مسائل حل شده

۱.حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید.

الف) $\sqrt{-3}.\sqrt{-12}$

$\sqrt{-3}.\sqrt{-12}=(\sqrt{3}i)(\sqrt{12}i)=\sqrt{36}i^2=-6$

ب) $(1-2i)(8-3i)$

$(1-2i)(8-3i)=(8-6)+i(-3-16)=2-19i$

ج) $\dfrac{3+2i}{1-4i}$

$\dfrac{3+2i}{1-4i}=\dfrac{3-8}{1+16}+i\dfrac{2+12}{1+16}=\dfrac{-5}{17}+\dfrac{14}{17}i$

د) $\dfrac{1}{1+i}$

$\dfrac{1}{1+i}=\dfrac{1}{1+1}+i\dfrac{-1}{1+1}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$

ه) $\dfrac{3}{4-3i}$

$\dfrac{3}{4-3i}=3\dfrac{1}{4-3i}=3\left(\dfrac{4}{16+9}+i\dfrac{3}{16+9}\right)=\dfrac{12}{25}+\dfrac{9}{25}i$

و) $\overline{2i(\frac{1}{2}-i)}$

$\overline{2i(\frac{1}{2}-i)}=\overline{i-2i^2}=\overline{i+2}=2-i$

ز) $(1-i)(2-i)(3-i)$

$(1-i)(2-i)(3-i)=[(2-1)+i(-1-2)](3-i)$

$=(1-3i)(3-i)=(3-3)+i(-1-9)=-10i$

۲. فرم قطبی اعداد مختلط زیر را بنویسید.

الف) $z=1-\sqrt{3}i$

$r=|z|=\sqrt{1+3}=2$ و $\tan\theta=-\sqrt{3}$ ،چون z در ربع چهارم صفحه مختلط است، بنابراین $\theta=\dfrac{5\pi}{3}$ و فرم قطبی z به صورت $2(\cos\dfrac{5\pi}{3}+i\sin\dfrac{5\pi}{3})$ می باشد.

ب) $z=8i$

$r=|z|=\sqrt{64}=8$ و $\tan\theta=\dfrac{8}{0}$ ، بنابراین $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ و فرم قطبی z به صورت $8(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2})$ می باشد.

ج) $z=4\sqrt{3}+4i$

$r=|z|=\sqrt{48+16}=8$ و $\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$، چون z در ربع اول صفحه مختلط قرار دارد بنابراین $\theta=\frac{\pi}{6}$ و فرم قطبی z به صورت $8(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$ می باشد.

۳.فرم قطبی اعداد مختلط z_1, z_2 را نوشته، سپس $\frac{z_1}{z_2}$، $z_1.z_2$ و $\frac{1}{z_1}$ را به فرم قطبی بنویسید.

الف) $z_1=2\sqrt{3}-2i$ و $z_2=-1+i$

$z_1=2\sqrt{3}-2i$ بنابراین $r_1=\sqrt{12+4}=4$ و $\tan\theta_1=\frac{-1}{\sqrt{3}}$ ، چون z در ربع چهارم صفحه مختلط قرار دارد، بنابراین $\theta_1=\frac{11\pi}{6}$ و فرم قطبی z_1 به صورت $z_1=4(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6})$ می باشد. همچنین $z_2=-1+i$ بنابراین $r_2=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$ و $\tan\theta_2=-1$، چون z_2 در ربع دوم صفحه مختلط قراردارد، بنابراین $\theta_2=\frac{3\pi}{4}$ و فرم قطبی z_2 به صورت $z_2=\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4})$ می باشد.لذا فرم قطبی $z_1.z_2$ به صورت

$$z_1.z_2=4\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{11\pi}{6}+\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{11\pi}{6}+\frac{3\pi}{4}\right)\right]=4\sqrt{2}\cos\left(\frac{31\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{31\pi}{12}\right)$$
$$=4\sqrt{2}\left[\cos\left(3\pi-\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(3\pi-\frac{5\pi}{12}\right)\right]=4\sqrt{2}\left(-\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right),$$

و فرم قطبی $\frac{z_1}{z_2}$ به صورت

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{4}{\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{11\pi}{6}-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{11\pi}{6}-\frac{3\pi}{4}\right)\right]=\frac{4}{\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)\right]$$
$$=\frac{4}{\sqrt{2}}\left[\cos\left(\pi+\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{12}\right)\right]=\frac{4}{\sqrt{2}}\left(-\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12}\right),$$

و فرم قطبی $\frac{1}{z_1}$ به صورت

$$\frac{1}{Z_1}=\frac{1}{4(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6})}=\frac{1}{4}\left[\cos\left(\frac{-11\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{-11\pi}{6}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{4}\left[\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)-i\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)\right]=\frac{1}{4}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

می باشد.

ب) z_1-3-3i و $z_2=-1$

$z_1=-3-3i$، بنابراین $r_1=\sqrt{9+9}=3\sqrt{2}$ و $\tan\theta_1=1$، چون z_1 در ربع سوم صفحه مختلط قرار دارد ،لذا $\theta_1=\frac{5\pi}{4}$ و فرم قطبی z_1 به صورت $z_1=3\sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4})$ می باشد.همچنین $z_2=-1$ بنابراین $r_2=\sqrt{1}=1$ و $\tan\theta_2=\frac{0}{-1}=0$، آنگاه $\theta_2=\pi$ و فرم قطبی z_2 به صورت $z_2=\cos\pi+i\sin\pi$ می باشد.همچنین فرم قطبی $z_1.z_2$ به صورت

$$z_1.z_2=3\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{4}+\pi\right)\right]$$
$$=3\sqrt{2}\left(\cos\frac{9\pi}{4}+i\sin\frac{9\pi}{4}\right)=3\sqrt{2}\left[\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right)\right]=3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

فرم قطبی $\frac{z_1}{z_2}$ به صورت

$$\frac{z_1}{z_2}=3\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}-\pi\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{4}-\pi\right)\right]=3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

و فرم قطبی $\frac{1}{z_1}$ به صورت

$$\frac{1}{z_1}=\frac{1}{3\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right]}=\frac{1}{3\sqrt{2}}\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{3\sqrt{2}}\left[\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)-i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)\right]=\frac{1}{3\sqrt{2}}\left(-\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

٤.حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید.

الف) $(1+i)^{20}$

با قرار دادن $z=1+i$ داریم $r_1=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$ و $\theta=\frac{\pi}{4}$، بنابراین فرم قطبی z به صورت $\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$ می باشد و

$$z=(1+i)^{20}=\left[\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{20}=2^{10}\left[\cos\frac{20\pi}{4}+i\sin\frac{20\pi}{4}\right]=2^{10}(-1+0i)=-2^{10}.$$

ب) $\left(1-\sqrt{3}i\right)^5$

با قرار دادن $z=\left(1-\sqrt{3}i\right)^5$ داریم $r_1=\sqrt{1+3}=2$ و $\theta=\frac{5\pi}{3}$،بنابراین فرم قطبی z به صورت $2(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3})$ می باشد و

$$Z^5=\left(1-\sqrt{3}i\right)^5=\left[2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)\right]^5=32\left(\cos\frac{25\pi}{3}+i\sin\frac{25\pi}{3}\right)$$
$$=32\left[\cos\left(8\pi+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(8\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right]=32\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=32\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=16+16\sqrt{3}.$$

ج) $\left(2\sqrt{3}+2i\right)^5$

با قرار دادن $z=2\sqrt{3}+2i$ داریم $r=\sqrt{12+4}=4$ و $\theta=\frac{\pi}{6}$، بنابراین فرم قطبی z به صورت $z=4(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$ می باشد و

$$Z^5=\left(2\sqrt{3}+2i\right)^5=\left[4\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]^5=4^5\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$=4^5\left(-\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=4^5\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=-2^9\sqrt{3}+2^9 i.$$

د) $(1-i)^8$

با قرار دادن $z=1-i$ داریم $r=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$ و $\theta=\frac{7\pi}{4}$، بنابراین فرم قطبی z به صورت $\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4})$ می باشد و

$$Z^8=(1-i)^8=\left[\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4})\right]^8=(\sqrt{2})^8\left[\cos 14\pi+i\sin 14\pi\right]=2^4\left[1+0i\right]=16.$$

۵.اعداد زیر را به فرم $x+iy$ بنویسید.

الف) $e^{i\frac{\pi}{3}}$

بنابر فرمول اویلر داریم:

$$e^{i\frac{\pi}{3}}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

ب) $e^{2+i\pi}$

با قرار دادن $e^{2+i\pi}=e^2.e^{i\pi}$ و بنابر فرمول اویلر داریم:

$$e^{2+i\pi}=e^2.e^{i\pi}=e^2(\cos\pi+i\sin\pi)=e^2(-1+0i)=-e^2.$$

ج) $e^{\pi+i}$

با قرار دادن $e^{\pi+i}=e^{\pi}.e^{i}$ و بنابر فرمول اویلر داریم:

$$e^{\pi+i}=e^{\pi}.e^{i}=e^{\pi}(\cos 1+i\sin 1).$$

د) $e^{-1+i\frac{\pi}{2}}$

با قرار دادن $e^{-1+i\frac{\pi}{2}}=e^{-1}.\ e^{i\frac{\pi}{2}}$ و بنابر فرمول اویلر داریم:

$$e^{-1+i\frac{\pi}{2}}=e^{-1}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=e^{-1}(0+i)=e^{-1}i.$$

٦.با بکارگیری دستور دموآر به ازای $n=3$ ، $\cos 3\theta$ و $\sin 3\theta$ را بر حسب $\cos\theta$ و $\sin\theta$ بنویسید.

بنابر دستور دموآر داریم:

$$(\cos\theta+\sin\theta)^3=\cos 3\theta+\sin 3\theta\Rightarrow$$
$$\cos^3\theta+i^3\sin^3\theta+3\cos^2\theta\, i\sin\theta+3\cos\theta\, i^2\sin^2\theta=\cos 3\theta+i\sin 3\theta,$$

$$\cos^3\theta-i\sin^3\theta+3i\cos^2\theta\sin\theta-3\cos\theta\sin^2\theta=\cos 3\theta+i\sin 3\theta,$$

$$(\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta)+i(3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta)=\cos 3\theta+i\sin 3\theta,$$

بنابر تساوی دو عدد مختلط داریم:

$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta,$

$\sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta,$

و با توجه به رابطه های $\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta$ و $\cos^2\theta = 1-\sin^2\theta$ نتیجه می شود:

$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta,$

$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta.$

۷. ریشه های سوم عدد مختلط $z=1+i$ را بیابید.

با توجه به معادله $z=1+i$ داریم $r=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$ و $\theta=\frac{\pi}{4}$.

$$\sqrt[3]{1+i}=\sqrt[3]{\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{2k\pi+\frac{\pi}{4}}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi+\frac{\pi}{4}}{3}\right)\right],\quad k=0,1,2$$

و سه ریشه عدد مختلط z عبارتند از:

$$w_0=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right),$$
$$w_1=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{12}+i\sin\frac{9\pi}{12}\right),$$
$$w_2=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12}+i\sin\frac{17\pi}{12}\right)=\sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\pi+\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{5\pi}{12}\right)\right)=\sqrt[6]{2}\left(-\cos\frac{5\pi}{12}-i\sin\frac{5\pi}{12}\right).$$

۸. معادله $z^4-2z^2+4=0$ را حل کنید.

با قرار دادن $z^2=w$ در معادله $z^4-2z^2+4=0$ داریم:

$$w^2-2w+4=0\Rightarrow w=\frac{2\pm\sqrt{-12}}{2}\Rightarrow z^2=\frac{2\pm2\sqrt{3}i}{2}\Rightarrow z=\sqrt{1\pm\sqrt{3}i}$$

برای به دست آوردن ریشه های معادله باید ریشه های دوم اعداد مختلط $1+\sqrt{3}i$ و $1-\sqrt{3}i$ محاسبه شوند.

$$z_1=1+\sqrt{3}i\Rightarrow r_1=|z_1|=2,$$
$$\sqrt{1+\sqrt{3}i}=\pm\left[\sqrt{\frac{1}{2}(2+1)}+i\sqrt{\frac{1}{2}(2-1)}\right]=\pm\left(\sqrt{\frac{3}{2}}+i\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$$

$$z_2=1-\sqrt{3}i\Rightarrow r_2=|z_2|=2,$$
$$\sqrt{1-\sqrt{3}i}=\pm\left[\sqrt{\frac{1}{2}(2+1)}-i\sqrt{\frac{1}{2}(2-1)}\right]=\pm\left(\sqrt{\frac{3}{2}}-i\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$$

بنابراین $\sqrt{\frac{3}{2}}+i\sqrt{\frac{1}{2}}$، $-\sqrt{\frac{3}{2}}-i\sqrt{\frac{1}{2}}$، $\sqrt{\frac{3}{2}}-i\sqrt{\frac{1}{2}}$ و $-\sqrt{\frac{3}{2}}+i\sqrt{\frac{1}{2}}$ ریشه های معادله می باشند.

۹. نشان دهید به ازای هر عدد طبیعی n ، $i^{4n}=1$ و $i^{4n+3}=-i$

می دانیم $i=\sqrt{-1}$ و $i^2=-1$ بنابراین

$i^4=i^{2\times2}=i^2\times i^2=(-1)(-1)=1,$

$i^8=i^{4\times2}=i^4\times i^4=1\times1=1,$

$i^{12}=i^{4\times3}=i^8\times i^4=1\times1=1,$

و در حالت کلی به ازای هر $n\in N$ ، $i^{4n}=1$ همچنین

$$i^{4n+3} = i^{4n}.i^{3} = 1 \times i^{3} = i^{3} = i^{2} \times i^{1} = -i.$$

دامنه توابع زیر را بدست آورید.

الف) $f(x) = \sqrt{-x^2+4x-5}$

ابتدا عبارت درجه ۲ را تعیین علامت می‌کنیم

$P: -x^2+4x-5$

$\Delta = b^2-4ac = 16-4\times(-1)(-5) = 16-20 = -4$

چون $\Delta<0$ است و a (ضریب x^2) همواره منفی است بنابراین علامت P همواره منفی می‌شود لذا $D_f = \varnothing$

ب) $f(x) = \sqrt{-\sin^2 \pi x}$

$-\sin^2 \pi x \geq 0 \Rightarrow \sin^2 \pi x \leq 0 \Rightarrow \sin^2 \pi x = 0$

$\Rightarrow \sin \pi x = 0 \Rightarrow \pi x = n\pi \quad n = 0,1,2,\dots$

$\Rightarrow x = n \quad n = 0,1,2,\dots$

$D_f = \mathbb{N} \cup \{0\}$

ج) $f(x) = \dfrac{\sin x + 1}{\sin x}$

$\sin x \neq 0 \Rightarrow x \neq n\pi \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{n\pi\}$

ح) $f(x) = 3 - 2\ln(2x+1)$

$2x+1 > 0 \Rightarrow 2x > -1 \Rightarrow x > -\frac{1}{2}$

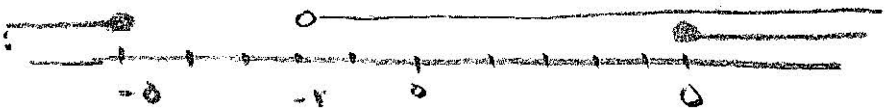
$D_f = (-\frac{1}{2}, +\infty)$

ه) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^۲ - ۲۵}}{\ln(x+۲)}$

① $\sqrt{x^۲-۲۵}$: $\quad x^۲ - ۲۵ \geq ۰ \Rightarrow x^۲ \geq ۲۵ \Rightarrow |x| \geq ۵ \Rightarrow \begin{cases} x \geq ۵ \\ x \leq -۵ \end{cases}$

② $\ln(x+۲)$: $\quad x+۲ > ۰ \Rightarrow x > -۲$

① ∩ ② :



$\Rightarrow D_f = [۵, +\infty)$

ز) $f(x) = \sqrt[۳]{۴x+۱} + \dfrac{۱}{\sqrt{۲x+۱}} + \sqrt{۳+۲x}$

① : $\sqrt[۳]{۴x+۱}$: $\quad D = \mathbb{R}$

② : $\dfrac{۱}{\sqrt{۲x+۱}}$: $\quad ۲x+۱ > ۰ \Rightarrow x > -۱/۲$

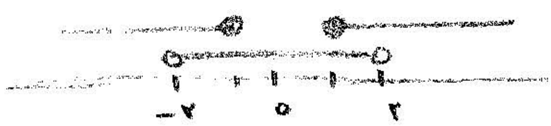
③ : $\sqrt{۳+۲x}$: $\quad ۳+۲x \geq ۰ \Rightarrow ۳ \geq -۲x \Rightarrow x \geq -۳/۲$

① ∩ ② ∩ ③ $\Rightarrow D_f = (-۱/۲, +\infty)$

و) $f(x) = \dfrac{۱}{[|x|]-۱}$

$[|x|] - ۱ = ۰ \Rightarrow [|x|] = ۱ \Rightarrow ۱ \leq |x| < ۲$

$\begin{cases} |x| < ۲ \Rightarrow -۲ < x < ۲ \\ |x| \geq ۱ \Rightarrow x \geq ۱ , x \leq -۱ \end{cases}$



$D_f = (-۲, -۱] \cup [۱, ۲)$

د) $f(x)=|x+1|-|x-1|$

$$f(-x)=|-x+1|-|-x-1| = |-(x-1)|-|-(x+1)|$$
$$= |x-1|-|x+1|$$
$$= -(|x+1|-|x-1|)$$ فرد

ه) $f(x)=\log\left(\frac{4-x}{4+x}\right)$

$D_f: \quad \frac{4-x}{4+x}>0$

	-4		4	
$4-x$	$+$		$+$	$-$
$4+x$	$-$		$+$	$+$
	$-$		$+$	$-$

$D_f=(-4,4)$ متقارن

$$f(-x)=\log\left(\frac{4+x}{4-x}\right)=\log\left(\frac{4-x}{4+x}\right)^{-1}=-\log\left(\frac{4+x}{4-x}\right)$$ فرد.

و) $f(x)=\log\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)$

$D_f=\mathbb{R}$

$$f(-x)=\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\times\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\log\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x}=\log\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}=\log(1)-\log(\sqrt{x^2+1}\ldots$$

$$=-\log\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)$$ فرد.

ی) $f(x) = \dfrac{۲e^x + ۱}{۳ - e^x}$

$۳ - e^x = ۰ \Rightarrow e^x = ۳ \Rightarrow x = \ln ۳$

$D_f = \mathbb{R} - \{\ln ۳\}$

ه) $f(x) = \log_{۱۰ - x} (\sqrt{x} - ۲)$

① $\sqrt{x} - ۲ > ۰ \Rightarrow \sqrt{x} > ۲ \Rightarrow x > ۴$

② $۱۰ - x > ۰ \Rightarrow x < ۱۰$

③ $۱۰ - x \neq ۱ \Rightarrow ۱۰ - ۱ \neq x \Rightarrow x \neq ۹$

① و ② و ③ $\Rightarrow D_f = (۴, ۹) \cup (۹, ۱۰)$

۲- زوج، فرد بودن توابع زیر را بررسی کنید .

الف) $f(x) = x\left(a^x - \dfrac{1}{a^x}\right) \qquad D_f = \mathbb{R}$

$f(-x) = -x\left(a^{-x} - \dfrac{1}{a^{-x}}\right) = -x\left(\dfrac{1}{a^x} - a^x\right) = x\left(a^x - \dfrac{1}{a^x}\right)$

زوج است .

ب) $f(x) = \sqrt[۳]{1 - x} + \sqrt[۳]{1 + x} \qquad D_f = \mathbb{R}$

$f(-x) = \sqrt[۳]{1 + x} + \sqrt[۳]{1 - x}$ زوج است .

ج) $f(x) = [x - [x]]$

$۰ \leq x - [x] < 1 \Rightarrow [x - [x]] = ۰$

هم زوج هم فرد است .

حدود زیر را بدست آورید

الف) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{\tan^2 x} = \dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\tan^2 x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{2\tan x(1+\tan^2 x)} = \frac{0}{0}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x}{2(1+\tan^2 x)^2 + 4\tan^2 x(1+\tan^2 x)} = \frac{-1}{2}$$

ب) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x - \sin x} \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+\tan^2 x - \cos x}{1 - \cos x} = \dfrac{0}{0}$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\tan x(1+\tan^2 x) + \sin x}{\sin x}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2(1+\tan^2 x)^2 + 4\tan^2 x(1+\tan^2 x) + \cos x}{\cos x} = 3$$

ج) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cosh x - 1}{1 - \cos x} = \dfrac{0}{0} \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sinh x}{\sin x} \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cosh x}{\cos x} = 1$

د) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log_a(x+1)}{x} = \dfrac{0}{0} \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{x+1}\log_a e}{1} = \log_a e$

ی) $\lim_{x\to 0}(\cot x)^{\sin x} = \infty^0$

$$\lim_{x\to 0}(\cot x)^{\sin x} = \lim_{x\to 0} e^{\ln(\cot x)^{\sin x}} = \lim_{x\to 0} e^{\sin x\ln(\cot x)}$$

$$\lim_{x\to 0}\sin x.\ln(\cot x) = 0\times\infty = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cot x)}{1/\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cot x)}{\csc x}$$

$$\overset{H}{=}\lim \frac{\frac{-\csc^2 x}{\cot x}}{-\csc x.\cot x} = \lim_{x\to 0}\frac{+\csc^2 x}{\csc x.\cot^2 x} = \lim_{x\to 0} + \frac{\csc x}{\cot^2 x}$$

$$\overset{H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-\csc x.\cot x}{-2\cot x.\csc^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{+1}{2\csc x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\sin x = 0$$

ن) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) = \infty - \infty$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x\sin x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x} \overset{H}{=}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{\cos x + \cos x - x\sin x} = \lim_{x\to 0} - \frac{\sin x}{2\cos x - x\sin x} = 0$$

ز) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2\sec x}\right) = \infty - \infty$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sec x - 1}{x^2\sec x} \overset{H}{=} \lim \frac{\sec x.\tan x}{2x\sec x + x^2\sec x.\tan x} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{2x + x^2 \tan x}$$

$$\overset{H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1+\tan^2 x}{2 + 2x\tan x + x^2\sec^2 x} = \frac{1}{2}$$

ه) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\dfrac{0}{0}\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x\ln a}{1}=\ln a$

و) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\cot x}\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1/x}{-(1+\cot^2 x)}=\lim\dfrac{1/x}{-1/\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}-\dfrac{\sin^2 x}{x}$

$\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x\cdot\cos x}{1}=0$

ز) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(2+e^x)}{3x}=\dfrac{\infty}{\infty}\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\frac{e^x}{2+e^x}}{3}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x}{6+3e^x}$

$\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x}{3e^x}=\dfrac{1}{3}$

ح) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(\sin x)}{\ln(\tan x)}=\dfrac{-\infty}{-\infty}\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1+\tan^2 x}{\tan x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\cos x\cdot\overset{\frac{\sin x}{\cos x}}{\tan x}}{\sin x\,(1+\tan^2 x)}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{1+\tan^2 x}=1$

ط) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x}{x^2}\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x}{2x}\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x}{2}=+\infty$

ی) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2}{e^x}\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x}{e^x}\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2}{e^x}=0$

ک) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3}{e^x+x^2-1}=\dfrac{\infty}{\infty}\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2}{e^x+2x}\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{6x}{e^x+2}\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{6}{e}$

د) $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2} = 1^{\infty}$

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2} = \lim_{x\to 0} e^{\ln(\cos x)^{1/x^2}} = \lim e^{\frac{1}{x^2}\ln(\cos x)}$$

حد توان : $\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2} = \dfrac{0}{0} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\dfrac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{2x} = \lim_{x\to 0} -\dfrac{\sin x}{2x\cos x}$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 0} -\frac{\cos x}{2\cos x - 2x\sin x} = -1/2$$

جواب آخر : $e^{-1/2}$

۲) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x} = \infty^{0}$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x} = \lim_{x\to 0} e^{\ln\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}} = \lim_{x\to 0} e^{\tan x\ln\left(\frac{1}{x}\right)} = e^{0} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\tan x\ln\left(\frac{1}{x}\right) = 0\times\infty = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{\tan x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\cot x}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-1/x^2}{1/x}}{-(1+\cot^2 x)} = \lim_{x\to 0}\frac{-1/x}{-1/\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x}{1} =$$