

۱- فرض کنید که تابع  $f$  در فاصله‌ای باز شامل نقطه  $x_0$  تعریف شده باشد. هرگاه به ازای هر عدد  $\beta > 0$  عددی مثبت مانند  $\alpha$  وجود داشته باشد، بطوریکه برای هر  $x \in D_f$  و  $|x - x_0| < \alpha$  نامساوی  $|f(x) - L| < \beta$  برقرار باشد، رفتار  $f$  در نقطه  $x_0$  کدام است؟

- (۱) تابع  $f$  در نقطه  $x = x_0$  دارای حد برابر  $L$  است.  
 (۲) تابع  $f$  در نقطه  $x = x_0$  دارای حد چپ برابر  $L$  است.  
 (۳) تابع  $f$  در نقطه  $x = x_0$  دارای حد راست برابر  $L$  است.  
 (۴) تابع  $f$  در نقطه  $x = x_0$  دارای حدی برابر  $L$  نیست.

۲- باقیمانده عبارت  $x^4 - x + 2$  به سه جمله‌ای  $x^2 - x + 1$  کدام است؟

- (۱)  $-2x + 2$        (۲)  $-2x - 2$        (۳)  $-x - 2$        (۴)  $-x + 2$

۳- حد عبارت  $\frac{\sin^2 3x}{x^2}$  وقتی  $x \rightarrow 0$  کدام است؟

- (۱) ۳       (۲) ۶       (۳) ۹       (۴) ۱۲

۴- معادله خط مجانب نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{4 - 2x}{\sqrt{x^2 - 2x}}$  وقتی  $x < 0$  کدام است؟

- (۱)  $y = -2$        (۲)  $y = -1$        (۳)  $y = 1$        (۴)  $y = 2$

۵- باقیمانده تقسیم عبارت  $x^4 + ax^3 + bx^2 + x + 1$  بر  $x^2 - 1$  برابر صفر است،  $b$  کدام است؟

- (۱) -۳       (۲) -۲       (۳) ۲       (۴) ۴

۶- به ازای کدام مجموعه مقادیر  $a$  تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} [x] - x & x \notin Z \\ a & x \in Z \end{cases}$  همواره پیوسته است؟

- (۱)  $\emptyset$        (۲)  $\{-1\}$        (۳)  $\{0\}$        (۴)  $\{1\}$

۷- حد تابع  $y = \frac{4x - \sqrt{x^2 + 1}}{2x + \sqrt{x^2 - 1}}$  وقتی  $x$  به سمت  $+\infty$  میل می‌کند کدام است؟

- (۱) ۵       (۲) ۲       (۳)  $\frac{5}{4}$        (۴) ۱

۸- اگر تابع  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 2 \\ ax + 1 & x < 2 \end{cases}$  در  $x = 2$  پیوسته باشد، مقدار  $a$  کدام است؟

$a = -2 \quad (4) \square$

$a = 0 \quad (3) \square$

$a = 1 \quad (2) \square$

$a = 2 \quad (1) \square$

۹- تابع  $f(x) = \frac{\sin x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$  در فاصله  $0 \leq x \leq \pi$  چند خط مجانب دارد؟

$1 \quad (4) \square$

$2 \quad (3) \square$

$3 \quad (2) \square$

$4 \quad (1) \square$

۱۰- مقدار  $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3 - [x]}{x - 3} \sqrt{x^2 - 6x + 9}$  برابر است با:

$-\infty \quad (4) \square$

$-1 \quad (3) \square$

$\text{صفر} \quad (2) \square$

$1 \quad (1) \square$

۱۱- تابع  $y = \frac{1}{x - |x|}$  در کدام فاصله پیوسته است؟

$(-\infty, 0) \quad (4) \square$

$(-1, +1) \quad (3) \square$

$(1, +\infty) \quad (2) \square$

$(0, +\infty) \quad (1) \square$

۱۲- حد کسر  $\frac{\sin x \operatorname{tg} 2x}{x + 3x^2}$  وقتی  $x \rightarrow 0$  کدام است؟

$\infty \quad (4) \square$

$0 \quad (3) \square$

$\frac{2}{3} \quad (2) \square$

$2 \quad (1) \square$

۱۳- حد عبارت  $\frac{\sin x}{\sqrt{1 - \cos x}}$  وقتی  $x \rightarrow 0^+$  برابر کدام است؟

$\infty \quad (4) \square$

$\sqrt{2} \quad (3) \square$

$0 \quad (2) \square$

$-\sqrt{2} \quad (1) \square$

۱۴- حد  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \operatorname{tg} 3x}$  ، کدام است؟

$\frac{2}{3} \quad (4) \square$

$\frac{1}{3} \quad (3) \square$

$-\frac{1}{3} \quad (2) \square$

$-\frac{2}{3} \quad (1) \square$

۱۵- حاصل  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + \sqrt{x+2}}{x^3 + 1}$  کدام است؟

- ۲ (۴)       -۲ (۳)        $\frac{1}{2}$  (۲)        $-\frac{1}{2}$  (۱)

۱۶- مجموع حد چپ و راست  $y = (x^2 + 1)[x^2 - 2]$  در  $x \rightarrow \sqrt{2}$  کدام است؟

- ۶ (۴)       -۳ (۳)       ۳ (۲)       ۶ (۱)

۱۷- به ازای کدام مقدار  $a$  تابع  $f(x) = \begin{cases} |x+1| + ax & x > -1 \\ x^2 + 1 & x \leq -1 \end{cases}$  در نقطه‌ی  $x = -1$  پیوسته است؟

- ۱ (۴)       -۳ (۳)       -۲ (۲)       ۲ (۱)

۱۸- مجموع مقادیر حد چپ و راست تابع  $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1} + \frac{|x - 1|}{x - 1}$  وقتی  $x \rightarrow 1$  چقدر است؟

- ۴ (۴)       ۲ (۳)       صفر (۲)       ۳ (۱)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{k^3 + x} - 1 - k}{x - 1} = \frac{1}{12}$$

۱۹- در تساوی مقابل مقدار  $k$  کدام است؟

- $|k| = 4$  (۴)        $|k| = 3$  (۳)        $|k| = 2$  (۲)        $|k| = 1$  (۱)

۲۰- اگر تابع  $f(x) = 2x[x - 1] + a[x]$  در  $x = 2$  پیوسته باشد، مقدار  $a$  کدام است؟

- ۴ (۴)       -۲ (۳)       -۴ (۲)       صفر (۱)

Time : 30 Min

۱- طبق تعریف حد داریم :

$$\forall \beta > 0, \exists \alpha > 0 : 0 < |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - L| < \beta \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

با توجه به مفروضات مطرح شده در سوال و تعریف فوق، تابع  $f(x)$  در  $x = x_0$  دارای حدی برابر  $L$  می‌باشد و بنابراین گزینه ۱ صحیح است.

۲- می‌دانیم  $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$  پس :

$$x^4 - x + 2 = x^4 + x - 2x + 2 = x(x^3 + 1) - 2x + 2 = x(x + 1)(x^2 - x + 1) - 2x + 2$$

بنابراین باقیمانده مورد نظر برابر با  $-2x + 2$  می‌باشد. لذا گزینه ۱ صحیح است.

۳- چون  $u \rightarrow 0$  پس  $\sin u \approx u$  می‌باشد، پس جایگزینی هم‌ارزی انجام می‌دهیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3x)^2}{x^2} = 9$$

بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

۴- تابع مذکور برای  $x < 0$  پیوسته است و وقتی  $x \rightarrow -\infty$  دارای مجانب افقی است که بصورت زیر بدست می‌آید :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 - 2x}{\sqrt{x^2 - 2x}} = 0 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x\left(\frac{4}{x} - 2\right)}{-x\sqrt{1 - \frac{2}{x}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{4}{x} - 2}{-\sqrt{1 - \frac{2}{x}}} = \frac{-2}{-1} = 2$$

بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + x + 1 = (x^2 - 1)Q(x)$$

۵-

چون به ازای  $x = 1$  و  $x = -1$ ، طرفین تساوی صفر می‌شود، پس :

$$\left. \begin{aligned} 1 + a + b + 1 + 1 &= 0 \\ 1 - a + b - 1 + 1 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} b = -2 \\ a = -1 \end{cases}$$

بنابراین گزینه ۲ صحیح است.

۶- اگر  $X$  متعلق به مجموعه اعداد صحیح نباشد، داریم :

$$0 < x - [x] < 1 \Rightarrow -1 < [x] - x < 0 \Rightarrow [[x] - x] = -1 \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -1 & x \notin Z \\ a & x \in Z \end{cases}$$

بنابراین شرط پیوستگی  $a = -1$  می‌باشد و گزینه ۲ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x - \sqrt{x^2 + 1}}{2x + \sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x - |x|}{2x + |x|} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x - x}{2x + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{3x} = 1 \quad -7$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 2 \\ ax + 1 & x < 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(2) = 2^2 + 1 = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2^2 + 1 = 5 \Rightarrow 2a + 1 = 5 \Rightarrow a = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2a + 1 \end{cases} \quad -8$$

بنابراین گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \frac{\sin x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{\sin x}{1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\sin x \cdot \cos^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{\sin x \cdot \cos^2 x}{\cos 2x} \quad -9$$

$$\cos 2x = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \\ 2x = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

بنابراین گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3 - [x]}{x - 3} \sqrt{x^2 - 6x + 9} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3 - 2}{x - 3} \sqrt{(x - 3)^2} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x - 3} \times |x - 3| = \quad -10$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x - 3} \times -(x - 3) = -1$$

پس گزینه ۳ پاسخ صحیح سؤال است.

۱۱-  $f(x) = x - |x|$  یک تابع پیوسته است پس تابع  $y = \frac{1}{x - |x|}$  فقط در نقاطی که  $x - |x| = 0$ ، پیوسته نمی‌باشد

$$x - |x| = 0 \Rightarrow x = |x| \Rightarrow x \geq 0$$

پس:

پس این تابع برای نقاط بزرگتر یا مساوی صفر پیوسته نمی‌باشد، یعنی برای نقاط کوچکتر از صفر پیوسته است. بنابراین گزینه ۴ پاسخ صحیح سوال است.

۱۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} \text{tg } u &\approx u & \text{Sin } u &\approx u \\ u &\rightarrow 0 & u &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

یادآوری:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Sin } x \text{ tg } 2x}{x^3 + 3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(2x)}{x^3 + 3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x+3} = \frac{2}{3}$$

پس:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\text{Sin}(x)}{\sqrt{1 - \text{Cos}(x)}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \text{Sin}\left(\frac{x}{2}\right) \text{Cos}\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{2 \text{Sin}^2\left(\frac{x}{2}\right)}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \text{Sin}\left(\frac{x}{2}\right) \text{Cos}\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{2} \left| \text{Sin}\left(\frac{x}{2}\right) \right|}$$

-۱۳

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \text{Sin}\left(\frac{x}{2}\right) \text{Cos}\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{2} \text{Sin}\left(\frac{x}{2}\right)} = \sqrt{2}$$

بنابراین گزینه ۳ پاسخ صحیح سوال است.

تذکر: این مساله از روش هوییتال قابل حل نمی‌باشد، زیرا هیچ وقت از حالت ابهام خارج نمی‌شود.

$$\text{Sin}(u) \approx u \quad \text{tg}(u) \approx u$$

۱۴- یادآوری:  $u \rightarrow 0$  و  $u \rightarrow 0$  می‌باشند.

بنابراین گزینه ۴ پاسخ صحیح سوال است.

تذکر: این مساله به کمک قاعده هوییتال نیز قابل حل است.

۱۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.  
تذکر: این حد به کمک قاعده هوییتال به سادگی قابل حل است.

۱۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \cdot - a = -a \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = f(-1) = 1 + 1 = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow a = -2$$

۱۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۱۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{array}{l} \text{حل: } y = (x + 1) + \frac{|x - 1|}{x - 1} \\ x \rightarrow 1^- \Rightarrow \lim y = \lim \left[ (x + 1) + \frac{1 - x}{x - 1} \right] = \lim [x + 1 - 1] = 1 \\ x \rightarrow 1^+ \Rightarrow \lim y = \lim \left[ (x + 1) + \frac{x - 1}{x - 1} \right] = \lim [x + 2] = 3 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} x \rightarrow 1^- \\ x \rightarrow 1^+ \end{array}} \right\} \Rightarrow 1 + 3 = 4$$

۱۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim \frac{\sqrt[3]{k^3 + x - 1} - k}{x - 1} \times \frac{\sqrt[3]{(k^3 + x - 1)^2} + k\sqrt[3]{k^3 + x - 1} + k^2}{\sqrt[3]{(k^3 + x - 1)^2} + k\sqrt[3]{k^3 + x - 1} + k^2}$$

$$\frac{k^3 + x - 1 - k^3}{(x - 1) \left( \sqrt[3]{(k^3 + x - 1)^2} + k\sqrt[3]{k^3 + x - 1} + k^2 \right)} = \frac{1}{3k^2} = \frac{1}{12} \Rightarrow |k| = 2$$

۲۰- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = 2x[x] - 2x + a[x] = (2x + a)[x] - 2x$$

راه اول:

برای آنکه تابع در  $x = 2$  پیوسته باشد، کافی است  $2x + a$  به ازای  $x = 2$  برابر صفر باشد، یعنی  $4 + a = 0$  که  $a = -4$

