فصل اول و دوم:

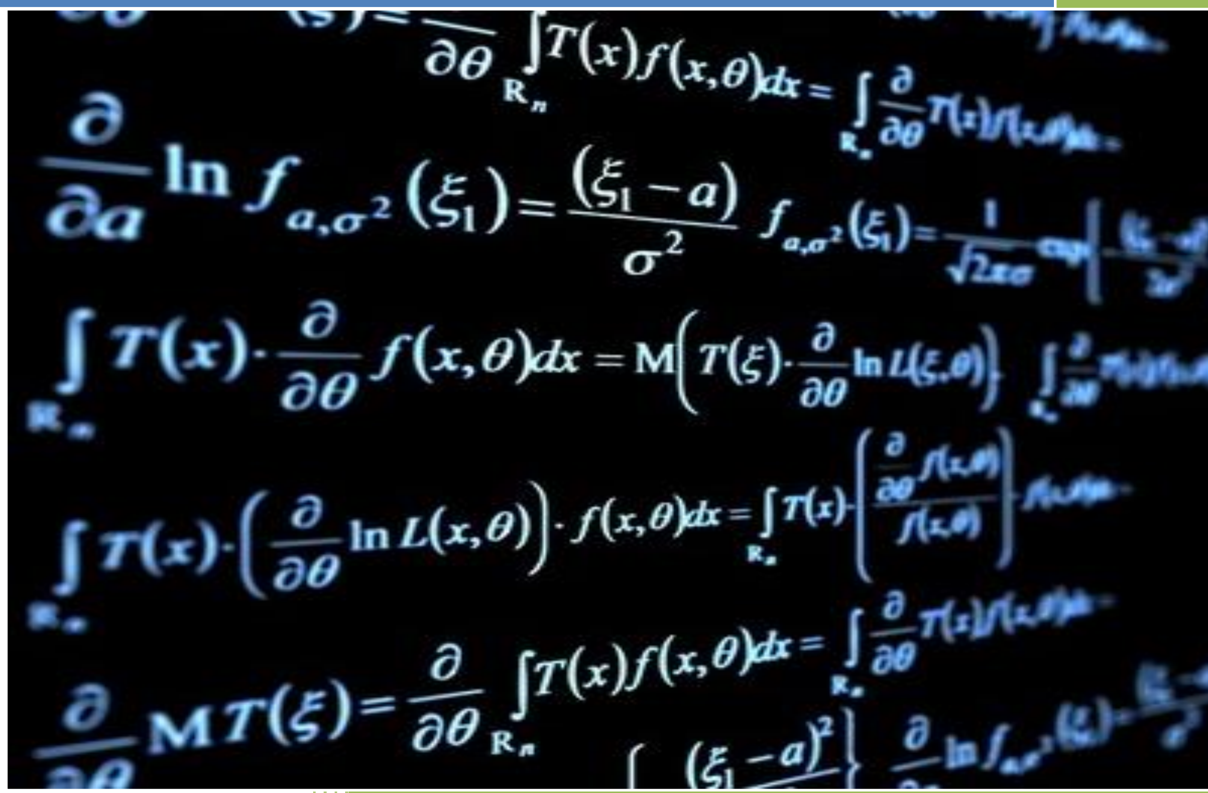
آنالیز برداری

رویه ها و سطوح فضایی

باشگاه مهندسان سمنان

www.sem-eng.com

جزوه ریاضی 2



نویسنده جزوه: ایمان شریعت پناهی

اسکن جزوه: محمدرضا خالصی

استاد مربوطه: دکتر محمود بیدخام

دکتر بهرامی

بنام خدا

آنالیز برداری

* $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ سه تابع حقیقی از متغیر t باشند.

آنگاه معادله $\vec{R}(t)$ را به صورت معادله برداری زیر بیان می کنیم که دامنه آن اشتراک دامنه توابع ذکر شده در بالا می باشد.

$$\vec{R}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k} \quad \checkmark$$

$$D_R = D_f \cap D_g \cap D_h$$

* اگر بتوانیم به نوعی t را از معادلات پارامتری و در نهایت معادله کلی $\vec{R}(t)$ حذف کنیم آنگاه معادله حاصل را یک معادله دکارتی گوئیم.

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}$$

معادلات پارامتری

یادآوری $\Longrightarrow$

$$\sinh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \quad \checkmark$$

$$\cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} \quad \checkmark$$

$$\tanh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} \quad \checkmark$$

* متن یادآوری در مثال کتاب صفحه ۹ کاربرد دارد *

* $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$

$$\begin{cases} \sinh(-x) = -\sinh x \\ \cosh(-x) = \cosh x \end{cases}$$

$$\cosh t \geq 0 = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} \geq 0 \quad \checkmark$$

* اگر یک منحنی به معادلات پارامتری $x=f(t)$ ، $y=g(t)$ ، $z=h(t)$

باشد. بطوریکه f' و g' و h' در فاصله $[a,b]$ پیوسته باشند طول قوس این منحنی

از $(f(a), g(a), h(a))$ تا $(f(b), g(b), h(b))$ برابر است با :

$$L = \int_a^b \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2 + (h'(t))^2}$$

حال فرض کنید یک منحنی در مختصات قطبی باشد تا طول قوس آن را به فرمول

زیر محاسبه می‌کنیم.

$x = r\cos t$ $\quad r = f(\theta)$

$y = r\sin t$

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2}\, d\theta \quad *$$

* تمرینات : صفحه ۲۳

1 -

$$C \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 = \frac{1}{4} z^2 + 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{1}{4}(x^2+y^2)^2 + 1$$

$$z = \frac{1}{4} z^2 + 1 \Rightarrow 4z = z^2 + 4$$

$$\Rightarrow (z-2)^2 = 0 \Rightarrow z = 2$$

$$x^2 + y^2 = 2 \quad \forall z = 2$$

Subject:
Year. Month. Date.

بردارهای یکه مماس، قائم و انحنا:

* اگر تابع برداری $R(t) = f(t)i + g(t)j$ داده شده باشد، منحنی C نمایش این تابع برداری باشد. آنگاه بردار یکه مماس بر منحنی C در نقطه $P(f(t), g(t))$ را با $T(t)$ نمایش داده می‌شود برابر است با:

$$T(t) = \frac{R'(t)}{|R'(t)|}$$

همچنین بردار یکه قائم بر بردار $R(t)$ با $N(t)$ نمایش داده شده به طوریکه:

$$\vec{N}(t) = \frac{T'(t)}{|T'(t)|}$$

* ثابت می‌شود همواره نمایش بردار قائم یکه یعنی همان $\vec{N}(t)$ همواره به طرف تقعر منحنی است.

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dT}{d\phi}\frac{d\phi}{dt} \qquad \frac{dT}{d\phi} \Rightarrow \begin{cases} \vec{N}(t) & \frac{d\phi}{dt} > 0 \\ -\vec{N}(t) & \frac{d\phi}{dt} < 0 \end{cases}$$

$$\vec{N}(t) = \frac{T'(t)}{|T'(t)|} = \frac{\frac{dT}{dt}}{\left|\frac{dT}{dt}\right|}$$

(بنابراین $\vec{N}(t)$ با $T'(t)$ هم‌جهت است)

* $\frac{dT}{d\phi}$ برداری یکه‌ای است عمود بر $\vec{T}(t)$ در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت به اندازه $\frac{\pi}{2}$ *.

* فرض کنید s طول منحنی C از یک نقطه دلخواه بر روی منحنی تا نقطه مورد نظر P باشد.

$$\frac{dT}{ds} = \frac{dT}{d\phi}\frac{d\phi}{ds}$$

s با افزایش t افزایش می‌یابد:

بردار یکه

$$\Rightarrow \left|\frac{dT}{ds}\right| = \left|\frac{dT}{d\phi}\right| * \left|\frac{d\phi}{ds}\right| \rightarrow \left|\frac{dT}{ds}\right| = \left|\frac{d\phi}{ds}\right|$$

اندازه انحنا

* عدد $\left|\frac{d\phi}{ds}\right|$ یعنی میزان تغییر زاویه بردار یکه مماس $\vec{T}(t)$ در نقطه از منحنی نسبت به طول قوس منحنی، را مقدار انحنای منحنی گویند. و بردار $\frac{dT}{ds}$ را بردار انحنای منحنی C در نقطه مفروض نامند

$$\begin{cases} K(t) = \dfrac{dT}{ds} & \text{بردار انحنا} \checkmark \\ K_1(t) = |K(t)| = \left|\dfrac{d\phi}{ds}\right| & \text{مقدار و اندازه انحنا} \checkmark \end{cases}$$

نکته: بردار انحنا برحسب مشتقات براساس t به صورت زیر خواهد شد:

$$\vec{K}(t) = \frac{\frac{dT}{dt}}{|R'(t)|} \qquad \frac{dT}{dt} = T'(t)$$

*

$$K_1(t) = |\vec{K}(t)| = \frac{|D_t T(t)|}{|R'(t)|} \; *$$

$K_1(t)$ مقدار انحنای منحنی C است یا به عبارت دیگر شعاع دایره کمتری باشد*

نکته: اگر $K_1(t)$ مقدار انحنای منحنی C باشد (در نقطه P) و $K_1(t) \neq 0$ آنگاه شعاع انحنای C در نقطه P را با $\rho(t)$ نمایش داده و تعریف میکنیم:

$$\rho(t) = \frac{1}{K_1(t)}$$

نکته: فرض کنید شعاع انحنای C در نقطه P برابر $\rho(t)$ باشد. حال اگر دایره‌ای که مماس بر منحنی در نقطه P و مرکزش بر خطی عمود بر بردار یکه مماس در جهت $\vec{N}(t)$ باشد آنگاه این دایره، دایره بوسان گفته می‌شود.

نکته: اگر معادله منحنی C به صورت پارامتری باشد $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ در مسئله داده شده برای محاسبه شعاع انحنا و مقدار انحنا از چه فرمولی استفاده کنیم؟

$$K_1(t) = \frac{|y''x' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} \qquad \rho(t) = \frac{1}{K_1(t)} \; *$$

نکته: حال اگر معادله پارامتری C به شکل مقابل بود برای محاسبه انحنا از روش زیر استفاده می‌کنیم:

$$C:\begin{cases} y = f(x) \\ x = t \end{cases} \Longrightarrow y = f(t) \qquad x'' = 0 \;\text{و}\; x' = 1$$

$$K_1(t) = \frac{\left|\frac{d^2y}{dt^2}\right|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} \xrightarrow[\text{به جای } x]{t \text{ به جای}} K_1(t) = \frac{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}}$$

نکته: اگر منحنی C به صورت معادله قطبی داده شد برای محاسبه انحنا از فرمول زیر استفاده کنید:

$$C:\; r = f(\theta) \qquad K_1(t) = \frac{\left|r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\left(\frac{d^2r}{d\theta^2}\right)\right|}{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \quad *$$

* محاسبه مرکز دایره بوسان:

فرض کنید مرکز دایره بوسان (x_c, y_c) باشد آنگاه شعاع این دایره ρ باشد و معادله این دایره به صورت:

$$(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2 = \rho^2$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dx}} (x-x_c) + (y-y_c)\frac{dy}{dx} = 0 \qquad (1)$$

حال از عبارت بالا نسبت به x دوباره مشتق می‌گیریم:

$$\xrightarrow{\frac{d}{dx}} 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y\,\frac{d^2y}{dx^2}$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (y-y_c)\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \qquad (2)$$

Subject:
Year. Month. Date.

$$y_c - y = \frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\Rightarrow y_c = y + \frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

به همین روش برای x_c نیز می‌توان انجام داد یعنی $\frac{dx}{dy}$ سری خواهیم داشت:

$$x_c = x - \frac{\frac{dy}{dx}\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}{\frac{d^2y}{dx^2}} \Rightarrow \begin{cases} y_c = y + \dfrac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} \quad * \\[2ex] x_c = x - \dfrac{\frac{dy}{dx}\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}{\frac{d^2y}{dx^2}} \quad * \end{cases}$$

مثال) مطلوب است معادله دایره بوسان منحنی به معادله $y=\ln x$ در نقطه $P(1,0)$ را بدست آورید؟ حل: چون پارامتر x تعیین است پس فرض می‌کنیم $x=t$ و مسأله را حل می‌کنیم و در انتها به جای t، x قرار می‌دهیم:

$x'=1, \quad x''=0$

$y'=\frac{1}{t} \quad y''=\frac{-1}{t^2}$

$$K_1(t) = \frac{|y''x'-y'x''|}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{1}{t^2}}{\left(1+\frac{1}{t^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad K_1(x) = \frac{\frac{1}{x^2}}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\Rightarrow K_1(x) = \frac{1}{(1+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{(2)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow \rho(x) = \sqrt[3]{8}$$ شعاع دایره

$$y_c = y + \frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^{۲}}{\frac{d^{۲}y}{dx}} = \frac{1+1}{-1} = -۲$$

$$x_c = x - \frac{\frac{dy}{dx}\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^{۲}\right)}{\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}} = 1 - \frac{(1+1)}{-1} = 3$$

$A(x_c, y_c) = (۳, -۲)$ معادله دایره $\Rightarrow (x-۳)^{۲}+(y+۲)^{۲} = ۸$

نکته ۸: رئوس بیضی به معادله $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ بیشترین و کمترین انحنا را به ترتیب در محل برخورد بیضی با محور y است یعنی در نقاط $A(0,b)$ و $A'(0,-b)$ و کمترین انحنا در نقطه برخورد بیضی با محور x است یعنی در نقاط $B(a,0)$ و $B'(-a,0)$ خواهد بود.

مؤلفه‌های مماس و قائم شتاب:

* می‌توانیم شتاب یعنی همان بردار شتاب را به صورت ترکیب خطی از مؤلفه‌های قائم و مماس شتاب بنویسیم:

تعریف: فرض کنید که منحنی به معادله $\vec{R}(t)$ باشد و $\vec{T}$, $\vec{N}$ به ترتیب بردارهای یکه مماس و قائم بر منحنی C در نقطه P باشند و s طول قوس منحنی از یک نقطه دلخواه تا P باشد به طوری که s با افزایش t زیاد شود:

$$\vec{a}(t) = a_T\vec{T} + a_N\vec{N}$$

مؤلفه مماسی شتاب — مؤلفه قائم شتاب

$$a_N = K_1\left(\frac{ds}{dt}\right)^{۲} \qquad a_T = \frac{d^{۲}s}{dt^{۲}} \quad *$$

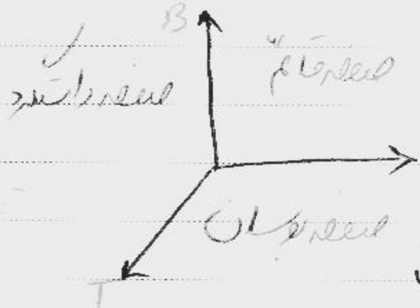
معادل انحنا

می توان اثبات کرد ⇒ $\vec{V}(t) = \vec{T}\,\frac{ds}{dt}$ * بردار سرعت * ✓

معادلات فرنه برای منحنی های 3 بعدی خواهیم داشت ⇒ $K_1 = \frac{|\vec{a}\times\vec{V}|}{|\vec{V}|^3}$ ✓

نکته: برای بدست آوردن معادله صفحه بوسان کافیست بردار نرمال و یک نقطه از آن صفحه داریم

که بردار نرمال آن یعنی $\vec{B}$ از فرمول مقابل بدست می آید. $\vec{B} = \vec{T}\times\vec{N}$



توجه: $\vec{B} = \vec{T}\times\vec{N}$ را بردار قائم اصلی گویند و صفحه ای که شامل بردارهای که بوسان و قائم است صفحه بوسان است.

* برای نوشتن معادله صفحه بوسان نیاز به $\vec{B}$ و یک نقطه از آن صفحه داریم که آن نقطه را می توان از $\vec{T}$ و $\vec{N}$ بدست آورد.

نکته: برای بدست آوردن تاب یک منحنی می توان از فرمول مقابل استفاده کرد. دقت شود تاب برای منحنی معنا دارد. و اگر معادلات پارامتری یا معادلات کامل منحنی هم که به صورت یک صفحه بود نیازی به محاسبه تاب از فرمول نیست چون تاب یک صفحه مسطح همواره صفر است.

$\vec{T} = \left|\frac{dB}{ds}\right|$ تاب منحنی

$$* \; T = \pm \frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{|v\times a|^2}$$

* تاب بعضاً منفی می شود. بنابراین (±) در پشت این فرمول به این معناست که اگر حاصل کسر مقابل منفی شد عبارت را در یک (−) ضرب کرده تا حاصل تاب مثبت بدست آید. ✓

تمرین: منحنی پیچ $\vec{R}(t) = a\cos t\,\hat{i} + a\sin t\,\hat{j} + bt\,\hat{k}$ مفروض است. در نقطه $t = \frac{\pi}{4}$ مطلوب است:

الف) بردارهای یکه مماس، قائم اصلی و قائم دوم

ب) انحنا

ج) معادله صفحه بوسان و صفحه قائم

$$\vec{R}'(t) = -a\sin t\,\hat{i} + a\cos t\,\hat{j} + b\,\hat{k}$$

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{R}'(t)}{|\vec{R}'(t)|} = \frac{(-a\sin t\,\hat{i} + a\cos t\,\hat{j} + b\,\hat{k})}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \vec{T}\left(\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$\vec{T}'(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a\cos t\,\hat{i} - a\sin t\,\hat{j}) \qquad |\vec{T}'(t)| = \sqrt{\frac{a^2}{a^2+b^2}}$$

$$\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{|\vec{T}'(t)|} = \frac{\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a\cos t\,\hat{i} - a\sin t\,\hat{j})}{\sqrt{\frac{a^2}{a^2+b^2}}} \qquad \vec{N}\left(\frac{\pi}{4}\right) =$$

علاوه بر این می‌توان از فرمول زیر نیز برای محاسبه تاب منحنی استفاده کرد:

$$\tau = \frac{|dB/dt|}{|V|} \qquad B = T \times N$$

تاب منحنی

بردار قائم دوم

تمرین) نشان دهید خمیدگی نمودار تابعی چون $y = f(x)$ را می‌توان از فرمول زیر بدست می‌آید؟

$$K = \frac{|y''|}{(1+(y')^2)^{3/2}}$$

فرض: $x = t \longrightarrow y = f(t) \qquad x'' = 0 \,,\; x' = 1$

$$K_1(t) = \frac{|y''x' - y'x''|}{[(x')^2 + (y')^2]^{3/2}} = \frac{|y''|}{(1+(y')^2)^{3/2}}$$

تمرین) دایره بوسان (انحنا) $y = x\,tg^{-1}x$ را در نقطه‌ای بطول 1 بدست آورید.

$$K_1(t) = \frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{3/2}} \qquad y' = tg^{-1}x + \frac{x}{1+x^2}$$

$$y'' = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2} + \frac{x^2 - 2x^2 + 1}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{1+x^2} + \frac{-x^2+1}{(1+x^2)^2}$$

$$K_1(t) = \frac{\left|\frac{2}{2}\right|}{\left[1+\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)^2\right]^{3/2}} \qquad \rho(t) = \frac{1}{K_1(t)}$$

شعاع دایره بوسان

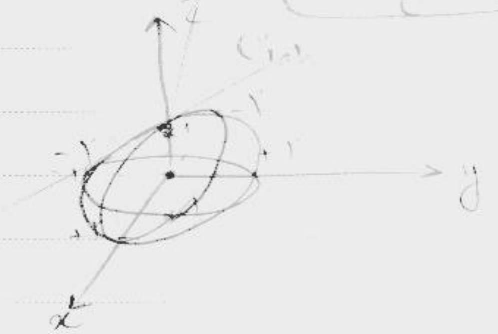
تمرین - تابع برداری $\vec{R}(t)=\left(2t\cos t^2, 2t\sin t^2, \sqrt{1-t^2}\right)$ داده شده است. منحنی وابسته به R را بر روی رویه‌ای مشخص کنید. سپس معادله خط مماس بر این منحنی را در نقطه $t=0$ بنویسید؟

$$\begin{cases} x=2t\cos t^2 \\ y=2t\sin t^2 \\ z=\sqrt{1-t^2} \longrightarrow z^2=1-t^2 \longrightarrow t^2=1-z^2 \end{cases}$$

$$\longrightarrow x^2+y^2=4t^2\left[(\cos t^2)^2+(\sin t^2)^2\right]=4t^2$$

$$\Longrightarrow x^2+y^2=4(1-z^2) \longrightarrow \boxed{x^2+y^2+4z^2=4}$$

* منحنی وابسته به R روی رویه بیضی‌گون قرار دارد
که این رویه بیضی‌گون دوار می‌باشد *



$t=0 \longrightarrow P(0,0,1)$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x'=2\cos t^2-4t^2\sin t^2 \longrightarrow x'_{(0)}=2 \\ y'=2\sin t^2+4t^2\cos t^2 \longrightarrow y'_{(0)}=0 \\ z'=\dfrac{-t}{\sqrt{1-t^2}} \longrightarrow z'_{(0)}=0 \end{cases}$$

مقادیر مشتقات مختصات در نقطه مورد نظر
بدست آمد.

$$\Longrightarrow \begin{cases} (x-x_0)=m_{x'}(z-z_0) \\ (x-x_0)=m_{x'}(y-y_0) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=2(z-1) \\ x=2y \end{cases}$$

Subject:
Year. Month. Date.

$t=0$ در $x=e^{t\sin t}$, $y=e^{t\cos t}$ (تمرین) شعاع دایره بوسان منحنی C با اطلاعات

بیست آکسیر

$$\begin{cases} x' = (\sin t + t\cos t)\, e^{t\sin t} \\ y' = (\cos t - t\sin t)\, e^{t\cos t} \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} x'' = (\cos t + \cos t - t\sin t)\, e^{t\sin t} + (\sin t + t\cos t)^2 e^{t\sin t} \\ y'' = (-\sin t - \sin t - t\cos t)\, e^{t\cos t} + (\cos t - t\sin t)^2 e^{t\cos t} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = 0 \ , \ x'' = 2 \\ y' = 1 \ , \ y'' = 1 \end{cases} \Rightarrow k_1(t) = \frac{|y''x' - x''y'|}{\left[(x')^2 + (y')^2\right]^{\frac{3}{2}}} = +2$$

$$\rho(t) = \frac{1}{k_1(t)} = \frac{1}{2} \longrightarrow$$ شعاع دایره بوسان

$$\begin{cases} y_C = y + \dfrac{1 + \frac{dy}{dx}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \\ x_C = x - \dfrac{\frac{dy}{dx}\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}{\frac{d^2y}{dx^2}} \end{cases}$$

* چون y برحسب t و x نیز برحسب t است با این گونه عمل کرد.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{y'}{x'} =$$ مشتق زنجیره

* می‌توان [illegible] کرد *

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y/dt^2}{d^2x/dt^2} = \frac{y''}{x''} = \frac{1}{2}$$

PAPCO

تمرین: معادله دایره بوسان (انحنای) منحنی $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$ در نقطه $(1,1)$ بدست آورید.

$y=(2-\sqrt{x})^2 \qquad \underbrace{y=f(x)}$, فرض $x=t$

$\Rightarrow y = 4-4\sqrt{t}+t \Rightarrow \dfrac{dy}{dt}=y'=-\dfrac{2}{\sqrt{t}}+1$ و $y''=\dfrac{1}{\sqrt{t^3}}$

$\Rightarrow K_1(t)=\dfrac{|y''|}{[1+(y')^2]^{3/2}}=\dfrac{1}{[1+(-1)^2]^{3/2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}} \longrightarrow \rho(t)=2\sqrt{2}$ شعاع دایره

$$\begin{cases} y_C = y+\dfrac{1+(dy/dt)^2}{d^2y/dt^2}=\dfrac{1+1}{1}=2 \\ x_C = x-\dfrac{dy/dt\,[1+(dy/dt)^2]}{d^2y/dt^2}=2 \end{cases}$$

مرکز $(2,2)$

معادله دایره بوسان $\Longrightarrow (x-2)^2+(y-2)^2=8 \quad *$

تمرین) منحنی که معادله آن در مختصات قطبی به صورت $r=\theta$ است. مطلوب است. بردار انحنا، شعاع

و انحنای منحنی در نقطه $\theta=\frac{\pi}{4}$ را بدست آورید

$$K_1(\theta)=\frac{\left|r^2+2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2-r\left(\frac{d^2r}{d\theta^2}\right)\right|}{\left[r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]^{3/2}} \qquad \frac{dr}{d\theta}=1 \qquad \frac{d^2r}{d\theta^2}=0$$

$$K_1\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{|\theta^2+2|}{[\theta^2+1]^{3/2}}=\frac{\frac{\pi^2}{16}+2}{\left[\frac{\pi^2}{16}+1\right]^{3/2}}$$

Subject:

Year. Month. Date.

فرض $r=f(\theta)$ $\xrightarrow[\text{قطبی}]{\text{به پارامتری}}$ $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=f(\theta)\cos\theta \\ y=f(\theta)\sin\theta \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\theta\cos\theta \\ y=\theta\sin\theta \end{cases} \Longrightarrow x^2+y^2=\theta^2[\sin^2\theta+\cos^2\theta]$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{r}=\theta \qquad r=\theta\ , \quad r=\sqrt{x^2+y^2}$$

فرض کنید $\theta=t \longrightarrow R(t)=t^2\cos^2t\,\hat{i}+t^2\sin^2t\,\hat{j}$

$$T(t)=\frac{R'(t)}{|R'(t)|} \qquad R'(t)=(2t\cos^2t-2t^2\cos t\sin t)\hat{i}+(2t\sin^2t+2t^2\sin t\cos t)\hat{j}$$

$$\overset{t=\theta}{\Longrightarrow} R'(\theta)=\left(2\tfrac{\pi}{4}\times\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-2\left(\tfrac{\pi}{4}\right)^2\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)\hat{i}+\left(2\tfrac{\pi}{4}\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+2\left(\tfrac{\pi}{4}\right)^2\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)\hat{j}$$

$$\Longrightarrow R'(\theta)=\frac{3\pi}{16}\hat{i}+\frac{5\pi}{16}\hat{j} \qquad |R'(\theta)|=\frac{\pi}{16}\sqrt{3^2+5^2}$$

$$T'(\theta)=\frac{R'(\theta)}{|R'(\frac{\pi}{4})|}$$

فرض کنید خم C معادلات پارامتری زیر را داشته باشد: $x=\sqrt{2}t\ ,\ y=\ln t\ ,\ z=\frac{1}{2}t^2$

الف) بردارهای $\vec{T}\ ,\ \vec{N}\ ,\ \vec{B}$ را بدست آورید.

ب) معادلات صفحه‌های قائم، بوسان و مماس را در $t=1$ بدست آورید.

$x = \sqrt{2}\,t \qquad y = \ln t \qquad z = \frac{1}{2}t^2$

$\vec{R}(t) = f(t)\hat{i} + g(t)\hat{j} + h(t)\hat{k} = (\sqrt{2}t)\hat{i} + (\ln t)\hat{j} + (\frac{1}{2}t^2)\hat{k}$

$\vec{R'}(t) = (\sqrt{2})\hat{i} + (\frac{1}{t})\hat{j} + (t)\hat{k}$

$$T(t) = \frac{R'(t)}{|R'(t)|} = \frac{\sqrt{2}\hat{i} + \frac{1}{t}\hat{j} + t\hat{k}}{\sqrt{2 + \frac{1}{t^2} + t^2}} = \frac{\sqrt{2}\hat{i} + \frac{1}{t}\hat{j} + t\hat{k}}{\sqrt{\frac{2t^2+1+t^4}{t^2}}}$$

$$\Rightarrow T(t) = \frac{t\sqrt{2}}{\sqrt{2t^2+1+t^4}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{t^4+2t^2+1}}\hat{j} + \frac{t^2}{\sqrt{t^4+2t^2+1}}\hat{k}$$

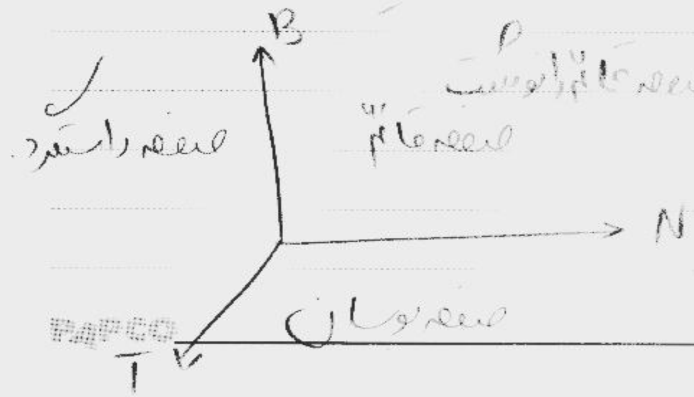
$$T(t) = \frac{\sqrt{2}t}{(t^2+1)}\hat{i} + \frac{1}{(t^2+1)}\hat{j} + \frac{t^2}{(t^2+1)}\hat{k}$$ * بردار مماس *

$$N(t) = \frac{T'(t)}{|T'(t)|} = \frac{\frac{1}{(t^2+1)^2}\left[\left[(\sqrt{2})(t^2+1) - 2t\sqrt{2}\right]\hat{i} + (-2t)\hat{j} + \left[(2t)(t^2+1) - 2t(t^2)\right]\hat{k}\right]}{|T'(t)|}$$

$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}$ بردار B را بدست می‌آوریم یعنی معادله صفحه قائم را هم خواهیم نوشت

بردار نرمال آن صفحه T می‌شود و از طرفی N(t) و B(t) بر این صفحه مماس است

با استفاده از نقطه و بردار نرمال T می‌توان معادله صفحه قائم را نوشت



Subject:

Year. Month. Date.

تمرین ۸: فرض کنید منحنی C با معادله $\begin{cases} x = a(1-\sin t) \\ y = 1-e^{-t} \end{cases}$ مسیر متحرکی باشد (پارامتر زمان)

مولفه های شتاب بر حسب تانژانت و قائم منحنی را در $t=0$ تعیین کنید؟

$$R(t) = a(1-\sin t)\hat{i} + (1-e^{-t})\hat{j}$$

$$\vec{V}(t) = \vec{T}\frac{ds}{dt} \qquad S = \int \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2}\, dt$$

$$\vec{V}(t) = \vec{T}\frac{ds}{dt} = \vec{T}\left[\sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2}\right] = \frac{-a\cos t\,\hat{i} + e^{-t}\hat{j}}{\sqrt{(-a\cos t)^2 + (e^{-t})^2}} \times \sqrt{(-a\cos t)^2 + (e^{-t})^2}$$

$$\Rightarrow \vec{V}(t) = -a\cos t\,\hat{i} + e^{-t}\hat{j}$$

$$\Rightarrow K_1(t) = \frac{|y''x' - y'x''|}{[(x')^2 + (y')^2]^{3/2}} \qquad \begin{cases} x' = -a\cos t & x'' = a\sin t \\ y' = e^{-t} & y'' = -e^{-t} \end{cases}$$

$$\xRightarrow{t=0} K_1(t) = \frac{a}{(a^2+1)^{3/2}} \qquad a_N = K_1\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{a}{\sqrt{(a^2+1)^3}}\left(\sqrt{a^2+1}\right)^2$$

$$a_N = \frac{a}{\sqrt{a^2+1}} \qquad a_T = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{2a^2\cos t\sin t + 2e^{-2t}}{2\sqrt{a^2\cos^2 t + e^{-2t}}}$$

$$a_T \xrightarrow{t=0} a_T = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} \qquad a = a_N\vec{N} + a_T\vec{T}$$

$$a = \frac{a}{\sqrt{a^2+1}}\vec{T} + \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\vec{N}$$

Subject :
Year . Month . Date .

* منظور از یک سطح یا یک رویه در فضای سه بعدی مجموعه نقاطی مانند (x,y,z) است که در رابطه $F(x,y,z)=0$ صدق می کند

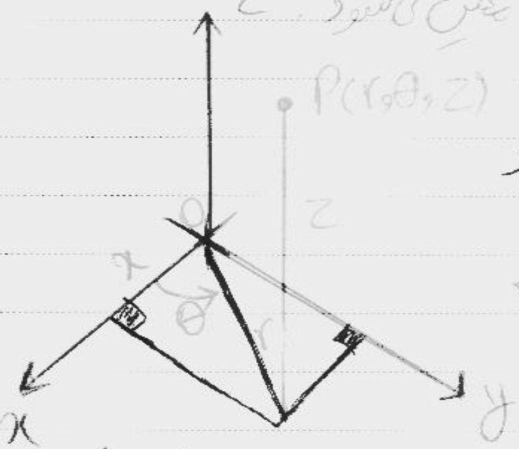
تعریف: در فضای سه بعدی هرگاه یک معادله شامل دو متغیر از سه متغیر x و y و z باشد یک استوانه است که مقاطع آن موازی با صفحه‌ی مختصات متغیرهای موجود در معادله بوده و مولدهای آن موازی محور متغیر غایب (دو متغیر معادله) است

مثال) رویه‌ی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ را توصیف کنید

این سطح استوانه‌ای است که مولدهای آن عمود بر صفحه xy قرار دارد و معادله $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ و مقطع آن خطی موازی محور zها می باشد. و چون شکل این استوانه بیضی می باشد آن را بیضوی گون نامند *

* مختصات استوانه‌ای و مختصات استوانه‌ای در فضا از طریق تعمیم مختصات قطبی در صفحه xy با محور z بطور کلی بدست می‌آید. بدین ترتیب محل نقطه در شکل زیر ملاحظه می‌کنید.

هر نقطه در این دستگاه توسط ۳ پارامتر (r, θ, z) تعیین می‌شود.



مقادیر x و y و r و θ در مختصات استوانه‌ای با روابط زیر به هم مرتبط می‌شوند.

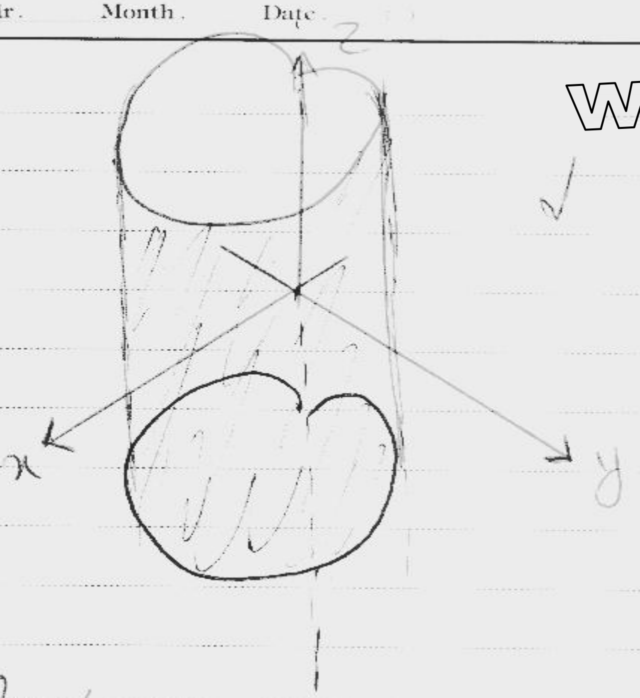
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad r^2 = x^2 + y^2$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \theta = tg^{-1}\frac{y}{x}$$

در مختصات استوانه‌ای معادله $r=a$ (قطر دایره در صفحه xy را مشخص می‌کند) استوانه‌ای کامل حول محور z را توصیف می‌کند که خود محور z با معادله $r=0$ مشخص می‌شود. معادله $\theta = \theta_0$ توصیف کننده صفحه‌ای است که شامل محور z است و زاویه θ آن با قسمت مثبت محور x می‌سازد.

مثال) رویه $r = 1 + \cos\theta$ را رسم کنید.

این معادله فقط شامل r و θ می‌باشد و متغیر z در آن دیده نمی‌شود. پس این رویه استوانه‌ای است متشکل از خطوط که از دایره $r = 1 + \cos\theta$ واقع در صفحه xy می‌گذرند و با محور z موازی‌اند. را نشان می‌دهد.



مثال) معادله‌ی این استوانه را در مختصات استوانه‌ای $4x^2+4y^2=9$ در مختصات استوانه‌ای بدست آورید.

این استوانه از نقاطی تشکیل می‌شود که فاصله آنها از محور z ها $\sqrt{x^2+y^2}=\frac{3}{2}$ است. معادله

متناظر بر حسب مختصات استوانه‌ای این است: $r=\frac{3}{2}$

مختصات کروی: در این دستگاه هر نقطه به شکل زیر نمایش داده می‌شود که مختصات فضایی آن را به صورت فاصله

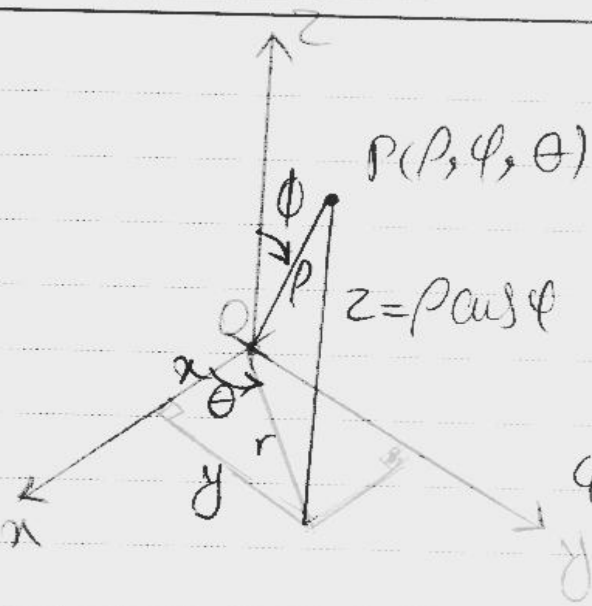
مشخص می‌شود. مختص اول $|OP|=\rho$ فاصله نقطه از مبدا است. چون این مقدار هیچ‌گاه منفی نمی‌شود

چون طول است. و مختص دوم φ زاویه‌ای است که بردار $\vec{OP}$ با جهت مثبت محور z می‌سازد و لازم

است که بازه از ۰ تا π قرار داشته باشد. مختص سوم همان زاویه θ در مختصات استوانه‌ای

است.

Subject:
Year. Month. Date.



* معادله $a=\rho$ کره‌ای به شعاع a را مشخص می‌کند که مرکز آن مبدا است. معادله $\varphi=\varphi_0$ مخروط قائمی را مشخص می‌کند که رأس آن در مبدا قرار دارد و محور آن در امتداد محور z است. اگر φ_0 بزرگتر از $\frac{\pi}{2}$ باشد مخروط $\varphi=\varphi_0$ به طرف پایین باز می‌شود.

چند رابطه که مختصات دکارتی، استوانه‌ای و کروی را به هم مربوط می‌کند:

$$r=\rho\sin\varphi \qquad x=r\cos\theta=\rho\sin\varphi\cos\theta$$

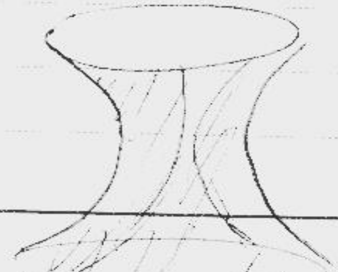
$$z=\rho\cos\varphi \qquad y=\rho\sin\varphi\sin\theta$$

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{r^2+z^2}$$

چند نمودار و شکل سه بعدی:

1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ * بیضی‌گون (توپ فوتبال امریکایی)

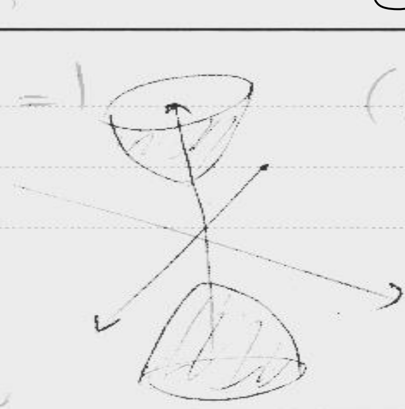
2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ * بیضی‌گون یک‌پارچه



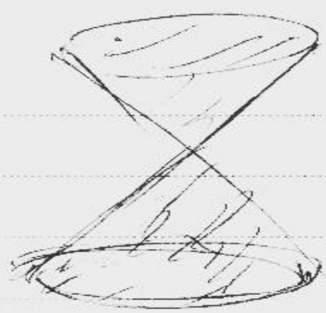
P4PCO

Subject:
Year: Month: Date:

۳ $-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ *(هذلولیگون دوپارچه)



۴) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z^2}{c^2}$ * مخروط بیضوی *



۵) $\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{x^2}{a^2}=\dfrac{z}{c}$ * سهمیگون بیضوی

۶) $\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{x^2}{a^2}=\dfrac{z}{c}$ * سهمیگون هذلولی