تهیه کننده :

حامد مظاهری

نمونه سؤالات درس

ریاضی عمومی (۱)

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب

به همراه پاسخ تشریحی

ترم اول ۸۵-۱۳۸۴

پاسخ در صفحه ۱۱

۱- معادله‌ی $z^{۴}+z^{۲}+۱=۰$ را در اعداد مختلط حل کنید.

۲- فرض کنید f تابعی پیوسته بر بازه‌ی $[a,b]$ باشد. همچنین برای $x\in(a,b)$ داشته باشیم: $f'(x)=۱$. به کمک قضیه‌ی مقدار میانگین (لاگرانژ) ثابت کنید:

$$f(x)=x-a+f(a)$$

۳- هریک از انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[۳]{x}}$

ب) $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{dx}{۳+۵\cos x}$

۴- در همگرایی یا واگرایی انتگرال زیر بحث کنید.

$$\int_{e^{۲}}^{\infty}\frac{dx}{x\ln^{۲}x}$$

۵- طول منحنی $y=\int_{۰}^{x}\sqrt{۳+۴\cos(۲t)}dt$ را در فاصله‌ی $۰\le x\le\frac{\pi}{۶}$ به‌دست آورید.

۶- با تغییر متغیر $t=\frac{\pi}{۴}-x$ حاصل انتگرال زیر را به‌دست آورید.

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}}\ln(۱+\tan x)dx$$

۷- فاصله‌ی همگرایی سری زیر را به‌دست آورید و در نقاط کرانه‌ای بحث کنید.

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n}۲^{۲n}x^{۲n}}{۲n}$$

۸- هریک از حدود زیر را به‌دست آورید.

الف) $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=۱}^{n}\frac{۲}{n}\ln(۱+\frac{۲i}{n})$

ب) $\lim_{x\to ۰}(\frac{\sin x}{x})^{\frac{۱}{x^{۲}}}$

ترم دوم ۸۴-۱۳۸۳

پاسخ در صفحه ۱۴

۱- اگر $z=\dfrac{-\cos(\frac{\pi}{3})+i\sin(\frac{\pi}{3})}{-\cos(\frac{\pi}{6})+i\sin(\frac{\pi}{6})}$، عدد صحیح n را طوری بیابید که z^n عددی حقیقی باشد.

۲- الف) نشان دهید معادله‌ی $xe^x=2$ در فاصله‌ی $[0,1]$ فقط یک ریشه دارد.

ب) بسط مکلورن تابع $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$ را بیابید.

۳- حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\tan(t^2)dt}{x^6}$

ب) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{n}{(n+1)^2}+\dfrac{n}{(n+2)^2}+\cdots+\dfrac{n}{(2n)^2}\right]$

۴- انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int_0^1\dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx$

ب) $\int\dfrac{dx}{x-\sqrt{x^2+2x+4}}$

ج) $\int\dfrac{dx}{1+\sin x-\cos x}$

۵- درمورد همگرایی یا واگرایی انتگرال‌های زیر بحث کنید.

الف) $\int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$

ب) $\int_1^{e}\dfrac{dx}{x\sqrt[5]{\ln x}}$

۶- طول قوس منحنی $y=\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{1}{2}\ln x$ که $1\le x\le e$، را حساب کنید.

۷- در مورد همگرایی و واگرایی سری‌های زیر بحث کنید.

الف) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n(x-1)^n}{2^n(3n-1)}$

ب) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)\ln(1+n)}$

میان‌ترم دوم ۸۴-۱۳۸۳

پاسخ در صفحه ۱۸

۱- صورت مثلثاتی عدد مختلط $z=(i+1)i$ را به دست آورید. مقدار n را طوری پیدا کنید که $z^n.\sqrt{i}$ موهومی محض باشد.

۲- فرض کنیم تابع $f(x)$ به صورت مقابل داده شده است:

$$y=f(x)=x(\cos \operatorname{Ln} x+\sin \ln x)$$

y' و y'' را حساب کنید و نشان دهید:

$$x^{۲}y''-xy'+۲y=۰$$

۳- مقدار A و B را طوری تعیین کنید که تابع $f(x)$ در مبدأ پیوسته شود.

$$f(x)=\begin{cases}(۱+\arctan x)^{\frac{۱}{x}}+A & x<۰\\ B & x=۰\\ \dfrac{۲\tan(۱-\cos x)}{\sqrt{x^{۲}+x+۱}} & x>۰\end{cases}$$

۴- نمودار تابع $y=f(x)=e^{-x^{۲}}$ را رسم کنید و نقاط عطف را مشخص کنید. اکسترمم نسبی را بیابید. نشان دهید اگر قاعده مستطیلی روی محور x ها و دو رأس آن روی منحنی بالا باشد، آنگاه مستطیل در صورتی مساحت ماکزیمم دارد که دو رأس آن منطبق بر نقاط عطف نمودار باشد.

۵- انتگرال‌های زیر را حساب کنید:

الف) $\int \dfrac{\cos x dx}{\sin^{۲} x+\sin^{۴} x}$

ب) $\int (۲x+۱)\arctan x\, dx$

ترم اول ۸۱-۱۳۸۰

پاسخ در صفحه ۲۱

۱- معادله‌ی $z^{4}+iz^{3}-z^{2}-iz+1=0$ را در میدان اعداد مختلط $\mathbb{C}$ حل کنید.

۲- قضیه رُل را بیان و اثبات کنید.

۳- نشان دهید تابع $f(x)$ با ضابطه روبرو در نقطه‌ی $x_0=\frac{1}{2}$ پیوسته و در مابقی نقاط اعداد حقیقی ناپیوسته است.

$$f(x)=\begin{cases} x & x\in\mathbb{Q} \\ 1-x & x\notin\mathbb{Q} \end{cases}$$

۴- انتگرال‌های زیر را حل کنید.

الف) $\int_{0}^{+\infty} xe^{-x}\cos x\,dx$

ب) $\int \frac{dx}{a^{2}\cos^{2}x+b^{2}\sin^{2}x}$

ج) $\int \frac{x\,dx}{(x-1)^{2}(x^{2}+1)}$

د) $\int \tan^{-1}\sqrt{x+1}\,dx$

۵- طول نمودار تابع $f(x)=\int_{0}^{x}\sqrt{\cosh t}\,dt$ را در فاصله‌ی $x=0$ و $x=\ln 2$ حساب کنید.

۶- مساحت سطح حاصل از دوران دایره $x^{2}+(y-4)^{2}=1$ حول محول $y=0$ را به‌دست آورید.

۷- حدود زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{\ln 2x}}$

ب) $\lim_{k\to+\infty}\left[\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{kn}{(ki)^{2}+n^{2}}\right)\right]$

۸- همگرایی یا واگرایی سری زیر را تعیین کنید.

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^{2}}$$

ترم دوم ۸۰-۱۳۷۹

پاسخ در صفحه ۲۵

۱- معادله‌ی $z^6 - 7z^3 - 8 = 0$ را در دستگاه اعداد مختلط حل کنید. اگر z_1 و z_2 و ... و z_6 ریشه‌های معادله‌ی فوق باشند آنگاه مقادیر $\operatorname{Im}(z_1 z_2 \dots z_6)$ و $\operatorname{Im}(z_1 + z_2 + \cdots + z_6)$ را بیابید.

۲- الف) قضیه‌ی مقدار میانگین را بیان کنید. (بدون اثبات)

ب) هرگاه برای تابع حقیقی f شرط $|f(x) - f(y)| \le |x - y|^2$ به ازای هر x و y حقیقی درست باشد آن‌گاه ثابت کنید f یک تابع ثابت است.

۳- حدود زیر را بیابید:

الف) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 e^x}{x^4 - 1} \displaystyle\int_1^{x^2} \frac{\sin(\frac{\pi}{4} t)}{t} dt$

ب) $\lim\limits_{n \to +\infty} n^{-3}\left[e^{\frac{1}{n^3}} + 2e^{\frac{8}{n^3}} + 3e^{\frac{27}{n^3}} + \cdots + ne\right]$

۴- طول قوس منحنی به معادله‌ی $4y^3 = 9x^2$ را از نقطه‌ی $A(0,0)$ تا $B(2\sqrt{3},3)$ بیابید.

۵- حجم حاصل از دوران ناحیه‌ی محدود به محورهای مختصات و خط $y = \ln 2$ و منحنی $x = \operatorname{sech}(y)$ حول خط $x = -1$ را بیابید.

۶- انتگرال‌های زیر را حل کنید:

الف) $\displaystyle\int \frac{\cos x + 2\sin x}{3\sin x + 4\cos x} dx$

ب) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left[(\cos x)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \ln(x^2)\right] dx$

۷- همگرایی یا واگرایی سری زیر را تعیین کنید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$$

۸- دامنه‌ی همگرایی تابع f که با ضابطه‌ی زیر تعریف می‌شود را بیابید.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^{\ln x}} + \frac{x^n}{n!}\right)$$

ترم دوم ۷۹-۱۳۷۸

پاسخ در صفحه ۲۹

۱- نشان دهید که اگر $|z|=۱$ و $|w|=۱$ و $\bar{z}w \neq ۱$ آنگاه:

$$\left|\frac{z-w}{-\bar{z}w}\right|=۱$$

۲- قضیه‌ی مقدار میانگین را بیان و اثبات کنید و سپس نامساوی زیر را ثابت کنید:

$$\arctan x \geq \frac{x}{۱+x^{۲}} \qquad (x>۰)$$

۳- حدود زیر را بیابید:

الف) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{۲}\right)^{n}$

ب) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\frac{\pi}{n}\times\sum\limits_{k=۱}^{n}\frac{۱}{۱+\cos\frac{k\pi}{n}}$

ج) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\int_{x^{۲}}^{\sin x}\operatorname{sech} t\,dt}{\ln(۱+x)}$

۴- انتگرال‌های زیر را بیابید.

الف) $\int\frac{\arcsin e^{x}}{e^{x}}dx$

ب) $\int\frac{\cos x\,dx}{۱-\cos x}$

ج) $\int_{۰}^{\pi}\frac{\sin x}{۱+\cos^{۲}x}dx$

۵- همگرایی یا واگرایی انتگرال $\int_{۱}^{\infty}e^{-x}\ln x\,dx$ را تعیین کنید.

۶- مطلوب است طول قوس منحنی $x=\frac{۱}{۴}y^{۲}-\frac{۱}{۲}\ln y$, $۱\leq y\leq e$

۷- همگرایی یا واگرایی فقط یکی از سری‌های زیر را به دلخواه تعیین کنید:

الف) $\sum\limits_{n=۱}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{۲}}$ ب) $\sum\limits_{n=۱}^{\infty}\ln\left(\frac{n+۱}{n}\right)$

۸- بازه‌ی همگرایی سری $\sum\limits_{n=۱}^{\infty}\frac{e^{nx}}{n^{۲}-n+۱}$ را تعیین کنید. (در نقاط مرزی بحث کنید)

ترم اول ۷۸-۱۳۷۷

۱- الف) نشان دهید هرگاه α یک ریشه معادله $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$ باشد که در آن $a_i \in \mathbb{R}$، آنگاه $\bar{\alpha}$ نیز یک ریشه معادله است.

ب) هرگاه $z_1 = i$ یک ریشه‌ی معادله‌ی $z^4 + 2z^3 + 3z^2 + 2z + 2 = 0$ باشد سایر ریشه‌ها را تعیین کنید.

۲- حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{n\to\infty} (\cos\frac{a}{\sqrt{n}})^n$

ب) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{n}{(n+1)^3} + \frac{2n}{(n+2)^3} + \cdots + \frac{n^2}{(n+n)^3}\right]$

۳- ابعاد بزرگترین مستطیلی را تعیین کنید که در داخل نیم دایره‌ای به شعاع ۲ واقع گردد.

۴- معادله $\tanh x + x = 0$ دارای چند ریشه است.

۵- انتگرالهای نامعین زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx$

ب) $\int (\arcsin x)^2 dx$

۶- در همگرایی یا واگرایی انتگرال غیر عادی زیر بحث کنید.

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1+x^2)} dx$$

۷- الف) ثابت کنید هرگاه $f(x)$ یک تابع پیوسته در فاصله $[a,b]$ بوده و برای هر $x \in (a,b)$ داشته باشیم $F(x) = \int_a^x f(t)dt$، در این صورت $F'(x) = f(x)$.

ب) نشان دهید اگر $f(x)$ یک تابع متناوب با دوره‌ی تناوب T باشد، $F(x) = \int_x^{x+T} f(t)dt$ ثابت است.

۸- رفتار سری زیر را بررسی کنید.

$$\sum_{n=1}^\infty \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

۹- دامنه همگرایی تابع $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{2^n \sin^n x}{n^2}$ را مشخص کنید.

ترم دوم ۷۶-۱۳۷۵

۱- معادله $z^{4} = \frac{1-\sqrt{3}i}{1+i}$ را حل کنید.

۲- ثابت کنید اگر $0 < a < b$، آنگاه $(\frac{b}{a})^{a} < e^{b-a} < (\frac{b}{a})^{b}$ و نتیجه بگیرید:

$$\forall x > 0 \ : (1+\frac{1}{x})^{x} < e < (1+\frac{1}{x})^{x+1}$$

۳- مطلوبست محاسبه‌ی $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

۴- مشتق‌پذیری تابع زیر را در $x=0$ بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{e^{x}-1} & x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \end{cases}$$

۵- انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int \frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$

ب) $\int \frac{x^{2}dx}{\sqrt{x^{2}-2x+2}}$

۶- حجم حاصل از دوران ناحیه‌ی محصور به منحنی‌های $y = \cosh x$ و $y = 2$ را حول خط $y = -1$ محاسبه کنید.

۷- همگرایی یا واگرایی سری‌های عددی زیر را مشخص کنید.

الف) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1-\cos\frac{1}{n})$

ب) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt[3]{n}}$

۸- فاصله همگرایی سری توانی زیر را بدست آورید. در نقاط مرزی بحث کنید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n}+(-2)^{n}}{n}(x+1)^{n}$$

ترم دوم ۷۴-۱۳۷۳

۱- حدود زیر را بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\sin x)^{\tan x}$

ب) $\lim\limits_{n\to 0} e^{\tan x \ln(\sin x)}$

۲- الف) قضیه مقدار میانگین را بیان و اثبات کنید.

ب) نامساوی زیر را با کمک (الف) نشان دهید.

$|\sin x - \sin y| \le |x - y|$

۳- انتگرالهای زیر را محاسبه نمائید.

الف) $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}dx$

ب) $\int \sin 2\theta - \ln(\sin\theta) d\theta$

پ) اگر $F(x) = \int_1^x \frac{e^x}{x} dx$، انتگرال نامعین زیر را با استفاده از روش جزء به جزء بیابید.

$\int F(x)dx$

۴- ریشه‌های عدد مختلط زیر را بیابید.

$z^5 = (\frac{1+i}{-\sqrt{3}+i})$

پاسخ نمونه سؤالات

ترم اول ۸۵-۱۳۸۴

سؤال در صفحه ۲

۱-

$$z^4+z^2+1=0 \Rightarrow (z^2+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}=0 \Rightarrow z^2+\frac{1}{2}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow \begin{cases} z_1^2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \\ z_2^2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_1^2=\cos(\frac{2\pi}{3})+\sin(\frac{2\pi}{3})i \\ z_2^2=\cos(\frac{5\pi}{3})+\sin(\frac{5\pi}{3})i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1=\cos(\frac{2k\pi}{2}+\frac{2\pi}{3})+\sin(\frac{2k\pi}{2}+\frac{2\pi}{3})i & k=0,1 \\ z_2=\cos(\frac{2k\pi}{2}+\frac{5\pi}{3})+\sin(\frac{2k\pi}{2}+\frac{5\pi}{3})i & k=0,1 \end{cases}$$

چنانچه ریشه‌های معادله را با w_0، w_1، w_2 و w_3 نمایش دهیم، خواهیم داشت:

$$w_0=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \qquad w_2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$w_1=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \qquad w_3=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

۲- بنابر قضیه‌ی مقدار میانگین اگر تابع f روی $[a,b]$ پیوسته و روی (a,b) مشتق‌پذیر باشد، آنگاه لااقل یک نقطـه‌ی c در بازه‌ی (a,b) وجود دارد به طوری که

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

فرضیات مسئله در قضیه‌ی مقدار میانگین صادق می‌باشد. برای اثبات حکم حالت خاصی از قـضیه را مـدنظر قـرار می‌دهیم یعنی با فرض $x\in(a,b)$، در صورت قضیه به جای b، متغیر x را قرار می‌دهیم. پس

$$f(x)-f(a)=f'(c)(x-a)$$

اما بنابر فرض مسئله، به ازای هر نقطه در $(a-b)$، f' آن برابر یک می‌باشد یعنی $f'(c)=1$ پس

$$f(x)-f(a)=x-a \Rightarrow f(x)=x-a+f(a)$$

۳- الف)

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x}(\sqrt{\sqrt[3]{x}}+1)}\overset{(1)}{=}\int\frac{3u\,du}{\sqrt{u}+1}\overset{(2)}{=}3\int\frac{2v^3dv}{v+1}$$

$$\overset{(3)}{=}6\int(v^2-v+1-\frac{1}{v+1})dv=6(\frac{v^3}{3}-\frac{v^2}{2}+v-\ln(v+1))=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6x^{\frac{1}{6}}-6\ln(x^{\frac{1}{6}}+1)$$

در تساوی (۱) از تغییر متغیر زیر استفاده کردیم:

$$u=\sqrt[3]{x}\to du=\frac{1}{3}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}\to 3\sqrt[3]{x}du=\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}\to 3u\,du=\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$$

و در تساوی (۲) تغییر متغیر $du=2v\,dv$ و $u=v^2$ به کار برده شد و برای تساوی (۳) عبارت v^3 را بر $(v+1)$ تقسیم نموده‌ایم.

ب)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{3+5\cos x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{3+5\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+\tan^2\frac{x}{2})dx}{2(4-\tan^2\frac{x}{2})}=\int_0^1\frac{du}{4-u^2}$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^1(\frac{1}{2+u}+\frac{1}{2-u})du=\frac{1}{4}(\ln(2+u)-\ln(2-u))\Big|_0^1=\frac{1}{4}(\ln 3+\cancel{\ln 1}-\cancel{\ln 2}+\cancel{\ln 2})=\frac{\ln 3}{4}$$

۴- با تغییر متغیر $u=\ln x$ داریم:

$$\int_{e^2}^{\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}=\int_2^{\infty}\frac{du}{u^2}=-\frac{1}{u}\Big|_2^{\infty}=-(0-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$$

با توجه به مقدار، فوق انتگرال داده شده همگراست.

۵-

$$y=\int_0^x\sqrt{3+4\cos(2t)}dt\Rightarrow\frac{dy}{dx}=1\times\sqrt{3+4\cos(2x)}-0\times\sqrt{3+4\cos(0)}=\sqrt{3+4\cos 2x}$$

$$\text{طول منحنی}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{4+4\cos 2x}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{2}\cos x\,dx$$

$$=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos x\,dx=2\sqrt{2}(\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{6}})=2\sqrt{2}(\frac{1}{2}-0)=\sqrt{2}$$

۶-

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^0\ln(1+\tan(\frac{\pi}{4}-t))(-dt)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\frac{1-\tan t}{1+\tan t})dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\frac{2}{1+\tan t}dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln 2\,dt-\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan t)dt}_{=I}\Rightarrow 2I=\frac{\pi}{4}\ln 2\Rightarrow I=\frac{\pi}{8}\ln 2$$

۷-

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}2^{2(n+1)}}{2(n+1)}}{\frac{(-1)^n 2^{2n}}{2n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-2n)2^2}{2(n+1)}\right| = 4$$

بنابراین سری برای $|x^2|<\frac{1}{4}$ یعنی $|x|<\frac{1}{2}$ همگرا می‌باشد. حال همگرایی را برای $x=\pm\frac{1}{2}$ بررسی می‌کنیم:

$$x=\frac{1}{2}:\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n}\times 2^{-2n}}{2n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n}$$

سری فوق یک سری همگرا می‌باشد. برای $x=-\frac{1}{2}$ نیز با محاسباتی مشابه به همگرایی سری خواهیم رسید پس بازه‌ی همگرایی $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ می‌باشد.

۸- الف)

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{n}\ln(1+2\frac{i}{n}) = 2\int_0^1 \ln(1+2x)dx \overset{(1)}{=} 2\left[x\ln(1+2x)\Big|_0^1 - \int_0^1\frac{2x}{1+2x}dx\right]$$

$$=2\left[x\ln(1+2x)\Big|_0^1 - \int_0^1(1-\frac{1}{1+2x})dx\right] = 2\left[x\ln(1+2x)\Big|_0^1 - (x-\frac{1}{2}\ln(1+2x)\Big|_0^1)\right]$$

$$=2\left[\ln 3-(1-\frac{1}{2}\ln 3)\right] = 2\left[\frac{3}{2}\ln 3 - 1\right] = 3\ln 3 - 2$$

در تساوی (۱) از تغییر متغییر زیر استفاده کرده‌ایم:

$$u=\ln(1+2x)\Rightarrow du=\frac{2}{1+2x}\quad,\quad dv=dx\Rightarrow v=x$$

ب) با در نظر گرفتن $y(x)=(\frac{\sin x}{x})^{\frac{1}{x^2}}$ داریم:

$$\ln y(x)=\frac{\ln(\frac{\sin x}{x})}{x^2}\Rightarrow \lim_{x\to 0}\ln y(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\frac{\sin x}{x})}{x^2}\overset{H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^2\sin x}$$

$$\overset{H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{\cos x}-x\sin x-\cancel{\cos x}}{4x\sin x+2x^2\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\cancel{x}\sin x}{\cancel{x}(4\sin x+2x\cos x)}$$

$$\overset{H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{4\cos x+2\cos x-2x\sin x} = -\frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\ln y(x) = -\frac{1}{6}\Rightarrow \ln(\lim_{x\to 0}y(x)) = -\frac{1}{6}\Rightarrow \lim_{x\to 0}y(x)=e^{-\frac{1}{6}}$$

ترم دوم ۸۴-۱۳۸۳
سؤال در صفحه ۳

-۱

$$z=\frac{-\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}}{-\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}{-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i}\times\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i}{-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i}{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$$

$$\Rightarrow z=\cos(-\frac{\pi}{6})+i\sin(-\frac{\pi}{6})$$

اگر فرض کنیم $z=\cos\theta+i\sin\theta$ آنگاه $z^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$. لذا بنا به صورت مسئله n باید طوری باشد که

$$\sin(\frac{-n\pi}{6})=0\Rightarrow\frac{-n\pi}{6}=k\pi\qquad k=0,\pm1,\pm2,\dots$$

$$\Rightarrow n=-6k\qquad k=0,\pm1,\pm2,\dots$$

بنابراین به ازای n هایی مانند ۰، ۶±، ۱۲±، ... z^n عددی حقیقی می‌باشد.

۲- الف) $f(x)=xe^x-2$ را به عنوان تابعی پیوسته از $[0,1]$ به $\mathbb{R}$ معرفی می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l}f(x)=0\times e^0-2=-2\Rightarrow f(0)<0\\ f(1)=1\times e^1-2=e-2\Rightarrow f(1)>1\end{array}\right\}\Rightarrow\exists c\in(0,1),\ f(c)=0\Rightarrow ce^c-2=0\Rightarrow ce^c=2$$

پس معادله‌ی $xe^x=2$، در بازه‌ی $[0,1]$ حداقل دارای یک ریشه می‌باشد.

حال برای اثبات یکتایی ریشه از برهان خلف استفاده می‌نماییم. یعنی فرض می‌کنیم x_1 و x_2 متعلق به $[0,1]$ دو ریشه‌ی متمایز معادله باشند، یعنی $f(x_1)=f(x_2)=0$. تابع $f(x)$ روی $[x_1,x_2]$ پیوسته و روی (x_1,x_2) مشتق‌پذیر است. بنابر قضیه‌ی رول خواهیم داشت:

$$\exists t\in(x_1,x_2):f'(t)=0\Rightarrow e^t+te^t=0\Rightarrow e^t(1+t)=0\xrightarrow{e^t\neq0}1+t=0\Rightarrow t=-1$$

که این متناقض با مثبت بودن x_1 و x_2 می‌باشد. پس $f(x)$ در بازه‌ی $[0,1]$ فقط یک ریشه دارد.

ب) می‌دانیم که بسط مکلورن $\frac{1}{1-x}$ برای $|x|<1$ عبارت است از $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$. بنابراین داریم:

$$\frac{1}{1+x}=\frac{1}{1-(-x)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n$$

با ضرب طرفین تساوی بالا در x خواهیم داشت:

$$f(x)=\frac{x}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{n+1}$$

۳- الف)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^3}\tan t^2dt}{x^9}\overset{H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{3x^2\tan((x^3)^2)-0\times\tan(0^2)}{9x^8}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x^6}{3x^6}=\lim_{x\to 0}\frac{x^6}{3x^6}=\frac{1}{3}$$

ب)

$$\lim_{n\to\infty}[\frac{n}{(n+1)^2}+\frac{n}{(n+2)^n}+\cdots+\frac{n}{(2n)^2}]=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\frac{n}{(n+i)^2}=\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{n^2}{(n+i)^2})$$

$$=\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{1+\frac{i}{n}})^2)\overset{(1)}{=}\int_0^1\frac{dx}{(1+x)^2}=\frac{-1}{1+x}\Big|_0^1=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$$

در تساوی (۱) از تقریب $\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f(a+\frac{b-a}{n}i)$ که $f(x)=(\frac{1}{1+x})^2$ و $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ استفاده نموده‌ایم.

۴- الف)

$$\int_0^1\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx\overset{(1)}{=}\int_0^1\frac{u^3\times 6u^5du}{1+u^2}\overset{(2)}{=}6\int_0^1(u^6-u^4+u^2-1+\frac{1}{1+u^2})du=$$

$$=6\left[\frac{u^7}{7}-\frac{u^5}{5}+\frac{u^3}{3}-u+\arctan u\right]_0^1=6\left[\frac{1}{7}-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}-1+\frac{\pi}{4}-0\right]=\frac{3\pi}{2}-\frac{152}{35}$$

در تساوی (۱) از تغییر متغیر $dx=6u^5du$ و $x=u^6$ و در تساوی (۲) عبارت u^8 را بر $(1+u^2)$ تقسیم نموده‌ایم.

ب)

$$\int\frac{dx}{x-\sqrt{x^2+2x+4}}=\int\frac{dx}{x-\sqrt{(x+1)^2+3}}\overset{(1)}{=}\int\frac{du}{u-1-\sqrt{u^2+3}}\overset{(2)}{=}\int\frac{t^2+3}{2t^3+2t^2}dt\overset{(3)}{=}$$

$$=\int(\frac{3}{2t^2}-\frac{3}{2t}+\frac{2}{t+1})dt=-\frac{3}{2t}-\frac{3}{2}\ln(t)+2\ln(t+1)\overset{(4)}{=}$$

$$=-\frac{3}{2(\sqrt{x^2+2x+4}-x-1)}-\frac{3}{2}\ln(\sqrt{x^2+2x+4}-x-1)+2\ln(\sqrt{x^2+2x+4}-x)$$

در تساوی (۱) از تغییر متغیر $du=dx$ و $u=x+1$ استفاده نموده و در تساوی (۲) از تغییر متغیر زیر استفاده نموده‌ایم:

$$t=\sqrt{3+u^2}-u\Rightarrow t^2=3+u^2-2u\sqrt{3+u^2}+u^2=3+2u(\underbrace{u-\sqrt{3+u^2}}_{-t})$$

$$\Rightarrow\frac{t^2-3}{-2t}=u\Rightarrow\frac{-4t^2+2t^2-6}{-4t^2}dt=du\Rightarrow\frac{t^2+3}{2t^2}dt=du$$

در تساوی (۳) نیز کسر $\frac{t^{2}+3}{2t^{3}+2t^{2}}$ را تجزیه نموده و در تساوی (۴) تغییر متغیرهای صورت گرفته را به حالت نخست برگرداندیم.

ج)

$$\int\frac{dx}{1+\sin x-\cos x}=\int\frac{dx}{1+\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^{2}\frac{x}{2}}-\frac{1-\tan^{2}\frac{x}{2}}{1+\tan^{2}\frac{x}{2}}}=\int\frac{dx}{\frac{1+\tan^{2}\frac{x}{2}+\tan\frac{x}{2}-1+\tan^{2}\frac{x}{2}}{1+\tan^{2}\frac{x}{2}}}$$

$$=\int\frac{(1+\tan^{2}\frac{x}{2})dx}{2(\tan\frac{x}{2}+\tan^{2}\frac{x}{2})}\overset{(1)}{=}\int\frac{du}{u+u^{2}}\overset{(2)}{=}\int(\frac{1}{u}-\frac{1}{1+u})du=\ln u-\ln(1+u)$$

$$=\ln(\tan\frac{x}{2})-\ln(1+\tan\frac{x}{2})$$

در تساوی (۱) از تغییر متغیر $du=\frac{1}{2}(1+\tan^{2}\frac{x}{2})dx$ و $u=\tan\frac{x}{2}$ استفاده نموده و در (۲) عبارت $\frac{1}{u+u^{2}}$ را تجزیه نموده‌ایم.

۵- الف) برای بررسی همگرایی یا واگرایی $\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^{3}+1}}$ از آزمون همگرایی کمک می‌گیریم. پس داریم:

$$\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^{3}+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^{3}+1}}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^{3}}}$$

با توجه به نامساوی بالا، چون می‌دانیم سری‌هایی به صورت $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p}}$ برای $p>1$ همگرا هستند، پس سری بزرگتر همگرا است و در نتیجه سری کوچکتر هم همگرا است.

ب)

$$\int_{1}^{e}\frac{dx}{x\sqrt[5]{\ln x}}=\int_{1}^{e}\frac{1}{x}(\ln x)^{-\frac{1}{5}}dx\overset{(1)}{=}\int_{0}^{1}u^{-\frac{1}{5}}du=\frac{5}{4}u^{\frac{4}{5}}\Big|_{0}^{1}=\frac{5}{4}$$

در قسمت (۱) از تغییر متغیر $\ln x=u$ و $\frac{dx}{x}=du$ استفاده شده است.

۶-

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}(x-\frac{1}{x})\Rightarrow I=\int_{1}^{e}\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^{2}}=\int_{1}^{e}\sqrt{1+(\frac{1}{2}(x-\frac{1}{x}))^{2}}dx$$

$$=\int_{1}^{e}\sqrt{1+\frac{1}{4}(x-\frac{1}{x})^{2}}dx=\int_{1}^{e}\sqrt{1+\frac{1}{4}(x^{2}-2+\frac{1}{x^{2}})}dx=\int_{1}^{e}\sqrt{\frac{1}{4}(4+x^{2}-2+\frac{1}{x^{2}})}dx$$

$$=\int_{1}^{e}\frac{1}{2}\sqrt{x^{2}+2+\frac{1}{x^{2}}}\,dx=\frac{1}{2}\int_{1}^{e}\sqrt{(x+\frac{1}{x})^{2}}\,dx=\frac{1}{2}\int_{1}^{e}\left|x+\frac{1}{x}\right|dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{1}^{e}(x+\frac{1}{x})dx=\frac{1}{2}(\frac{x^{2}}{2}+\ln x|_{1}^{e})=\frac{1}{2}(\frac{e^{2}}{2}+\ln e-\frac{1}{2}-\ln 1)$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{e^{2}}{2}-1-\frac{1}{2}-0)=\frac{1}{2}(\frac{e^{2}}{2}-\frac{3}{2})=\frac{1}{4}(e^{2}-3)$$

۷- الف)

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(n+1)}{2^{n+1}(3n+2)}}{\frac{n}{2^{n}(3n-1)}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)(3n-1)}{2n(3n+2)}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3n^{2}+2n-1}{6n^{2}+4n}\right|=\frac{1}{2}\Rightarrow R_{\text{همگرایی}}=2\Rightarrow |x-1|<2\Rightarrow -1<x<3$$

حال در نقاط کرانه‌ای بحث می‌کنیم:

$$x=-1\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(-2)^{n}}{2^{n}(3n-1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}n}{(3n-1)}$$

چون حد دنباله‌ی $\frac{(-1)^{n}n}{3n-1}$ وقتی $n\to\infty$، در صورتی که n زوج یا فرد باشد مخالف صفر است. **پس این سری واگرا است.**

$$x=3\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(2^{n})}{2^{n}(3n-1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3n-1}$$

حد دنباله‌ی $\frac{n}{3n-1}$ **وقتی $n\to\infty$، مخالف صفر است. پس سری واگراست.**

ب) چون سری داده شده شرایط قضیه‌ی آزمون انتگرال را داراست، **پس با استفاده از این آزمون داریم:**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+n)\ln(1+n)}=\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{(1+x)\ln(1+x)}=\ln(\ln(1+x))|_{1}^{\infty}=\infty$$

پس سری واگراست.

میان‌ترم دوم ۸۴-۱۳۸۳
سؤال در صفحه ۴

سؤال در صفحه ۴

-۱

$$z=(i+1)i=-1+i=\sqrt{2}(\cos(\frac{3\pi}{4})+i\sin(\frac{3\pi}{4}))$$

$$z^n=(\sqrt{2})^n(\cos(\frac{3n\pi}{4})+i\sin(\frac{3n\pi}{4}))$$

n را باید طوری بیابیم که قسمت حقیقی عبارت فوق صفر گردد یعنی

$$\cos(\frac{3n\pi}{4})=0\Rightarrow\frac{3n\cancel{\pi}}{4}=2k\cancel{\pi}+\frac{\cancel{\pi}}{2}\qquad k=0,\pm1,\pm2,\dots$$

$$\Rightarrow n=\frac{8}{3}k+\frac{2}{3}\qquad k=0,\pm1,\pm2,\dots$$

به ازای n های فوق z^n و در نتیجه $\sqrt{i}\,z^n$ موهومی محض خواهد بود.

-۲

$$y=x(\cos\ln x+\sin\ln x)$$

$$y'=(\cos\ln x+\sin\ln x)+\cancel{x}(\frac{-\sin\ln x}{\cancel{x}}+\frac{\cos\ln x}{\cancel{x}})=2\cos\ln x$$

$$y''=\frac{-2\sin x\ln x}{x}\Rightarrow$$ تقعر نمودار به سمت پایین می‌باشد.

$$x^2y''-xy'+2y=x^2\times(\frac{-2\sin\ln x}{x})-x(2\cos\ln x)+2(x(\cos\ln x+\sin\ln x))$$

$$=-\cancel{2x\sin\ln x}-\cancel{2x\cos\ln x}+\cancel{2x\cos\ln x}+\cancel{2x\sin\ln x}=0$$

-۳

$$\lim_{x\to0^+}\frac{2\tan(1-\cos x)}{\sqrt{x^2+x+1}-1}\overset{H}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{2(1+\tan^2x)(1-\cos x)+2\tan x\sin x}{\frac{1}{2}(2x+1)(x^2+x+1)^{-\frac{1}{2}}}=\frac{0}{\frac{1}{2}}=0$$

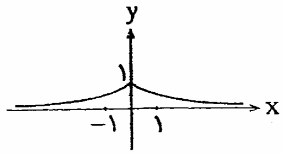
$$\lim_{x\to0^-}(1+\arctan x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^-}\left((1+\arctan x)^{\frac{1}{\arctan x}}\right)^{\frac{\arctan x}{x}}$$

$$=e^{\lim_{x\to0^-}\frac{\arctan x}{x}}=e^{\lim_{x\to0^-}\frac{x}{x}}=e$$

برای پیوسته بودن $f(x)$ باید مقادیر حد چپ و حد راست و مقدار تابع در نقطه‌ی $x=0$ با هم برابر باشند پس

$B=0\ ,\ A=-e$

-۴



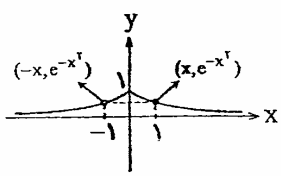
برای تعیین نقاط عطف مشتق دوم تابع $f(x)$ را محاسبه می‌کنیم و برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$f'(x) = -2xe^{-x^2}$$

$$f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = 0$$

$$\Rightarrow 4x^2e^{-x^2} = 2e^{-x^2} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$:نقاط عطف

از روی شکل مشاهده می‌کنید که تابع یک اکسترمم نسبی در نقطه‌ی $(0,1)$ دارد. حال اگر مستطیلی روی محور x ها قرار گیرد مساحت مستطیل برابر است با $S = 2xe^{-x^2}$. زیرا مستطیل در دو نقطه‌ی $(x,-e^{-x^2})$ و $(-x,e^{-x^2})$ تابع را قطع می‌کند. پس عرض مستطیل $2x$ و طول آن $-e^{x^2}$ است.



$$\Rightarrow S'_x = 2(e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2}) = 0 \Rightarrow 2x^2e^{-x^2} = e^{-x^2}$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{1}{2}$$

پس به ازای $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ مساحت مستطیل ماکزیمم می‌شود. در نتیجه مستطیل در دو نقطه‌ی $(\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-\frac{1}{2}})$ و $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-\frac{1}{2}})$ تابع را قطع می‌کند که این نقاط، همان نقاط عطف منحنی هستند.

۵- الف)

$$\int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x + \sin^4 x} \overset{(1)}{=} \int \frac{du}{u^2 + u^4} = \int (\frac{1}{u^2} - \frac{1}{1+u^2}) du = \frac{-1}{u} - \operatorname{Arc\tan} u$$

$$= \frac{-1}{\sin x} - \operatorname{Arc\tan}(\sin x)$$

در تساوی (۱) از تغییر متغیر $u = \sin x$ و $du = \cos x dx$ استفاده نموده‌ایم.

ب)

$$\int (2x+1) \arctan x dx \overset{(1)}{=} (x^2 + x) \arctan x - \int \frac{x^2 + x}{1 + x^2} dx$$

$$= (x^2 + x) \arctan x - \int \frac{x^2 + 1 - 1 + x}{1 + x^2} dx$$

$$= (x^2+x)\arctan x - \int\left(1+\frac{x-1}{x^2+1}\right)dx$$

$$= (x^2+x)\arctan x - x + \frac{xdx}{x^2+1} - \int\frac{dx}{x^2+1}$$

$$= (x^2+x)\arctan x - x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \arctan x$$

در تساوی (۱) از قاعده‌ی جزء به جزء با فرض $du = (2x+1)dx$ و $u = \arctan x$ استفاده نموده‌ایم.

ترم اول ۸۱-۱۳۸۰

سؤال در صفحه ۵

۱- با توجه به اینکه ریشه‌ی عبارت $1+iz$، عدد مختلط i می‌باشد و i ریشه‌ی معادله‌ی داده شده نیست ($z \neq i$) می‌توانیم ($1+iz$) را در دو طرف معادله مسأله ضرب کنیم.

$$(1+iz)(z^4+iz^3-z^2-iz+1)=0 \Rightarrow \cancel{z^4}+\cancel{iz^3}-\cancel{z^2}-\cancel{iz}+1+iz^5-\cancel{z^4}-\cancel{iz^3}+\cancel{z^2}+\cancel{iz}=0$$

$$\Rightarrow 1+iz^5=0 \Rightarrow iz^5=-1 \xrightarrow{i\times} z^5=i$$

پس جواب‌های معادله، کلیه ریشه‌های پنجم i، به جز خود i ($z \neq i$) هستند. در نتیجه

$$i=\cos(\frac{\pi}{2})+i\sin(\frac{\pi}{2})$$

$$z=\cos(\frac{\pi}{2}+\frac{2k\pi}{5})+i\sin(\frac{\pi}{2}+\frac{2k\pi}{5}) \quad , \quad k=0,1,2,3,4$$

بنابراین ریشه‌های معادله‌ی اصلی عبارتند از

$$z=\cos(\frac{\pi}{2}+\frac{2k\pi}{5})+i\sin(\frac{\pi}{2}+\frac{2k\pi}{5}) \quad , \quad k=1,2,3,4$$

۲- قضیه: اگر تابع f در بازه بسته $[a,b]$ پیوسته و در بازه باز (a,b) مشتق‌پذیر و به علاوه $f(a)=f(b)=0$ باشد،آنگاه حداقل یک نقطه مانند c، $c\in(a,b)$ وجود دارد به طوری که $f'(c)=0$.

برهان: برای اثبات، دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول) به ازای همه مقادیر x داشته باشیم $f(x)=0$.

در این حالت $f'(x)=0$ و بنابراین c می‌تواند هر یک از اعداد بین a و b را اختیار کند.

حالت دوم) $f(x)$ در بعضی نقاط (a,b) غیر صفر است.

در این حالت چون f روی $[a,b]$ پیوسته است، این تابع روی این بازه اکسترمم مطلق دارد. از این که $f(a)=f(b)=0$ و f در بعضی نقاط بازه (a,b) غیر صفر است، نتیجه می‌گیریم که f در نقطه‌ای مانند $c_1\in(a,b)$ دارای یک ماکسیمم مطلق مثبت یا در نقطه‌ای مانند $c_2\in(a,b)$ دارای یک مینیمم مطلق منفی است و یا هر دو. بنابراین f روی بازه باز (a,b) در نقطه‌ای مانند $c=c_1$ و یا $c=c_2$ اکسترمم مطلق و در نتیجه اکسترمم نسبی دارد و چون $f'(c)$ موجود است، پس داریم $f'(c)=0$.

۳- در نقطه‌ی $x_0=\frac{1}{2}$ چون $x_0\in\mathbb{Q}$، مقدار تابع عبارت است از

$$f(x_0)=x_0=\frac{1}{2}$$

و مقدار حدود چپ و راست تابع $f(x)$ که از ضابطه‌ی $x_0\notin\mathbb{Q}$ یعنی $1-x_0=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ محاسبه می‌شود برابر مقدار تابع می‌باشد. بنابراین $f(x)$ در نقطه‌ی $\frac{1}{2}$ پیوسته می‌باشد. امّا چون به ازای تمامی نقاط دیگر حقیقی این مقادیر یعنی مقدار تابع و حدود چپ و راست با هم برابر نخواهند بود، تابع ناپیوسته می‌باشد.

۴- الف)

$$\int_{0}^{\infty} xe^{-x}\cos x dx$$

برای حل انتگرال فوق ابتدا انتگرال زیر را حل می‌نماییم.

$$A=\int e^{-x}\cos x dx \overset{(1)}{=} -e^{-x}\cos x-\int e^{-x}\sin x dx \overset{(2)}{=} -e^{-x}\cos x+e^{-x}\sin x-\underbrace{\int e^{-x}\cos x dx}_{A}$$

$$\Rightarrow 2A=e^{-x}(\sin x-\cos x)\Rightarrow A=\frac{-e^{-x}}{2}(\sin x-\cos x)$$

در تساوی (۱) از قاعده جزء به جزء با فرض $dv=\cos x dx$ و $u=e^{-x}$ و در تساوی (۲) از قاعده‌ی جزء به جزء با فرض $dv=\sin x dx$ و $u=e^{-x}$ استفاده نمودیم. حال انتگرال اصلی مسئله را با استفاده از قاعده‌ی جزء به جزء و فرض $e^{-x}\cos x dx=dv$ و $u=x$ حل می‌کنیم:

$$I=\int xe^{-x}\cos x dx=x\frac{e^{-x}}{2}(\sin x-\cos x)-\frac{1}{2}\int e^{-x}(\sin x-\cos x)dx$$

$$=x\frac{e^{-x}}{2}(\sin x-\cos x)-\frac{1}{2}\underbrace{\int e^{-x}\sin x dx}_{B}+\frac{1}{2}\underbrace{\int e^{-x}\cos x dx}_{A}$$

$$B=\int e^{-x}\sin x dx \overset{(3)}{=} e^{-x}\sin x+\underbrace{\int e^{-x}\cos x dx}_{A} \overset{(4)}{=} -\frac{e^{-x}}{2}(\sin x+\cos x)$$

در تساوی (۳) از قاعده‌ی جزء به جزء با فرض $dv=\sin x dx$ و $u=e^{-x}$ استفاده نموده و در (۴) مقدار انتگرال A را جایگذاری و خلاصه نویسی نمودیم. پس

$$I=x\frac{e^{-x}}{2}(\sin x-\cos x)+\frac{e^{-x}}{4}(\sin x+\cancel{\cos x})+\frac{e^{-x}}{4}(\sin x-\cancel{\cos x})$$

$$=(x+1)\frac{e^{-x}}{2}\sin x-\frac{xe^{-x}}{2}\cos x$$

حال مقدار I از صفر تا ∞ را محاسبه می‌کنیم که با توجه به مقدار فوق برابر صفر خواهد بود.

ب)

$$\int\frac{dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}=\int\frac{dx}{a^2\frac{1}{1+\tan^2 x}+b^2\frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}}$$

$$=\int\frac{(1+\tan^2 x)dx}{a^2+b^2\tan^2 x}\overset{(1)}{=}\int\frac{du}{a^2+b^2u^2}=\frac{1}{a^2}\int\frac{du}{1+(\frac{b}{a})^2u^2}$$

$$=\frac{a}{ba^2}\int\frac{\frac{b}{a}du}{1+(\frac{bu}{a})^2}=\frac{1}{ba}\operatorname{Arctan}(\frac{bu}{a})=\frac{\operatorname{Arctan}(\frac{b\tan x}{a})}{ab}$$

در تساوی (۱) از تغییر متغیر $du=(1+\tan^2 x)dx$ و $u=\tan x$ استفاده نمودیم.

ج)

$$\int\frac{xdx}{(x-1)^2(x^2+1)}\overset{(1)}{=}\int\left(\frac{\frac{1}{2}}{(x-1)^2}-\frac{\frac{1}{2}}{x^2+1}\right)dx=\frac{1}{2}\left[\int\frac{dx}{(x-1)^2}-\int\frac{dx}{1+x^2}\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{-1}{x-1}-\operatorname{Arctan}x\right]$$

در تساوی (۱) عبارت $\frac{x}{(x-1)^2(x^2+1)}$ را تجزیه نمودیم.

د)

$$\int\operatorname{Arctan}(\sqrt{x+1})dx\overset{(1)}{=}x\operatorname{Arctan}(\sqrt{x+1})-\int\frac{1}{2}\frac{xdx}{\sqrt{x+1}(2+x)}$$
$$\overset{(2)}{=}x\operatorname{Arctan}(\sqrt{x+1})-\frac{1}{2}\int\frac{(u^2-1)\cancel{2}udu}{\cancel{u}(2+u^2-1)}=x\operatorname{Arctan}(\sqrt{x+1})-\frac{1}{2}\int\left(2-\frac{4}{u^2+1}\right)du$$
$$=x\operatorname{Arctan}(\sqrt{x+1})-u+2\operatorname{Arctan}u=x\operatorname{Arctan}(\sqrt{x+1})-\sqrt{x+1}+2\operatorname{Arctan}(\sqrt{x+1})$$

در تساوی (۱) از قاعده‌ی جزء به جزء و با فرض $dv=dx$ و $u=\operatorname{Arctan}(\sqrt{x+1})$ استفاده نمودیم که در آن $v=x$ و $du=\frac{\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}dx}{1+(\sqrt{x+1})^2}$ می‌باشد. در تساوی (۲) نیز از تغییر متغیر $u^2=x+1$ که $2udu=dx$، استفاده نمودیم.

۵-

$$y=f(x)=\int_0^x\sqrt{\cosh t}\,dt\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\sqrt{\cosh x}$$
$$l=\int_0^{\ln 2}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx=\int_0^{\ln 2}\sqrt{1+\cosh x}\,dx=\int_0^{\ln 2}\sqrt{1+\frac{e^x+e^{-x}}{2}}dx=\int_0^{\ln 2}\sqrt{\frac{(e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}})^2}{2}}dx$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\ln 2}(e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}})dx=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(2e^{\frac{x}{2}}-2e^{-\frac{x}{2}}\Big|_0^{\ln 2}\right)=\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}-1+1\right)=1$$

۶-

$$\begin{cases}x=\cos\theta\\ y=4+\sin\theta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}dx=-\sin\theta d\theta\\ dy=\cos\theta d\theta\end{cases}\Rightarrow dS^2=dx^2+dy^2=\sin\theta d\theta^2+\cos\theta d\theta^2=d\theta^2$$
$$\Rightarrow dS=d\theta\Rightarrow S=2\pi\int_0^{2\pi}ydS=2\pi\int_0^{2\pi}(4+\sin\theta)d\theta=2\pi\left(4\theta-\cos\theta\Big|_0^{2\pi}\right)$$
$$=2\pi(8\pi-1+1)=16\pi^2$$

۷- الف) با در نظر گرفتن $y=x^{\frac{1}{\ln 2x}}$ داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}y(x)=\lim_{x\to\infty}x^{\frac{1}{\ln 2x}}$$

$$\lim_{x\to\infty}(\ln y(x))=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln x}{\ln ۳x}\right)\overset{H}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{۱}{x}}{\frac{۳}{۳x}}=۱\Rightarrow\lim_{x\to\infty}(\ln(y(x))=۱$$

$$\Rightarrow\ln(\lim_{x\to\infty}\mathbf{y(x)})=۱\Rightarrow\lim_{x\to\infty}y(x)=e$$

ب)

$$\lim_{k\to+\infty}\left[\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=۱}^{n}\left(\frac{kn}{(ki)^۲+n^۲}\right)\right]=\lim_{k\to+\infty}\left[\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{n^۲}\left(\frac{kn}{\frac{(ki)^۲}{n^۲}+۱}\right)\right]$$

$$=\lim_{k\to+\infty}\left[\lim_{n\to+\infty}\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\left(\frac{k}{k^۲(\frac{i}{n})^۲+۱}\right)\right]=\lim_{k\to+\infty}\left[\int_{۰}^{۱}\frac{dx}{kx^۲+۱}\right]=\lim_{k\to+\infty}\left[\frac{۱}{۲k}\ln(kx^۲+۱)\Big|_{۰}^{۱}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(k+۱)}{۲k}\overset{H}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{۱}{k+۱}}{۲}=\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{۲(k+۱)}=۰$$

۸- با استفاده از آزمون مقایسه داریم:

$$\sum_{n=۲}^{\infty}(۱-\frac{۱}{n})^{n^۲}\Rightarrow\sum_{n=۲}^{\infty}(۱-\frac{۱}{n^۲})^{n^۲}<\sum_{n=۲}^{\infty}(۱-\frac{۱}{n})^{n^۲}$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}(۱-\frac{۱}{n^۲})^{n^۲}=\frac{۱}{e}$$

از آنجا که سری کوچکتر واگراست (زیرا حدود دنباله‌ی آن مخالف صفر است)، پس سری بزرگتر هم واگراست.

ترم دوم ۸۰-۱۳۷۹

سؤال در صفحه ۶

-۱

$$z^6 - 7z^3 - 8 = 0 \Rightarrow (z^3+1)(z^3-8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} z^3 = -1 \\ z^3 = 8 \end{cases}$$

$$-1 = \cos(\pi) + i\sin(\pi) \Rightarrow z = \cos(\frac{2k\pi}{3} + \pi) + i\sin(\frac{2k\pi}{3} + \pi) \quad , \quad k = 0, 1, 2$$

$$8 = 8(\cos(0) + \sin(0)) \Rightarrow z = \sqrt[3]{8}(\cos(\frac{2k\pi}{3}) + i\sin(\frac{2k\pi}{3})) \quad , \quad k = 0, 1, 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_1 = -1 \\ z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ z_3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} z_4 = 2 \\ z_5 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ z_6 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$$

$$\mathrm{Im}(z_1 + z_2 + \cdots + z_6) = 0 - \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$\mathrm{Im}(z_1.z_2.\ \ldots\ z_6) = (\sqrt[3]{8})^3 \sin(\pi + (\frac{2\pi}{3} + \pi) + (\frac{4\pi}{3} + \pi) + 0 + \frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}) = 8\sin 7\pi = 0$$

در تساوی فوق از رابطه‌ی زیر استفاده نموده‌ایم:

$$z_j = |z_j|(\cos(\theta_j) + i\sin(\theta_j)) \qquad j = 1, \ldots, n$$

$$\prod_{j=1}^{n} z_j = |z_1| \cdots |z_n| (\cos(\theta_1 + \cdots + \theta_n) + i\sin(\theta_1 + \cdots + \theta_n))$$

۲- الف) اگر تابع f روی $[a,b]$ پیوسته و روی (a,b) مشتق‌پذیر باشند، آنگاه حداقل یک نقطه‌ی c در بازه‌ی باز (a,b) وجود دارد به طوری که:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

ب)

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad : \quad |f(x) - f(y)| \le |x-y|^2$$

$$\xrightarrow{x \ne y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} \le |x-y|$$

از طرفین نامساوی فوق حدگیری می‌کنیم و y را به سمت x میل می‌دهیم:

$$\lim_{y \to x} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} \le \lim_{y \to x} |x-y| \Rightarrow |f'(x)| \le 0 \Rightarrow f'(x) = 0$$

چون x اختیاری است پس f تابعی ثابت می‌باشد، زیرا مشتق آن به ازای هر x متعلق به $\mathbb{R}$، صفر می‌گردد.

۳- الف)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2e^x}{x^4-1}\int_1^{x^2}\frac{\sin(\frac{\pi}{4}t)}{t}dt \overset{H}{=} \lim_{x\to 1}\frac{(2xe^x+x^2e^x)\int_1^{x^2}\frac{\sin(\frac{\pi}{4}t)}{t}dt+x^2e^x(2x\frac{\sin(\frac{\pi}{4}x^2)}{x^2}-0)}{4x^3}$$

$$=\frac{0+e(2\times\frac{\sqrt{2}}{2})}{4\times 1}=\frac{\sqrt{2}}{4}e$$

ب)

$$\lim_{n\to\infty} n^{-3}\left[e^{\frac{1}{n^3}}+2e^{\frac{8}{n^3}}+3e^{\frac{27}{n^3}}+\cdots+ne\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[n^{-2}\sum_{i=1}^{n} ie^{\frac{i^3}{n^3}}\right]=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}e^{(\frac{i}{n})^3}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\times\int_0^1 xe^{x^3}dx=0\times \text{عدد ثابت}=0$$

۴-

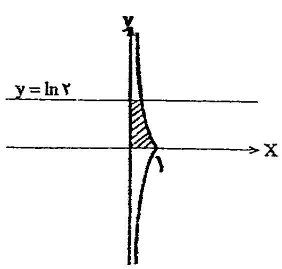
$$9x^2=4y^3\Rightarrow x^2=\frac{4}{9}y^3\Rightarrow x=\pm\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{dx}{dy}=\pm\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}}=\pm y^{\frac{1}{2}}\Rightarrow\frac{dx}{dy}=y$$

$$\Rightarrow \ell=\int_0^3\sqrt{1+(\frac{dx}{dy})^2dy}=\int_0^3\sqrt{1+y}\,dy=\frac{2}{3}(1+y)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^3=\frac{2}{3}(8-1)=\frac{14}{3}$$

۵- از روش برشی داریم:

$$V=\pi\int_0^{\ln 2}(\operatorname{sech}y-1)^2dy$$



$$=\pi\int_0^{\ln 2}(\operatorname{sech}^2y-2\operatorname{sech}y+1)dy$$

$$=\pi\left(\tanh y-2\operatorname{Arcsin}(\tanh y)+y\right)_0^{\ln 2}$$

$$=\pi\left(\frac{e^{\ln 2}-e^{-\ln 2}}{e^{\ln 2}+e^{-\ln 2}}-2\operatorname{Arcsin}(\frac{5}{3})+\ln 2-0\right)$$

$$=\frac{5}{3}+\ln 2-2\operatorname{Arcsin}(\frac{5}{3})$$

۶- الف)

$$\int\frac{\cos x+2\sin x}{3\sin x+4\cos x}dx \overset{(1)}{=} \int\frac{1+2\tan x}{3\tan x+4}dx \overset{(2)}{=} \int\frac{1+2u}{3u+4}\,\frac{du}{1+u^2}$$

$$=\int\frac{1+2u}{(1+u^2)(3u+4)}du \overset{(3)}{=} \int\left[\frac{\frac{1}{5}(u+2)}{1+u^2}-\frac{\frac{3}{5}}{3u+4}\right]du$$

$$=\frac{1}{5}\left(\int\frac{u}{1+u^2}du+2\int\frac{du}{1+u^2}-\int\frac{3du}{3u+4}\right)=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\ln(1+u^2)+2\,\mathrm{Arctan}\,u-\ln(3u+4)\right)$$

$$=\frac{1}{10}\ln(1+\tan^2 x)+\frac{2}{5}x-\ln(3\tan x+4)$$

در تساوی (۱) صورت و مخرج کسر را بر $\cos x$ تقسیم نمودیم. در تساوی (۲) نیز از تغییر متغیر $dx=\frac{du}{1+u^2}$ و $du=(1+\tan^2 x)dx$ و $u=\tan x$ استفاده کردیم. در تساوی (۳) هم، کسر انتگرال را تجزیه نمودیم.

ب)

$$I=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left[(\cos x)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+\ln(x^2)\right]dx=\underbrace{\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\cos x\left(\ln(1+x)-\ln(1-x)\right)dx}_{A}+\underbrace{\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\ln(x^2)dx}_{B}$$

از آنجا که تابع تحت انتگرال A یک تابع فرد بوده و بازه متقارن می‌باشد، $A=0$.

$$\cos(-x)\left(\ln(1-x)-\ln(1-(-x))\right)=\cos x\left(\ln(1-n)-\ln(1+x)\right)$$
$$=-\cos x\left(\ln(1+x)-\ln(1-x)\right)\Rightarrow f(-x)=-f(x)$$

اما مقدار انتگرال B را با قاعده جزء به جزء و فرض اینکه $dv=dx$، $u=\ln x^2$، $v=x$ و $du=\frac{2}{x}dx$ محاسبه می‌نمائیم.

$$B=x\ln x^2\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}-\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}2dx=\frac{1}{2}\ln(\frac{1}{4})+\frac{1}{2}\ln(\frac{1}{4})-2=\ln(\frac{1}{4})-2$$

پس مقدار انتگرال مسأله برابر است با $I=\ln(\frac{1}{4})-2=-2\ln(2)-2$

-۷

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\sin^{-1}(\frac{1}{n})\right)$$

از آنجا که سری داده شده یک سری متناوب است و $a_n=\sin^{-1}(\frac{1}{n})$ نزولی می‌باشد و $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$، پس سری مذکور همگراست.

۸-

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln x}+\sum\frac{x^n}{n!}$$

دامنه همگرایی هر یک از سری‌ها را محاسبه می‌کنیم. پس برای سری اول داریم:

$$\ln x>1\Rightarrow x>e$$

نکته: طبق قضایا داریم $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ برای $p>1$ همگرا هستند.

حال برای سری دوم می‌نویسیم:

$$a_n=\frac{1}{n!}\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n+1}\right|=0\Rightarrow R_{\text{همگرایی}}=\infty$$

پس سری دوم در کل $\mathbb{R}$ همگراست. حال با اشتراک‌گیری از دو بازه به بازه‌ی همگرایی سری مورد نظر در صورت سؤال می‌رسیم. پس داریم:

$$x\in\{(e,+\infty)\cap\mathbb{R}\}\Rightarrow x\in(e,+\infty)$$

ترم دوم ۷۹-۱۳۷۸

سؤال در صفحه ۷

۱- با فرض $z=a+ib$ و $w=c+id$ و از اینکه $|z|=|w|=۱$ نتیجه می‌شود. $a^۲+b^۲=c^۲+d^۲=۱$

(۱) حال مقادیر $|z-w|$ و $|۱-\bar{z}w|$ را محاسبه می‌کنیم. برای آنکه حکم مسئله برقرار باشد باید این مقادیر برابر باشند:

$$z-w=(a-c)+i(b-d)\Rightarrow |z-w|=\underline{a^۲}+\underline{\underline{c^۲}}-۲ac+\underline{b^۲}+\underline{\underline{d^۲}}-۲bd=۲-۲(ac+bd)$$

$$۱-\bar{z}w=۱-(a-ib)(c+id)=۱-ac+bd+i(ad-bc)\Rightarrow$$

$$|۱-\bar{z}w|=۱-۲(ac+bd)+(ac+bd)^۲+a^۲d^۲-۲adbc+b^۲c^۲$$

$$=۱-۲(ac+bd)+\underline{a^۲c^۲}\cancel{+۲acbd}+\underline{\underline{b^۲d^۲}}+\underline{a^۲d^۲}\cancel{-۲abdc}+\underline{\underline{b^۲c^۲}}$$

$$=۱-۲(ac+bd)+a^۲(\underbrace{c^۲+d^۲}_{۱})+b^۲(\underbrace{d^۲+c^۲}_{۱})=۲-۲(ac+bd) \qquad (۲)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که حکم برقرار است:

$$|z-w|=|۱-\bar{z}w|\Rightarrow\left|\frac{z-w}{۱-\bar{z}w}\right|=۱$$

۲- قضیه؛ اگر تابع f روی $[a,b]$ پیوسته و روی (a,b) مشتق پذیر باشد، آنگاه حداقل یک نقطه‌ی c در بازه‌ی باز (a,b) وجود دارد به طوری که:

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

برهان؛ قرار می‌دهیم:

$$\varphi(x)=f(x)-\lambda x$$

که در آن $\lambda=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. تابع $\varphi(x)$ روی $[a,b]$ پیوسته است و داریم:

$$\left.\begin{aligned}\varphi(a)=f(a)-\lambda a=\frac{bf(a)-af(b)}{b-a}\\ \varphi(b)=f(b)-\lambda b=\frac{bf(a)-af(b)}{b-a}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\varphi(a)=\varphi(b)$$

چون $\varphi(x)$ بر روی بازه‌ی (a,b) مشتق‌پذیر است. بنابر قضیه‌ی رول، حداقل نقطه‌ای مانند $c\in(a,b)$ وجود دارد که $\varphi'(c)=۰$. از طرفی

$$\varphi'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

اکنون اگر $x=c$ را در رابطه‌ی بالا قرار دهیم، به‌دست می‌آوریم

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\Rightarrow f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

برای قسمت دوم فرض کنیم:

$$f:[۰,x]\to\mathbb{R}$$

$$f(x)=(۱+x^۲)\operatorname{Arctan}x$$

۷- الف) از آنجا که سری داده شده در آزمون انتگرال صدق می‌کند پس داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}=\int_1^{\infty}\frac{\ln x}{x^2}dx\overset{(1)}{=}-\frac{\ln x}{x}\Big|_1^{\infty}+\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx=-\frac{\ln x}{x}\Big|_1^{\infty}-\frac{1}{x}\Big|_1^{\infty}$$

$$=-(\frac{\ln x+1}{x}\Big|_1^{\infty})=-(\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x+1}{x}-\ln 2)\overset{H}{=}-(\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}-\ln 2)$$

$$=-(0-\ln 2)=\ln 2$$

پس سری داده شده همگرا است. در قسمت (۱) با روش جزء به جزء از فرض $u=\ln x$ و $\frac{dx}{x^2}=dv$ استفاده نموده‌ایم.

ب) از آنجا که سری داده شده در شرایط آزمون انتگرال صدق می‌کند، پس داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n})=\int_1^{\infty}\ln(1+\frac{1}{x})dx=x\ln(1+\frac{1}{x})\Big|_1^{\infty}+\int_1^{\infty}\frac{dx}{(1+x)}$$

$$=\left[x\ln(1+\frac{1}{x})+\ln(1+x)\right]\Big|_1^{\infty}=\left[\ln(1+\frac{1}{x})^x+\ln(1+x)\right]\Big|_1^{\infty}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[(1+\frac{1}{x})^x+\ln(1+x)\right]-2\ln 2=e+\infty-2\ln 2=\infty$$

پس سری واگراست.

-۸

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(e^x)^n}{n^2-n+1}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+1)^2-(n+1)+1}}{\frac{1}{n^2-n+1}}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n^2+2n+1-n-1+1}}{n^2-n+1}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n^2+n+1}}{\frac{1}{n^2-n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^2-n+1}{n^2+n+1}\right|=1$$

R همگرایی $=1\Rightarrow|e^x|<1\Rightarrow 0<e^x<1\Rightarrow-\infty<x<1$

در مورد نقطه‌ی مرزی ۱ بحث می‌کنیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n^2-n+1}$$

از آنجا که $\lim_{n\to\infty}\frac{e^n}{n^2-n+1}=\infty$، پس سری واگراست. در نتیجه بازه‌ی همگرایی $x\in(-\infty,1)$ است.