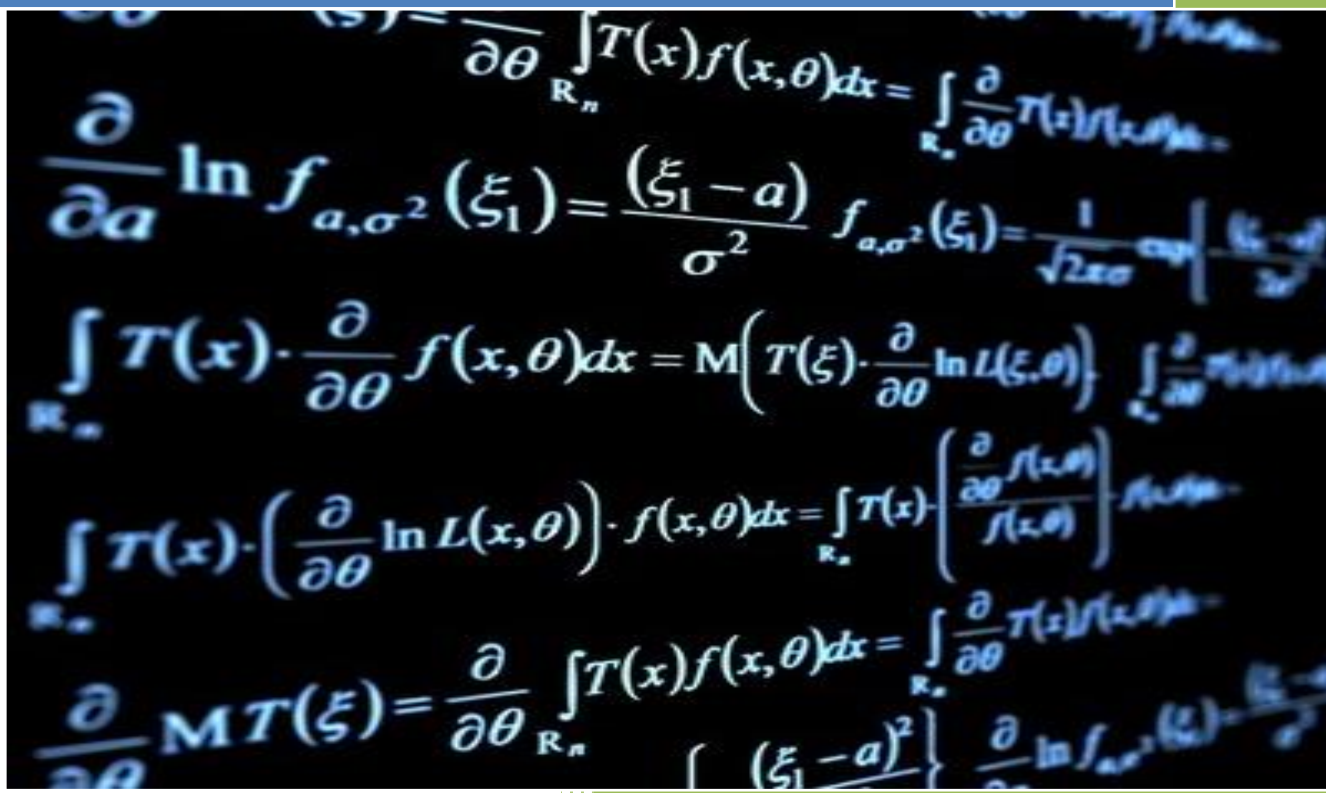
فصل سوم:

توابع چند متغیره

باشگاه مهندسان سمنان

www.sem-eng.com

جزوه ریاضی 2



نویسنده جزوه: ایمان شریعت پناهی

اسکن جزوه: محمدرضا خالصی

استاد: دکتر محمود بیدخام

فصل سوم: توابع چند متغیره

تمامی قضایای درس ریاضی ۱ در حالت‌های یک متغیره به روش چند متغیره صدق دارد.

تعریف: اگر $A \in R^n$ و $r>0$ آنگاه گوی باز به مرکز A و شعاع r را با $B(A,r)$ نمایش می‌دهیم و به طوریکه

$$B(A,r)=\{x \in R^n \mid \|A-x\|<r\}$$

تعریف: متغیر w تابعی از متغیرهای $x_1, x_2, \dots, x_n$ از مجموعه $D \subseteq R^n$ نامیده می‌شود اگر برای هر نقطه از مجموعه (نقطه) یک مقدار مشخص w نسبت داده شود. در این حالت می‌نویسیم $w=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ مجموعه کلیه نقاط D را دامنه (دامنه) تابع می‌نامند.

تذکر: اگر تابعی از دو متغیر مستقل x و y باشد آنگاه نمودار آن مجموعه کلیه نقاطی خواهد بود در فضای سه بعدی که طول و عرض آن‌ها به ترتیب x و y بوده و مؤلفه سوم آن z. نمودار تابعی را که دامنه آن ناحیه‌ای از صفحه xy باشد رویه می‌نامند.

(شرط اول)

حد توابع چند متغیره: اگر f تابعی n متغیره در همسایگی نقاط گوی $B(A,r)$ $(r>0)$ به جز احتمالاً در نقطه A $(A \in R^n)$ تعریف شده باشد و $L \in R$. گوییم حد تابع $f(X)$ وقتی X به A میل کند L می‌شود.

شرط دوم

$$\lim_{X \to A} f(X) = L$$

$$\forall \epsilon>0 \ \exists \delta>0 \ \forall x \ (0<|X-A|<\delta \Rightarrow |f(X)-L|<\epsilon)$$

نکته: ۲ راه برای نقض پیوستگی تابع در نقطه مفروض $A(x_1,x_2)$ وجود دارد که

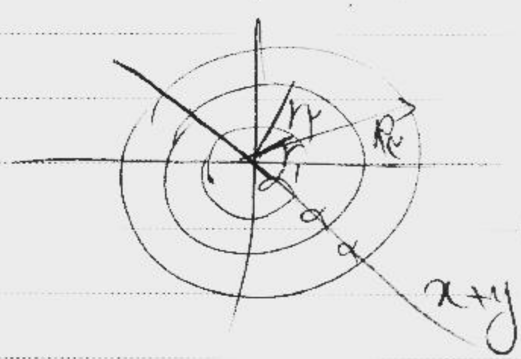
۱ـ گوی باز به مرکز $A(x_1,x_2)$ و شعاع $r>0$ وجود داشته باشد که هیچ یک نقطه از نقاطش شامل دامنه تابع مفروض نشود.

۲ـ بتوان ۲ مسیر متفاوت یافت که اگر از هر دو مسیر از آن به سمت $A(x_1,x_2)$ نزدیک شویم ۲ مقدار متفاوت برای حد تابع بدست آوریم.

مثال) آیا حد تابع مقابل در نقطه $A(0,0)$ وجود دارد؟

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2+xy}{x+y} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

دامنه تابع مفروض تمام فضای R^2 بجز خط $x+y=0$ است. هر گوی باز به مرکز $(0,0)$ و شعاع $r>0$ شامل بی‌نهایت نقطه از خط $x+y=0$ وجود دارد [illegible] . وجود ندارد.



* همیشه حد بالا را وقتی برای یک تابع f در نقطه x_1 برابر با L است که این حد [illegible] مسیرهای منتهی به نقطه x_1 موجود و برابر L باشد.

مثال) ثابت کنید تابع در نقطه $A(0,0)$ ناپیوسته است.

$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \frac{e^{x \cdot y}}{x-y} \qquad D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ,\ x \neq y\}$$

دامنه این تابع تمام نقاط فضای $\mathbb{R}^2$ بجز نقاط واقع روی خط $x = y$ می باشد.

اما به ازای نقطه از این خط یعنی نقطه ای به مرکز $(0,0)$ و شعاع $r > 0$

ناقص می باشد پس این تابع در نقطه $(0,0)$ ناپیوسته است.

مثال) آیا تابع در مبدا مختصات پیوسته است؟

$$f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

فرض $y = mx$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{m^2x^2 + x^2} = \lim \frac{x^2}{x^2(1+m^2)}$$

$$= \frac{1}{1+m^2}$$

* بنابراین از مسیرهای مختلف این حد به ازای مقادیر مختلف m متغیر می شود پس حد یکتا نیست و وجود ندارد. *

مثال) ثابت کنید تابع فوق در نقطه $A(0,0,0)$ ... $f(x,y,z) = \dfrac{xyz}{x^3+y^3+z^3}$

$$x = y = z \Rightarrow \lim_{(x,y,z)\to x} \frac{x^3}{3x^3} = \frac{1}{3}$$ پیوسته

$$y = z = 0 \Longrightarrow \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^3+y^3+z^3} = 0 \qquad \frac{1}{3} \neq 0$$ ناپیوسته

Subject:

Year. Month. Date:

مثال) ثابت کنید تابع زیر حد ندارد

$$f(x,y)=\frac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}$$

$$x=0 \quad \lim \frac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}=0$$

$$x=my^2 \Rightarrow \lim \frac{m^2y^{12}}{y^{12}(1+m^2)}=\frac{m^2}{1+m^2}$$

چون مقدار m وابسته است بنابراین حد یکتا نیست و وجود ندارد.

مثال) ثابت کنید حدهای مضاعف زیر تابع $f(x,y)$ در نقطه $(0,0)$ وجود ندارد

a) $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

$$\begin{cases} x=0 & \lim f(x,y)=-1 \\ y=0 & \lim f(x,y)=1 \end{cases} \qquad -1\neq 1$$

b) $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^3+y^3} \Rightarrow y=mx$

$$\Rightarrow \lim \frac{mx^3}{x^3(1+m^3)}=\frac{m}{1+m^3}$$

* چون مقدار حد به مقدار m بستگی دارد بنابراین حد یکتا نمی‌باشد و حد موجود نیست

c) $f(x,y)=\dfrac{x^9y}{(x^6+y^2)^2} \qquad y=mx^3$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(x,mx^3)} \frac{mx^{12}}{x^{12}(1+m^2)}=\frac{m}{1+m^2}$$

* بنابراین حد موجود نیست. *

Subject:
Year: Month. Date. ✓

✓f) $f(x,y,z) = \dfrac{xy+2xz+3yz}{x^2+y^2+z^2}$

$$\begin{cases} y=z=0 \Rightarrow \lim f(x,y,z) = 0 \\ y=x=z \Rightarrow \lim \dfrac{4x^2}{3x^2} = 2 \end{cases} \Rightarrow 0 \neq 2$$ مسئله

می‌توان مسیرهای کلی $y=z=mx$

✓g) $f(x,y,z) = \dfrac{x^2+y^2-z^2}{x^2+y^2+z^2}$

$mx=y=z \Rightarrow \lim \dfrac{x^2+m^2x^2-m^2x^2}{m^2x^2+m^2x^2+x^2}$

$\Rightarrow \lim \dfrac{x^2}{x^2(1+2m^2)} = \dfrac{1}{1+2m^2}$ بنابراین حد موجود نیست

✓h) $f(x,y,z) = \dfrac{x^2y^2z^2}{x^4+y^4+z^4}$ $\quad y=x=mz$

$\Rightarrow \lim \dfrac{m^4z^4}{z^4(1+2m^4)} = \dfrac{m^4}{1+2m^4}$ بنابراین حد موجود نمی‌باشد.

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date

پیوستگی توابع چند متغیره : گوییم تابع n متغیره f در نقطه A ($A \in R^n$) پیوسته است هرگاه :

۱) $f(A)$ وجود داشته باشد   ۲) $\lim_{X \to A} f(X)$ موجود باشد

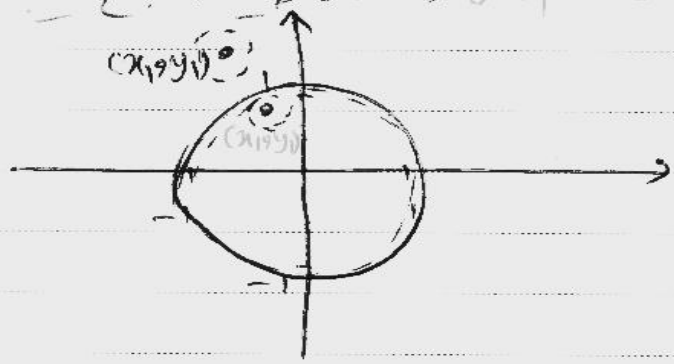
۳) $\lim_{X \to A} f(X) = f(A)$

* نیازی نیست تابع در نقطه‌ای که می‌خواهد حد داشته باشد تعریف شده باشد. اما برای پیوستگی باید حتماً در یک گوی باز به مرکز آن نقطه تعریف شده باشد.

مثال (مهم) : در خصوص پیوستگی تابع زیر بحث کنید؟

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2 & x^2+y^2 \geq 1 \\ 0 & x^2+y^2 < 1 \end{cases}$$



①

$(x_1,y_1) \in \mathbb{R}^2$

$x_1^2+y_1^2 < 1$ (نواحی داخل دایره)

$$\Longrightarrow \begin{cases} f(x_1,y_1) = 0 \\ \lim_{(x,y)\to(x_1,y_1)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_1,y_1)} 0 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \lim_{(x,y)\to(x_1,y_1)} f(x,y) = f(x_1,y_1)$$

②

$\forall (x_1,y_1) \in \mathbb{R}^2$

$x_1^2+y_1^2 > 1$ (نواحی خارج دایره)

$$\Longrightarrow \begin{cases} f(x_1,y_1) = x_1^2+y_1^2 \\ \lim_{(x,y)\to(x_1,y_1)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_1,y_1)} (x^2+y^2) = x_1^2+y_1^2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \lim_{(x,y)\to(x_1,y_1)} f(x,y) = f(x_1,y_1)$$

(۳)

$\forall (x_1,y_1)\in \mathbb{R}^2$, $x_1^2+y_1^2=1$ $\Longrightarrow$ $f(x_1,y_1)=x_1^2+y_1^2$

* نقطه‌ی روی دایره *

$$\lim_{(x,y)\to(x_1,y_1)} f(x,y) \Longrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{(x,y)\to(x_1,y_1)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(x_1,y_1)} 0 = 0 & x_1^2+y_1^2<1 \\ \lim\limits_{(x,y)\to(x_1,y_1)} f(x,y) = x_1^2+y_1^2 = 1 & x_1^2+y_1^2 \geq 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow 0 \neq 1$ حد ندارد

* در مثال قبل ۲ حالت را بررسی کردیم که این ۳ حالت را در زیر بیان می‌کنیم.

<u>حالت اول</u>: فرض می‌کنیم (x_1,y_1) ما داخل دایره است بنابراین یک نقطه از این ناحیه به فرض (x_1,y_1) را انتخاب می‌کنیم که برای این نقطه گوی باز به شعاع $r>0$ در درون دایره وجود دارد که این نقطه در درون این گوی باز محصور شده باشد بنابراین می‌توان از هر جهت در این گوی به (x_1,y_1) نزدیک شد که بنابه قضیه‌ی تابع ثابت حد آن صفر خواهد شد و مقدار تابع هم صفر است. پس در این نقطه پیوسته است.

<u>حالت دوم</u>: فرض می‌کنیم (x_1,y_1) ما بیرون دایره است. بنابراین یک نقطه از این ناحیه به فرض (x_1,y_1) انتخاب می‌کنیم که برای این نقطه هم می‌توان گوی باز به همان شعاع $r>0$ پیدا کرد که این نقطه در درون این گوی باز قرار دارد و از هر مسیری از درون این گوی می‌توان به این نقطه نزدیک

شد. که بنابراین بنا به تعریف خود تابع مقدار حد این تابع در نقطه (x_0,y_0) برابر خواهد شد پس در این ناحیه

نیز تابع پیوسته است -

حالت سوم این حالت مربوط به نقاط نواحی روی مرز دایره می باشد چون ما می خواهیم یک نقطه

به فرض (x_0,y_0) روی این مرز انتخاب کنیم بنابراین با گوی باز به همان مرکز و شعاع r انتخاب شود

اما اگر گوی را از ε هم بزرگتر باشد به عنوان باز هم گوی باز ما شامل ۲ ناحیه خواهد شد یکی درون

دایره و دیگری بیرون دایره و به همین دلیل باید در نقطه (x_0,y_0) با توجه از نواحی بیرون دایره گوی

باز به این نقطه نزدیک می شویم و از نواحی درون دایره گوی باز به (x_0,y_0) نزدیک می شویم را حد می گیریم

که مشاهده شد این ۲ مقدار با هم برابر نیستند پس تابع به ازای نواحی روی مرز دایره پیوسته نیست. و چون پس

تابع اگر در هر سه ناحیه پیوسته نباشد در حالت کلی و کل تابع هم پیوسته نخواهد بود

مثال) پیوستگی تابع را در نقطه

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y)\sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{y} & \text{با فرض این که } xy \neq 0 \\ 0 & x=0 \text{ یا } y=0 \end{cases}$$

$(0,0)$ بررسی کنید!

مشاهده می شود تابع فوق در کل فضای $\mathbb{R}^2$ پیوسته می باشد چون تابع در این فضا تابعی کوبا است -

Subject:
Year. Month. Date.

بنابراین تابع در کل فضای $\mathbb{R}^2$ پیوسته است بجز احتمالاً در نقطه (0,0) که باید بررسی شود.

$$\forall \epsilon>0,\ \exists \delta>0 \ \left(\sqrt{x^2+y^2}<\delta \Longrightarrow \left|(x+y)\sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{y} - 0\right| < \epsilon\right)$$

$$\Longrightarrow |x+y|\underbrace{\left|\sin\frac{1}{x}\right|}_{\le 1}\underbrace{\left|\cos\frac{1}{y}\right|}_{\le 1} \le |x+y| \le \underbrace{|x|+|y|}_{\text{نامساوی مثلثی}}$$

$$\Longrightarrow \text{می‌دانیم} \begin{cases} |x| \le \sqrt{x^2+y^2} < \delta \\ |y| \le \sqrt{x^2+y^2} < \delta \end{cases}$$

$$< \delta+\delta \le \epsilon$$

$$\Longrightarrow \boxed{\delta \le \frac{\epsilon}{2}}$$

مثال) در مورد پیوستگی تابع زیر در کل فضای $\mathbb{R}^3$ بحث کنید.

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{xy^2z}{x^2+y^2+z^2} & x,y,z \neq 0 \\ 0 & x=0,\ y=0,\ z=0 \end{cases}$$

تابع f چون تابعی گویا است و مخرج آن هم صفر نیست بنابراین در کل فضای $\mathbb{R}^3$ بجز احتمالاً در نقطه (0,0,0) پیوسته است باید:

$$\forall \epsilon>0\ \exists \delta>0 \Longrightarrow \sqrt{x^2+y^2+z^2} < \delta \Longrightarrow \left|\frac{xy^2z}{x^2+y^2+z^2}\right| < \epsilon$$

$$\Longrightarrow \frac{|x||z|y^2}{x^2+y^2+z^2} \le \frac{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)} < \epsilon$$

$$\delta^2 < \epsilon \Longrightarrow \delta < \sqrt{\epsilon}$$

* بنابراین حد موجود است پس تابع پیوسته است *

Subject:

Year. Month. Date.

مثال) در مورد پیوستگی تابع

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

بحث کنید.

تابع f تابعی گویا است و در نقاط معین شده مخرج آن غیر صفر است. بنابراین در تمام فضای $\mathbb{R}^2$ پیوسته است به جز در نقطه $(0,0)$ که باید در این نقطه امتحان شود.

$$\forall \epsilon>0 \quad \exists \delta>0 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2}<\delta \quad , \quad \left| xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right| <\epsilon$$

می‌دانیم $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}<1 \Rightarrow |x||y|\dfrac{|x^2-y^2|}{x^2+y^2} \leq |x||y|$

$$\Rightarrow \delta^2 \leq \epsilon \Rightarrow \delta \leq \sqrt{\epsilon}$$

* بنابراین حد در $(0,0)$ موجود می‌باشد پس تابع ما پیوسته است.

تمرین: با استفاده از تعریف ثابت کنید

a) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{(x^2+y^2)^{1/2}}=0$$

$$\forall \epsilon>0 \quad \exists \delta>0 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2}<\delta \Rightarrow \left|\frac{x^4+y^4}{(x^2+y^2)^{1/2}}\right| <\epsilon$$

$$\Rightarrow \frac{x^4+y^4}{(x^2+y^2)^{1/2}} \leq \frac{(x^2+y^2)^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \delta^3 \leq \epsilon \Rightarrow \delta \leq \sqrt[3]{\epsilon}$$

* بنابراین حد موجود است *

b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} = 0$ $\quad x^3-y^3 = (|x|-|y|)(x^2+|x||y|+y^2)$

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \Longrightarrow \left(\sqrt{x^2+y^2} < \delta \,,\, \left|\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\right| < \epsilon\right)$$

$$\Longrightarrow \frac{|x^3-y^3|}{x^2+y^2} < \epsilon \Longrightarrow \frac{(|x|+|y|)(x^2-|x||y|+y^2)}{x^2+y^2}$$

غلط

$$\leq (|x|\cancel{+}|y|) \frac{(x^2+y^2-|x||y|)}{x^2+y^2} \leq \cancel{(|x|+|y|)}$$

$$\underbrace{}_{\leq 1} \Longrightarrow |x|-|y| \leq \epsilon$$

$$= \delta+\delta \leq \epsilon \Longrightarrow \boxed{\delta \leq \frac{\epsilon}{2}}$$

$\epsilon > 0 \times \epsilon$

بنابراین حد فوق موجود می‌باشد.

$\delta \leq \epsilon$ یعنی

$(0,0)$ X

c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{x} = 0$

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \Longrightarrow \sqrt{x^2+y^2} < \delta \Longrightarrow \left|\frac{\sin(xy)}{x}\right| < \epsilon$$

$$\Longrightarrow \frac{|\sin(xy)|}{|x|} \leq \frac{1}{|x|} \leq \frac{1}{\delta} < \epsilon \Longrightarrow \delta \leq \frac{1}{\epsilon}$$

بنابراین حد فوق موجود می‌باشد.

d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} = 1 \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \Longrightarrow \sqrt{x^2+y^2} < \delta$

$$\Longrightarrow \left|\frac{\sin(xy)}{xy} - 1\right| < \epsilon$$

$$\Longrightarrow \left|\frac{\sin(xy)-xy}{xy}\right| \leq \frac{|\sin(xy)|+|x||y|}{|x||y|} \leq \frac{1+|x||y|}{|x||y|} \leq 1+\frac{1}{\delta^2} \leq \epsilon$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{\delta^2} \leq \epsilon-1 \Longrightarrow \delta^2 \geq \frac{1}{\epsilon-1} \Longrightarrow \delta \geq \sqrt{\frac{1}{\epsilon-1}}$$

✓ e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=0 \quad \forall \epsilon>0 \ \exists \delta>0 \quad \sqrt{x^2+y^2}<\delta \Longrightarrow \left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right| \leq \epsilon$

$$\Longrightarrow \frac{(|x|+|y|)(x^2+|x||y|+y^2)}{(x^2+y^2)} \leq \frac{(|x|+|y|)(x^2+2|x||y|+y^2)}{(x^2+y^2)}$$

$$\leq (|x|+|y|)\underbrace{\left(\frac{(|x|+|y|)^2}{|x|^2+|y|^2}\right)}_{\leq 1} \leq (|x|+|y|) \leq 2\delta \leq \epsilon$$

$$\Longrightarrow \boxed{\delta \leq \frac{\epsilon}{2}}$$ بنابراین حد موجود است

✓ I) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{|x|+|y|}=0 \quad \forall \epsilon>0 \ \exists \delta>0 \Longrightarrow \sqrt{x^2+y^2}<\delta \Longrightarrow \left|\frac{xy}{|x|+|y|}\right| \leq \epsilon$

$$\Longrightarrow \frac{|x||y|}{|x|+|y|} \leq |x|\underbrace{\left(\frac{|y|}{|x|+|y|}\right)}_{\leq 1} \leq |x| \leq \delta \leq \epsilon$$

$$\Longrightarrow \boxed{\delta \leq \epsilon}$$ بنابراین حد موجود است.

Subject

Date

تمرین: در خصوص پیوستگی توابع زیر بحث کنید $(x,y)\neq(0,0)$

a) $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & \\[2ex] 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

چون تابع به صورت کسری از توابع پیوسته است در همه نقاط غیر از مبدا پیوسته است، باید بررسی کنیم در تمام نقاط $\mathbb{R}^2$

حال در نقطه $(0,0)$ پیوسته باشد

$$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0 : 0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta \Rightarrow \left|\frac{x^2y}{x^4+y^2}\right|\leq\epsilon$$

$$\Rightarrow \frac{x^2y}{x^4+y^2}\leq\epsilon \Rightarrow \tfrac{1}{2}\leq\epsilon \Rightarrow \epsilon\geq\tfrac{1}{2}\ \times$$

$\leq \tfrac{1}{2}$

برای مثال $\epsilon=\tfrac14$ در نظر بگیریم

$\Rightarrow \tfrac14\geq\tfrac12\ \times$ تناقض

بنابراین این تابع در نقطه $(0,0)$ پیوسته نیست

c) $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin^3(x-y)}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0 : 0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta \Rightarrow \left|\frac{\sin^3(x-y)}{x^2+y^2}\right|<\epsilon$$

$$\sin^3(x-y)=\tfrac14\sin3(x-y)+\tfrac34\sin(x-y)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2+y^2}\left(\tfrac14\sin3(x-y)+\tfrac34\sin(x-y)\right)<\epsilon$$

Subject
Date

$$\Longrightarrow \; < \frac{\delta}{3(x^2y^2+1)} \longrightarrow \frac{\delta}{3y^2} < \epsilon \longrightarrow \delta^2 < \frac{\delta}{3\epsilon} \longrightarrow \delta < \sqrt{\frac{\delta}{3\epsilon}}$$

بنابراین در نقطه (۰،۰) پیوسته است اما چون در تمام نقاط $\mathbb{R}^2$ پیوسته باشد

$$VI)\; f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin x - \sin y}{x-y} & x \neq y \\ 1 & x = y \end{cases}$$

* مانند مثال صفحه قبل
با ... ناحیه $y > x$ و $x < y$

و $x = y$ ... * روش حل زیر درست است اما کامل نیست در شرایط دو ... نگرفته *

[illegible]

① زیرا ... [illegible] ... $y - x$ ...

② ابتدا ... [illegible] ... داشت:

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{\sin x - \sin y}{x-y} \qquad \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}}{\frac{x-y}{2}}$$

$$= \lim \frac{\sin\frac{x-y}{2}}{\frac{x-y}{2}} \times \cos\frac{x+y}{2} = \cos y$$

چون ... [illegible] ... 1 ... [illegible] ... پیوسته نیست.

$$h(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\sin y}{x^2+y^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

مسلماً در فضای $\mathbb{R}^2$ پیوسته است به جز احتمالاً $x = 0$ که باید بررسی شود.

$$\forall \epsilon > 0 .\ \exists \delta > 0 .\ \sqrt{x^2+y^2} < \delta \Longrightarrow \left|\frac{x\sin y}{x^2+y^2}\right| < \epsilon$$

$$\Longrightarrow \frac{|x||\sin y|}{x^2+y^2} < \epsilon \Longrightarrow \frac{|x|}{x^2+y^2} < \epsilon \qquad \frac{1}{\delta} < \epsilon \longrightarrow \delta < \frac{1}{\epsilon}$$

بنابراین پیوسته است.

مشتقات جزئی: اگر f تابعی از دو متغیر x و y باشد آنگاه مشتقات جزئی f نسبت به x و y به صورت زیر تعریف

$$f_x(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$

$$f_y(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$$

خواهند شد: * مشروط براینکه ۲ حد مقابل موجود و متناهی باشند *

* می توان تعریف مشتقات جزئی تابع $f(x,y)$ را به صورت زیر داد

$$f_x(x_1,y_1)=\lim_{x\to x_1}\frac{f(x,y_1)-f(x_1,y_1)}{x-x_1}$$

$$f_y(x_1,y_1)=\lim_{y\to y_1}\frac{f(x_1,y)-f(x_1,y_1)}{y-y_1}$$

* مشروط براینکه حدود موجود باشند گوئیم تابع $f(x,y)$ در نقطه (x_1,y_1) مشتق پذیر است *

$$\begin{cases} y=y_1\\ z=f(x,y)\end{cases}$$

تعبیر هندسی: می توان این گونه مشتقات جزئی را تعبیر کرد که شیب خط مماس بر منحنی معادلات

نقطه $(x_1,y_1,f(x_1,y_1))$ یعنی P برابر است با $f_x(x_1,y_1)$ و به طور مشابه $f_y(x_1,y_1)$ نیز تعبیر هندسی داشت

شیب خط مماس بر منحنی به معادله $\begin{cases} x=x_1\\ f(x,y)=z\end{cases}$ در نقطه P برابر است با $f_y(x_1,y_1)$.

تذکر: وجود مشتقات جزئی یک تابع چند متغیره دلیلی بر پیوستگی آن تابع در آن نقطه وجود مشتق

نمی باشد. اگر $f_x(x_1,y_1)=f_y(x_1,y_1)=$ موجود باشد

از این رابطه نتیجه نمی شود که $f(x,y)$ در (x_1,y_1) پیوسته ~~قدرمطلق~~ باشد.

Subject
Date

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = D_{xy} f$$

* مشتق دوم است که یعنی ابتدا نسبت به x و سپس نسبت به y مشتق گرفته می‌شود

مشتق‌های مراتب بالاتر

* ۲ مشتق مخلوط ...

$$\begin{cases} f_{xy}(x,y) = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{f_x(x,y+\Delta y) - f_x(x,y)}{\Delta y} = \lim\limits_{y \to y_1} \dfrac{f_x(x_1,y) - f_x(x_1,y_1)}{y - y_1} \\ f_{yx}(x,y) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f_y(x+\Delta x,y) - f_y(x,y)}{\Delta x} = \lim\limits_{x \to x_1} \dfrac{f_y(x,y_1) - f_y(x_1,y_1)}{x - x_1} \end{cases}$$

* مشروط بر اینکه حدود بالا موجود باشد *

نکته: در حالت کلی مشتقات جزئی مختلط f_{xy} و f_{yx} برابر نیستند اما طبق قضیه زیر شرط کافی برای تساوی این مشتقات این است که اگر تابع f و f_x ، f_y ، f_{xy} و f_{yx} در $B((x_1,y_1),r)$ تعریف شده و f_{yx} در B پیوسته باشد، همچنین f_{xy} و f_{yx} در B موجود باشند. آنگاه:

$$f_{xy}(x_1,y_1) = f_{yx}(x_1,y_1)$$

مشتق‌پذیری: اگر f در x_1 مشتق‌پذیر باشد آنگاه f در x_1 برابر است با:

$$\Delta f(x_1) = f(x_1+\Delta x) - f(x_1) = f'(x_1)\Delta x + \lambda \Delta x \quad *$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \lambda = 0 \quad *$$

که در آن λ تابعی از Δx بوده و

همچنین f تابعی ۲ متغیره باشد $f(x,y)$ را در نقطه (x_1,y_1) خواهیم داشت:

$$\Delta f(x_1,y_1) = f(x_1+\Delta x, y_1+\Delta y) - f(x_1,y_1) \quad \checkmark$$

Date ۷

حال می‌توان به تعریف جامعی از مشتق پذیری تابع ۲ متغیره $f(x,y)$ برسیم

* هنگامی که تابع ۲ متغیره f در نقطه (x_1,y_1) را بتوان به صورت زیر نمایش داد

$$\Delta f(x_1,y_1) = f_x(x_1,y_1)\Delta x + f_y(x_1,y_1)\Delta y + \Delta x\,\lambda_1(\Delta x,\Delta y) + \Delta y\,\lambda_2(\Delta x,\Delta y)$$

به طوری که

$$\begin{cases} \lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \lambda_2(\Delta x,\Delta y) = 0 \\ \lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \lambda_1(\Delta x,\Delta y) = 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

* آنگاه گوییم تابع f در نقطه (x_1,y_1) مشتق پذیر است *

مثال) نشان دهید تابع مقابل در نقطه $(0,0)$ مشتق پذیر است؟

$$f(x,y) = |xy|^4$$

$$f_x(x,y) = f_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = 0$$

$$\Delta f(0,0) = \Delta x\, f_x(0,0) + \Delta y\, f_y(0,0) + \Delta x\,\lambda_1(\Delta x,\Delta y) + \Delta y\,\lambda_2(\Delta x,\Delta y)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \Delta x\,\lambda_1(\Delta x,\Delta y) = \frac{1}{3}|\Delta x\Delta y|^4 \Longrightarrow \lambda_1 = \frac{1}{3\Delta x}|\Delta x\Delta y|^4 \;* \\ \Delta y\,\lambda_2(\Delta x,\Delta y) = \frac{2}{3}|\Delta x\Delta y|^4 \Longrightarrow \lambda_2 = \frac{2}{3\Delta y}|\Delta x\Delta y|^4 \;* \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \lambda_1 = 0 \\ \lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \lambda_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

* بنابراین تابع فوق مشتق پذیر است *

Subject
Date

قضیه: اگر تابع ۲ متغیره $f(x,y)$ در نقطه (x_1,y_1) مشتق پذیر باشد آنگاه در این نقطه پیوسته است

و اگر تابع $f(x,y)$ در نقطه (x_1,y_1) پیوسته نباشد در نقطه (x_1,y_1) مشتق پذیر نخواهد بود.

اثبات) $f(x_1+\Delta x, y_1+\Delta y) - f(x_1,y_1) = \Delta x f_x(x_1,y_1) + \Delta y f_y(x_1,y_1)$

$+ \lambda_1 \Delta x + \lambda_2 \Delta y$

مقدار ثابت   مقدار ثابت

$$\Longrightarrow f(x_1+\Delta x, y_1+\Delta y) = f(x_1,y_1) + \Delta x f_x(x_1,y_1) + \Delta y f_y(x_1,y_1) + \lambda_1 \Delta x + \lambda_2 \Delta y$$

می‌دانیم $\Rightarrow \lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \lambda_1 = 0 = \lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \lambda_2$

$$\rightarrow \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} f(x_1+\Delta x, y_1+\Delta y) = f(x_1,y_1) + 0 + 0 + 0 + 0$$

تغییر متغیر: $\begin{cases} x_1+\Delta x = x \\ y_1+\Delta y = y \end{cases} \Longrightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(x_1,y_1)} f(x,y) = f(x_1,y_1)$ ∎.

تابع پیوسته است.

مثال) نشان دهید تابع $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0) \text{ و} \\ 0 & (x,y)=(0,0) \text{ و} \end{cases}$ نشان دهید در این تابع در $(0,0)$

$$f_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{|x|}$$ مشتق پذیر است.

$=$ کراندار $\times$ صفر $= 0$

Subject
Date

$$f_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0} y\sin\frac{1}{|y|}=$$ صفر = کراندار × صفر

$$\Delta f(0,0)=(\Delta x^2+\Delta y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\Delta x f_x(0,0)+\Delta y f_y(0,0)+$$

$$+\underbrace{(\Delta x)^2\sin\frac{1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}}_{\Delta x\,\lambda_1(\Delta x,\Delta y)}+\underbrace{(\Delta y)^2\sin\frac{1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}}_{\Delta y\,\lambda_2(\Delta x,\Delta y)}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1=\Delta x\sin\dfrac{1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\Rightarrow \lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\lambda_1=0\\[2ex] \lambda_2=\Delta y\sin\dfrac{1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\Rightarrow \lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\lambda_2=0\end{cases}$$

بنابراین تابع مشتق پذیر است

تذکر: اگر تابع دو متغیر $f(x,y)$ در نقطه (x_1,y_1) پیوسته باشد و $f_x(x_1,y_1)$ و $f_y(x_1,y_1)$ معلوم باشند آنگاه نمی‌توان نتیجه گرفت که تابع f در (x_1,y_1) مشتق پذیر است *

قضیه: اگر تابع f در $B((x_1,y_1),r)$ تعریف شده باشد و دارای مشتقات جزئی (f_x، f_y) باشد و اگر مشتقات جزئی در نقطه (x_1,y_1) پیوسته باشند آنگاه تابع f در نقطه (x_1,y_1) مشتق پذیر است.

Subject

Date

* امکان دارد تابعی در نقطه (x_0,y_0) مشتق پذیر باشد اما مشتقات نسبی آن در این نقطه پیوسته نباشند *

✓ مثال) نشان دهید $f(x,y)=3xy^2-4x^2+y^2$ در نقطه $(2,1)$ مشتق پذیر است؟

$f_x(x,y)=3y^2-8x$ بنابراین چون مشتقات نسبی این تابع چندجمله‌ای می‌باشند

$f_y(x,y)=6xy+2y$ و می‌دانیم چندجمله‌ای‌ها در فضای $\mathbb{R}^n$ پیوسته هستند بنابراین

طبق قضیه قبل چون مشتقات نسبی پیوسته هستند و موجود پس شرط کافی برای مشتق پذیری $f(x,y)$ برقرار است.

✓ مثال) ثابت کنید تابع زیر مشتق پذیر است؟

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$f_x(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy^2(x^2+y^2)-2x(x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} & ;\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ;\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y)=f(0,0)\qquad \forall\epsilon>0\ \exists\delta>0\ \sqrt{x^2+y^2}<\delta\Rightarrow\left|\frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}\right|<\epsilon$$

$$\Longrightarrow |x|\underbrace{\frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}}_{\leq 1}<\epsilon\Longrightarrow |x|<\epsilon\qquad\longleftarrow\delta\leq\epsilon\ ✓$$

* بنابراین لذا پیوسته است در $(0,0)$

$$f_y(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2yx^4}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_y(x,y) = f(0,0) \qquad \forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} < \delta \Rightarrow \left| \frac{2yx^4}{(x^2+y^2)^2} \right| < \epsilon$$

$$\Rightarrow \cancel{2}|y| \underbrace{\frac{2x^4}{(x^2+y^2)^2}}_{\leq 1} < |y| < \epsilon \longleftarrow \delta \leq \epsilon \ \checkmark$$

مشتق پذیر

بنابراین چون $f_x(0,0)$ و $f_y(0,0)$ شرایط پیوسته بودن بین تابع $f(x,y)$ در $(0,0)$ نیز است.

مثال) مطلوبست کلیه مشتقات جزئی ذکر شده در هر یک از مثال زیر.

✓ a) $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$ $\qquad f(x,y) = x\ln(x+y)$

طبق اشتراک $f(x,y)$ نسبت به y مشتق می‌گیریم و سپس نسبت به x از $f_y(x,y)$ دوبار مشتق می‌گیریم

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{x+y} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{y}{(x+y)^2} \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial^2 x \partial y} = \frac{-2(x+y)y}{(x+y)^4}$$

✓ b) $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$ $\qquad f(x,y,z) = e^{xyz}$

طبق اشتراک $f(x,y,z)$ ابتدا نسبت به z و سپس نسبت به y و بعد نسبت به x مشتق می‌گیریم

$$\frac{\partial f}{\partial z} = e^{xyz} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = e^{xyz} \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = e^{xyz}$$

غلط $\qquad \dfrac{\partial^n f}{\partial x^n \partial y^n \partial z^n} = e^{xyz}$

Subject ✓
Date

* مشتق نسبی از توابع ضمنی :

اگر $f(x,y,z)=0$ ، z تابعی ضمنی از متغیرهای x و y باشد آنگاه خواهیم داشت :

$$z_x = \frac{-f_x}{f_z} \qquad z_y = \frac{-f_y}{f_z} \qquad (f_z \neq 0)$$

قاعده زنجیره‌ای : اگر u تابعی مشتق‌پذیر از دو متغیر x و y باشد یعنی $u=f(x,y)$ و $x=F(r,s)$ و $y=G(r,s)$ همچنین $\frac{\partial x}{\partial r}$ ، $\frac{\partial x}{\partial s}$ ، $\frac{\partial y}{\partial r}$ ، $\frac{\partial y}{\partial s}$ موجود باشند آنگاه :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial r} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial r} & * \checkmark \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial s} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial s} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial s} & * \checkmark \end{cases}$$

مشتق کل : اگر u تابع مشتق‌پذیری از دو متغیر x و y و دو متغیرهای x و y توابع مشتق‌پذیری از متغیر t باشند آنگاه u تابعی از متغیر t است .

$$\frac{du}{dt} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right) \quad \checkmark$$

مثال : اگر a و b اضلاع مثلثی باشند و α زاویه بین آنها باشد مساحت مثلث برابر است با :

$$S = \frac{1}{2} ab \sin\alpha$$

قضیه : اگر تابع $f(x,y)$ همگن از درجه p باشد و مشتقات جزئی مرتبه اول آن پیوسته باشند آنگاه :

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = p f(x,y) \quad *$$

Subject :

Year : Month . Date .

مثال) با استفاده از قاعده زنجیری مشتق $f(x,y) = xy$ را نسبت به t در نقطه $t = \frac{\pi}{2}$ بیابید $y = \sin t,\ x = \cos t$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = y(-\sin t) + x(\cos t)$$

$$= -\sin^2 t + \cos^2 t = \cos 2t \Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = -1$$

مثال) مطلوبست محاسبه $f_x(x,1)$ اگر

$$f(x,y) = x + (y-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}$$

$$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \leftarrow \text{(یادآوری)}$$

$$f_x(x,1) = \frac{\partial f}{\partial x} = 1 + (y-1)\frac{u_x}{\sqrt{1-u^2}} \qquad u = \sqrt{\frac{x}{y}}$$

$$f_x(x,1) = 1 + \underbrace{(1-1)\frac{u_x}{\sqrt{1-u^2}}}_{\text{صفر}} = 1 \Rightarrow \boxed{f_x(x,1) = 1}$$

نکته: یادآوری یک فرمول مثلثاتی که پرکاربرد در این فصل

$$\sin 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$$

Subject:
Year. Month. Date

تمرین — با استفاده از تعریف ثابت کنید

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{y^3+xz^2}{x^2+y^2+z^2} = 0$$

$$\forall \epsilon>0 \ \exists \delta>0 \Longrightarrow \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2} < \delta \ , \ \left| \frac{y^3+xz^2}{x^2+y^2+z^2} \right| < \epsilon \right)$$

$$\Longrightarrow |y| \underbrace{\frac{y^2}{x^2+y^2+z^2}}_{\leq 1} + |x||z| \underbrace{\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}}_{\leq 1} < \epsilon \qquad \text{یعنی} \begin{cases} |x|<\delta \\ |y|<\delta \\ |z|<\delta \end{cases}$$

$$\Longrightarrow |y|+|x||z| < \epsilon \longrightarrow \delta+\delta^2 < \epsilon \longrightarrow \delta^2+\delta+\frac{1}{4} < \epsilon+\frac{1}{4}$$

$$\longrightarrow \left(\delta+\frac{1}{2}\right)^2 < \epsilon+\frac{1}{4} \longrightarrow \delta+\frac{1}{2} < \sqrt{\epsilon+\frac{1}{4}} \longrightarrow \boxed{\delta < \sqrt{\epsilon+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}}$$

* (استدلال) δ که بر حسب بالا به ε بدون نقطه (۰،۰،۰) معلوم خواهد بود *

$$\lim_{(x,y)\to(2,4)} (x^2+2x-y) = 4$$

$$\forall \epsilon>0 \ \exists \delta>0 \Longrightarrow \sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2} < \delta \longrightarrow |x^2+2x-y-4| < \epsilon$$

$$= |x^2-2x+4x-y+4-8| = |x(x-2)-(y-4)+4(x-2)| < \epsilon$$

P4PCO

Subject:
Year: Month. Date.

$|x-2|<\delta$ فرض کنید: $\delta \le 1 \Rightarrow |x-2|<1 \Rightarrow |x|<3$

$|y-4|<\delta$

$\Rightarrow |x||x-2| - |y-4| + 4|x-2| = 3\delta - \delta + 4\delta = 6\delta < \epsilon$

$\boxed{\delta < \frac{\epsilon}{6}}$ * بنابراین بازای $\epsilon>0$ ، $\delta=\min\{1,\frac{\epsilon}{6}\}$ این عدد مطلوب می‌باشد *

$\lim\limits_{(x,y)\to(3,-1)} (x^2+y^2-4x+2y) = -4$ ✓

$\forall \epsilon>0 \ \exists \delta>0 \longrightarrow \sqrt{(x-3)^2+(y+1)^2}<\delta \ ; \ |x^2+y^2-4x+2y+4|<\epsilon$

$\Rightarrow |x(x-3)+y(y+1)-(x-3)+(y+1)| < \epsilon$

$\Rightarrow \cancel{|x||x-3|+|y||y+1|-|x-3|+|y+1|}$

$\Rightarrow |(x-3)(x-1)| + (y+1)^2 < |x-1||x-3| + |y+1|^2 < \epsilon$

$\Rightarrow$ فرض $\delta \le 1 \Rightarrow |x-3| \le 1 \Rightarrow |x| \le 4 \longrightarrow |x-1| \le 3$

$\Rightarrow 3\delta+\delta^2<\epsilon \longrightarrow \delta^2+3\delta+\frac{9}{4} < \epsilon+\frac{9}{4}$

$\longrightarrow (\delta+\frac{3}{2})^2 < \epsilon+\frac{9}{4} \longrightarrow \delta < \sqrt{\epsilon+\frac{9}{4}} - \frac{3}{2}$

بنابراین $\forall \epsilon > 0$ ، $\delta = \min\left\{1, \sqrt{\epsilon + \frac{9}{4}} - \frac{3}{2}\right\}$

این حد معتبر می‌باشد

تمرین – در خصوص پیوستگی توابع زیر در نقطه $(0,0)$ بحث کنید.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + x^2 + y^2 + y^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f(0,0) = 1 \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1$$

$$\Rightarrow \forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} < \delta \Rightarrow \left| \frac{x^2+x^3+y^2+y^3}{x^2+y^2} - 1 \right| < \epsilon$$

$$\Rightarrow \left| \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \right| < \epsilon \Longrightarrow \left| \frac{(x+y)(x^2 - |x||y| + y^2)}{(x^2+y^2)} \right| < \epsilon$$

$$|x+y| \left(\frac{x^2 - |x||y| + y^2}{x^2+y^2} \right) \leq |x| + |y| \qquad 2\delta \leq \epsilon \rightarrow \delta \leq \frac{\epsilon}{2}$$

$$\leq 1$$

* بنابراین حد موجود است در نقطه صفر و برابر ۱ است پس تابع فوق در نقطه $(0,0)$ پیوسته می‌باشد *

$$* \quad f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^{2}y}{x^{2}+y^{2}e^{x}} & ;\ (x,y)\neq(0,0)\\[2mm] 0 & ;\ (x,y)=(0,0)\end{cases} \qquad \times ?$$

$$f(0,0)=0 \Rightarrow \forall \epsilon>0\ \exists \delta>0 \Rightarrow \sqrt{x^{2}+y^{2}}<\delta \Rightarrow \left|\frac{x^{2}y}{x^{2}+y^{2}e^{x}}\right|<\epsilon$$

می‌دانیم $e^{x}>0$ $\Rightarrow$ پس e^{x} را [illegible] $\Rightarrow x^{2}+y^{2}e^{x}>x^{2}$

[illegible] x^{2} [illegible] e [illegible]

$$\Rightarrow |y|\,\frac{x^{2}}{x^{2}+y^{2}e^{x}}<\epsilon \Rightarrow \delta<\epsilon$$

مانند تمرین قبل [illegible]

$$* \quad f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^{2}y}{x^{2}y^{2}+(y-x)^{2}} & ;\ (x,y)\neq(0,0)\\[2mm] 0 & ;\ (x,y)=(0,0)\end{cases} \qquad \checkmark$$

$$f(0,0)=0 \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$$

$$\forall \epsilon>0\ \exists \delta>0 \Rightarrow \sqrt{x^{2}+y^{2}}<\delta,\ \left|\frac{x^{2}y}{x^{2}y^{2}+(y-x)^{2}}\right|<\epsilon$$

$$(y-x)^{2}\geq 0 \Rightarrow x^{2}y^{2}+(y-x)^{2}\geq 0$$

$$\Rightarrow (xy)^{2}\geq xy \Rightarrow x^{2}y^{2}+(y-x)^{2}\geq xy$$

$$\Rightarrow \frac{xy}{x^{2}y^{2}+(y-x)^{2}}\leq 1$$

Subject :
Year . Month . Date .

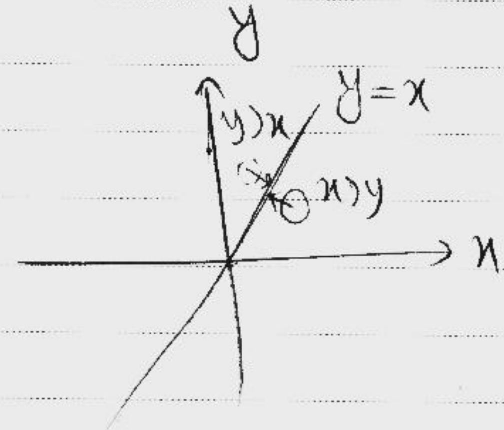
$$\Rightarrow |x| \underbrace{\left| \frac{xy}{x^2y^2+(y-x)^2} \right|}_{\leq 1} < \epsilon \Rightarrow (\delta < \epsilon)$$

* بنابراین تابع فوق پیوسته می‌باشد. *

* تمرین) پیوستگی توابع زیر را بررسی کنید؟ ✓

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} & ; \ x \neq y \\ 0 & ; \ x = y \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} & ; \begin{cases} x>y \\ x<y \end{cases} \\ 0 & ; \ x=y \end{cases}$$



فرض $(x_1, y_1) \in x>y \Rightarrow \begin{cases} f(x_1,y_1) = \dfrac{x_1+y_1}{x_1-y_1} \\ \lim\limits_{(x,y)\to(x_1,y_1)} f(x,y) = \dfrac{x_1+y_1}{x_1-y_1} \end{cases}$ ✓

در فضای $x>y$ به خط $y=x$ نزدیک نشوم

فرض $(x_1, y_1) \in y>x \Rightarrow \begin{cases} f(x_1,y_1) = \dfrac{x_1+y_1}{x_1-y_1} \\ \lim\limits_{(x,y)\to(x_1,y_1)} f(x,y) = \dfrac{x_1+y_1}{x_1-y_1} \end{cases}$ ✓

و شرط و فرض سوم این است که هر نقطه‌ای که بتوان روی خط $y=x$ باشد حد مقطعی ناحیه $x>y$ و $y>x$

و حد مقطعی ناحیه $x>y$ و $y>x$ یکسان داشته باشند پس داریم

$$\forall (x_1,y_1),\ y=x \quad = \begin{cases} f(x_1,y_1)=0 \\ \begin{cases} \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(x_1,y_1)\\ (x_1,y_1)\,;\ x>y}} f(x,y) = \dfrac{x_1+y_1}{x_1-y_1} \\[2ex] \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(x_1,y_1)\\ (x_1,y_1)\,;\ y>x}} f(x,y) = \dfrac{x_1+y_1}{x_1-y_1} \end{cases} \end{cases}$$

* بنابراین در این شرط حد موجود است اما و مقدار برابر نیست پس در حالت کلی تابع پیوسته نخواهد بود. ✓

$$* \quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4y^2}{x^9+y^4} & (x,y)\neq(0,0) \\[2ex] 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

این تابع چون تابعی گویا و در فضای $\mathbb{R}^2$ تعریف شده است در همه نقاط این فضا به جز احتمالاً نقطه $(0,0)$ پیوسته است. که در این نقطه باید پیوستگی بررسی شود

Subject:
Year. Month. Date.

$$f(0,0)=0 \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4y^2}{x^4+y^6} = f(0,0)$$

فرض کنید از مسیر $y=mx$ $\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,mx)} \dfrac{m^2x^6}{(2+m^6)x^6} = \dfrac{m^2}{2+m^6}$ بنابراین مقدار حد به m بستگی دارد

پس حد وجود ندارد پس تابع پیوسته نمی باشد.

$$f(x,y,z)=\begin{cases} \dfrac{3xyz}{x^2+y^2+z^2} & (x,y,z)\neq(0,0,0) \\ 0 & (x,y,z)=(0,0,0) \end{cases}$$

در تمام $\mathbb{R}^3$ پیوسته است بجز احتمالاً در $(0,0,0)$.

$$f(0,0,0)=0$$

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z)=0 \Rightarrow \forall \epsilon>0\ \exists \delta>0 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2+z^2}<\delta$$

$$\Rightarrow \left|\frac{3xyz}{x^2+y^2+z^2}\right| < \epsilon$$

$$\Rightarrow 3\frac{|x||z||y|}{x^2+y^2+z^2} \leq 3\frac{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{(x^2+y^2+z^2)} < 3\delta$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta \leq \frac{\epsilon}{3}}$$ حد وجود دارد

* پس تابع پیوسته است *

P&PCO

Subject
Date

$$* \quad f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{xy^2 z}{x^2+y^2+z^2} & ; \ (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & ; \ (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases} \quad \checkmark$$

در تمام فضای $\mathbb{R}^3$ پیوسته است (چون مخرج آن فقط در نقطه صفر میشود) بنابراین احتمالاً در نقطه صفر

$$f(0,0,0) = 0 \qquad \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z) = 0$$

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2+z^2} < \delta \Rightarrow \left| \frac{xy^2 z}{x^2+y^2+z^2} \right| < \epsilon$$

$$\Rightarrow |x||z| \underbrace{\frac{y^2}{x^2+y^2+z^2}}_{\leq 1} \leq |x||z| \qquad \delta^2 \leq \epsilon \Rightarrow \boxed{\delta \leq \sqrt{\epsilon}}$$

بنابراین حد موجود است. و تابع پیوسته خواهد بود.

$$* \quad f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)^2(y-1)^2}{(x-1)^2+(y-1)^2} & ; \ (x,y) \neq (1,1) \\ 0 & ; \ (x,y) = (1,1) \end{cases} \quad \checkmark$$

* این تابع در تمام فضای $\mathbb{R}^2$ پیوسته می‌باشد. فقط احتمالاً در نقطه $(1,1)$ که باید بررسی شود.

$$f(1,1) = 0 \qquad \lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y) = \overset{?}{0}$$

$$\forall \epsilon > 0 \ , \ \exists \delta > 0 \quad \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} < \delta \Rightarrow \left| \frac{(x-1)^2(y-1)^2}{(x-1)^2+(y-1)^2} \right| < \epsilon$$

Subject

Date

$$\Rightarrow \frac{(x-1)^2(y-1)^2}{(x-1)^2+(y-1)^2} < \epsilon \Rightarrow (x-1)^2 \frac{(y-1)^2}{(x-1)^2+(y-1)^2} < \epsilon$$

$$\underbrace{(x-1)}_{a}^2 + \underbrace{(y-1)}_{b}^2 > (y-1)^2 \Rightarrow \frac{(y-1)^2}{(x-1)^2+(y-1)^2} = \frac{b^2}{a^2+b^2} \leq 1$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 \leq \epsilon \qquad , \qquad \delta^2 \leq \epsilon \Rightarrow \boxed{\delta \leq \sqrt{\epsilon}}$$

* بنابراین از طرف فوق مطلب ثابت بوده و تابع پیوسته می باشد *

تمرین: اگر $u = x f\left(\frac{x}{y}\right) + y f\left(\frac{y}{x}\right)$ و f تابعی مشتق پذیر باشد مطلوب است:

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = ?$$

فرض:
$$\begin{cases} \frac{x}{y} = v \\ \frac{y}{x} = d \end{cases} \Rightarrow u = x f(v) + y f(d)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = f(v) + x \frac{\partial u}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial d} \frac{\partial d}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = x \frac{\partial u}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + f(d) + y \frac{\partial u}{\partial d} \frac{\partial d}{\partial y} \end{cases}$$

Subject
Date

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = f(v) + x\dfrac{\partial u}{\partial v}\,\dfrac{1}{y} + y\dfrac{\partial u}{\partial d}\left(\dfrac{-y}{x^2}\right) \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y} = x\dfrac{\partial u}{\partial v}\left(\dfrac{-x}{y^2}\right) + f(d) + y\dfrac{\partial u}{\partial d}\left(\dfrac{1}{x}\right) \end{cases}$$

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = x\left[f\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x}{y}\frac{\partial u}{\partial v} - \frac{y^2}{x^2}\frac{\partial u}{\partial d}\right] + y\left[-\frac{x^2}{y^2}\frac{\partial u}{\partial v} + f\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x}\frac{\partial u}{\partial d}\right]$$

$$= x f\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x^2}{y}\frac{\partial u}{\partial v} - \cancel{\frac{y^2}{x}\frac{\partial u}{\partial d}} - \cancel{\frac{x^2}{y}}\frac{\partial u}{\partial v} + y f\left(\frac{y}{x}\right) + \cancel{\frac{y^2}{x}\frac{\partial u}{\partial d}}$$

$$= x f\left(\frac{x}{y}\right) + y f\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = x f\left(\frac{x}{y}\right) + y f\left(\frac{y}{x}\right)}$$

راه حل دوم (تستی) : چون تابع f همگن از درجه یک است می توان نوشت

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = p f(x,y) = 1\left(x f\left(\frac{x}{y}\right) + y f\left(\frac{y}{x}\right)\right) \quad \checkmark$$

Subject

Date

تمرین) اگر $u=f(x+y+z\,,\,x^2+y^2+z^2)$ تابعی مشتق پذیر باشد مطلوب است:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\ ?$$

فرض $\Rightarrow \begin{cases} x+y+z=v \\ x^2+y^2+z^2=g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial g}\dfrac{\partial g}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial g}\dfrac{\partial g}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial z}=\dfrac{\partial u}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial z}+\dfrac{\partial u}{\partial g}\dfrac{\partial g}{\partial z} \end{cases}$

$$\rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial v}+2x\dfrac{\partial u}{\partial g} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial v}+2y\dfrac{\partial u}{\partial g} \\ \dfrac{\partial u}{\partial z}=\dfrac{\partial u}{\partial v}+2z\dfrac{\partial u}{\partial z} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial v^2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial g^2}\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial u^2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial g^2}\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial v^2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial g^2}\dfrac{\partial^2 g}{\partial z^2} \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0+2\frac{\partial u}{\partial g}+2x\frac{\partial^2 u}{\partial g^2}(2)=2\frac{\partial u}{\partial g}+4x\frac{\partial^2 u}{\partial g^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0+2\frac{\partial u}{\partial g}+2y\frac{\partial^2 u}{\partial g^2}(2)=2\frac{\partial u}{\partial g}+4y\frac{\partial^2 u}{\partial g^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0+2\frac{\partial u}{\partial g}+2z\frac{\partial^2 u}{\partial g^2}(2)=2\frac{\partial u}{\partial g}+4z\frac{\partial^2 u}{\partial g^2}$$

Subject
Date

تمرین) با فرض آنکه $z = xy + xe^{y/x}$ درستی رابطه زیر را تحقیق کنید!

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y + e^{y/x} + \left(\frac{-xy}{x^2}\right)e^{y/x} = y + e^{y/x} - \frac{y}{x}e^{y/x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x + e^{y/x}$$

$$\Longrightarrow x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + xe^{y/x} - \cancel{y}e^{y/x} + yx + \cancel{y}e^{y/x}$$

$$= xy + \underbrace{xe^{y/x} + yx}_{z} = xy + z$$

تمرین) نشان دهید تابع $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$ در مبدا مشتقات جزئی دارد ولی f در (۰,۰) مشتق‌پذیر نباشد!

$$f_x(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 1$$

$$f_y(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(y,0) - f(0,0)}{y} = 1$$

$$\Delta f(x,y) = \Delta x f_x(x,y) + \Delta y f_y(x,y) + \Delta x \varepsilon_1 + \Delta y \varepsilon_2$$

$$f(0+\Delta x, 0+\Delta y) - f(0,0) = \Delta x + \Delta y + \lambda_1 \Delta x + \lambda_2 \Delta y$$

$$\Rightarrow f(\Delta x, \Delta y) = \Delta x + \Delta y + \lambda_1 \Delta x + \lambda_2 \Delta y$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{(\Delta x)^3 + (\Delta y)^3} = \Delta x + \Delta y + \lambda_1 \Delta x + \lambda_2 \Delta y$$

$$\text{فرض} \begin{cases} \Delta x = \rho \cos\theta \\ \Delta y = \rho \sin\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \rho \sqrt[3]{\cos^3\theta + \sin^3\theta} = \rho\cos\theta + \rho\sin\theta + \rho\lambda_1\cos\theta + \rho\lambda_2\sin\theta$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{\cos^3\theta + \sin^3\theta} = \cos\theta + \sin\theta + \lambda_1\cos\theta + \lambda_2\sin\theta$$

اگر $(\Delta x, \Delta y)$ میل کند آنگاه $\lambda_1 \to 0$, $\lambda_2 \to 0$ و خواهیم داشت؟

$(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{\cos^3\theta + \sin^3\theta} = \cos\theta + \sin\theta$$

* که این رابطه به ازای تمام مقادیر θ برقرار نمی‌باشد.

* بنابراین تابع در مبدأ مشتق‌پذیر نمی‌باشد

تمرین فصل ۱ : معادلات پارامتری تابع برداری $\overrightarrow{R(t)} = (\cosh t)\vec{i} + (\sinh t)\vec{j} + t\vec{K}$

را برحسب طول قوس از نقطه $t=0$ تا نقطه طول t بیابید؟

و همچنین معادلات بردار را در $t=0$ بدست آورید؟

$$x = \int_0^t \sinh t\,dt \longrightarrow x' = \sinh t$$

$$y = \int_0^t \cosh t\,dt \longrightarrow y' = \cosh t$$

$$z = \int_0^t dt \longrightarrow z' = 1$$

$$T(t) = \frac{\vec{j}+\vec{K}}{\sqrt{1+0+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{j}+\vec{K}) \qquad T(t) = \frac{R'(t)}{|R'(t)|}$$

$$R'(t) = (\sinh t)\vec{i} + (\cosh t)\vec{j} + \vec{K}$$

$$T'(t) = \frac{(\sinh t)\vec{i} + (\cosh t)\vec{j} + \vec{K}}{\sqrt{\cosh t^2 + \sinh t^2 + 1^2}} \qquad \overrightarrow{N(t)} = \frac{T'(t)}{|T'(t)|}$$