}{\sqrt{22}}\vec{k}\right.$$

$$\overrightarrow{D_u f} = \vec{\nabla} f \cdot \vec{u} = \frac{-1}{\sqrt{22}}(3\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}) \cdot (\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}) = \frac{-13}{\sqrt{22}}$$

۱۱- دمای هر نقطه از یک جسم به وسیله رابطه $T = \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2+3}$ بیان می‌شود. مطلوب است

محاسبه جهت و اندازه بیشترین میزان تغییر T در نقطه $(3,-2,2)$ ؟

می‌دانیم که اندازه و جهت بیشترین میزان تغییر در جهت بردار گرادیان و برابر اندازه گرادیان خواهد بود.

$$\overrightarrow{\nabla T} = \frac{-2x}{(x^2+y^2+z^2+3)^2}\vec{i} + \frac{-2y}{(x^2+y^2+z^2+3)^2}\vec{j} + \frac{-2z}{(x^2+y^2+z^2+3)^2}\vec{k}$$

$$\overrightarrow{\nabla T}\Big|_{(3,-2,2)} = \frac{-6}{20^2}\vec{i} + \frac{4}{20^2}\vec{j} - \frac{4}{20^2}\vec{k}$$

جهت گرادیان که در آن جهت بیشترین میزان T را دارا است. $\Rightarrow \dfrac{\overrightarrow{\nabla T}}{|\nabla T|} = \dfrac{-6\vec{i}+4\vec{j}-4\vec{k}}{\sqrt{68}}$

$$D_u f(x,y,z) = |\overrightarrow{\nabla T}| = \sqrt{68}$$ اندازه بیشترین تغییرات

Subject :
Year .   Month .   Date .

۱۳- مشتق سوئی تابع $f(x,y,z)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ در نقطه $M(1,2,-2)$ در امتداد مماس

بر منحنی C با معادلات پارامتری زیر بدست آورید؟ $x=t,\ y=2t^2,\ z=-2t^4$

از فصل قبل می‌دانیم که بردار یکه مماس بر معادلات پارامتری برابر است با: $T(t)=\dfrac{R'(t)}{|R'(t)|}$

$$R(t)=t\hat{i}+2t^2\hat{j}-2t^4\hat{k} \qquad R'(t)=\hat{i}+4t\hat{j}-8t^3\hat{k}$$

$$x=1 \Longrightarrow t=1$$

$$T(1)=\frac{\hat{i}+4\hat{j}-8\hat{k}}{\sqrt{1+16+64}}=\frac{1}{9}(\vec{i}+4\vec{j}-8\vec{k})$$

$$D_T f(x,y,z)=\vec{\nabla} f\cdot\vec{T}(t)=\left(\frac{8}{27}\vec{i}-\frac{2}{27}\vec{j}+\frac{2}{27}\vec{k}\right)\cdot\left(\frac{1}{9}\vec{i}+\frac{4}{9}\vec{j}-\frac{8}{9}\vec{k}\right)$$

$$=\frac{-16}{9\times 27}$$

۱۴- به فرض آنکه $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^3}{x^3+y^6} & ;\ (x,y)\neq(0,0)\\[2mm] 0 & ;\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$ مشتق جهتی f در نقطه $(1,1)$ در امتداد مماس

بر منحنی C به معادلات پارامتری $\begin{cases}x=\sqrt{2}\cos t\\ y=\sqrt{2}\sin t\end{cases}$ را بیابید؟

$$T(t)=\frac{R'(t)}{|R'(t)|}=\frac{-\sqrt{2}\sin t\,\vec{i}+\sqrt{2}\cos t\,\vec{j}}{\sqrt{2\sin^2 t+2\cos^2 t}}=-\sin t\,\vec{i}+\cos t\,\vec{j}$$

Subject:
Year. Month. Date.

در نقطه $(1,1) \Longrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{2}\cos t=1 \longrightarrow \cos t=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y=\sqrt{2}\sin t=1 \longrightarrow \sin t=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Longrightarrow t=\dfrac{\pi}{4}$

$$f_x(x,y)=\frac{-2x^3y^3+y^6}{(x^3+y^6)^2} \qquad f_y=\frac{3y^2x^3+6y^8-4y^8x}{(x^3+y^6)^2}$$

$$f_x(1,1)=-\frac{1}{4} \qquad f_y(1,1)=0 \qquad \nabla f(x,y)=-\frac{1}{4}\vec{i}$$

$$D_u f(x,y)=\vec{\nabla f}\cdot\vec{T}(t)=\left(-\frac{1}{4}\vec{i}\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{8}$$

۱۵- مشتق جهتی تابع $f(x,y,z)=x^2+y^2z^2$ در نقطه $(3,4,5)$ در راستای مماس بر منحنی فصل مشترک سطح‌های $2x^2+2y^2-z^2=25$ ، $x^2+y^2=z^2$ را بدست آورید.

سطح‌های $2x^2+2y^2-z^2=25$ ، $x^2+y^2=z^2$ ، ۲ رویه در فضای ۳ بعدی می‌باشند، فصل مشترک این ۲ رویه یک خم خواهد شد و جهت مانند بردار مماس بر این خم است که مشتق را در این جهت می‌خواهیم.

$$\begin{cases} 2x^2+2y^2-z^2=25 \\ x^2+y^2=z^2 \end{cases} \Longrightarrow x^2+y^2=25$$

$$R'(t)=2x\vec{i}+2y\vec{j}$$

$$|R'(t)|=\sqrt{4x^2+4y^2}=2z$$

$$\vec{u} = \frac{R'(t)}{|R'(t)|} = \frac{x}{z}\vec{i} + \frac{y}{z}\vec{j}$$

$$\vec{\nabla} f = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} - 2z\vec{k} \Longrightarrow \vec{\nabla} f = 6\vec{i} + 8\vec{j} - 10\vec{k}$$

$$\Longrightarrow D_u f = \frac{18}{5} + \frac{32}{5} = \frac{50}{5} = 10$$

تمرین. اکسترمم هریک از توابع زیر را در صورت وجود یافته و نوع آن را مشخص کنید.

a) $z = x^2 + (y-1)^2$

$z_x = 2x = 0$ $\qquad$ $z_{xx} = 2$

$\Longrightarrow A(0,1)$ بحرانی $\qquad$ $z_{yy} = 2$

$z_y = 2(y-1) = 0$ $\qquad$ $z_{xy} = 0$

$\Longrightarrow D = (2)(2) - 0 = 4 > 0 \quad z_{xx} > 0$

بنابراین $A(0,1)$ یک min نسبی است.

b) $z = x^2 - (y-1)^2$

$z_x = 2x \longrightarrow A(0,1)$ بحرانی

$z_y = -2(y-1)$

$z_{xx} = 2,\ z_{yy} = -2,\ z_{xy} = 0 \Longrightarrow D = 2\times -2 - 0 = -4 < 0$

بنابراین $A(0,1)$ یک نقطه زینی می‌باشد.

Subject:

Year. Month. Date.

d) $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$

$z_x = 2x - y - 2 = 0$

$z_y = -x + 2y + 1 = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 2 \\ -x + 2y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \end{cases}$ بحرانی

$z_{xx} = 2 \qquad z_{yy} = 2 \qquad z_{xy} = -1 \qquad z_{yx} = -1$

$D = 4 - 1 = 3 > 0 \qquad z_{xx} > 0 \qquad A(1,0)$ min نسبی

e) $z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y} \qquad (x > 0, y > 0)$

$z_x = y - \frac{50}{x^2} = 0$

$z_y = x - \frac{20}{y^2} = 0$

$\Rightarrow x = \frac{20x^4}{2500} \Rightarrow x^3 = \frac{2500}{20} = 12{,}5 = 125$

$\Rightarrow \boxed{x = 5}$

$A(5,2)$ بحرانی

$z_{xx} = \frac{100}{x^3} \qquad z_{yy} = \frac{40}{y^3} \qquad z_{xy} = 1$

$z_{xx} z_{yy} - z_{xy}^2 = \frac{4000}{x^3 y^3} - 1 = 4 - 1 = 3 > 0 \Rightarrow (5,3)$ min نسبی

g) $z = e^{x^2 - y}(5 - 2x + y)$

$z_x = 2x(e^{x^2-y})(5 - 2x + y) + (e^{x^2-y})(-2) = 0$

$\Rightarrow x(5 - 2x + y) = 1$

Subject:
Year. Month. Date. ✓

$$Z_y = -e^{x^2-y}(5-2x+y) + e^{x^2-y} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 5-2x+y=1 \\ x(5-2x+y)=1 \end{cases}$$

$\Rightarrow x=1 \; , \; y=-2 \qquad A(1,-2)$ بحرانی

$$Z_{xx} = 2(e^{x^2-y})(5-2x+y) + 4x^2(e^{x^2-y})(5-2x+y)$$
$$+ 2x(e^{x^2-y})(-2) + (-4e^{x^2-y})$$

$$Z_{yy} = e^{x^2-y}(5-2x+y) + (-e^{x^2-y})(5-2x+y) - e^{x^2-y} =$$

$$Z_{xx} = 2(e^3)(5-2-2) + 4(e^3)(5-2-2) + 2(e^3)(-2) + (-4e^3)$$
$$= 2e^3 + 4e^3 - 4e^3 - 4e^3 = -2e^3$$

$$Z_{yy} = e^3 - e^3 - e^3 = -e^3$$

$$Z_{xy} = -2(e^{x^2-y})(5-2x+y) + 2(e^{x^2-y}) - 4x^2(e^{x^2-y})(5-2x+y)$$
$$+ 4x^2(e^{x^2-y}) + 4x(e^{x^2-y}) + 4e^{x^2-y}$$
$$= \cancel{-2e^3} + \cancel{2e^3} - \cancel{4e^3} + \cancel{4e^3} + 4e^3 + 4e^3$$
$$= 8e^3 \qquad D = 2e^6 - 8e^3 = 646{,}17 > 0$$

$Z_{xx} < 0$ $\quad A(1,-2)$ max نسبی است

Subject :

Year . Month . Date .

(h) $z = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y$

$$z_x = 2x + y - \frac{4}{x} \Rightarrow z_{xx} = 2 + \frac{4}{x^2} \quad , z_{xy} = 0$$

$$z_y = x + 2y \Rightarrow z_{yy} = 2$$

$$\begin{cases} z_x = 0 \\ z_y = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{l} x = \pm\sqrt{\frac{8}{5}} \\ y = \pm\sqrt{\frac{2}{5}} \end{array} \qquad D = z_{xx}z_{yy} - z_{xy} > 0$$

$$z_{xx} > 0 \quad \left(\pm\sqrt{\frac{8}{5}}, \pm\sqrt{\frac{2}{5}}\right) \min \text{ نسبی}$$

(i) $z = x - 2y + \ln\sqrt{x^2+y^2} + 3\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$

$$z_x = 1 - \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{3y}{x^2+y^2} \longrightarrow z_{xx} =$$

$$z_y = -2 + \frac{2}{x^2+y^2} + \frac{3/x}{1 + y^2/x^2}$$

$$z_x = 2x e^{-(x^2+y^2)} \quad e^{-(x^2+y^2)} \quad (x^2+y^2) = 0 \Rightarrow (x^2+y^2) = 1$$

$$z_y = 0 \Rightarrow z_y = 2y e^{-(x^2+y^2)} - 2y (x^2+y^2) e^{-(x^2+y^2)} = 0 \Rightarrow (x^4+y^2) = 1$$

دایره‌ای به مرکز (۰,۰) و شعاع ۱ می‌باشد. نقاط روی محیط این دایره ext می‌باشند