"۹۱"

Subject: ریاضی عمومی
Year ۸۸ Month ۷ Date ۱۱

* (۱ و ۱-) وارون ضربی دارند. $(\mathbb{N}, +, \cdot) \xrightarrow{\text{گسترش}} (\mathbb{Z}, +, \cdot)$

با هیچ یک از دو عمل گروه نیست! با عمل جمع یک گروه است!

* میدان: عبارت است از دستگاهی از اعداد مانند $\mathbb{F}$ با دو عمل جمع و ضرب، که:

$\forall x, y, z \in \mathbb{F}$

$x+y \in \mathbb{F}$, $x \cdot y \in \mathbb{F}$, $x+0=x$, $x \times 1 = x$

$-x \in \mathbb{F}$, $x+(-x)=0$, $x \neq 0 : \frac{1}{x} \in \mathbb{F}$, $\frac{1}{x} \times x = 1$

$x+y=y+x$, $x \cdot y = y \cdot x$ جابجایی پذیری
(لزوماً در هر میدان برقرار نیست.)

$x \cdot (y+z) = xy + xz$ پخشی
(" " " ")

* می‌گوییم $\mathbb{F}$ یک میدان مرتب است هرگاه زیرمجموعه‌ی $P \subseteq \mathbb{F}$ یافت شود که P
① نسبت به عمل ضرب بسته باشد.

② P نسبت به عمل جمع بسته باشد.

③ اگر $a \in \mathbb{F}$ آنگاه یا $a \in P$ یا $a = 0$ یا $-a \in \mathbb{F}$

$P \leftarrow$ اعداد مثبت در میدان $\mathbb{F}$

خواص: ۱) اگر $a \neq 0 \leftarrow a^2 \in P$

۲) $1 \in P$

* اگر پاسخ تمام معادلات به شکل $x+n=m$ که $m+n\in\mathbb{N}$ را به $\mathbb{N}$ بیفزاییم می‌توان $\mathbb{Z}$ را ساخت.

* اگر پاسخ تمام معادلات به فرم $ax+b=c$ ، $a\neq 0$ ، $a,b,c\in\mathbb{Z}$ به $\mathbb{Z}$ بیفزاییم می‌توان Q را ساخت (سره یا ناسره)

* $(Q,+,\cdot)$ میدان مرتب

$\delta = |\cdot|$ $\delta(x,y)=|x-y|$

* Q کوچکترین میدان مرتب نامتناهی است!

** تمامیت ترتیبی: میدان مرتب

$(\mathbb{F},+,\cdot)$ و P به عنوان مجموعه‌ی مثبت. $(b-a)=0$ یا $(b-a)\in P$

* تعریف: می‌گوییم (برای $a,b\in\mathbb{F}$) $a\leq b$ ($a<b$) هرگاه $(b-a)\in P$

می‌گوییم $A\subseteq\mathbb{F}$ کران‌دار است هرگاه $M\in\mathbb{F}$ یافت گردد که به ازای هر $a\in A$: $a\leq M$. می‌گوییم زیرمجموعه‌ی از بالا کران‌دار A از $\mathbb{F}$ دارای کران زبرینه است هرگاه دارای کران بالای M باشد به طوری که هیچ $M_1<M$ کران بالای A نباشد.

زبرینه $\overline{\text{Sup}}$

$M=\sup(A)$

— پایین $N\in\mathbb{F}$ $a\geq N$ زیرینه $\overline{\text{inf}}$ پایین N

$N=\inf(A)$ پایین $N<N_1$

ویژگی‌ سه‌گانه ← همه‌ی خواص را ندارد. ← ترتیب جزئی ←

$N\subseteq\mathbb{Z}\subseteq Q$

میگوییم میدان مرتب $\mathbb{F}$ دارای ویژگی تمامیت ترتیبی است هرگاه هر زیرمجموعه‌ی کران‌بالای $\mathbb{F}$ مانند A دارای $\sup$ باشد.
کوچکترین کران بالا

* اگر $\mathbb{F}$ دارای ویژگی کوچکترین کران بالای باشد حتماً دارای ویژگی بزرگترین کران پایین نیز هست.
هم‌ارز

* اگر $\mathbb{F}$ دارای ویژگی تمامیت ترتیبی باشد می‌گوییم $\mathbb{F}$ تام ترتیبی است.

* $\mathbb{Q}$ تام ترتیبی نیست.

** تمامیت متری:

تعریف: فرض کنید X یک مجموعه و $\delta: X \times X \to [0,+\infty)$ می‌گوییم δ یک سنج (متر) بر روی X است هرگاه:

$$\forall x \in X : \delta(x,x)=0$$
$$\forall x,y \in X : \delta(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$$
$$\forall x,y \in X , x \neq y : \delta(x,y)=\delta(y,x)>0$$
$$\forall x,y,z \in X : \delta(x,y)+\delta(y,z) \geq \delta(x,z)$$

ویژگی مثلثی سنج

* فرض کنیم $\mathbb{F}$ یک میدان باشد و دارای تابع فاصله‌ی δ نیز باشد. می‌گوییم دنباله‌ی $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ یک دنباله‌ی کشی است هرگاه به ازای

هر $\varepsilon>0$ یک $M\in\mathbb{N}$ موجود باشد که به ازای هر $n,m\geq M$ داشته باشیم: $\delta(X_n, X_m)<\varepsilon$.

سره می‌گوییم $\mathbb{F}$ تمام متری است هرگاه هر دنباله‌ی کشی در $\mathbb{F}$ همگرا باشد.

$X_n \longrightarrow X^* \in \mathbb{F}$

* $\mathbb{Q}$ تمام متری نیست.

$A=\{x\in\mathbb{Q} ; x^2<2\} \rightarrow$ A از بالا کران دار است زیرا به ازای هر $x\in A$ داریم $x<10$

Sup A عبارتست از عددی مانند y که $y^2=2$ و هیچ عددی در A دارای این خاصیت نیست.

برهان: اگر $y=\frac{m}{n}$ که $(m,n)=1$، آنگاه $\frac{m^2}{n^2}=2$

$\rightarrow m^2=2n^2 \rightarrow m=2k \rightarrow (2k)^2=2n^2 \rightarrow 4k^2=2n^2$

$\rightarrow n^2=2k^2 \rightarrow n=2l \;\cancel{\rightarrow}$ m,n نسبت بهم اول نیستند.

$\rightarrow$ فرض خلف باطل

** تمامیت جبری:

تعریف: یک معادله‌ی جبری در میدان $\mathbb{F}$ عبارتست از معادله‌ای مانند:

$a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+\dots+a_1X+a_0=0$

که در آن $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{F}$.

Subject:
Year. ۸۸ Month. ۷ Date. ۱۱ ()

پس می‌گوییم F تام جبری است هرگاه هر معادله‌ی جبری درجه‌ی n دقیقاً n پاسخ داشته باشد.

(R۳) ۳

* Q تام جبری نیست. ← اضافه کردن جواب معادلات به Q

(R, +, ·) ← تام ترتیبی - تام متری - تام جبری نیست.

هست

اضافه کردن sup ها به مجموعه‌های کراندار از بالای Q (R۱) ۱

اضافه کردن حد به مجموعه‌ی Q دنباله‌های کشی که میدان می‌کنن

۳ (تام) (R۲) ۲

یک میدان مرتب ترتیبی و متری

$$\underbrace{R_1 = R_2}_{\text{اثبات}} \overset{\text{چرا}}{\neq} R_3$$

(ℂ, +, ·) ← تام متری و جبری هست.

تام ترتیبی نیست [اصلاً میدان مرتب نیست].

نه نامرتب!

← اصلاً تام ترتیبی براش بی‌معنی است.

$x^2+1=0$ ← اضافه کردن جواباش به R

جواب‌ها x_1 ، x_2

مرتب نیست! ← $x_1^2 = -1 < 0$

تمامیت متری: یعنی هر دنباله‌ی کشی در F همگرا است. برد دنباله‌ی کشی زیرمجموعه‌ای از F است. (که به ازای جمله‌ی اول مقدار مشخص دارد و همگرا نیز هست.) پس زیرمجموعه‌ی متناظر با برد آن کراندار است. پس هر زیرمجموعه‌ی F دارای sup و inf است. پس تمامیت ترتیبی نیز داراست.

PAPCO

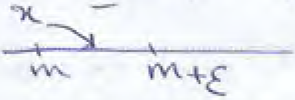
* قضیه: فرض کنید $A\subseteq\mathbb{R}$ کران بالا داشته باشد، در اینصورت $M=\sup(A)$ موجود است.

برهان: $\mathbb{R}$ به دو روش ساخته شد:
- افزودن تمامیت ترتیبی به $\mathbb{Q}$ که به طور مستقیم حکم
- " " " هم‌ارزی بنابر تعریف که حکم

* قضیه: فرض کنید $A\subseteq\mathbb{R}$ از بالا کران‌دار باشد و $M=\sup(A)$، در اینصورت به ازای هر $\varepsilon>0$ یک عضو $x\in A$ موجود است که:
$M-\varepsilon<x<M$

برهان: $\forall a\in A: a\leq M$, $\forall N: N<M \Rightarrow$ N کران بالای A نیست!
قرار دهیم $N=M-\varepsilon$. $M-\varepsilon$ کران بالای A نیست پس $x\in A$ موجود است که $M-\varepsilon<x<M$.

* قضیه: فرض کنیم $B\subseteq\mathbb{R}$ از پایین کران‌دار باشد، $m=\inf(B)$، در اینصورت به ازای هر $\varepsilon>0$ یک $x\in B$ موجود است که:
$m<x<x+\varepsilon$

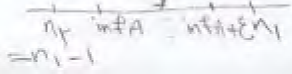


برهان: چون $m=\inf(B)$، $m+\varepsilon$ دیگر کران پایین B نیست. پس $x\in B$ موجود است که $m<x<m+\varepsilon$.

* قضیه: اگر $A\subseteq\mathbb{Z}$، از بالا کران‌دار باشد، آنگاه $\sup A\in A$.
" " " پایین " " " $\inf A\in A$.

فرض خلف: $\sup A\notin A$

پس $x\in A\subseteq\mathbb{Z}$ موجود است که $n_1<x<n_1+1$ ✗.



فرض: $\inf A\neq A$ پس $\exists x\in A\subseteq\mathbb{Z}$: $\underset{n_1-1}{n_2}<x<n_1$ ✗.

فرض خلف: $\nexists n \in \mathbb{N}$ پس n یا عضوی کوچکتر از x کران بالای $\mathbb{N}$ خواهد شد و $\mathbb{N}$ را کران دار خواهد کرد. ✗
(و عضو $\mathbb{N}$)

* ویژگی ارشمیدسی:

اگر $x \in \mathbb{R}$، آن‌گاه $n \in \mathbb{N}$ موجود است که $x < n$.

هم‌ارزه: به ازای هر $x, y \in \mathbb{R}$ یک $n \in \mathbb{Z}$ موجود است که $nx > y$.

تعریف: می‌گوییم A و B هم تعدادند هرگاه تناظری یک به یک بین آن‌ها موجود باشد.
هم‌ارزند

می‌گوییم A متناهی است، هرگاه هم‌ارز یک $J_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ به ازای یک nای باشد.

می‌گوییم A نامتناهی شمارش‌پذیر است هرگاه در تناظر یک به یک با $\mathbb{N}$ باشد.

* قضیه: $\mathbb{Z}$ نامتناهی شمارش‌پذیر است.

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ یک به یک و پوشا ..... $-2 \ -1 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3$
$5 \ 3 \ 1 \ 2 \ 4 \ 6$

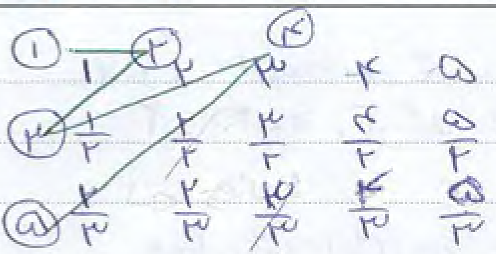
$n \to$ ؟ تمرین

فرد: $(n-1) \times (-1)^n$
زوج: $(n-1)$

* قضیه: زیرمجموعه‌های نامتناهی $\mathbb{N}$ شمارش‌پذیرند.

$A \subseteq \mathbb{N} \to \exists n \in A: n = \sup(A) \to$ هم‌ارز با یک J_n

* قضیه: $\mathbb{Q}$ نامتناهی شمارش‌پذیر است.



فرایند شمارش قطری کانتور

* قضیه: $\mathbb{R}$ نامتناهی است ولی ناشمارا است. (شمارش پذیر نیست.)

تعداد اعضای J_n را با n نشان می‌دهیم.
تعداد اعضای $\mathbb{N}$ را با $\aleph_0$ نشان می‌دهیم.
تعداد اعضای $\mathbb{R}$ را با c نشان می‌دهیم.
قضیه‌ی کانتور: $c = 2^{\aleph_0}$

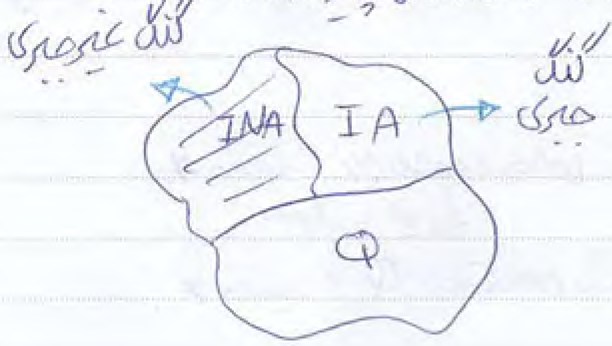
$$\mathbb{R} \sim P(\mathbb{N})$$

تعریف: می‌گوییم $x \in \mathbb{R}$ یک عدد جبری است هرگاه جواب معادله‌ای جبری باشد.

$x \in I$ ، گنگ

$$x \in IA \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{Z}$$ و
$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_1 x + a_0 = 0$$

* قضیه: مجموعه‌ی اعداد جبری نامتناهی شمارش پذیر است.



بازای هر عدد جبری معادله‌ای داریم با n ها عضو $\mathbb{N}$.

* قضیه: بازه‌ی $(0,1)$ شمارش‌پذیر نیست.

برهان: فرض کنید $(0,1)$ شمارش‌پذیر باشد. یعنی

$$f: \mathbb{N} \xrightarrow[\text{پوشا}]{\text{یک‌به‌یک}} (0,1) \qquad x_n = f(n)$$

یا

$$(0,1) = \{x_1, x_2, \dots\}$$

هر x_n به صورت زیر است: $x_n = 0{,}a_1^n\, a_2^n\, a_3^n \dots a_k^n$

عدد $x^* \in (0,1)$ را به گونه‌ای می‌سازیم که در میان هیچ‌کدام از این بازه‌ها نباشد.

$$x^* = 0{,}b_1\, b_2 b_3 \dots b_k \qquad b_1 \neq a_1^1 \quad b_2 \neq a_2^2 \dots b_k \neq a_k^k$$

در این صورت x^* با هر عضو x_n در یک رقم از بسط اعشاری مغایرت دارد. پس به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $x^* \neq x_n$.

پس فرض خلف باطل و f موجود نیست.

تمرین: مجموعه‌ی اعداد جبری ناشمارش‌پذیر است.

۸۸٫۷٫۱۸

$$\mathbb{C} = \{(x,y) : x,y \in \mathbb{R}\} \qquad (\mathbb{C}, +, \cdot)$$

* ضرب داخلی دو بردار یک عمل خارجی در فضای $\mathbb{R}^2$ نیست.

$z=(x,y)$ $\quad$ $*\, z+w=(x+a,y+b)\in\mathbb{C}$ $\quad$ عمل جمع در $\mathbb{C}$

$w=(a,b)$

* این جمع تعویض‌پذیر است. (زیرا در $\mathbb{R}$ هست.)

~ دارای عضو ضنثی ~.

~ دارای قرینه‌ای هر عضو ~.

~ شرکت‌پذیر ~.

$*\, z+w=w+z$

هر سمتی دو نقطه بود به تعریف می‌بریم

عضو خنثی عمل جمع

$*\, 0_{\mathbb{C}}=(0,0)=:0$ $\quad$ $*\, z+0=z$

بنابر تعریف

$*\, -z=(-x,-y)\in\mathbb{C}$ $\quad$ $*\, z+(-z)=0$ $\quad$ $*\, z+(w+q)=(z+w)+q$
$=: z+w+q$

$*\, z.w=(x,y)(a,b)=(ax-by,ay+bx)$ $\quad$ عمل ضرب در $\mathbb{C}$

$*\, \alpha\in\mathbb{R}\Rightarrow \alpha z=(\alpha x,\alpha y)$

$*\, 1_{\mathbb{C}}=(1,0)=:1$ $\quad$ $z1=(x,y)(1,0)=(x(1)-y(0),\,y(1)+x(0))$
$=(x,y)$

عضو خنثی عمل ضرب

$\checkmark\, *\, zw=wz$

$*\, z=(x,y)=(x,0)+(0,y)=x(1,0)+y(0,1)$
$=x1_{\mathbb{C}}+yi=x1+yi=x+yi$

$(0,1)(0,1)=((0)(0)-(1)(1),(0)(1)+(1)(0))=(-1,0)=-1(1,0)$
$=-(1,0)$
$=-1_{\mathbb{C}}$

$x+iy=x(1,0)+y(0,1)=(x,y)$ $\quad$ $\boxed{i^2=ii=-1}$

* $\mathbb{C}$ با دو عمل ضرب و جمع تعریف شده یک میدان است.

زیرا:

الف) $\mathbb{C}$ نسبت به دو عمل ضرب و جمع بسته است.

ب) جمع تعویض پذیر است.

ج) ضرب تعویض پذیر است

د) جمع در $\mathbb{C}$ عضو خنثی دارد.

ه) ضرب در $\mathbb{C}$ عضو خنثی دارد.

و) جمع شرکت پذیر است. ← اگر نداشته باشد جمع نامتناهی (همه در سری‌ها) قابل تعریف نیست.

ز) ضرب شرکت پذیر است.

ت) ضرب بر جمع توزیع پذیر است. (پخش)

ش) هر عضو در $\mathbb{C}$ قرینه دارد.

س) هر عضو ناصفر وارون ضربی دارد.

فرض کنید $z=(x,y)$ داده شده. هدف یافتن $w=(a,b)$ است به طوری که $zw=wz=1=1_{\mathbb{C}}=(1,0)$

$$zw=(x,y)(a,b)=(ax-by,\ ay+bx)=(1,0)$$

$$\begin{cases} ax-by=1 & \times y \\ ay+bx=0 & \times x \end{cases} \quad \begin{cases} axy-by^2=y \\ -axy-bx^2=0 \end{cases} \rightarrow b(x^2+y^2)=-y \quad b=\frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$a=\frac{1-\frac{y^2}{x^2+y^2}}{x}=\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$w=z^{-1}=\left(\frac{x}{x^2+y^2},-\frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

$$z=(x,y)=x+iy \quad z^{-1}=\left(\frac{x}{x^2+y^2},-\frac{y}{x^2+y^2}\right)=\frac{x}{x^2+y^2}+i\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)$$

$$zz^{-1}=(x,y)\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{-y}{x^2+y^2}\right)=(1,0)=1_{\mathbb{C}}=1$$ برای اطمینان

Subject:
Year. ۸۸ Month. ۷ Date. ۱۸

* ملاحظات:

۱- $\mathbb{C}$ یک عضو ویژه دارد. $-1=(-1,0)=(0,1)(0,1)=i^2$ ؛ $i=(0,1)$

۲- $\mathbb{C}$ با هیچ ترتیبی یک میدان مرتب نخواهد شد.

فرض کنید یک ترتیب دلخواه روی $\mathbb{C}$ باشد. فرض کنید P مجموعه‌ی مثبت $\mathbb{C}$ نسبت به این ترتیب دلخواه باشد. (فرض خلف)

$1 \in P \Rightarrow (1 \in \mathbb{C}) \Rightarrow 0<1 \Rightarrow -1<0$. ولی $i^2=-1<0$ در حالی که در یک میدان مرتب توان دوم هر عدد مثبت است. $\times$

۳- هنگام ضرب و جمع متوالی اعداد مختلط می‌توان از قواعد حاکم بر چندجمله‌ای‌ها استفاده کرد.

$z=x+iy$ $\quad zw=(x+iy)(a+ib)=(x)(a)+x(ib)+(iy)(a)$

$w=a+ib$ $\quad +(iy)(b)=ax+bxi+ayi+by\underbrace{i^2}_{-1}$

$=(ax-by)+(bx+ay)i$

$=(ax-by,bx+ay)$

$\Leftarrow$ به ویژه تمام اتحادهای جبری برقرار است.

۴- $\mathbb{C}$ تام ترتیبی نیست. زیرا $i^2=-1$

$\mathbb{C}$ تام جبری است. (هر چند جمله‌ای درجه‌ی n با ضرایب مختلط n جواب داشته باشد.)

زیرا:

(۱) هر چند جمله‌ای درجه‌ی n در $\mathbb{C}$ قابل تجزیه به حاصلضرب چند جمله‌ای‌های درجه‌ی ۲ است.

(اگر n فرد بود توان یکیشان صفر)

PAPCO

$a_0, \dots, a_k \,/\, A_1, \dots, A_k, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$n = 2k + l$, $l = 0, 1$ $\quad P_{(z)} = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$

$$= (A_1 z^2 + B_1 z + C_1)(A_2 z^2 + B_2 z + C_2) \cdots (A_k z^2 + B_k z + C_k)(\alpha z + \beta)$$

$\rightsquigarrow l = 0 \to \alpha = 0, \beta = 1$

$l = 1 \to \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ $\quad = \left[\prod_{s=1}^{k} (A_s z^2 + B_s z + C_s)\right](\alpha z + \beta)$

(۲) حل هر معادله‌ی درجه دوم در $\mathbb{C}$ به یکی از معادله‌های زیر منجر می‌گردد:

$\omega^2 + 1 = 0 \;,\; \omega^2 - 1 = 0 \;,\; \omega^2 = 0$

زیرا:

$Az^2 + Bz + C = 0 \;,\; A, B, C \in \mathbb{C} \;,\; A \neq 0$

$A^{-1}(Az^2 + Bz + C) = A^{-1}(0) = 0$

$z^2 + (A^{-1}B)z + (A^{-1}C) = 0$

$(z + \frac{1}{2}A^{-1}B)^2 + (A^{-1}C) - \frac{1}{4}(A^{-1}B)^2 = 0$

$(z + \frac{1}{2}A^{-1}B)^2 = \frac{1}{4}(A^{-1}B)^2 - (A^{-1}C) \xrightarrow[\text{حقیقی‌اند.}]{\text{موقتاً فرض کنید } A \text{ و } B \text{ و } C}$

$\frac{1}{4}(A^{-1}B)^2 - (A^{-1}C) > 0$ (۱)

$\frac{1}{4}(A^{-1}B)^2 - (A^{-1}C) = 0$ (۲)

$\frac{1}{4}(A^{-1}B)^2 - (A^{-1}C) < 0$ (۳)

(۱) $\to (z + \frac{1}{2}A^{-1}B)^2 = \left(\sqrt{\frac{1}{4}(A^{-1}B)^2 - (A^{-1}C)}\right)^2$

$$\to \Bigg[\underbrace{\frac{z + \frac{1}{2}(A^{-1}B)}{\sqrt{\frac{1}{4}(A^{-1}B)^2 - (A^{-1}C)}}}_{\omega}\Bigg]^2 = 1 \to \omega^2 = 1$$

$w_1 = 1 \;,\; w_2 = -1$

$$\frac{z_1 + \frac{1}{2}A^{-1}B}{\sqrt{\frac{1}{4}(A^{-1}B)^2 - (A^{-1}C)}} = w_1 = 1 \longrightarrow z_1 = \frac{-1}{2}A^{-1}B + \sqrt{\frac{1}{4}(A^{-1}B)^2 - (A^{-1}C)}$$

$$\frac{z_2 + \frac{1}{2}A^{-1}B}{\sqrt{\frac{1}{4}(A^{-1}B)^2 - (A^{-1}C)}} = w_2 = -1 \longrightarrow z_2 = \frac{-1}{2}A^{-1}B - \sqrt{\frac{1}{4}(A^{-1}B)^2 - (A^{-1}C)}$$

(2) $\longrightarrow \big(\underbrace{z + \frac{1}{2}A^{-1}B}_{w}\big)^2 = 0 \longrightarrow w^2 = 0 \longrightarrow w_1 = w_2 = 0$ ×

$$z_1 = z_2 = -\frac{1}{2}A^{-1}B$$

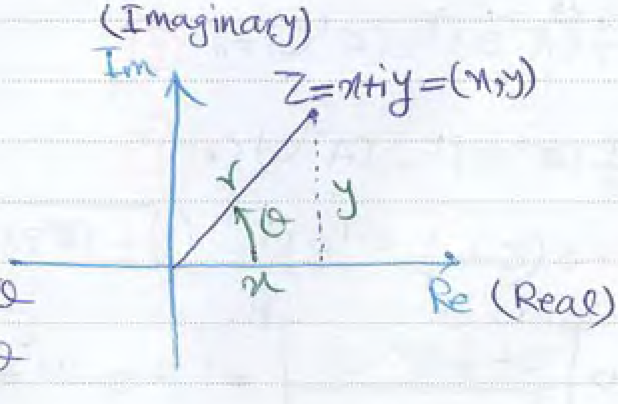
(3) $\longrightarrow (z + \frac{1}{2}A^{-1}B)^2 = -\Big(\underbrace{A^{-1}C - \frac{1}{4}(A^{-1}B)^2}_{\text{مثبت}}\Big) = -\Big(\sqrt{(A^{-1}C) - \frac{1}{4}(A^{-1}B)^2}\Big)^2$

$$\Bigg[\underbrace{\frac{(z + \frac{1}{2}A^{-1}B)}{\sqrt{A^{-1}C - \frac{1}{4}(A^{-1}B)^2}}}_{w}\Bigg]^2 = -1 \longrightarrow w^2 + 1 = 0 \begin{cases} \rightarrow w_1 = i \\ \rightarrow w_2 = -i \end{cases}$$

$(0,1)(0,1) = -1 \qquad (0,-1)(0,-1) = -1$

$$z_{1,2} = \frac{-1}{2}A^{-1}B \pm \Big(\sqrt{A^{-1}C - \frac{1}{4}(A^{-1}B)^2}\Big)i$$

۸۸/۷/۲۰



$x = Re(z) \quad y = Im(z)$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ tg\,\theta = \frac{y}{x} \end{cases} , \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$z=(x,y)=(r\cos\theta, r\sin\theta)=r\cos\theta+r\sin\theta i=$
$r(\underbrace{\cos\theta+\sin\theta i}_{Cis(\theta)})$

* تعریف:

① $Cis(\alpha)=Cis(\theta)$ اگر وتنها اگر $\theta=\alpha+2k\pi$.

* $a+ib=\alpha+i\beta \rightarrow \underbrace{(a-\alpha)}_{0}+\underbrace{(b-\beta)}_{0}i=0 \rightarrow a=\alpha,\ b=\beta$

از آنجایی که 0 در $\mathbb{C}$ یکتاست!

$\rightarrow \begin{cases} Cis\theta=\cos\theta+\sin\theta i \\ Cis\alpha=\cos\alpha+\sin\alpha i \end{cases} \xrightarrow{Cis\theta=Cis\alpha} \begin{cases} \cos\theta=\cos\alpha \Rightarrow \begin{cases}\theta=\alpha+2k\pi \\ \text{L} \\ \theta=-\alpha+2k\pi\end{cases} \\ \sin\theta=\sin\alpha \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases}\theta=\alpha+2k\pi \\ \text{L} \\ \theta=\pi-\alpha+2k\pi\end{cases}$

$\rightarrow \theta=\alpha+2k\pi$

② $Cis(\theta)=e^{i\theta}$ (رابطه اویلر)

نتیجه: $Cis(\pi)=e^{i\pi}$ $\cos\pi+\sin\pi i=-1+0=e^{i\pi}$ $e^{i\pi}+1=0$
$\rightarrow e^{i\pi}+1=0$

نتیجه: $[Cis(\theta)]^n=Cis(n\theta)$

$[Cis(\theta)]^n=(e^{i\theta})^n=e^{in\theta}=Cis(n\theta)$

از روی نتیجه ی اخیر می‌توان نسبتهای مثلثاتی $n\theta$ را به دست آورد:

Subject:
Year. ۸۸ Month. ۷ Date. ۲۰

$$Cis(n\theta) = (Cis(\theta))^n = (\cos\theta + \sin(\theta) i)^n$$

$$\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \left(F_n(\sin\theta, \cos\theta)\right) + \left(G_n(\sin\theta, \cos\theta)\right) i$$

$$\cos(n\theta) = F_n(\sin\theta, \cos\theta)$$
$$\sin(n\theta) = G_n(\sin\theta, \cos\theta)$$

حسن این روابط بر این اساس قابل بیان است که :

$$* \quad i^{4k+r} = \begin{cases} 1 & r=0 \\ i & r=1 \\ -1 & r=2 \\ -i & r=3 \end{cases}$$

$n=0$: $(\cos\underset{n\theta}{\theta} + \sin\underset{n\theta}{\theta} i)^0 = 1 \rightarrow 1=1$ حس همین که درست بشه!

$n=1$ $\quad Cis(n\theta) = Cis\theta = \cos\theta + i\sin\theta \qquad F_0 = 1,\ G_0 = 0$

$(\cos\theta + \sin\theta i)^1 = \cos\theta + i\sin\theta \qquad F_1 = \cos\theta,\ G_1 = \sin\theta$

$n=2$ $\quad Cis(2\theta) = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = (\cos\theta)^2 + 2(\cos\theta)(i\sin\theta) + (i\sin\theta)^2$$
$$= \cos^2\theta + 2i\sin\theta\cos\theta - \sin^2\theta$$
$$= (\cos^2\theta - \sin^2\theta) + 2\sin\theta\cos\theta\, i$$

$$\begin{cases} \cos 2\theta = F_2(\sin\theta, \cos\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ \sin 2\theta = G_2(\sin\theta, \cos\theta) = 2\sin\theta\cos\theta \end{cases}$$

$n=3$ $\quad Cis(3\theta) = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta + 3i^2\sin^2\theta\cos\theta + i^3\sin^3\theta$$
$$ - 3\sin^2\theta\cos\theta \quad - i\sin^3\theta$$
$$= (\cos^3\theta - 3\sin^2\theta\cos\theta) + i(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta)$$

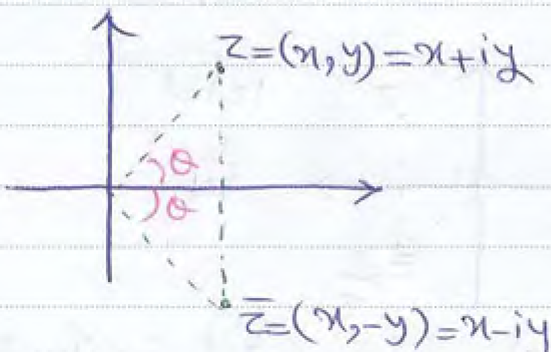
$F_3(\sin\theta, \cos\theta) = \cos^3\theta - 3\sin^2\theta\cos\theta$

$G_3(\sin\theta, \cos\theta) = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta$

$\begin{cases} n=2k \\ n=2k+1 \end{cases}$ جزء صحیح یا ؟ G_n ، F_n ✓

* تعریف: اگر $z\in\mathbb{C}$ که $z=x+iy$ است، آنگاه مزدوج مختلط z را با $\bar{z}$ نشان می‌دهیم که برابر است با $\bar{z}=x-iy$

تعبیر هندسی:



دیدیم که $z=x+iy=r\operatorname{cis}\theta$ که در آن $r^2=x^2+y^2$ و $tg\,\theta=\frac{y}{x}$
عدد r را اندازه‌ی z می‌نامیم و با $|z|$ نشان می‌دهیم و عدد θ را زاویه‌ی z می‌نامیم و با $\arg(z)$ نشان می‌دهیم.
می‌توان دید که:

* $|\bar{z}|=|z|$, $\arg(\bar{z})=-\arg(z)$

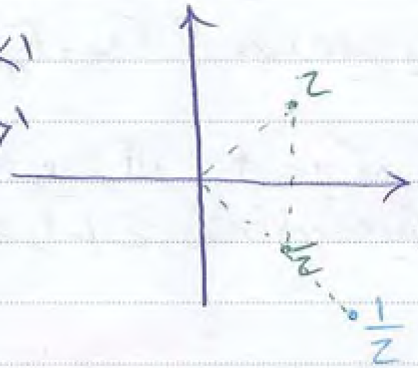
* $z\bar{z}=|z|^2$: $z=x+iy$, $\bar{z}=x-iy \rightarrow z\bar{z}=(x+iy)(x-iy)$
$=x^2-(iy)^2=x^2+y^2$

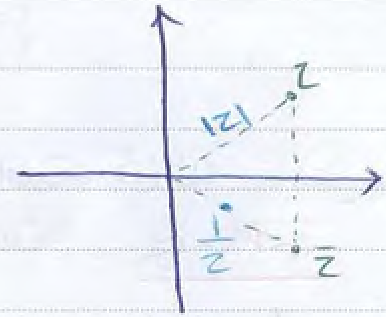
* $z\neq 0$, $\arg\left(\frac{1}{z}\right)=-\arg(z)$, $\left|\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{|z|}$

$z=x+iy$, $\frac{1}{z}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}=\frac{1}{x^2+y^2}\bar{z}$

$|z|<1$

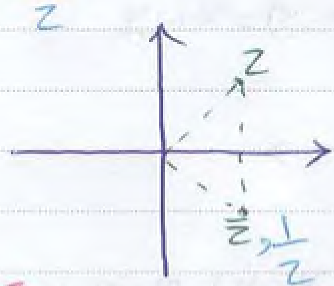
$\frac{1}{z}>1$





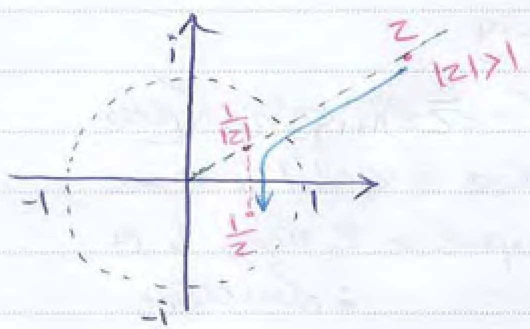
$|z|>1$

$\frac{1}{|z|}<1$



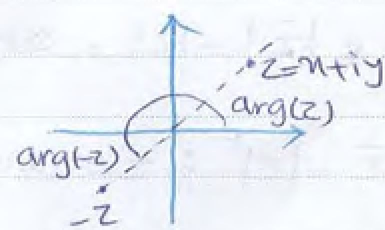
$|z|=1$

$\frac{1}{|z|}=1$



طریق پیدا کردن $\frac{1}{z}$:

$$\arg(-z)=\pi+\arg(z)$$



$\arg(zw)=\arg z+\arg w \quad , |zw|=|z||w|$

$|z+w|=|z|+|w|$

$$\begin{cases} z=r\,\text{cis}(\theta) \\ w=p\,\text{cis}(\theta) \end{cases} \rightarrow zw=r\,\text{cis}\theta\, p\,\text{cis}\alpha=rp(\text{cis}\theta\,\text{cis}\alpha)$$

$$=rp((\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\alpha+i\sin\alpha))$$

$$=rp((\cos\theta\cos\alpha-\sin\theta\sin\alpha)+i(\sin\theta\cos\alpha+\sin\alpha\cos\theta))$$

$$=rp(\cos(\theta+\alpha)+i\sin(\theta+\alpha))=rp\,\text{cis}(\theta+\alpha)$$

* $\arg\left(\frac{z}{w}\right) = \arg z + \arg\left(\frac{1}{w}\right) = \arg z - \arg w$

* $(\bar{z})^n = (\overline{z^n})$, $|z|^n = |z^n|$, $\arg(z^n) = n\arg(z)$

استقرا

* قضیه: فرض کنید $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ که در آن $a_0, \dots, a_n, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ در اینصورت اگر $f(z) = 0$ آنگاه $f(\bar{z}) = 0$

$$f(z) = 0 \to \overline{f(z)} = \bar{0} = 0 \to \overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0} = 0$$

$$\to \overline{a_n z^n} + \dots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} = 0$$

$$\to \overline{a_n}\,\overline{z^n} + \overline{a_{n-1}}\,\overline{z^{n-1}} + \dots + \overline{a_1}\,\bar{z} + \overline{a_0} = 0$$

$$\to a_n \bar{z}^n + a_{n-1} \bar{z}^{n-1} + \dots + a_1 \bar{z} + a_0 = 0 \to f(\bar{z}) = 0$$

۸۸,۷,۲۵

* یادآوری:

$$\overbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k z^k}^{P_n(z)} = 0 \quad a_k \in \mathbb{C} \to \left(\overset{\text{ضرب}}{\prod_{s=0}^{N}} (A_s z^2 + B_s z + C_s)\right)(\alpha z + \beta) = 0$$

$$n = 2N + (\mathrm{sign}(\alpha)) \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

به علاوه اگر بتوانیم $Az^2 + Bz + C = 0$ را در $\mathbb{C}$ حل کنیم آنگاه $P_n(z) = 0$ در $\mathbb{C}$ قابل حل است. اگر A و B و C سه عدد حقیقی باشند آنگاه $Az^2 + Bz + C = 0$ قابل تعدیل به یکی از سه صورت $\omega^2 - 1 = 0$ ، $\omega^2 + 1 = 0$ و $\omega^2 = 0$ است.

اگر $A,B,C\in\mathbb{C}$ لزوماً حقیقی نباشند آن‌گاه $Az^2+Bz+C=0$ به صورت $w^2-\alpha=0$ در می‌آید که در آن $\alpha\in\mathbb{C}$.

$$Az^2+Bz+C=z^2+\left(\frac{B}{A}\right)z+\frac{C}{A}=\left(z+\frac{1}{2}\left(\frac{B}{A}\right)\right)^2+\frac{C}{A}-\left(\frac{B}{A}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$=\left(z+\frac{1}{2}\frac{B}{A}\right)^2-\left(\frac{1}{4}\frac{B^2}{A^2}-\frac{C}{A}\right)$$

$$Az^2+Bz+C=0 \Leftrightarrow \underbrace{\left(z+\frac{B}{2A}\right)}_{w}{}^2-\underbrace{\left(\frac{B^2}{4A^2}-\frac{C}{A}\right)}_{\alpha}=0 \rightarrow w^2-\alpha=0 \quad \alpha\in\mathbb{C}$$

$\rightarrow$ با استفاده از cis حل می‌شود.

$w^2-\alpha=0\ ,\ \alpha=a+ib \quad r_0=\sqrt{a^2+b^2}=e^{x_0} \quad a,b,r_0,x_0,y_0\in\mathbb{R}$

$x_0=\cos r_0 \quad \alpha=r_0\,cis(\theta_0) \quad w=r\,cis(\theta) \quad \alpha,w\in\mathbb{C}$

$y_0=\theta_0 \quad \alpha=e^{x_0}cis(\theta_0) \quad w^2=(r\,cis(\theta))^2=r^2(cis(\theta))^2=r^2cis(2\theta)$

$\alpha=e^{x_0}e^{iy_0}$

$r^2cis(2\theta)=r_0\,cis(\theta_0) \quad r^2=r_0 \quad cis(2\theta)=cis(\theta_0) \quad r=r_0^{\frac{1}{2}}>0$

$$2\theta=\theta_0+2k\pi \rightarrow \theta=\frac{1}{2}\theta_0+k\pi \begin{cases} k=0: & \theta_1=\frac{1}{2}\theta_0 \rightarrow w_1=r_0^{\frac{1}{2}}cis(\frac{1}{2}\theta_0) \\ k=1: & \theta_2=\frac{1}{2}\theta_0+\pi \quad w_2=r_0^{\frac{1}{2}}cis(\frac{1}{2}\theta_0+\pi) \end{cases}$$

$$z=w-\frac{B}{2A} \begin{cases} z_1=w_1-\frac{B}{2A}=r_0^{\frac{1}{2}}cis(\frac{1}{2}\theta_0)-\frac{B}{2A} \\ z_2=w_2-\frac{B}{2A}=r_0^{\frac{1}{2}}(cis(\frac{1}{2}\theta_0)+\pi)-\frac{B}{2A} \end{cases}$$

فرض: $w^2-(1+i)=0 \quad \alpha=1+i=r_0\,cis(\theta_0) \quad r_0=\sqrt{2}\ ,\ \theta_0=\frac{\pi}{4}$

$w=r\,cis(\theta)\ ,\ w^2=r^2cis(2\theta)=\sqrt{2}\ cis(\frac{\pi}{4})$

$$\begin{cases} r^2=\sqrt{2} \\ 2\theta=\frac{\pi}{4}+2k\pi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r=\sqrt[4]{2} \\ \theta=\frac{\pi}{8}+k\pi \end{cases} \quad \begin{matrix} k=0: \theta_1=\frac{\pi}{8} & w_1=\sqrt[4]{2}\,cis(\frac{\pi}{8}) \\ k=1: \theta_2=\pi+\frac{\pi}{8} & w_2=\sqrt[4]{2}\,cis(\frac{9\pi}{8}) \end{matrix}$$

$z^2+z+1=0 \qquad (z+\frac{1}{2})^2+1-\frac{1}{4}=0$

$$\Big[\underbrace{\frac{2}{\sqrt{3}}\left(z+\frac{1}{2}\right)}_{w}\Big]^2+1=0 \rightarrow w^2+1=0 \rightarrow w_1=i\ ,\ w_2=-i$$

$z^2+z+i=0 \qquad \underbrace{\left(z+\frac{1}{2}\right)}_{\omega}^2+i-\frac{1}{4}=0 \qquad \omega^2-\alpha=0$

$\alpha=\frac{1}{4}-i=r_0 \operatorname{cis}\theta_0 \qquad r_0=\sqrt{\frac{1}{16}+1}=\frac{\sqrt{17}}{4}$

$\theta_0=-tg^{-1}4 \to \omega=r\operatorname{cis}(\theta)\ ,\ \omega^2=r^2\operatorname{cis}(2\theta)=\frac{\sqrt{17}}{4}\operatorname{cis}(\theta_0)$

$tg\,\theta_0=-4 \quad -\frac{\pi}{2}<\theta_0<\frac{\pi}{2} \qquad 2\theta=\theta_0+2k\pi \quad k=0:\ \theta_1=\frac{\theta_0}{2} \quad k=1:\ \theta_2=\frac{\theta_0}{2}+\pi$

$r^2=\frac{\sqrt{17}}{4} \qquad r=\frac{\sqrt[4]{17}}{2}$

$\omega_1=\frac{\sqrt[4]{17}}{2}\operatorname{cis}(\theta_1)=\frac{\sqrt[4]{17}}{2}\operatorname{cis}\left(\frac{\theta_0}{2}\right)=\frac{\sqrt[4]{17}}{2}\left(\cos\frac{\theta_0}{2}+i\sin\frac{\theta_0}{2}\right)$

$\omega_2=\frac{\sqrt[4]{17}}{2}\operatorname{cis}(\theta_2)=\frac{\sqrt[4]{17}}{2}\operatorname{cis}\left(\pi+\frac{\theta_0}{2}\right)=\frac{\sqrt[4]{17}}{2}\left(\cos\left(\pi+\frac{\theta_0}{2}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\theta_0}{2}\right)\right)=-\frac{\sqrt[4]{17}}{2}\left(\cos\frac{\theta_0}{2}+i\sin\frac{\theta_0}{2}\right)$

$\omega=z+\frac{1}{2} \qquad z_1=\left(\frac{\sqrt[4]{17}}{2}\cos\frac{\theta_0}{2}-\frac{1}{2}\right)+\frac{\sqrt[4]{17}}{2}\sin\frac{\theta_0}{2}\,i$

$z_2=\left(-\frac{\sqrt[4]{17}}{2}\cos\frac{\theta_0}{2}-\frac{1}{2}\right)-\frac{\sqrt[4]{17}}{2}\sin\frac{\theta_0}{2}\,i$

حل یک مسئله‌ی نمونه: ریشه‌های معادله $z^n-1=0$ همگی روی دایره‌ای به شعاع ۱ قرار دارند و رئوس یک n ضلعی منتظم را می‌سازند.

$z=r\operatorname{cis}(\theta) \qquad 1=1\operatorname{cis}(0) \qquad r^n\operatorname{cis}(n\theta)=1\operatorname{cis}(0)$

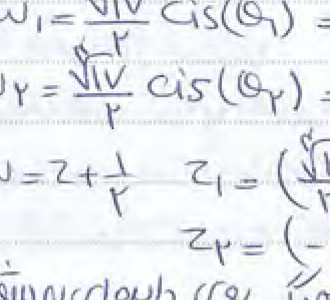
$\begin{cases} r^n=1\ ,\ n\theta=0+2k\pi \end{cases} \to r=1 \ ,\ \theta=\frac{2k\pi}{n}$

$k=0:\ \theta_1=0 \qquad z_1=1\operatorname{cis}(0)$

$k=1:\ \theta_2=\frac{2\pi}{n} \qquad z_2=1\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$

$k=2:\ \theta_3=\frac{4\pi}{n} \qquad \vdots$

$k=n-1:\ \theta_n=\frac{2(n-1)}{n}\pi \qquad z_n=1\operatorname{cis}\left(\frac{2(n-1)}{n}\pi\right)$



$\arg(z_{i+1})=\arg(z_i)+\frac{2\pi}{n} \qquad 1\leq i\leq n-1$

به علاوه اگر $\omega\neq 1$ یکی از ریشه‌های $z^n-1=0$ باشد آنگاه:

$1+\omega+\omega^2+\dots+\omega^{n-1}=0$

$(1+\omega+\omega^2+\dots+\omega^{n-1})\underbrace{(1-\omega)}_{\text{ناصفر}}=1-\omega^n=0 \to \cancel{\omega=1}$ یا $1+\omega+\omega^2+\dots+\omega^{n-1}=0$

* دنباله ها و سری ها:

تعریف: یک دنباله عبارتست از تابعی مانند $f: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$

$$n \to f(n) =: \underbrace{f_n}_{a_n \text{ گاهی}}$$

$$R_f = \{a_1, a_2, a_3 \dots\} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

* می‌گوییم دنباله‌ی $f: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ کراندار است، هرگاه عدد $M>0$
(دنباله به طور مختصر با $a_n = f(n)$؛ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ و یا $\{a_n\}$ و یا $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ و یا (a_n) نشان داده می‌شود.)
موجود باشد به طوری که $|a_n| \leq M$. (به ازای هر $n \in \mathbb{N}$)
(قدر مطلق عدد مختلط، عددی حقیقی است.)

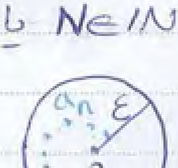
گوی: $B_r(0,0) = \{z = x+iy,\ |z| = \sqrt{x^2+y^2} < r\}$

دایره: $S^1 = \{z = x+iy : |z| = \sqrt{x^2+y^2} = 1\}$

به عبارت دیگر $R_f \subseteq B_M(0)$.

* می‌گوییم دنباله‌ی (a_n) همگراست هرگاه $P \in \mathbb{C}$ موجود باشد به طوری که به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، عدد $N \in \mathbb{N}$ یافت گردد که به ازای هر $n > N$ ،
$$\underbrace{|a_n - P| < \varepsilon}_{a_n \in B_\varepsilon(P)}$$

تعبیر هندسی ←



و می‌نویسیم $\lim_{n\to\infty} a_n = P$ یا $a_n \xrightarrow{n} P$.

فرض کنید (a_n) دنباله‌ای در $\mathbb{C}$ باشد. در این صورت یک زیر دنباله از این دنباله عبارتست از دنباله‌ی $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ که در آن $1 \le n_1 < n_2 < n_3 < \dots$.

یک مثال: $a_1, a_2, a_3, \dots$

۲ ، ۷ ، ۲۸

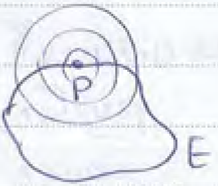
* ملاحظات: احکام زیر برقرارند:

۱) اگر (a_n) به p و نیز q همگرا باشد، آنگاه $p=q$.

۲) اگر $a_n \to p$، آنگاه هر همسایگی p مانند $N_\varepsilon(p)$ شامل همه‌ی نقاط دنباله است مگر تعداد متناهی.

(بنابر ۲) ۳) اگر $a_n \to p$، آنگاه هر زیر دنباله‌ی (a_n) به p میل می‌کند.
$a_n \to p \Rightarrow a_{n_k} \to p$

۴) اگر $E \subseteq \mathbb{C}$ دارای نقطه‌ی حدی مانند p باشد، آنگاه دنباله‌ی $(a_n) \subseteq E$ موجود است که $a_n \to p$.



۵) اگر $a_n \to p$ و $b_n \to q$ ، $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$، آنگاه:

$$a_n + b_n \to p + q \qquad \alpha a_n + \beta b_n \to \alpha p + \beta q$$

$$a_n b_n \to pq \qquad \frac{a_n}{b_n} \to \frac{p}{q} \; , \; b_n \neq 0 \; , \; q \neq 0$$

* فرض کنید (a_n) دنباله‌ای است در $\mathbb{C}$ که به ازای هر n، $a_n = \alpha_n + \beta_n i$ که به ازای هر n $\beta_n = 0$. به عبارت دیگر (a_n) دنباله‌ای است در $\mathbb{R}$.
به علاوه فرض کنید (a_n) دنباله‌ای کران‌دار باشد. در این صورت اگر (a_n) یکنوا باشد، آنگاه همگراست.
در واقع اگر (a_n) صعودی باشد، $a_n \to p = \sup(a_n)$.
اگر (a_n) نزولی باشد، $a_n \to p = \inf(a_n)$.

* فرض کنید $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای در $\mathbb{C}$ باشد، دنباله‌ی مجموع‌های جزئی در $\mathbb{C}$ را به صورت زیر می‌سازیم:

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2 = S_1 + a_2$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = S_2 + a_3$$
$$\vdots$$
$$S_n = S_{n-1} + a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

← دنباله‌ی $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ را دنباله‌ی مجموع‌های جزئی دنباله‌ی (a_n) می‌خوانیم.
$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

* اگر دنباله‌ی مجموع‌های جزئی $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ همگرا باشد، $(S_n \to S^*)$ آنگاه می‌گوییم $S_k = \sum_{k=1}^{n} a_k$ یک سری همگرا می‌سازد و آن را با $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ نشان می‌دهیم.

← بنابراین هنگامی که از همگرایی/واگرایی $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ گفت‌وگو می‌کنیم، منظور همگرایی/واگرایی دنباله‌ی (S_n) است.

مثال: در خصوص همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ چه می‌توان گفت؟

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1$$

$$\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{n}_{n\to\infty} = 1$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \xlongequal{k+1=L} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{L=2}^{n+1} \frac{1}{L} = 1 + \cancel{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}}$$

$$- \cancel{\sum_{L=2}^{n} \frac{1}{L}} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \qquad S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$S_n \to 1 \;,\; \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \longrightarrow 1 \longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$$

۸۸/۸/۲

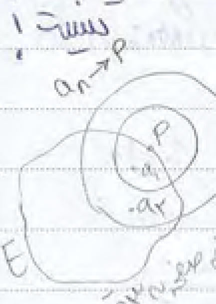
$$k \to f(k) =: f_k =: a_k \quad \text{نماد} \quad \{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_n\} = (a_n)_{n=1}^{\infty} = (a_n)$$

یادآوری: یک دنباله در $\mathbb{C}$ عبارتست از $f: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$.

- همگرایی $\mathbb{C}$ - کراندار $\mathbb{C}$ - یکنوایی $\mathbb{R}$

تو $\mathbb{C}$ میدان مرتب نیست!

- زیردنباله $\mathbb{C}$ - مجموع‌های جزئی



$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

- حد مجموع‌های جزئی $S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

* ملاحظات:

۱/ فرض کنید $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد. به علاوه فرض کنید $\boxed{a_n \searrow 0}$. ($a_1 > a_2 > \cdots > 0$) در این صورت سری $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ همگراست.

دنباله‌ی نزولی و
با مجموعه نامتناهی جملات

مثال: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \underbrace{\frac{1}{n}}_{a_n}$ همگراست. زیرا $\frac{1}{n} \searrow 0$ و $(-1)^n a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$. ولی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ واگراست.

$(a_n \searrow 0)$

۲/ فرض کنید $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای نامنفی از اعداد حقیقی باشد. در این صورت همگرایی
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (1) و $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ (2) هم ارز است.

$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$

(1) $a_1 + a_2 + a_4 + \cdots$

(2) $a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + 16a_{16} + \cdots$

سری 2 یک سری نزار ساخته شده از 1 است.

مثال: همگرایی و یا واگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ را برحسب p بررسی کنید.

حل: $a_n = \frac{1}{n^p}$ ، $2^k a_{2^k} = 2^k \frac{1}{(2^k)^p} = 2^k \frac{1}{2^{kp}} = 2^{k-kp}$

$= 2^{k(1-p)} = (2^{(1-p)})^k = x_0^k \qquad \sum_{k=0}^{\infty} x_0^k \xlongequal{0<x_0<1} \frac{1}{1-x_0}$

$\xlongequal{x_0>1} \infty$

$$\begin{cases} 0 < x_0 < 1 \longrightarrow 2^{1-p} < 1 \longrightarrow 1-p<0 \longrightarrow p>1 \\ x_0 > 1 \longrightarrow 2^{1-p} > 1 \longrightarrow 1-p>0 \longrightarrow p<1 \end{cases}$$

(بنا به بند ۲ از $2^k a_{2^k}$ کمک گرفتیم.)

* مثال: همگرایی و یا واگرایی $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log)^p}$ را برحسب p بررسی کنید.
(تمرین در دنباله)

وهمچنین $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\log n(\log(\log n))}$.

۳ فرض کنید $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ و $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ دو دنباله در $\mathbb{C}$ باشند و $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ همگرا باشند. به علاوه فرض کنید $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$. در این صورت $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha(a_n)+\beta(b_n))$ همگرا است و $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha(a_n)+\beta(b_n)) = \alpha\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

فرض کنید $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a^*$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b^*$ در این صورت $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)$
$= \alpha a^* + \beta b^*$

* ولی لزوماً $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ به $a^* b^*$ همگرا نیست.

* می‌توان یک سری مانند $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ ساخت که $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = a^* b^*$

ولی به $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ می‌گوییم ضرب دو سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

ضرب دو سری $\neq$ سری حاصلضرب های $a_n b_n$

(شرکت پذیری و توزیع پذیری به وسیله ی پرانتز در مورد مجموعه های متناهی هستند.)

غیر دقیق:

$$(a_1+a_2+a_3+\cdots)(b_1+b_2+b_3+\cdots)$$

$$=\underbrace{(a_1b_1)}_{c_2}+\underbrace{(a_1b_2+a_2b_1)}_{c_3}+\underbrace{(a_1b_3+a_2b_2+a_3b_1)}_{c_4}$$

$$+\underbrace{(a_1b_4+a_2b_3+a_3b_2+a_4b_1)}_{c_5}+\cdots$$

$$C_n=\sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k} \longrightarrow$$ با فرض این

← آن گاه: $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = a^* b^*$.

به عبارت پیچیده تر: $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k}\right)=\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} b_n\right)$.

۴ می گوییم $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ به طور مطلق (مطلقاً) همگراست هرگاه $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ همگرا باشد.

می توان نشان داد هر سری مطلقاً همگرا خود همگراست.

مثال: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ همگراست ولی مطلقاً همگرا نیست زیرا $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{1}{n}\right|$ که برابر با $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ است، واگراست.

۵ فرض کنید $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ به طور مطلق (سری هایی در $\mathbb{C}$) همگرا هستند. یعنی

$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ و $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$ همگرایند. در این صورت اگر قرار دهیم

$c_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k}$ ، آن گاه $\sum_{n=2}^{\infty} c_n$ به طور مطلق همگرا خواهد بود. (دقیق ⊛)

۶ فرض کنید $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ در $\mathbb{C}$ واجد یکی از ویژگی‌های زیر باشد:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 & \text{(الف} \\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 & \text{(ب} \end{array}}$$

آن گاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ مطلقاً همگرا است. یعنی $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ همگرا است.

تمرین: مثال نقض برای ضرب دو سری نامطلقاً همگرا.

ملاحظات: ۸۸/۸/۴

۱ ⊛ اگر $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی مثبت باشد در این صورت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا است اگر و تنها اگر دنباله‌ی مجموع‌های جزئی آن از بالا کران‌دار باشد.

برهان: $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

در این صورت $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای صعودی است.

در این صورت اگر $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ از بالا کران‌دار باشد، آن گاه همگرا است.

در نتیجه $A = \{S_n : n = 1, \ldots\}$ زیرمجموعه‌ای کران‌دار از $\mathbb{R}$ است.
و طبق ویژگی تمامیت ترتیبی $\mathbb{R}$ ، $\sup A$ موجود است.

در واقع $S_n \to \underbrace{\sup(A)}_{S^*}$. پس $\lim_{n\to\infty} S_n = S^*$ و نیز

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S^*$$

اینک فرض کنید $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ همگرا باشد.

درنتیجه اگر $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای همگرا خواهد بود. هر دنباله‌ی همگرا کران‌دار است پس $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ کران‌دار است.

A ۲) فرض کنید $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ و $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ دو سری مثبت باشند. به‌علاوه فرض کنید به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $a_n \leqslant c b_n$. در این صورت:

الف) اگر $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ همگرا باشد، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نیز همگراست.

ب) اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگرا باشد، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ نیز واگراست.

برهان: فرض کنید $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ و $t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ ، فرض کنید $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ همگرا باشد، در این صورت t_n همگرا و از بالا کران‌دار است به مقداری مانند M . درنتیجه $S_n \leqslant c t_n \leqslant cM$ پس $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ نیز از بالا کران‌دار است و درنتیجه بنا بر حکم قبل همگراست.

اگر $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}_{}$ واگرا باشد، آنگاه $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} b_n}_{}$ نیز واگراست.

$(S_n)_{n=1}^{\infty}$ بی‌کران است. $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ بی‌کران است.

B ۲) فرض کنید $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ و $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ دو سری مثبت باشند. به علاوه فرض کنید $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$، در اینصورت $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست اگر و تنها اگر $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ همگرا باشد. زیرا: ⇐

دیدیم که اگر $a_n \leqslant c b_n$، آنگاه همگرایی $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ منجر به همگرایی $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ خواهد شد.

تمرین

(*) ولی می‌توان نشان داد که اگر به ازای یک $N_0\in\mathbb{N}$، داشته باشیم $n\geqslant N$ و $a_n \leqslant c b_n$. آنگاه حکم مشابهی برقرار است و همگرایی $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ منجر به همگرایی $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ خواهد شد و نیز واگرایی $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ منجر به واگرایی $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ خواهد شد.

⇒ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$، پس به ازای $\varepsilon=\frac{1}{2}$، $N_0\in\mathbb{N}$ که اگر $n\geqslant N_0$

آنگاه $\frac{a_n}{b_n}\in N_{\frac{1}{2}}(1)$.

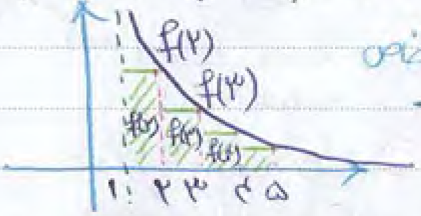
$$\frac{a_n}{b_n}\in N_{\frac{1}{2}}(1)$$

$$\forall n\geqslant N_0 \Rightarrow \frac{1}{2}<\frac{a_n}{b_n}<\frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} a_n<\frac{3}{2}b_n \\ b_n<2a_n \end{cases}$$

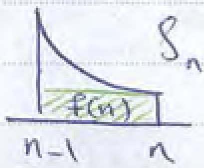
بنابر حکم قبل از اینکه به ازای هر $n\geqslant N_0$، همگرایی $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ به همگرایی $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ می‌انجامد و نیز از اینکه $b_n<2a_n$ به ازای هر $n\geqslant N_0$ همگرایی $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ به همگرایی $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ می‌انجامد.

اگرچه مثلاً ۲ باشد a_n را ۲ برابر می‌کنیم که تأثیری در همگرایی و یا واگرایی دنباله ندارد. ← حالتهای مختلف می‌تواند ایجاد شود. (اعداد مثبت باشند (حدود))

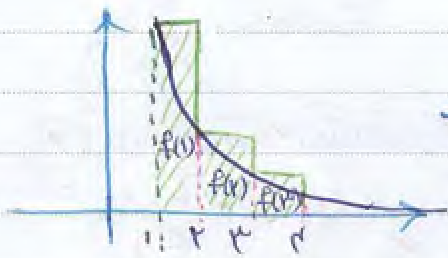
۳) فرض کنید $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ تابعی مثبت و نزولی باشد به طوری که $\lim_{n\to\infty} f(n)=0$

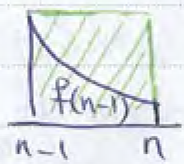


برش خاص



$$S_n=\sum_{k=2}^{n} f(k) < \int_1^n f(x)\,dx$$





$$S_n=\sum_{k=1}^{n} f(k) > \int_1^n f(x)\,dx$$

$$\to \sum_{k=2}^{n} f(k) < \int_1^n f(x)\,dx < \sum_{k=1}^{n} f(k) \quad ; \quad S_n - f(1) \le \underbrace{\int_1^n f(x)\,dx}_{t_n} \le S_n$$

پس $\lim_{n\to\infty}\int_1^n f(x)\,dx$ موجود است اگر و تنها اگر $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(k)$ موجود باشد.

مثال:

$$f:[1,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$x\longrightarrow f(x)=\frac{1}{x^p}$$

f نزولی است و $\lim_{n\to\infty} f(n)=0$. پس $\lim_{n\to\infty}\int_1^n \frac{1}{x^p}\,dx$ موجود است اگر و تنها اگر $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^p}$ موجود باشد.

$$\int_1^n \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} \int_1^n x^{-p}\,dx = \left[\frac{1}{-p+1}x^{-p+1}\right]_1^n = \frac{n^{1-p}-1}{1-p} & , p\neq 1 \\ \int_1^n \frac{1}{x}\,dx = \left[\ln x\right]_1^n = \ln(n) & , p=1 \end{cases}$$

می‌دانیم اگر $p=1$ داریم $\lim_{n\to\infty} \ln(n)=\infty$، پس بنابر حکم داده شده $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^p}$ موجود نیست.

می‌دانیم اگر $p>1$، آنگاه $\lim_{n\to\infty}\frac{n^{1-p}-1}{1-p}$ موجود است پس $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^p}$ به ازای $p>1$ همگراست.

می‌دانیم اگر $p<1$، آنگاه $\lim_{n\to\infty}\frac{n^{1-p}-1}{1-p}=\infty$، پس $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^p}$ نیز موجود نیست.

* تعریف: می‌گوییم $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ یک تجدید آرایش $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ است هرگاه تابع $f: \mathbb{N}\xrightarrow[\text{پوشا}]{1-1}\mathbb{N}$ موجود باشد که به ازای هر $n\in\mathbb{N}$، $a_n=b_{f(n)}$

مثال: $a_n=(-1)^n$ در این صورت: $a_n: -1, 1, -1, 1, \ldots$
$b_n: 1, -1, 1, -1, \ldots$
به این ترتیب $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ یک تجدید آرایش سری $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ است.

* قضیه: فرض کنید $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ مطلقاً همگرا باشد.

$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=a^{**}$ همگراست. پس $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a^{*}$ همگراست.

در این صورت هر تجدید آرایش این سری $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ مطلقاً همگراست، به علاوه

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=a^{*}$ و $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|=a^{**}$.

Subject:
Year. ۸۸ Month. ۸ Date. ۴

همگرا بودن ولی مطلقاً همگرا نبودن

* قضیه: فرض کنید $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرای مشروط باشد. ($\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد ولی $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ همگرا نباشد.) به علاوه فرض کنید $\alpha \in \mathbb{R}$ یک عدد مختلط دلخواه باشد، در این صورت تجدید آرایشی از $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ها موجود است که به α میل کند.

مثال: فرض کنید $a_n = (-1)^n$ ، $b_n = \frac{1}{n}$. می دانیم که دنباله ی a_n کران دار است و $b_n \searrow 0$ در نتیجه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ همگراست. به عبارت دیگر $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$ همگراست. $\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots\right)$

ولی $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \right|$ عبارت است از $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ که واگراست پس

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ همگرای مشروط است. (a_n ها باید متناوب باشند. یک در میان + و −)

← می توان نشان داد که $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = \ln(2)$ ولی تجدید آرایشی از این سری موجود است که به صفر همگرا باشد.

۸۸/۸/۹

در مفهوم تابع هر ورودی خاص، یک خروجی خاص دارد.

تابعی وجود دارد که به برخی از $\underbrace{\text{زیرمجموعه های}}_{M}$ $\mathbb{R}^2$ عددی را نسبت می دهد.

این تابع را با A نشان می دهیم. خواص زیر را در نظر می گیریم:

«حساب انتگرال»

الف) به ازای هر $S\in M$، $A(S)\geqslant 0$.

ب) اگر $S,T\in M$ آنگاه $S\cup T\in M$ و $S-T\in M$ ، $S\cap T\in M$.

← اصول سه‌گانه: یا $A=B$ یا $A<B$ یا $A>B$ — به در مجموعه‌های شامل این اصول دست کم یکی از این موارد صادق است.

← زیرمجموعه بودن یک ترتیب در مجموعه‌ها

به‌ویژه
$$A(S\cup T)=A(S)+A(T)-A(S\cap T)$$

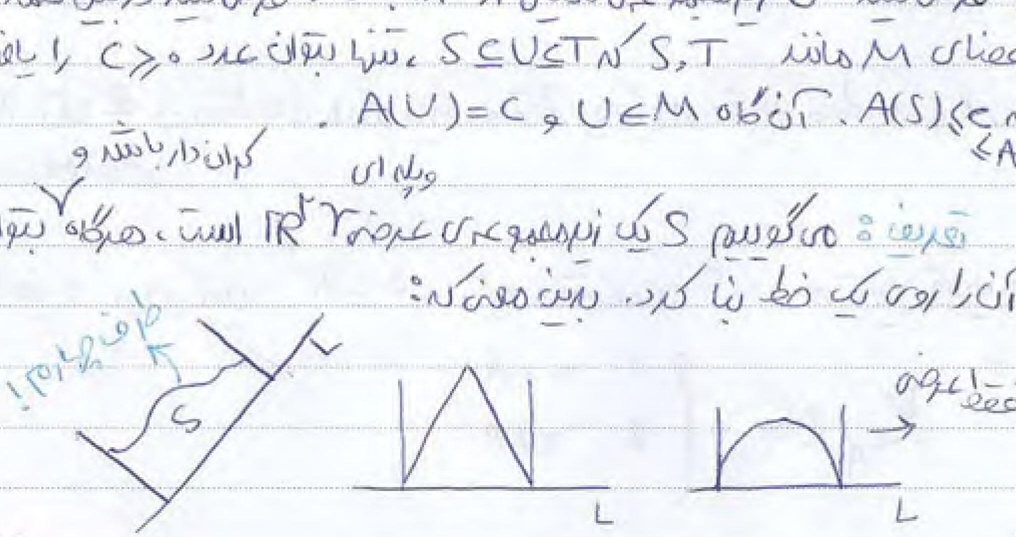
$$A(S-T)=A(S)-A(T)$$

همواره، هرگاه $T\subseteq S$ باشد.

ج) اگر S یک مستطیل به طول h و عرض H باشد، آنگاه $A(S)=hH$

د) فرض کنید U زیرمجموعه‌ی معینی از $\mathbb{R}^2$ باشد. فرض کنید در بین همه‌ی اعضای M مانند S,T که $S\subseteq U\subseteq T$، تنها بتوان عدد $c\geq 0$ را یافت که $A(S)\leq c\leq A(T)$. آنگاه $U\in M$ و $A(U)=c$.

تعریف: می‌گوییم S یک زیرمجموعه‌ی ویژه‌ای عرضه‌ی $\mathbb{R}^2$ است، هرگاه کران‌دار باشد و بتوان آن را روی یک خط بنا کرد، به این معنی که:



می‌گوییم زیرمجموعه‌ی S از $\mathbb{R}^2$ عرضی و پله‌ای است هرگاه خم طرف چپ و راست آن پله‌ای باشد.

تعریف: فرض کنید $f: I \to \mathbb{R}$، می‌گوییم:

$I \subseteq \mathbb{R}$

$I=[a,b]$ بازه‌ی بسته و کران‌دار (مجموعه‌ی فشرده) ← که پله ندارد.

f ساده است هرگاه برد f متناهی باشد. (تابع sgn / دیریکله)

f پله‌ای است هرگاه افراز $P\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ روی I موجود باشد،

$a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_n=b$

به طوری که روی هر قطعه‌ی $[x_{k-1}, x_k]$ (x_{k-1}, x_k) f ثابت باشد.

به عبارت دیگر

. مقدار f روی قطعه‌ی $[x_{k-1}, x_k]$ (x_{k-1}, x_k) را با f_k نشان می‌دهیم.

← مقدار تابع f در نقطه‌های مرزی بین دو قطعه به یکی از مقادیر قطعه‌ی مجاور نسبت داده خواهد شد.

تعریف: فرض کنید $S \subseteq \mathbb{R}^2$، تابع مشخصه‌ی S به صورت زیر تعریف می‌گردد:

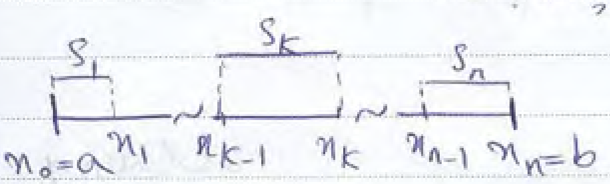
khi. خی

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1 & x\in A\\ 0 & x\notin A\end{cases}$$

بدین ترتیب $f=\sum_{k=1}^{n} f_k \chi_{(x_{k-1},x_k)}$ (x_{k-1},x_k) ← در خارج از نقاط مرزی قطعه‌ها

(اگر یک خط را هم از مستطیل یا خود زمان حذف کنیم تغییری در مساحت نمی‌کند زیرا مساحت خط صفر است.) $f(x_k)=f_k$ یا f_{k+1}

* فرض کنید $I\longrightarrow\mathbb{R}$ تابعی پله‌ای باشد.
$I=[a,b]$

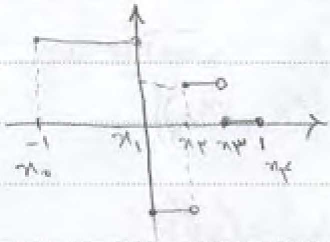


انتگرال s روی I را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\boxed{\int_I s=\sum_{k=1}^{n} s_k(x_k-x_{k-1})} = \boxed{I(I,s)}$$

$$=s_1(x_1-x_0)+s_2(x_2-x_1)+\cdots+s_k(x_k-x_{k-1})+\cdots+s_n(x_n-x_{n-1})$$

$$s:[-1,1]\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$x\longrightarrow s(x)=\begin{cases}1 & -1\leq x<0\\ -1 & 0\leq x<\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\leq x<\frac{2}{3}\\ 0 & \frac{2}{3}\leq x\leq 1\end{cases}$$



$P: -1 = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 = 1$ (با $x_1 = 0$، $x_2 = \frac{1}{2}$، $x_3 = \frac{2}{3}$)

$$I(S) = \int_{[-1,1]} S = S_1(x_1 - x_0) + S_2(x_2 - x_1) + S_3(x_3 - x_2) + S_4(x_4 - x_3)$$

$$= 1(0-(-1)) + (-1)\left(\frac{1}{2} - 0\right) + \frac{1}{2}\left(\overbrace{\frac{2}{3} - \frac{1}{2}}^{\frac{1}{6}}\right) + 0\left(1 - \frac{2}{3}\right)$$

$$I(S) = 1\times1 + (-1)\times\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{6} + 0\times\frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{12} = \frac{7}{12}$$

$$\underbrace{I(I, S)}_{\text{انتگرال ریمان } S}$$

* ملاحظات:

۱) فرض کنید $S, t : I \longrightarrow \mathbb{R}$ توابع پله‌ای باشند و $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. در این صورت $\alpha S + \beta t$ نیز تابعی پله‌ای است و

$$\int_I (\alpha S + \beta t) = \alpha \int_I S + \beta \int_I t$$

برهان: مبتنی است بر ایجاد یک افراز مشترک و استفاده از ویژگی‌های جمع و ضرب.

۲) فرض کنید $S : I \rightarrow \mathbb{R}$ پله‌ای باشد و $I = [a, b]$ و $a < c < b$، در این صورت

$$\int_{[a,b]} S = \int_{[a,c]} S + \int_{[c,b]} S$$

برهان: مبتنی است بر افزودن c به افراز مربوط به S در صورتی که قبلاً جزء آن افراز نباشد.

Subject:
Year. ۸۸ Month. ۸ Date. ۱۱ ( )

منحنی ها و محور مختصات :

①

$$\frac{1}{4} < Re\left(\frac{1}{\bar z}\right) + Im\left(\frac{1}{\bar z}\right) < \frac{1}{2} \quad , \quad Im\left(\frac{1}{\bar z}\right) < -\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2} i \ , \ \frac{1}{\bar z} = \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \overline{\left(\frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2} i\right)}$$

$$= \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{y}{x^2+y^2} i \qquad z = x+iy, \quad \bar z = x-iy$$

$$\rightarrow Re\left(\frac{1}{\bar z}\right) = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad Im\left(\frac{1}{\bar z}\right) = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\rightarrow \frac{1}{4} < \underbrace{\frac{x+y}{x^2+y^2}}_{f(x,y)=r} < \frac{1}{2} \rightarrow \frac{x+y}{x^2+y^2} = r$$

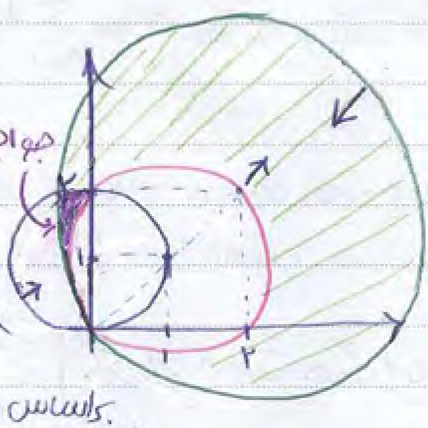
$$\rightarrow x^2+y^2 - \frac{1}{r}x - \frac{1}{r}y = 0 \rightarrow \left(x - \frac{1}{2r}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2r}\right)^2 = \frac{1}{4r^2} + \frac{1}{4r^2} = \frac{1}{2r^2}$$

$$r = \frac{1}{4} \rightarrow (x-2)^2 + (y-2)^2 = 8$$

$$r = \frac{1}{2} \rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$$

جواب! $\frac{1}{\bar z}$ صفحه‌ی z را وارونه میکند.

$$\frac{1}{4} < \frac{x+y}{x^2+y^2} \qquad x^2+y^2-4x-4y<0$$
$$(x-2)^2+(y-2)^2<8$$



$$Im\left(\frac{1}{z}\right) < -\frac{1}{2} \qquad \frac{-y}{x^2+y^2} < -\frac{1}{2} \xrightarrow[\text{اصطلاحی مرتب}]{\text{با اساس.}}$$

$$-y < -\frac{1}{2}(x^2+y^2) \Rightarrow x^2+y^2-2y<0 \Rightarrow x^2+(y-1)^2<1$$

* توضیح پیرامون: قضیه‌ی تجدید آرایش سری‌های عددی:

می‌دانیم که اگر $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای در $\mathbb{R}$ باشد، مطلقاً همگرا بودن دنباله‌ی مجموع‌های جزئی این سری، یعنی $(S_n)_{n=1}^{\infty}$، که در آن $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_n$، بدان معنی است که $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ همگراست. در این صورت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نیز همگراست و

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$$

به ویژه هر تجدید آرایش $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ مطلقاً همگراست با حد پیش از تجدید آرایش. یعنی اگر $f: \mathbb{N} \xrightarrow[\text{پوشا}]{1-1} \mathbb{N}$ و $b_n=a_{f(n)}$، آن‌گاه $\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$. ولی اگر $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ به گونه‌ای باشد که $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد

ولی $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ واگرا باشد، در این صورت می‌گوییم $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ به طور مشروط همگراست به ویژه همگرایی و نیز حد تحت تجدید آرایش حفظ نمی‌گردند، به طوری که به ازای هر $\alpha \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ تابع $f: \mathbb{N} \xrightarrow[\text{پوشا}]{1-1} \mathbb{N}$ موجود است که اگر $b_n=a_{f(n)}$، آن‌گاه $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ به α همگرا باشد. اینک فرض کنید $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای در $\mathbb{C}$ باشد.

اگر $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$ همگرا باشد، آن‌گاه می‌گوییم دنباله‌ی مجموع‌های جزئی $(S_n)_{n=1}^{\infty}$، که $S_n=\sum_{k=1}^{n} z_n$ مطلقاً همگراست. در نتیجه‌ی آن $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ نیز همگراست و $\left|\sum_{n=1}^{\infty} z_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$. در این صورت همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$ و نیز حدهای آن‌ها تحت تأثیر تجدید آرایش قرار نمی‌گیرد.

$w_n = z_{f(n)}$

به عبارت دیگر به ازای هر $f: \mathbb{N} \xrightarrow[\text{پوشا}]{1-1} \mathbb{N}$ ، $\sum_{n=1}^{\infty} w_n = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$ و

$\sum_{n=1}^{\infty} |w_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$. اینک فرض کنید $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ مطلقاً همگرا نباشد در اینصورت

همگرایی و یا واگرایی سری با تجدید آرایش ممکن است تغییر کند. فرض کنید

$z_n = x_n + iy_n$ ، به علاوه فرض کنید $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ به عنوان سری‌هایی در $\mathbb{R}$ همگرای مشروط باشند. در این صورت می‌توان تجدید آرایش‌هایی یافت به هر نقطه‌ی دلخواه $\mathbb{C}$ همگرا گردند.

تابع پله‌ای روی I

اینک فرض کنید $f: I \xrightarrow{\text{کران دار}} \mathbb{R}$ ، $I=[a,b]$ و $S = \{\varphi : f \leq \varphi\}$ ، $\varphi: I \to \mathbb{R}$

و $T = \{\psi : \psi \leq f\}$ ، $\psi: I \to \mathbb{R}$ تابع پله‌ای

مثال:

$V = \left\{ \int_I \psi : I \in T \right\}$ $\quad$ $U = \left\{ \int_I \varphi : \varphi \in S \right\}$

در صورت وجود: $\underline{I}(f) = \sup(V)$ / $\overline{I}(f) = \inf(U)$

به وضوح در صورت وجود همیشه $\underline{I}(f) \leq \overline{I}(f)$

✓ تمرین: وجود یا عدم وجود $\sup(V)$ ، $\inf(U)$ را بررسی کنید.

تعریف: می‌گوییم f انتگرال‌پذیر ریمان است اگر $\overline{I}(f) = \underline{I}(f)$.

در اینصورت $\int_I f = \underline{I}(f) = \overline{I}(f)$

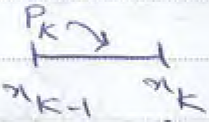
تابع فاصله ریمانی است.

$\underbrace{[x_k, x_{k+1})}_{\text{ریمان}}$

* ملاحظات:

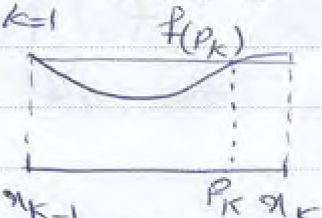
۱) اگر f انتگرال‌پذیر ریمان باشد، آنگاه به ازای هر $\varepsilon>0$ دو تابع پله‌ای φ و ψ موجودند که: $\psi \leqslant f \leqslant \varphi$ و $\int_I \varphi - \int_I \psi < \varepsilon$.

۲) فرض کنید f انتگرال‌پذیر ریمان باشد و فرض کنید $P: a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$ افراز دلخواهی باشد.



فرض کنید $P_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

در این صورت قرار می‌دهیم $S(P,f)=\sum_{k=1}^{n} f(P_k)(x_k-x_{k-1})$ ، آنگاه



$$S_I(f)=\lim_{n\to\infty} S(P,f)=\int_I f$$

$$=\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(P_k)(x_k-x_{k-1})$$

در صورت وجود این حد بدون وابستگی مقدار آن به انتخاب چگونگی P_k ها می‌نویسیم:

* اگر $\inf U=\sup V$ آنگاه f انتگرال‌پذیر ریمان است.

$$\int_I f = \inf_{f\leqslant\varphi} \int_I \varphi = \sup_{\psi\leqslant f} \int_I \psi$$

پله‌ای $\varphi\in S$ پله‌ای $\psi\in T$

$$\int_I f = S_I(f)$$

در این صورت:

$$S_I(f)=\inf_{f\leqslant\varphi}\int_I \varphi = \sup_{\psi\leqslant f}\int_I \psi$$

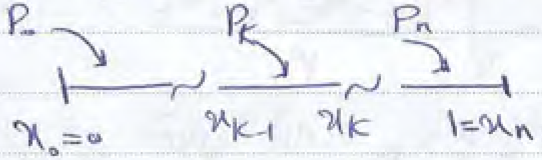
مثال ۱:

⑤ $f: [0,1] \to \mathbb{R}$

$x \to f(x)=x$

قضیه: اگر $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ پیوسته باشد، آن گاه انتگرال پذیر ریمان است.

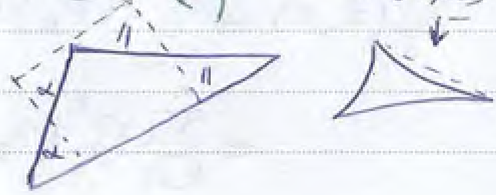
← با توجه به این قضیه لازم نیست به تمام افرازها در تابع بالا توجه کنیم و انتگرال پذیری را چک کنیم. نقطه ها مستقل از نوع افراز و P_k ها است!



$$* \ S_I(P,f)=\sum_{k=1}^{n} f(P_k)(x_k-x_{k-1})$$

به آن روش دیگر نمی‌شود ← ساختن مستطیل!

زیرا فاصله ها با پاره خط (طول) واصل برابر ← مفروض مستقیم بودن ← قضیه مقدار میانگین



← P_k میانگین درجه اول هر نقطه از افراز است.

$$P_k=\frac{x_{k-1}+x_k}{2}$$

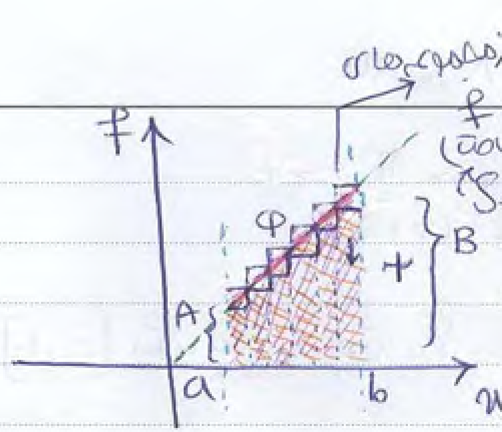
$$\to S_I(P,f)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}(x_{k-1}+x_k)(x_k-x_{k-1})$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(x_k^2-x_{k-1}^2) \overset{\text{تلسکوپی}}{=\!=} \frac{1}{2}(x_n^2-x_0^2)$$

$$\to \int_I f = S_I(f)=\lim_{n\to\infty} S_I(P,f)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(\underbrace{x_n^2}_{1}-\underbrace{x_0^2}_{0})=\frac{1}{2}$$

Subject:
Year. ۹۸ Month. ۸ Date. ۱۹ ( )

$\rightarrow \int_I f = \frac{1}{2}(b^2-a^2)$



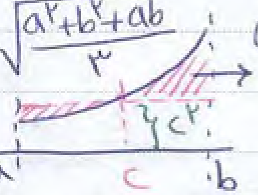
$S=\left(\frac{A+B}{2}\right)h$
$=\frac{a+b}{2}(b-a)$
$=\frac{1}{2}(b^2-a^2)$

مثال ۲:

$f:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longrightarrow f(x)=x^2$

$P_k=\sqrt{\frac{x_{k-1}^2+x_{k-1}x_k+x_k^2}{3}}$

$c=\sqrt{\frac{a^2+b^2+ab}{3}}$



تمرین: اثبات: $x_{k-1}<P_k<x_k$

$$S_I(f,P)=\sum_{k=1}^{n} f(P_k)(x_k-x_{k-1})$$
$$=\sum_{k=1}^{n} P_k^2(x_k-x_{k-1})=\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{\frac{x_{k-1}^2+x_{k-1}x_k+x_k^2}{3}}\right)^2 \times (x_k-x_{k-1})$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3}\left(x_{k-1}^2+x_{k-1}x_k+x_k^2\right)(x_k-x_{k-1})$$
$$=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(x_k^3-x_{k-1}^3\right)=\frac{1}{3}(x_n^3-x_0^3)=\frac{1}{3}(b^3-a^3)$$

$$\int_I f = S_I(f)=\lim_{n\to\infty} S_I(P,f)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}(x_n^3-x_0^3)=\frac{1}{3}(b^3-a^3)$$

KK

Subject:
Year: ۸۸ Month: ۸ Date: ۱۹

مثال ۳:

① $f: [a,b] \to \mathbb{R}$

$x \to f(x) = x^m, m \in \mathbb{N}$

تمرین:

$$x_{k-1} < P_k = \sqrt[m]{\frac{1}{m+1}\left(\sum_{l=0}^{m} x_{k-1}^{m-l} x_k^{l}\right)} < x_k$$

$$S_I(f,P) = \cdots = \frac{1}{m+1}\left(x_n^{m+1} - x_0^{m+1}\right)$$

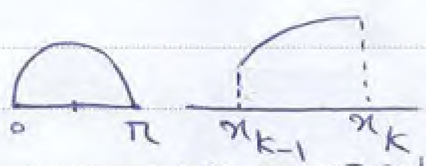
$$\int_I f = S_I(f) = \lim S(P,f) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{m+1}\left(x_n^{m+1} - x_0^{m+1}\right)$$

$$= \frac{1}{m+1}\left(b^{m+1} - a^{m+1}\right)$$

مثال ۴:

$f: [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ (a, b)

$x \to f(x) = \sin x$



تمرین:

$$x_{k-1} \leq P_k = -\sin^{-1}\left(\frac{\cos x_k - \cos x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}\right) \leq x_k$$

بنا طبق تعریف $\sin^{-1}$ روی $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ نه $[0,\pi]$

$$S(P,f) = \sum_{k=1}^{n} -\left(\frac{\cos x_k - \cos x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}\right)(x_k - x_{k-1})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} -\left(\cos x_k - \cos x_{k-1}\right) = \left(-\cos x_n - \cos x_{n-1}\right)$$

$$\int_I f = \int_{[0,\pi]} \sin = S_I(f) = \lim_{n\to\infty} S_I(f,P) = \lim_{n\to\infty}\left[-(\cos x_n - \cos x_0)\right] = 1$$

Continuum
↑

$f: I \xrightarrow{C^0} \mathbb{R}$ ⟶ هر تابع پیوسته از کلاس C^0 است.

$I \subseteq \mathbb{R}$ بازه فشرده

$I=[a,b]$ به علت پیوستگی f روی $[a,b]$، انتگرال ریمان موجود است.

$S=\{\underset{\text{پله‌ای روی } I}{\varphi} : f \leqslant \varphi\}$ از پایین کران دار است

$T=\{\underset{\text{پله‌ای روی } I}{\psi} : \psi \leqslant f\}$ از بالا کران دار است

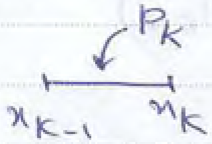
$$U=\left\{\int_I \varphi : \varphi \in S\right\} \subseteq \mathbb{R} \ , \ V=\left\{\int_I \psi : \psi \in T\right\} \subseteq \mathbb{R}$$

$$\varphi \in S , \psi \in T \Rightarrow \psi \leqslant f \leqslant \varphi \Rightarrow \psi \leqslant \varphi \Rightarrow \int_I \psi \leqslant \int_I \varphi$$

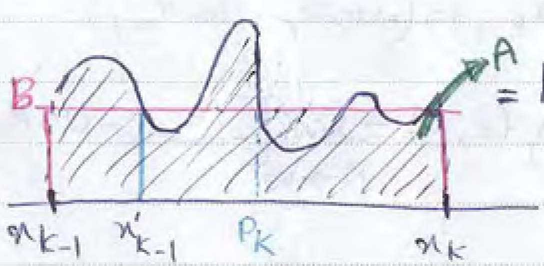
$, \inf U = \sup V$
↳ به علت پیوستگی f

$P: a=x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$

$, S_I(f,P) = \sum_{k=1}^{n} f(p_k)(x_k - x_{k-1})$



فرض: f تابعی مثبت:



$= F(x_k) - F(x_{k-1})$

$$P_K \in f^{-1}(\{B\}) \cap [x_{k-1}, x_k]$$

$$\longrightarrow \boxed{P_K \in f^{-1}\left(\frac{F(x_k)-F(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}\right) \cap [x_{k-1}, x_k]}$$

$$S_I(f,P) = \sum_{k=1}^{n} f(P_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{F(x_k)-F(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}\right)(x_k - x_{k-1})$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(F(x_k)-F(x_{k-1})\right) = \cancel{F(x_1)} - F(x_0) + \cancel{F(x_2)} - \cancel{F(x_1)} + \cdots$$

$$+ \cancel{F(x_{n-1})} - \cancel{F(x_{n-2})} + F(x_n) - \cancel{F(x_{n-1})} = F(x_n) - F(x_0)$$

$$\longrightarrow S_I(f,P) = F(b) - F(a) \longrightarrow \lim_{n\to\infty} S_I(f,P) = F(b) - F(a)$$

$$\boxed{\int_a^b f = \int_{[a,b]} f = \int_I f = F(b) - F(a)}$$

در واقع: $\inf U = \sup V = \int_I f = S_I(f) = \lim S_I(f,P)$
$= F(b) - F(a)$

قضیه: فرض کنید $f,g:[a,b] \to \mathbb{R}$ بطوری که $f(x) \leq g(x)$ برای $\forall x \in [a,b]$. آنگاه مساحت بین نمودارهای f و g
ضروری نیست!
قابل اندازه‌گیری است و آن را با مقدار A نشان می‌دهیم. به علاوه:

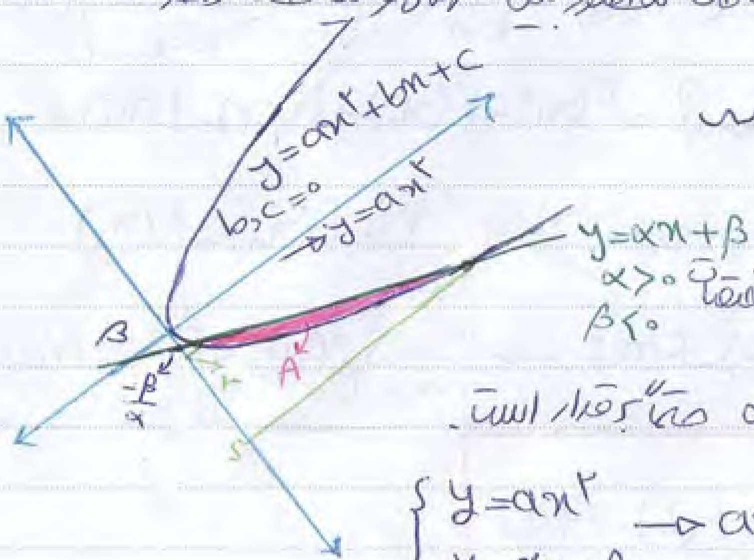
$$A = \int_{[a,b]} (g-f)$$

برهان: (کلیت)

$$\underbrace{A}_{\text{مساحت}}=A(g)-A(f)=\int_{[a,b]} g-\int_{[a,b]} f=\int_{[a,b]}(g-f)$$

$A(g) \to \int_{[a,b]} g$, $A(f) \to \int_{[a,b]} f$

پس: برای یافتن مساحت محصور بین سهمی و یک خط دلخواه



دستگاه مختصات مناسب را انتخاب میکنیم زیرا انتگرال ریمان مستقل از دستگاه مختصات تعریف میشود.

شرط $\alpha^2+4\alpha\beta>0$ متقاطع بودن است.

$$\begin{cases} y=ax^2 \\ y=\alpha x+\beta \end{cases} \to ax^2-\alpha x-\beta=0$$

$$x^2=\frac{\alpha x+\beta}{a} \quad (*)$$

$$\underbrace{x_1}_{r}=\frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2+4a\beta}}{2a}, \quad \underbrace{x_2}_{s}=\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+4a\beta}}{2a}$$

$$A=\int_{[r,s]}\left((\alpha x+\beta)-ax^2\right)dx=\alpha\int_{x_1}^{x_2} x\,dx+\int_{x_1}^{x_2}\beta\,dx-a\int_{x_1}^{x_2} x^2dx$$

$$\overset{(*)}{=}\alpha\left(\frac{x_2^2-x_1^2}{2}\right)+\beta(x_2-x_1)-a\left(\frac{x_2^3-x_1^3}{3}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\alpha\left(\frac{\alpha x_2+\beta}{a}-\frac{\alpha x_1+\beta}{a}\right)+\beta(x_2-x_1)$$

$$-\frac{1}{3}a\left(\frac{\alpha(\alpha x_2+\beta)}{a^2}+\frac{\beta}{a}x_2-\frac{\alpha(\alpha x_1+\beta)}{a^2}-\frac{\beta}{a}x_1\right)$$

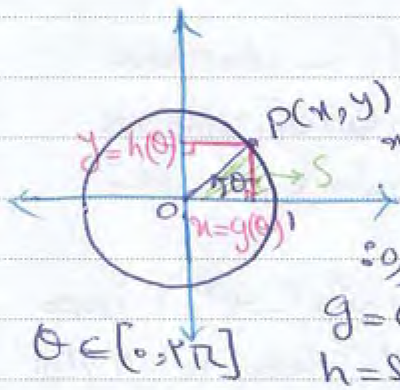
Subject:
Year. ۹۹ Month. ۸ Date. ۱۸

$x^2=\frac{\alpha x+\beta}{a}$ چرا؟!!

$\to x^3=\frac{\alpha x^2+\beta x}{a}=\frac{\alpha}{a}\left(\frac{\alpha x+\beta}{a}\right)+\frac{\beta}{a}x=\frac{\alpha(\alpha x+\beta)}{a^2}+\frac{\beta}{a}x$

ادامه!

$= \dots!$



$P(x,y): x^2+y^2=1$

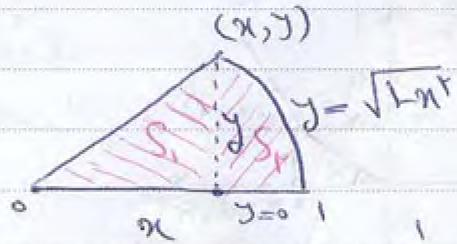
$x,y>0$

برای دایره:

$g=\cos$

$h=\sin$

$\theta\in[0,2\pi]$



$S=S_1+S_2=\frac{1}{2}xy+\int_x^1\sqrt{1-x^2}\,dx$

$S_1=\frac{1}{2}xy=\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}$

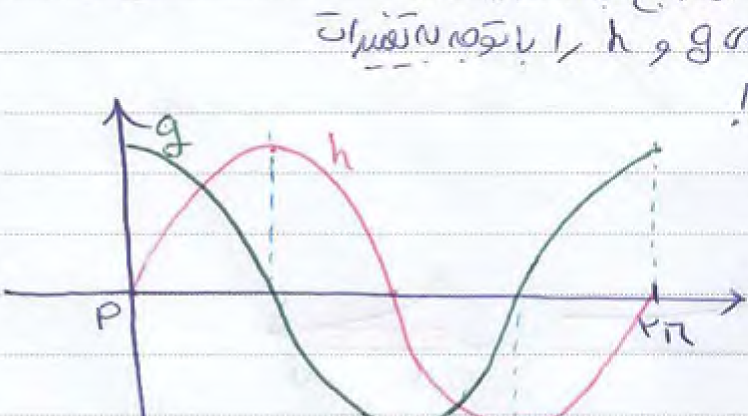
$S_2=\int_x^1\sqrt{1-x^2}\,dx$

$\to S=\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+\int_x^1\sqrt{1-x^2}\,dx$

$\theta=2S=x\sqrt{1-x^2}+2\int\sqrt{1-x^2}\,dx$ زاویه مضربی از مساحت!

زاویه برحسب رادیان دایره‌ای

بدون داشتن اطلاعات راجع به Sin و Cos
می‌توان نمودارهای g و h را با توجه به تغییرات
آن‌ها رسم نمود!



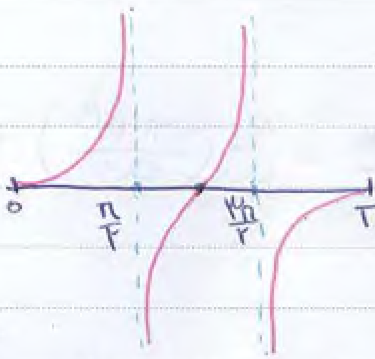
PAPCO

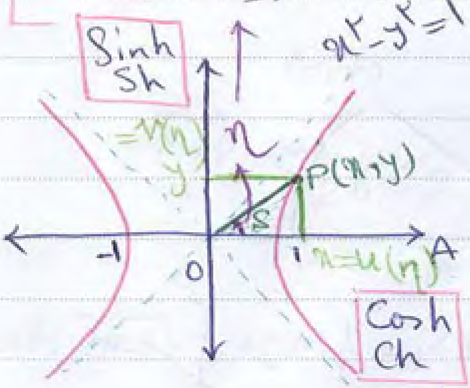
$$L(0) = \frac{h(0)}{g(0)}$$

مثلثاتی ← اثبات تمام

$$\boxed{ch(\eta)^2 - sh(\eta)^2 = 1}$$

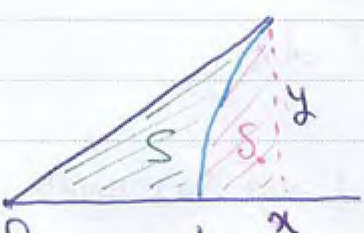
رادیان هذلولی





هذلولی واحد ← مرکز تقارن در مبدأ که هر قسمت آن تنها در یک نقطه محور x را قطع می‌کند. (به طول یک)

همان $x^2-y^2=1$ که به $xy=1$ ← اندازه‌ی 90° دوران داده شده ← هذلولی واحد.



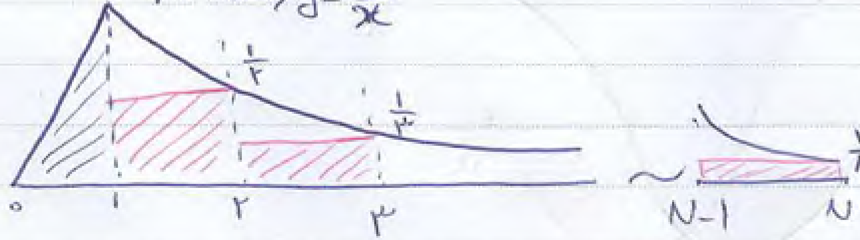
$$S_0 = \int_1^x y\,dx$$

$$S = \frac{1}{2}xy - S_0 = \frac{1}{2}xy - \int_1^x y\,dx$$

$$= \frac{1}{2}xy - \int_1^x \sqrt{x^2-1}\,dx$$

$$\eta = 2S = xy - 2\int_1^x y\,dx$$

$$f : x \to y = \frac{1}{x}$$



$\varphi_N : [1, N] \longrightarrow \mathbb{R}$

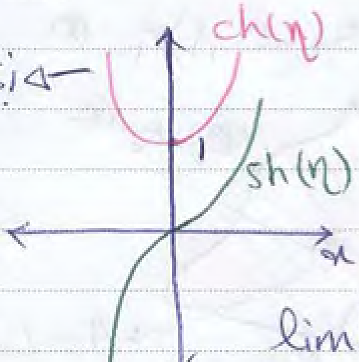
$x \in (x_{k-1}, x_k] : \varphi_N(x) = \frac{1}{k}$ $\qquad \forall N : \varphi_N \leq f$ (1)

$\int \varphi_N = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{N}$

$\left.\begin{array}{l}\sup\limits_{N \in \mathbb{N}} \varphi_N = \lim\limits_{N \to \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{N}\right) = \infty \\ + (1)\end{array}\right\} \Rightarrow \int f = \infty$

$\longrightarrow \boxed{\eta \in (-\infty, \infty)}$

به علت تقارن هذلولی ch هم باید متقارن باشد و همواره بزرگتر از یک. (مساوی)



نقیض آوردن ←

$\forall \eta \in (-\infty, +\infty)$ $\quad \boxed{ch(x) > sh(x)}$

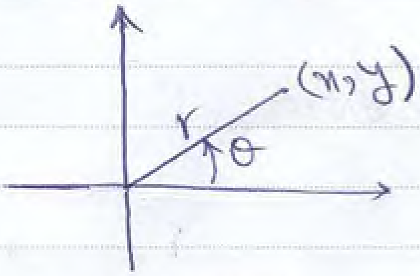
ch و sh هیچگاه یکدیگر را قطع نمی‌کنند.

اما می‌توان گفت: $\lim\limits_{\eta \to \infty} (ch(\eta) - sh(\eta)) = 0$

← مثلثات روی هر شاخه‌ی هذلولی دوره‌ای نیست!

** مختصات قطبی

(براساس مثلثات دایره‌ای)

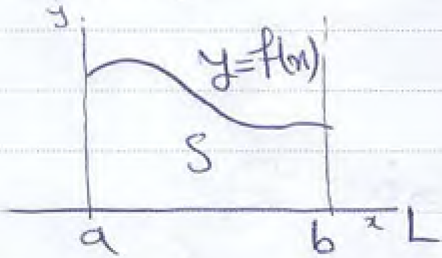


$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

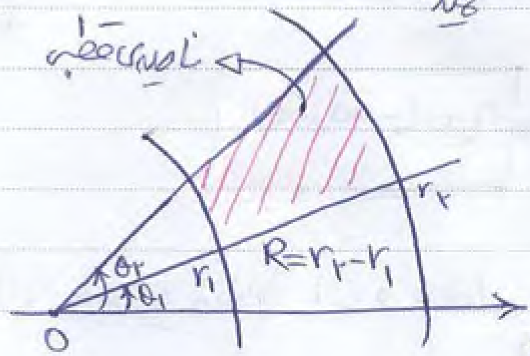
$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ tg\,\theta = \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

(x,y) دکارتی
دستگاه مختصات مسطح —▷ (r,θ) *
دستگاه مختصات قطبی صفحه

ناحیه عرضی (x,y)

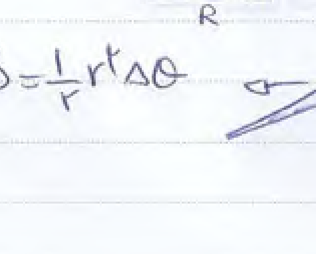


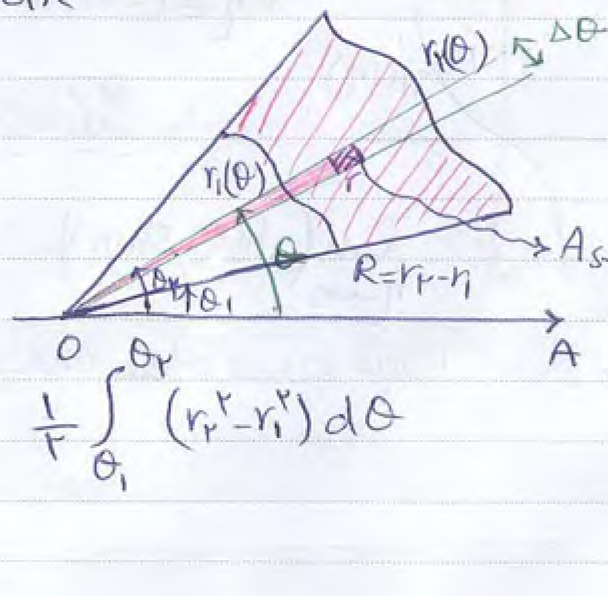
ناحیه قطبی



$$S = \int_{(a,b]} f = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\frac{1}{2}\left(r_1(\theta_2-\theta_1)\right)r_1$$ *





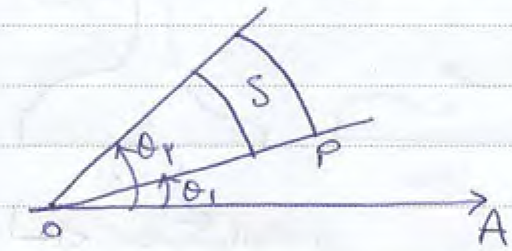
$A_S \simeq \frac{1}{2} r^2 \Delta\theta$

قطاع

$$S = \frac{1}{2} r^2 \Delta\theta$$

$$\frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} (r_2^2 - r_1^2)\,d\theta$$

مثال: فرض کنید $\theta_1=\frac{\pi}{6}$, $\theta_2=\frac{\pi}{3}$ و $r_1(\theta)=\alpha$,
$r_2(\theta)=\beta$ و $\alpha<\beta$

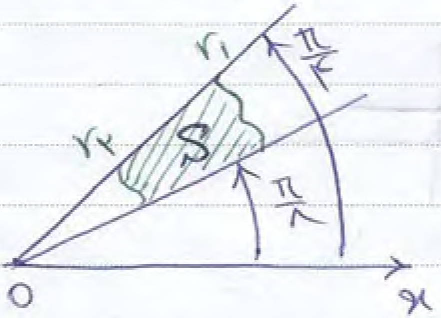


$$S=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\left(r_2(\theta)\right)^2-\left(r_1(\theta)\right)^2\right)d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\beta^2-\alpha^2\right)d\theta=\frac{1}{2}\left(\beta^2-\alpha^2\right)\frac{\pi}{6}$$

$$=\frac{\pi}{12}\left(\beta^2-\alpha^2\right)$$

مثال: $\theta_2=\frac{\pi}{4}$, $\theta_1=\frac{\pi}{8}$, $r_1(\theta)=\theta^2$ و $r_2(\theta)=\theta^3$



$$\forall\theta\in\left[\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{4}\right],\ \underset{0<\theta<1}{\ }\Rightarrow\theta^3\leq\theta^2$$

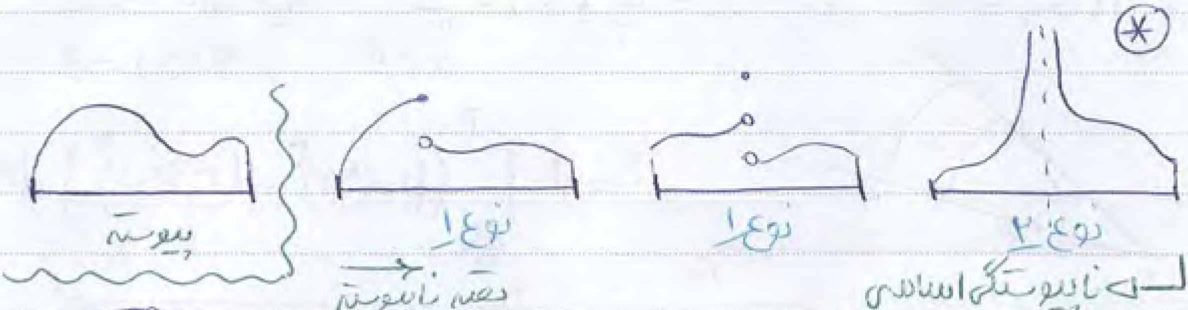
$$S=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\left(r_1(\theta)\right)^2-\left(r_2(\theta)\right)^2\right)d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\theta^4-\theta^6\right)d\theta=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\left(\left(\frac{\pi}{4}\right)^5-\left(\frac{\pi}{8}\right)^5\right)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{7}\left(\left(\frac{\pi}{4}\right)^7-\left(\frac{\pi}{8}\right)^7\right)\right)$$

Subject:
Year: ۸۸ Month: ۸ Date: ۳۰

⊛



نوع ۱ به حد چپ و راست دارد . [چه باهم برابر چه خیر]

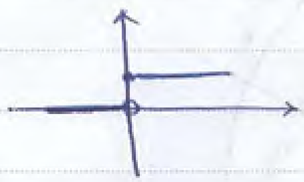
نوع ۱ و رفع شدنی

نوع ۲ به ~ ~ ~ در یک همسایگی ندارد [همسایگی یک نقطه]

دو نوع [کران دار به مثل $\sin\frac{1}{x}$ نوسانی
بی کران به مثل شکل ستاره ⊛

$$u(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

پله ی واحد

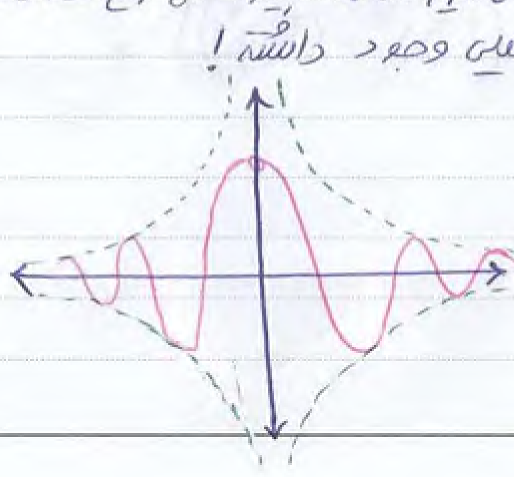


$$\operatorname{Sgn}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 1 \end{cases} \longrightarrow$$

اگر قدر مطلق بگیریم همه ی نقاط یک خواهد بود به غیر از نقطه ی صفر به

به ظاهر رفع شدنی است امّا اگر بیاییم و صفر را جابه جا کنیم کلاً تابع sgn ما به هم می ریزد به ناپیوستگی رفع شدنی به درد نخور نیست و ما بی کار نیستیم! حتماً دلیلی وجود داشته!

$$f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow \frac{\sin x}{x}$$



نه این تابع هم ناپیوستگی رفع‌شدنی دارد امّا مثل $\operatorname{sgn}(x)$ نیست.

توسیع ▷ $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Sinc(x) ▷
$$x \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

یعنی نقطه‌ای که آن را رفع ناپیوستگی می‌کنیم تاثیری در تعریف تابع ندارد.

F ▷

پیوستگی: I ←

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ ،

می‌گوییم f در x_0 پیوسته است، هرگاه نمودار f در x_0، شکستگی (حفره) نداشته باشد و بی‌کرانگی نیز وجود نداشته باشد.

بله

f روی I پیوسته است هرگاه در هر نقطه‌ی I پیوسته باشد.

* رسم یک نمودار به مشتق‌پذیری ربط دارد.
* بین صفر و یک می‌توان تابعی معرفی کرد که پیوسته باشد ولی نتوان آن را بدون برداشتن قلم از روی کاغذ رسم نمود!
* آیا راه حل کلی برای تضمین تعداد نقاط پیوستگی و ناپیوستگی یک تابع دلخواه وجود دارد؟ نه باید انتزاعی باشد.

تعریف حد

فرض کنید $f: I \to \mathbb{R}$ و x_0 نقطه‌ای روی I باشد.

$I \subseteq \mathbb{R}$ بازه

می‌گوییم $\lim_{x\to x_0} f(x)=L$ هرگاه به ازای هر $\varepsilon>0$ یک $\delta>0$ یافت گردد به طوری که

$$\boxed{\forall x\in \mathring{N}_\delta(x_0)\cap I \Rightarrow f(x)\in N_\varepsilon(L)}$$

$\to N_\delta(x_0)\setminus\{x_0\}$

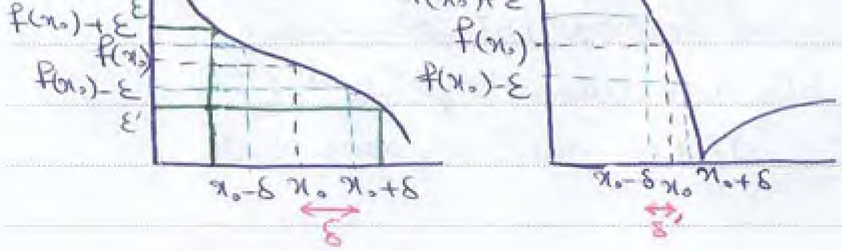
$$\boxed{\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 : \forall x\in I: 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon}$$

$\delta(\varepsilon, x_0)$ که به هر دو وابسته است!

⊛ تعریف: تابع f در نقطه‌ی x_0 پیوسته است هرگاه: $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

* x_0 نقطه‌ای از دامنه f است. $(x_0\in I)$
* x_0 نقطه‌ای حدی از f است. (x_0 نقطه‌ای جداافتاده از دامنه f نیست!)

* پیوستگی مفهومی نقطه‌ای است.



* $\lim_{x\to 3} x^2=9$ $\quad \varepsilon>0 : |x^2-9|<\varepsilon \Leftrightarrow |x-3||x+3|<\varepsilon$

$x\in N_1(3)$, $2<x<4$ $\quad \to |x-3|<\frac{\varepsilon}{|x+3|}$

$\to 5<|x+3|<7$

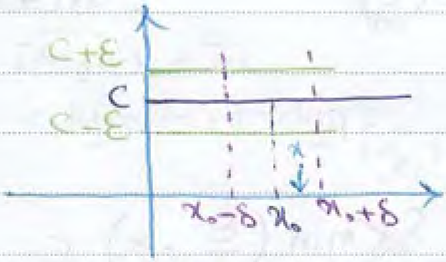
$$\begin{cases}\delta < \dfrac{\varepsilon}{7} \\ \delta < 1\end{cases} \longrightarrow |x-3| < \frac{\varepsilon}{7} < \frac{\varepsilon}{|x+3|} \longrightarrow |x-3||x+3| < \varepsilon \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \delta < \min\left(1, \frac{\varepsilon}{7}\right)$$

* توابع پیوسته به نوعی خط هستند امّا همواری خط لزوماً در آن‌ها برقرار نیست!

*ملاحظات:

۱) تابع ثابت پیوسته است.



۲) اگر $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ و $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$، آنگاه

$\lim_{x\to x_0} (f(x) \underset{\times}{\pm} g(x)) = A \underset{\times}{\pm} B$.

نتیجه: اگر f و g در x_0 پیوسته باشند، آنگاه $f \underset{\times}{\pm} g$ نیز در x_0 پیوسته است.

به ویژه اگر g در نقطهٔ x_0 حدی ناصفر داشته باشد، آنگاه:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\left(\lim_{x\to 0} g(x)\right)}$$

در این حالت:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$$

۳/ در بخش های پیشین دیدیم که تابع توان دوم پیوسته است. به طور مشابه می‌توان نشان داد که تابع $f: I \to \mathbb{R}$ در هر نقطه ی بازه ی I پیوسته است.

بازه $I \subseteq \mathbb{R}$

$x \to f(x) = x^n \;, n \in \mathbb{N}$

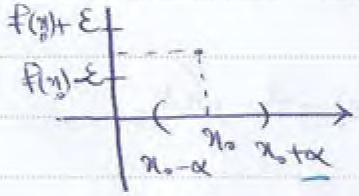
$\lim_{x \to x_0} x^n = x_0^n$

$$|x^n - x_0^n| = |x - x_0|\,|x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \dots + x x_0^{n-2} + x_0^{n-1}|$$

سعی می‌کنیم رابطه ای مانند $\left(s_{(\alpha)} < |x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \dots + x x_0^{n-2} + x_0^{n-1}| < t_{(\alpha)}\right)$ بیابیم که $s, t \neq 0$.
توابعی از α هستند.

در این صورت می‌دانیم: $\frac{\varepsilon}{t} < \frac{\varepsilon}{x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \dots + x x_0^{n-2} + x_0^{n-1}}$ پس قرار می‌دهیم

$$\delta \leq \min\left(\frac{\varepsilon}{t}, \alpha\right)$$



۴/ (افشردگی) فرض کنید، $f, g, h : I \to \mathbb{R}$ ،
بازه $I \subseteq \mathbb{R}$

$$\forall x \in I:\; g(x) \leq f(x) \leq h(x) \;,\; \lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = H$$

در این صورت: $\lim_{x \to x_0} f(x) = H$.

برهان:

$$\left.\begin{array}{l} G = f - g \\ H = h - g \end{array}\right\} \Rightarrow 0 \leq G \leq F \;,\; \lim_{x \to x_0} F(x) = 0$$

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 : x\in N_\delta(x_0)\cap I \Rightarrow F(x)\in N_\varepsilon(0)$

$\Rightarrow G(x)\in N_\varepsilon(0)$

۵) بدین ترتیب می‌توان نتیجه گرفت که توابع $\frac{P(x)}{q(x)}$ که p و q

چند جمله‌ای هستند در هر نقطه‌ای که q ناصفر باشد پیوسته‌اند.

(اثبات: تمرین) ← با استفاده از بندهای قبل!

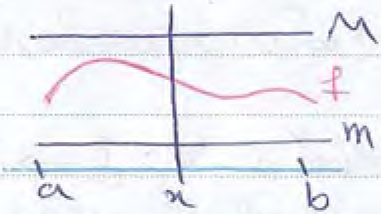
$I=[a,b]$

۶) فرض کنید $f: I\to \mathbb{R}$ کران‌دار باشد و f انتگرال ریمان داشته باشد. در این صورت تعریف می‌کنیم:

$$F: I \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow F(x)=\int_a^x f=\int_{[a,x]} f$$

آنگاه F پیوسته است.

$m\leqslant f\leqslant M$



$$\int_{[a,x]} m \leqslant \int_{[a,x]} f \leqslant \int_{[a,x]} M$$

$$m(x-a)\leqslant \int_a^x f \leqslant M(x-a) \Rightarrow m(x-a)\leqslant F(x)\leqslant M(x-a)$$

(وقتی که $x\to a$ میل کند دو طرف نامساوی و نتیجتاً $F(x)$ به صفر

میل می‌کند ← $F(x)$ در صفر پیوسته)

اما به ازای هر $x_0 \in [a,b]$:

$$F(x)-F(x_0) = \int_a^x f - \int_a^{x_0} f = \int_a^x f + \int_{x_0}^a f = \int_{x_0}^a f + \int_a^x f = \int_{x_0}^x f$$

$$\Rightarrow |F(x)-F(x_0)| = \left|\int_{x_0}^x f\right|$$

$$m|x-x_0| \leq \left|\int_{x_0}^x f\right| \leqslant M|x-x_0| \rightarrow \lim_{x\to x_0}\left|\int_{x_0}^x f\right| = 0$$

$$\rightarrow \lim_{x\to x_0}|F(x)-F(x_0)| = 0 \rightarrow \underline{\lim_{x\to x_0} F(x) = F(x_0)} \quad \square$$

← (ولی مشتق F، f نیست!)

* انتگرال تابع را هموارتر می‌کند. اگر f ناپیوسته، $\int f$ پیوسته، $\int(\int f)$ مشتق‌پذیر، $\int(\int(\int f))$ دوبار مشتق‌پذیر و الی آخر!

۷ اگر $u: I \to \mathbb{R}$ و $v: J \to I$ به گونه‌ای باشند که v در x_0 پیوسته باشد و u در $v(x_0)$، آنگاه uov در x_0 پیوسته است.

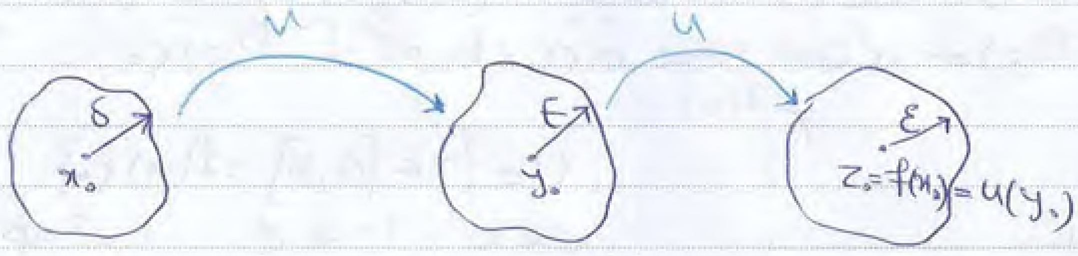
برهان:

$$\begin{tikzcd} J \arrow[r, "v"] \arrow[rr, bend right, "f = uov"'] & \overbrace{v(x_0)}^{y_0} \in I \arrow[r, "u"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$z_0=f(x_0)=u\circ v(x_0)=u(v(x_0))=u(y_0)$

$y_0=v(x_0)$

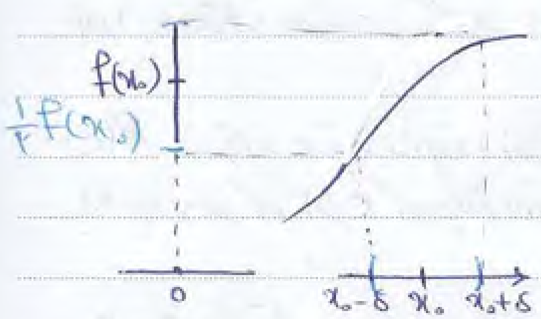
$\forall \varepsilon>0\ \exists E>0 : y\in N_E(y_0)\Rightarrow u(y)\in N_\varepsilon(z_0)$



$\rightarrow \forall E>0\ \exists\delta>0 : x\in N_\delta(x_0)\Rightarrow v(x)\in N_E(y_0)$

۵ فرض کنید $f: I\to\mathbb{R}$ در x_0 پیوسته باشد، به علاوه فرض
$I\subseteq\mathbb{R}$ بازه
کنید $f(x_0)$ مقداری مثبت باشد، در این صورت در یک همسایگی x_0
مقدار f میزان مثبت باقی می‌ماند.

(مفهوم علامت ثابت برای
توابع پیوسته)



← منحنی همیشه بزرگتر است.

$\varepsilon=\frac{1}{2}f(x_0)>0$

← برای این $\varepsilon>0$ مقدار $\delta>0$ موجود است که:

$|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

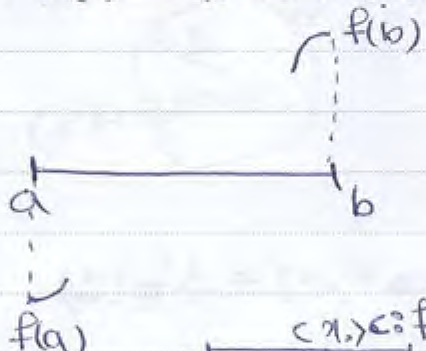
$\rightarrow x_0-\delta<x<x_0+\delta\Rightarrow f(x_0)-\varepsilon<f(x)<f(x_0)+\varepsilon$

$\rightarrow \frac{1}{2}\underbrace{f(x_0)}_{>0} < f(x) < \frac{3}{2}\underbrace{f(x_0)}_{>0} \rightarrow f(x)>0$. $\square$

پس اگر $x_0-\delta < x < x_0+\delta$ آن‌گاه $f(x)>0$.

قضیه‌ی بولزانوس!

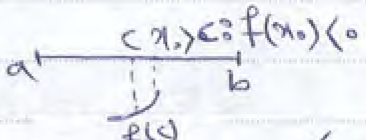
۹) فرض کنید $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ پیوسته باشد و به علاوه $f(b)>0$، و $f(a)<0$ آن‌گاه $a<c<b$ موجود است که $f(c)=0$.



$U=\{x\in[a,b] : f(x)<0\}$

$a\in U : U\neq\emptyset \qquad c=\sup U$

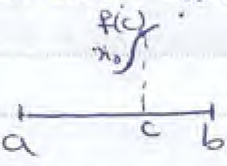
$\forall x\in U \Rightarrow x<b$



نشان می‌دهیم $f(c)=0$.

با استفاده از بند ۸ می‌توان نشان داد که $f(c)\gtrless 0$ به تناقض می‌انجامد. پس $f(c)=0$. این تناقض ناشی از آن است که $c=\sup U$. در واقع نشان می‌دهیم اگر $f(c)<0$، آن‌گاه c نمی‌تواند Sup U باشد. زیرا می‌توان عضوی بزرگتر از c در U یافت. (عضوی بزرگتر از Sup نمی‌توان داشت!)

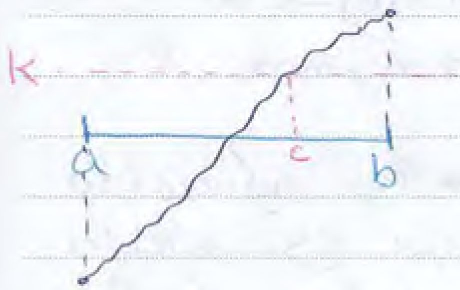
$f(c)$ نمی‌تواند مثبت باشد، زیرا اگر $f(c)$ مثبت باشد، آن‌گاه U کران بالایی دارد که از c کوچکتر است.



* ملاحظات:

۱) فرض کنید $f:[a,b]\xrightarrow{\text{پیوسته}}\mathbb{R}$ و $f(a)<f(b)$ به ویژه فرض کنید $f(a)<k<f(b)$. در این صورت $c\in(a,b)$ موجود است

به طوری که: $f(c) = k$.



نتیجه: تابع پیوسته همه‌ی مقادیر میانی دو مقدار، از برد خود را اختیار می‌کند.

نتیجه‌ی ۲: برد f یک بازه است.

برهان:

$H: I \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longrightarrow H(x) = f(x) - k$

$H(a) < 0 \ , \ H(b) > 0 \Longrightarrow \exists\, c : H(c) = 0 \Longrightarrow f(c) = k$

ii) اگر $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ کران‌دار باشد، آنگاه لزوماً f پیوسته نیست. (تابع دیریکله در هیچ نقطه‌ای پیوسته نیست.)

ولی: اگر $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ پیوسته باشد، آنگاه f کران‌دار است. یعنی مقادیر A و B موجودند که $\forall x \in [a,b]$ ، $A < f(x) < B$. بنابراین مجموعه $\{y \mid y = f(x) \ , \ x \in [a,b]\} = E$ کران‌دار است (هم از بالا و هم از پایین)

در نتیجه E هم $\sup$ و هم $\inf$ دارد. $\begin{cases} M = \sup E \\ m = \inf E \end{cases}$

می‌توان نشان داد که تابع پیوسته‌ی f بر $[a,b]$ مقادیر M و m را در جایی بر دامنه‌ی خود اختیار می‌کند. نقطه‌های $p, q \in [a,b]$ موجودند که $m = f(p)$ ، $M = f(q)$

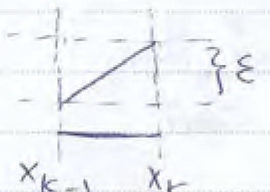
Subject:
Year: ۸۸ Month: ۹ Date: ۹ ( )

نتیجه: $f:[a,b] \xrightarrow{\text{پیوسته}} \mathbb{R}$ ، آنگاه کمینه و بیشینه‌ی مطلق دارد به تابع f ، max و min دارد.

iii) فرض کنید $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ پیوسته باشد، در این صورت:
به ازای هر $\varepsilon>0$ ، افراز $P: a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$ موجود است
به طوری که روی $[x_{k-1},x_k]$ تفاضل $M_k-m_k<\varepsilon$ که در آن

$$M_k=\overset{max}{\sup_{[x_{k-1},x_k]}} f(x) \quad \text{و} \quad m_k=\overset{min}{\inf_{[x_{k-1},x_k]}} f(x).$$

از روی این ویژگی توابع پیوسته می‌توان ثابت کرد هر تابع پیوسته انتگرال ریمان دارد.



با رفتن ε به سمت صفر تفاضل
خطاهای بالا و پایین نیز به صفر میل می‌کند.

iv) فرض کنید $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ پیوسته باشد، در این صورت $\int_a^b f$ موجود است.

در این صورت $m=\inf_{x\in[a,b]} f(x)=\inf\{y: y=f(x), x\in[a,b]\}$

$\hookrightarrow m=\min f$

$M=\sup_{x\in[a,b]} f(x)=\sup\{y: y=f(x), x\in[a,b]\}$

$\hookrightarrow M=\max f$

$\exists p,q \mid m=f(p), M=f(q)$

$$m\leq f(x)\leq M \to \int_a^b m\leq \int_a^b f\leq \int_a^b M \to$$

$$m(b-a)\leq \int_a^b f\leq M(b-a) \to \underset{=f(p)}{m}\leq \underbrace{\frac{\int_a^b f}{b-a}}_{K}\leq \underset{=f(q)}{M}$$

طبق :

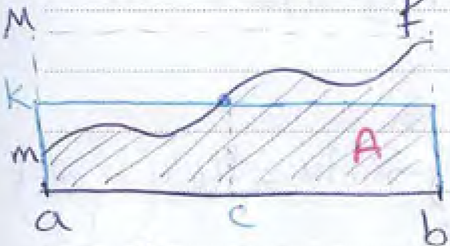
$$\to f(p)\leq K\leq f(q) \to \exists c: f(c)=K$$

$$f(c)=\frac{\int_a^b f}{b-a} \to \boxed{\int_a^b f=(b-a)f(c)}$$

قضیه‌ی اول مقدار میانگین در انتگرال

$$H=\frac{A}{b-a}$$

(کاربردها، گسترده و مثلا مکانیک از این قضایا استفاده می‌کنند.)



$f\geq 0$

$A=(b-a)K$

در واقع مستطیل سازی کردیم ←

در ادامه فرض کنید $f,g:[a,b]\xrightarrow{\text{پیوسته}}\mathbb{R}$ به ویژه فرض کنید $g\geq 0$. در این صورت:

$$m\leq f(x)\leq M$$

$$mg(x)\leq f(x)g(x)\leq Mg(x) \xrightarrow{\text{همه پیوسته‌اند}}$$

$$\int_a^b mg\leq \int_a^b fg\leq \int_a^b Mg$$

$$\Rightarrow m\int_a^b g \le \int_a^b fg \le M\int_a^b g \Rightarrow m \le \underbrace{\frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g}}_{k} \le M$$

$m=f(p)$ $\quad M=f(q)$

$$\Rightarrow m\le k\le M \Rightarrow f(p)\le k\le f(q)$$

$$\Rightarrow \exists c \mid f(c)=k$$

$$\Rightarrow f(c)=\frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g} \Rightarrow \boxed{\int_a^b fg = f(c)\int_a^b g}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx}$$

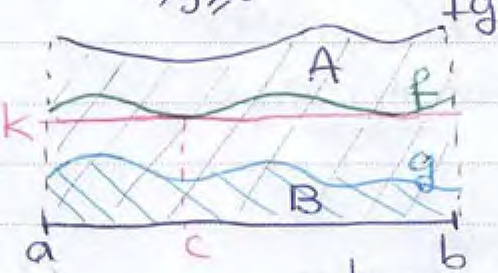
قضیه
دوم
مقدار
میانگین

اگر $g(x)=x$ ، آنگاه $\int_a^b g=\int_a^b g(x)dx$ برابر است با $\frac{b^2-a^2}{2}$

$\exists c:$

$$\int_a^b x f(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx = f(c)\int_a^b x\,dx = f(c)\left(\frac{b^2-a^2}{2}\right)$$

$f,g\ge 0$



$A=\int_a^b fg$ $\qquad B=\int_a^b g$

$A=f(c)B$

$$g=1 \Rightarrow \int_a^b f = f(c)(b-a) \Rightarrow$$ قضیه اول

۲) فرض کنید $f:[a,b]\to \mathbb{R}$ پیوسته و اکیداً یکنوا باشد، در اینصورت می‌توان نشان داد که تابع وارون f موجود است.
این تابع وارون روی برد f تعریف می‌شود.

$$g: R_f \to [a,b]$$

به علاوه g اکیداً یکنوا و پیوسته است.

«حساب دیفرانسیل»

$$f:[a,b]\to \mathbb{R}$$

$$x_0\in(a,b)\ ,\quad f^{-1}(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\qquad \underset{h\to 0}{x_0+h\to x_0}$$

مثال: فرض کنید

$$f:[a,b]\to \mathbb{R}$$
$$x\to f(x)=x^n$$

$x_0\in(a,b)$

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{(x_0+h)^n-x_0^n}{h}$$

$$A^n-B^n=(A-B)\left(A^{n-1}+A^{n-2}B+\cdots+AB^{n-2}+B^{n-1}\right)$$

$$A=x_0+h\qquad B=x_0\qquad A-B=h$$

$$\Rightarrow f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}\left[(x_0+h)^{n-1}+(x_0+h)^{n-2}x_0+\cdots+x_0^{n-1}\right]}{\cancel{h}}$$

Subject:
Year ۸۸ Month. ۹ Date. ۹

$$= \lim_{h\to 0}\left[(x_0+h)^{n-1}+(x_0+h)^{n-2}x_0+\cdots+(x_0+h)x_0^{n-2}+x_0^{n-1}\right]$$

$$= nx_0^{n-1}$$

مثال ۲:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$x\to f(x)=mx+b$$

$$x_0\in\mathbb{R}: f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{m(x_0+h)+b-mx_0-b}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{mh}{h}=m$$

مثال ۳:

$$f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$$
$$x\to f(x)=\sqrt[n]{x}$$

$$x_0\in(0,+\infty)$$
$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt[n]{x_0+h}-\sqrt[n]{x_0}\right)}{h}$$

$$\times\frac{\left[\sqrt[n]{(x_0+h)^{n-1}}+\sqrt[n]{(x_0+h)^{n-2}}\sqrt[n]{x_0}+\cdots+\sqrt[n]{(x_0+h)}\sqrt[n]{x_0^{n-2}}+\sqrt[n]{x_0^{n-1}}\right]}{A}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\overbrace{\sqrt[n]{(x_0+h)^n}-\sqrt[n]{x_0^n}}^{K}}{K\times A}\to \cancel{x_0}+h-\cancel{x_0}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt[n]{(x_0+h)^{n-1}} + \sqrt[n]{(x_0+h)^{n-2}}\sqrt[n]{x_0} + \cdots + \sqrt[n]{x_0^{n-1}}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x_0^{n-1}}}$$

*کاربرد مشتق زنجیره‌ای:

یعنی دو تابع مشتق پذیر با هم ترکیب شوند.

آیا امکان دارد دو تابع مشتق پذیر ترکیب مشتق ناپذیر داشته باشند؟

$$\frac{d}{dx} g(u(x)) = \left.\frac{dg}{du}\right|_{u(x)} \frac{du}{dx}(x)$$

* در مخروط‌ها:

وقتی ما از ورودی مخروط صحبت می‌کنیم، بحث ما مربوط به حجم است. پس ورودی را تغییرات حجم به زمان در نظر می‌گیریم. $\left(\frac{du}{dt}\right)$

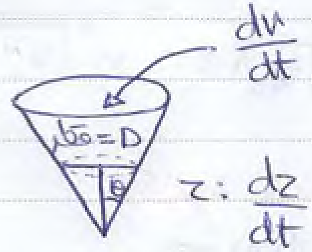
سؤال ما این است که اگر در یک مخروط مایعی را با سرعت خاصی به داخل مخروط وارد کنیم، ارتفاع آن چقدر خواهد بود؟

$$\left.\frac{dg(x)}{du}\right|_{u(x)} \frac{du(x)}{dx} = g'(u)\Big|_{u(x)} u'(x) = g'(u(x))\,u'(x).$$

بالا آمدن ارتفاع مخروط علاوه بر سرعت‌ها به تغییر سطح مقطع هم وابسته است. امّا رابطه‌ی بین سرعت‌ها را تغییر سطح تعیین می‌کند.

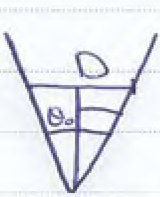
Subject:
Year: ۸۸ Month: ۹ Date: ۱۴

در تغییر سطح ارتفاع، شعاع قاعده، شیب و ... مؤثرند.



$$V=\frac{1}{3}z\cdot\frac{1}{4}\pi D^2$$

و اگر بخواهیم رابطه‌ی $\frac{dz}{dt}$ و D را بیابیم داریم:



$$D=2z\,tg\frac{\theta_0}{2}=\alpha z\rightarrow V=\frac{1}{3}z\cdot\frac{1}{4}\pi D^2$$

$$=\frac{1}{12}\pi z\alpha^2z^2=\frac{1}{12}\pi\alpha^2z^3$$

$$\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dz}\Big|_{z(t)}\frac{dz}{dt}=\frac{3}{12}\pi\alpha^2z^2\cdot\frac{dz}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt}=\frac{4}{\pi\alpha^2}\cdot\frac{1}{z^2}\cdot\frac{dv}{dt}$$ و اگر: $\frac{dv}{dt}=v$

پس می‌توان v را به z وابسته کرد. و v خود وابسته به زمان است. ما می‌توانیم سرعت ورودی را به ارتفاع z وابسته کنیم.

پس v می‌تواند به t و z وابسته باشد. فرض کنید $v=\frac{3t}{2z}$ (ثانیه، متر). آیا این می‌تواند واحد $\frac{m^3}{s}$ شود؟ بله، اگر ۳ واحدش توان چهارم متر و ۲،

واحدش توان دوم زمان. پس مشکلی در واحدها نداریم.

پس مسائل مختلفی می‌توان مطرح نمود. مثلاً اگر آبی را در مخروطی بریزیم، هر چه آب می‌ریزیم z_0 سرجایش است. (ارتفاع ثابت) پس رأس مخروط در حال افزایش است، پس در فرمول $z = z_0$ صادق است و نتیجه می‌گیریم $\frac{d\alpha}{dt}$ وجود دارد.

پس در این مورد می‌توان چند حالت را بررسی کرد:

الف) $\frac{dv}{dt} = \frac{3\pi}{12}\alpha^2 z^2 \frac{dz}{dt}$ $\left(\alpha = 3 \text{ (یعنی: ثابت } \theta_0)\right)$

ب) $\frac{dz}{dt} = \frac{4}{\pi\alpha^2}\cdot\frac{1}{z^2}\nu$ $\left(\alpha = 3 \text{ (یعنی: ثابت } \theta_0)\right)$

پ) فرض می‌کنیم ارتفاع z_0 ثابت $\quad \frac{dv}{dt} = \nu > 0 \,,\; z(t) = z_0$

$$V = \frac{1}{12}\pi z_0^3 \alpha^2 \,,\quad \frac{dv}{dt} = \frac{2}{12}\pi z_0^3 \alpha \frac{d\alpha}{dt}$$

در کل $\left(\boxed{\alpha_0 = 2\,tg\frac{\theta_0}{2}} \,,\; \theta = \theta(t) \,,\; \alpha = 2\,tg\frac{\theta}{2} \right)$

و در حقیقت: $\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\alpha}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}$

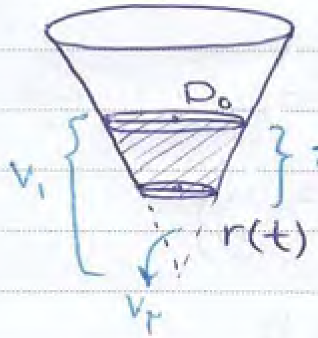
تابع α، نصف θ است. تابع tg، توان و ضرب ← می‌توانش تابع زنجیره‌ای در نظر گرفت.

پس داریم: $\frac{d\alpha}{dt} = \frac{2}{12}\pi z_0^3 \alpha \left(2\,\frac{1}{2}\left(1+tg^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\right)\frac{d\theta}{dt}$

$$\rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{3}{\pi z_0^3\, tg\frac{\theta}{2}\left(1+tg^2\frac{\theta}{2}\right)}\nu$$

و این تغییر شتاب زمان، در صورتی که V داده شده باشد، ثابت و z نیز ثابت است.

د) در نظر بگیرید z همان z_0 باقی بماند با آنکه سیالی را با سرعت v به آن وارد می‌کنیم، z_0 و ه هم به تبع آن ثابت است و فقط سطح رأس در حال افزایش است و داریم:

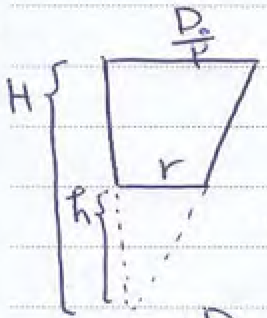


D_0 ثابت

$$V = -\frac{1}{3}\pi r^2 h + \frac{1}{3}\pi \frac{D_0^2}{4} H$$

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi \frac{D_0^2}{4} \cdot H$$

$$V_0 = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$



$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{H}{h} = \dfrac{\frac{D_0}{2}}{r} \\ \text{و علاوه} \quad H = h + z_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{z_0 + h}{h} = \frac{\frac{D_0}{2}}{r}$$

$$r \leq \frac{D_0}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{z_0}{h} = \frac{D_0}{2r} - 1 \geq 0 \Rightarrow h = \frac{z_0}{\frac{D_0}{2r} - 1}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi \frac{D_0^2}{4}\left(z_0 + \frac{z_0}{\frac{D_0}{2r} - 1}\right) - \frac{1}{3}\pi r^2 \left(\frac{z_0}{\frac{D_0}{2r} - 1}\right)$$

V تابعی است وابسته به z_0 و D_0 و r. به عبارت دیگر:

Subject:
Year. ۸۸ Month. ۹ Date. ۱۴

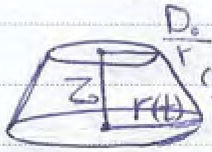
$$V = F(z_0, D_0, r) \qquad r(t) \leqslant \frac{D_0}{2}$$

$$v = \frac{dV}{dt} = \frac{dF}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} \rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{v}{\frac{dF}{dt}}$$

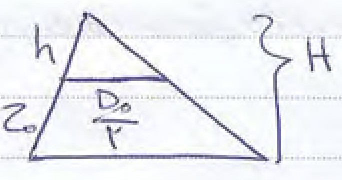
$$V = \frac{1}{3}\pi \frac{D_0^2}{4} z_0 \left(\frac{\frac{D_0}{2r}}{\frac{D_0}{2r} - 1} \right) - \frac{1}{3}\pi r^2 z_0 \left(\frac{1}{\frac{D_0}{2r} - 1} \right)$$

$$\overset{\text{بزبان ساده}}{=} \frac{1}{3}\pi z_0 \left(\frac{2r}{D_0 - 2r} \right)\left(\frac{D_0^3 - 8r^3}{8r} \right)$$

$$= \frac{1}{12}\pi z_0 \left(D_0^2 + 2rD_0 + 4r^2 \right)$$

و حالا وقتی به حالت  رسیدیم و از آن عبور کردیم می‌رسیم به 

یعنی $\boxed{r > \frac{D_0}{2}}$



$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 H - \frac{1}{3}\pi \frac{D_0^2}{4} h$$

$$= \frac{1}{3}\pi r^2 \left(z_0 + \frac{z_0}{\frac{2r}{D_0} - 1} \right) - \frac{1}{3}\pi \frac{D_0^2}{4} \left(\frac{z_0}{\frac{2r}{D_0} - 1} \right)$$

$$\frac{H}{h} = \frac{r}{\frac{D_0}{2}} \rightarrow \frac{z_0}{h} = \frac{2r}{D_0} - 1 \rightarrow h = \frac{z_0}{\frac{2r}{D_0} - 1}$$

$\frac{1}{3}$ ارتفاع × مساحت قاعده

$$\hookrightarrow \overset{\text{بزبان}}{\underset{\text{ساده}}{=}} \frac{1}{12}\pi z_0 \left(D_0^2 + 2rD_0 + 4r^2 \right)$$

$$\text{پس}: V = F(D_0, Z_0, r) = \begin{cases} \frac{1}{12}\pi Z_0 (D_0^2 + 2rD_0 + 4r^2) & r < \frac{D}{2} \\ \frac{1}{12}\pi Z_0 (D_0^2 + 2rD_0 + 4r^2) & r \geq \frac{D}{2} \end{cases}$$

$$\frac{dr}{dt} = \begin{cases} \dfrac{V}{\frac{1}{12}\pi Z_0 (2D_0 + 8r)} & r \leq \frac{D_0}{2} \\ \dfrac{V}{\frac{1}{12}\pi Z_0 (2D_0 + 8r)} & r \geq \frac{D_0}{2} \end{cases}$$

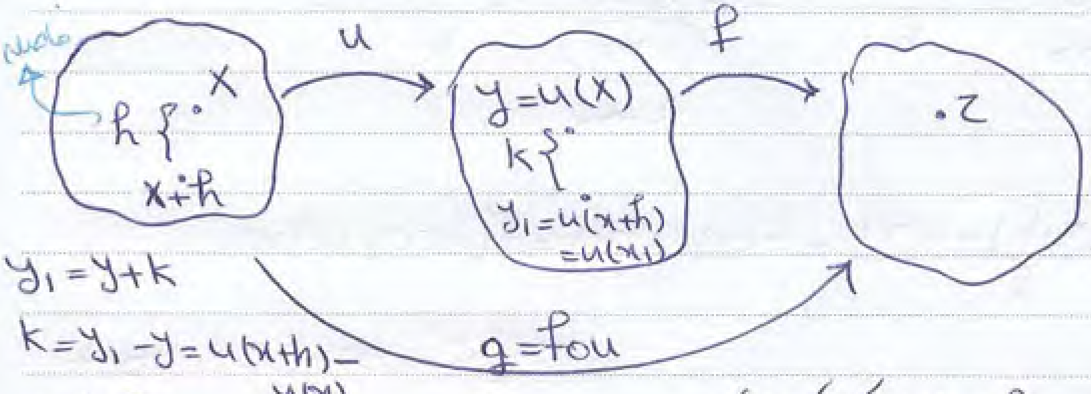
و تفاوت در دو حالت V فقط در تعریف اولیه نهفته است.

و مسئله ی پنجمی هست که خودمان باید آن را بیابیم.

و ما به جای مخزن هر چیز دیگری را بگیریم و همین مسئله را روی آن حساب کنیم، چیزی که خیلی در همه ی این مسائل مهم است رابطه ی بین کمیت هاست و رابطه ی F. یعنی هدف ساختن فرمولی است که باید از آن مشتق گرفت.

* ملاحظات :

i) مشتق زنجیره‌ای :   (نمو = تفاضل)



$z=g(x)$

$z=f(y)$

$z=f(u(x))$

$y_1=y+k$

$k=y_1-y=u(x+h)-u(x)$

$x_1: h=x_1-x : x_1=x+h$ (تصوراً = h مقداری کوچک!)

$=(A)$

$$\frac{g(x_1)-g(x)}{x_1-x}=\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\frac{f(u(x+h))-f(u(x))}{h}$$

$h\to 0 \Rightarrow y_1\to y \quad (k\to 0)$ طبیعی ولی نه بدیهی

زیرا توابع ناپیوسته‌ای داریم که با رفتن x_1 به x ، y_1 به y میل نکرده و k صفر نمی‌شود. پس شرط پیوستگی لازم و کافی است.

$$\boxed{\lim_{h\to 0} k=0 \iff \lim_{h\to 0} u(x_1)=u(x)}$$ $\Leftarrow$ u مشتق‌پذیر است.

$$A=\frac{f(y_1)-f(y)}{h}=\frac{f(y+k)-f(y)}{h}=\frac{f(y+k)-f(y)}{k}\cdot\frac{k}{h}$$

$$= \frac{f(y+k)-f(y)}{k} \cdot \frac{u(x+h)-u(x)}{h}$$

$$\rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0 \\ k\to 0}} \frac{f(y+k)-f(y)}{k}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)-u(x)}{h} = f'(y)\,u'(x) = f'(u(x))\,u'(x)$$

* ملاحظات (کاربرد مشتق):

* یادآوری: ۱) می‌گوییم f در نقطه‌ی x_0 درون دامنه‌ی f یک کمینه‌ی موضعی (بیشینه) دارد هرگاه در یک همسایگی x_0 مانند $N_r(x_0)$ رابطه‌ی $f(x) \geq f(x_0)$ ($\leq$) برقرار باشد به ازای هر $x \in N_r(x_0)$ که $x \neq x_0$.

حالت V یا U : U ← هم مشتق‌پذیر هم پیوسته ، V ← فقط پیوسته (مشتق چپ و راست وجود دارند ولی با هم برابر نیستند.)

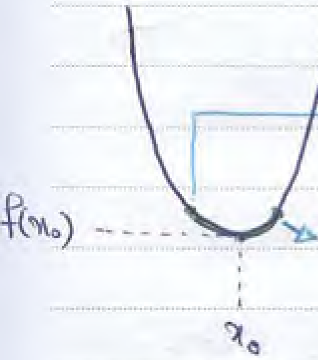
\ یا / ← مشتق‌ناپذیر و ناپیوسته

مثال‌های بیشینه: ∩ یا ∧ یا

* اگر $f:[a,b]\to \mathbb{R}$ در نقطه‌ی $x_0 \in (a,b)$ یک نقطه‌ی فرینه‌ی موضعی (کمینه یا بیشینه‌ی موضعی) داشته باشد، و اگر f در x_0 مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه $f'(x_0)=0$.

* صفر بودن مشتق به معنای ثابت بودن تابع نیست لزوماً. (تابع sgn یا پله‌ای) ← نقاط مشتق‌ناپذیر قابل صرف نظر یا به هم نزدیک

اگر f' در نقطه‌ی $x_0 \in (a,b)$ برابر با صفر باشد، آنگاه لزوماً x_0 یک نقطه‌ی فرینه‌ی موضعی نیست. در این حالت اگر $f''(x_0)>0$ ، x_0 یک نقطه‌ی کمینه‌ی موضعی است. و اگر $f''(x_0)<0$ ، x_0 یک نقطه‌ی بیشینه‌ی موضعی است.



$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \xrightarrow{\text{حد}} f'(x_0) \le 0$$

حد با مقدار برابر

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \xrightarrow{\text{حد}} f'(x_0) \ge 0$$

* در نقطه‌ی زینی مشتق صفر.
همان عطف

در مورد بالا اگر فرینه نباشد (x_0) نقطه‌ی زینی است.

ii) تابع $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ صعودی (نزولی) است، هرگاه به ازای هر $x,y\in[a,b]$ که $x<y$ ، آنگاه $f(x)\le f(y)$ ($\ge$)

تابع $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ اکیداً صعودی (نزولی) است، هرگاه به ازای هر $x,y\in[a,b]$ که $x<y$ آنگاه $f(x)<f(y)$ ($>$)

* اگر $f'>0$ (<0) روی (a,b) ، آنگاه f روی (a,b) اکیداً صعودی (نزولی) است.

* اگر $f'\ge 0$ (≤ 0) روی (a,b) ، آنگاه f روی (a,b) صعودی (نزولی) است.

* روش‌های موضعی با روش‌های متوسط‌گیری به نتایج سراسری می‌رسند.

Subject:
Year. ۸۸ Month. ۹ Date. ۲۳

iii) فرض کنید $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ پیوسته و روی (a,b) مشتق‌پذیر باشد.
آن‌گاه $c\in(a,b)$ موجود است که $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$$\xrightarrow[\text{قبل}]{\text{از مسئله‌ی}} f'>0 \rightarrow \underbrace{f(x)-f(y)=f'(c)(x-y)}_{x<y}$$

$$\Rightarrow f'(c)(x-y)<0 \rightarrow f(x)-f(y)<0 \rightarrow f(x)<f(y)$$

* بقیه‌ی موارد نیز به همین صورت اثبات می‌شوند.

← شرط لازم و کافی ثابت بودن ← موفقی

قضیه: اگر $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ چنان باشد که f' روی (a,b) صفر باشد،
آن‌گاه f روی (a,b) ثابت است.

← غیرموفقی ← استفاده از روش میانگین

$$x,y\in(a,b): f(x)-f(y)=f'(c)(x-y)=0 \rightarrow f(x)=f(y)$$
$$c\in(a,b)$$

$f: I \xrightarrow[\text{مثبت}]{\text{پیوسته}} \mathbb{R} \quad I=[a,b]$ * یادآوری :

$$A(x)=\int_a^x f(t)\,dt \longrightarrow A'(x)=f(x)$$

فرض کنید $f \geq 0$ در این صورت تابع‌های $g \geq 0$ و $h \geq 0$ موجودند که $f=g-h$.

بنابراین:

$$A(x)=\int_a^x f(t)\,dt = \int_a^x (g(t)-h(t))\,dt$$

$$A(x)=G(x)-H(x)$$

$$=\int_a^x g(t)\,dt-\int_a^x h(t)\,dt=G(x)-H(x)$$

$$A'(x)=G'(x)-H'(x)=g(x)-h(x)=f(x)$$

$$G'(x)=g(x) : G(x)=\int_a^x g(t)\,dt$$

$$H'(x)=h(x) : H(x)=\int_a^x h(t)\,dt$$

$g-h$:

g

h

$g=\max(f,0)$ $h=-\min(f,0)$

f   (مثبت بودن اهمیت چندانی ندارد.)

قضیه‌های اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال:

الف) $A(x)=\int_a^x f(t)\,dt \longrightarrow A'(x)=f(x)$

ب) اگر $P(x)$ یک تابع اولیه‌ی دلخواه $f(x)$ باشد، آنگاه:

$$P(x)=P(a)+A(x)$$

ج) اگر $F(x)$ یک تابع اولیه‌ی دلخواه $f(x)$ باشد،

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b)-F(a)$$

د) اگر $u,v:[a,b]\xrightarrow{\text{پیوسته}}\mathbb{R}$ به علاوه فرض کنید u و v مشتق‌پذیر باشند.

$$(uv)'=u'v+uv'$$

$$f(x)=[u(x)v(x)]' \qquad F(x)=u(x)v(x)$$

$$\longrightarrow F'(x)=f(x) \quad , \quad A(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

$$\longrightarrow F(x)=F(a)+A(x)=F(a)+\int_a^x f(t)\,dt$$

$$\int_a^x [u(t)v(t)]'\,dt = \cancel{u(a)v(a)}+\int_a^x [u'(t)v(t)+u(t)v'(t)]\,dt$$

$$\int_a^x [u(t)v(t)]'\,dt = \cancel{u(a)v(a)}+\int_a^x u'(t)v(t)\,dt$$

$$+\int_a^x u(t)v'(t)\,dt$$

$$\int_a^b f(t)d(t) = F(b)-F(a)$$

$$\int_a^x u(t)v'(t)dt = \cancel{-u(a)v(a)} + \underbrace{\int_a^x [u(t)v(t)]' dt}_{} - \int_a^b u'(t)v(t)dt$$

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(t)v(t)dt$$

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = \left[u(b)v(b) - u(a)v(a)\right] - \int_a^b u'(t)v(t)dt$$

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$$

* تعریف: می‌گوییم تابع F یک پادمشتق تابع f است هرگاه روی دامنه‌های یکسان تعریف شده باشند $F' = f$

با توجه به فرم‌های گوناگون قضیه‌ی اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال برای پادمشتق نماد $\int$ را به کار می‌بریم.

$$\int (\ )dx$$

$$\int 2x\,dx = x^2 + c$$

$$\int 2x\,da = 2xa + c$$

$$\int 2a\,dx = 2ax + c$$

$$\int 2a\,da = a^2 + c$$

$C^0(I)$: دسته‌ی همه‌ی تابع‌های $f: I \to \mathbb{R}$ که پیوسته‌اند.

$C^1(I)$: دسته‌ی همه‌ی تابع‌های $f: I \to \mathbb{R}$ که مشتق‌پذیرند و مشتق آن‌ها پیوسته است.

$x^2 \sin\frac{1}{x}$ مشتق‌پذیر پیوسته در صفر ولی مشتق آن ناپیوسته

$C^2(I)$: دسته‌ی همه‌ی تابع‌های $f: I \to \mathbb{R}$ که دوبار مشتق‌پذیرند و مشتق دوم پیوسته است.

$\vdots$

$C^k(I)$: دسته‌ی همه‌ی تابع‌های $f: I \to \mathbb{R}$ که k بار مشتق‌پذیرند و مشتق kام پیوسته است.

$\vdots$

$C^\infty(I)$: دسته‌ی همه‌ی تابع‌های $f: I \to \mathbb{R}$ که از هر مرتبه مشتق‌پذیر است و همه‌ی مشتق‌های آن پیوسته است.

$$C^0 \supset C^1 \supset C^2 \supset \cdots \supset C^k \supset C^{k+1} \cdots \supset C^\infty$$

$$C^0 \xleftarrow{\;'\;} C^1 \xleftarrow{\;'\;} C^2 \xleftarrow{\;'\;} \cdots \xleftarrow{\;'\;} C^k \xleftarrow{\;'\;} C^{k+1} \cdots$$

$$\boxed{C^\infty \xleftarrow{\;'\;} C^\infty}$$

$$C^0 \xrightarrow{\int} C^1 \xrightarrow{\int} C^2 \xrightarrow{\int} \cdots \xrightarrow{\int} C^k \xrightarrow{\int} C^{k+1} \xrightarrow{\int} \cdots$$

$$\boxed{C^\infty \xrightarrow{\int} C^\infty}$$

PAPCO

$\int \sin^m x \, dx$

$\int \cos^m x \, dx$

$\int \sin^m x \cos^k x \, dx$

$\int \sin^m(ax) \cos^k(bx) \, dx$

$\int f(\sin x, \cos x) \, dx$

$\int x^n \sin^m x \cos^k x \, dx$

$\int P_n(x) \sin^m x \, dx \;:\; P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

$\int P_n(x) \cos^n x \, dx \;,\; \int P_n(x) \sin^m x \cos^k x \, dx$

$\int R(x) \sin^k(x) \, dx \;,\; R(x) = \dfrac{q_m(x)}{P_n(x)}$

$, \; q_m(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_2 x^2 + bx + b_0$

$\int R(x) \cos^k(x) \, dx$

$\int R(x) \sin^k x \cos^l x \, dx$

* قضیه: پاد مشتق هر چند جمله‌ای یک چند جمله‌ایست.

برهان:

$$\int (a_n x^n + \dots + a x + a_0)\, dx$$

$$= \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1} + \frac{1}{n} a_{n-1} x^n + \dots + \frac{1}{2} a_1 x^2 + a_0 x + C$$

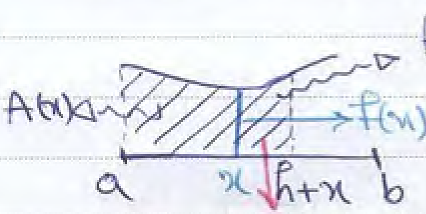
* قضیه: پادمشتق $P_n(x)\sin x$ به صورت زیر است:

$$\boxed{q_m(x)\sin x + Q_k(x)\cos x}$$

e.g: $\int x \sin x \, dx = ?$

q_m و Q_k چند جمله‌ای از درجه‌های m و k هستند.

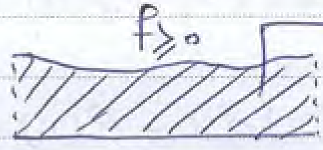
۸۸/۱/۲۸



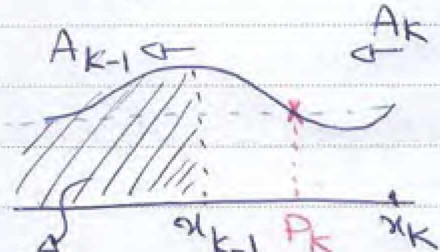
* رابطه‌ی انتگرال و مشتق:

$h \to 0 \Rightarrow z \to x$

$f: I \to \mathbb{R}$ پیوسته , $I = [a,b]$



$$\int_I f = A$$



$$P_k \in f^{-1}\left(\left\{\frac{A_k + A_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}\right\}\right) \cap [x_{k-1}, x_k]$$

* چون $f \geq 0$ مفهوم انتگرال ریمان یعنی مساحت.

$$A(x) = \int_{[a,x]} f = \int_a^x f = \int_a^x f(x)\, dx$$

$$\lim \frac{A(x+h)-A(x)}{h} = A'(x) = f(x)$$ ← فقط زمانی برقرار است
که f پیوسته باشد.

$$* \quad A(x+h)-A(x) = \int_a^{x+h} f - \int_a^{x} f = \int_x^{a} f + \int_a^{x+h} f = \int_x^{x+h} f$$

$$\exists z \quad [(x+h)-x] f(z) = hf(z)$$

$$A'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{A(x+h)-A(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{hf(z)}{h} = \lim_{h\to 0} f(z) \overset{?}{=} f(x)$$

$$= \lim_{z\to x} f(z) = f(x)$$

x نقطهٔ ثابت

$$A(x+h)-A(x) = \int_x^{x+h} f = \int_x^{x+h} f(t)\,dt = \int_x^{x+h} \left[(f(t)-f(x)) + f(x)\right] dt$$

$$= \int_x^{x+h} f(x)\,dt + \int_x^{x+h} (f(t)-f(x))\,dt = hf(x) + \int_x^{x+h} (f(t)-f(x))\,dt$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{A(x+h)-A(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(x) + \frac{1}{h}\int_x^{x+h} (f(t)-f(x))\,dt$$

$$= f(x) + \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} (f(t)-f(x))\,dt = f(x) + \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} (f(t)-f(x))\,dt$$

با استفاده از تعریف

ص

$** \triangleleft$

دلخواه $\varepsilon>0\ \exists\delta>0: |t-x|<\delta \Rightarrow |f(t)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$

$$\left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h}(f(t)-f(x))\,dt\right| \leqslant \frac{1}{|h|}\left|\int_x^{x+h}(f(t)-f(x))\,dt\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{|h|}\int_x^{x+h}|f(t)-f(x)|\,dt \leqslant \frac{1}{h}\underbrace{\int_x^{x+h}\frac{\varepsilon}{2}}_{} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

$$\frac{\varepsilon}{2}\times(\cancel{x}+h-\cancel{x}) = \frac{\varepsilon}{2}\times\cancel{h} \Rightarrow \frac{\varepsilon}{2} \qquad = \frac{h}{|h|}\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

$\Rightarrow ** = f(x)$

* تعریف: می‌گوییم تابع f: یک تابع اولیه‌ی تابع $F: I \to \mathbb{R}$ اولیه‌ی تابع $f: I \to \mathbb{R}$ است هرگاه به ازای هر $x \in I$،

$F'(x) = f(x)$

روشن است که یک تابع می‌تواند توابع اولیه‌ی متنوعی داشته باشد.

* قضیه: اگر F و G هر دو تابع اولیه‌ی f باشند. آن‌گاه $F-G$ مقداری ثابت است. که به x بستگی ندارد.

برهان: $F'(x) = f(x)\ ,\ G'(x) = f(x)$

$\Rightarrow F'(x) - G'(x) = 0 \Rightarrow F(x) - G(x) =$ ثابت

* قضیه: اگر $f: I \to \mathbb{R}$ پیوسته باشد، آن‌گاه $A(x)=\int_a^x f=\int_a^x f(t)\,dt$ یک تابع اولیه‌ی f است.

برهان: $A'(x)=f(x)$

* قضیه: اگر $F: I \to \mathbb{R}$، یک تابع اولیه‌ی $f: I \to \mathbb{R}$ باشد، آن‌گاه:

$$F(x)=F(a)+\int_a^x f=F(a)+A(x)$$

برهان: می‌دانیم $A(x)$ یک تابع اولیه‌ی f است. پس $A'(x)=f(x)$ ولی F نیز یک تابع اولیه‌ی f است. پس $F'(x)=f(x)$. بنابراین:

$$F(x)-A(x)=c \Rightarrow F(x)=c+\int_a^x f$$

در این صورت: $F(a)=c+\int_a^a f=c+0=c \Rightarrow c=F(a)$

پس $F(x)=F(a)+\int_a^x f=F(a)+\int_a^x f(t)\,dt$ ■

* اولین قضیه‌ی اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال:

$$\boxed{F(x)=F(a)+A(x)}$$

* دومین قضیه‌ی اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال:
فرض کنید $f: I \to \mathbb{R}$ پیوسته باشد و F یک تابع اولیه‌ی دلخواه f باشد. در این صورت:

$$\int_I f = \int_a^b f = F(b)-F(a)$$

برهان:

$$F(x) = F(a) + \underbrace{\int_a^x f}_{A(x)} \Rightarrow \int_a^x f = F(x) - F(a)$$

$$\Longrightarrow A(b) = \int_a^b f = F(b) - F(a)$$

مثال:

$$* \int_0^\pi \sin x \, dx = (-\cos\pi) - (-\cos 0) = +1 - (-1) = ۲$$

$$f(x) = \sin x \qquad F(x) = -\cos x$$

$$* \int_0^1 \underbrace{e^t}_{f} \, dt = e^1 - e^0 = e - 1 \qquad f(x) = e^x \qquad F(x) = e^x$$

* نماد گذاری لایب نیتزی:

$$\int_{[a,b]} f = \int_a^b f(x)\, dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\int_{[0,\pi]} \sin x = \int_0^\pi \sin x \, dx = (-\cos x)\Big|_0^\pi = \Big[-\cos x\Big]_0^\pi = 1 - (-1) = ۲$$

باید بازه بسته و کراندار باشد.

نماد نیوتن → $\dot{x}(t)$

Subject:
Year. ۸۸ Month. ۱۰ Date. ۵( )

مثال:

$\int x \sin x \, dx = ?$

$I = \int e^x \sin x \, dx$

$j = \int e^x \cos x \, dx$

$(uv)' = u'v + v'u$

$\int (uv)' = \int u'v + \int v'u$

$\int uv' = uv - \int u'v$

$I = \int \underbrace{e^x}_{u} \underbrace{\sin x}_{v'} dx = e^x(-\cos x) - \int e^x(-\cos x)\, dx$

$= -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx$

$u = e^x \to u' = e^x$

$v' = \sin x \to v = -\cos x$

$I = -e^x \cos x + j$

$j = \int \underbrace{e^x}_{u} \underbrace{\cos x}_{v'} dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx$

$u = e^x \to u' = e^x$

$v' = \cos x \to v = \sin x$

$I = -e^x \cos x + j$

$$\begin{cases} I - j = -e^x \cos x \\ I + j = e^x \sin x \end{cases}$$

$j = e^x \sin x - I$

$2I = -e^x \cos x + e^x \sin x$

$I = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C$

$j = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + C$

* روش دوم: ضرایب نامعین

$$I=\int e^x \sin x\,dx = e^x\,(P\sin x + q\cos x) + C$$

$$\left[e^x(p\sin x + q\cos x)\right]' = e^x(p\sin x + q\cos x) + e^x(p\cos x - q\sin x) = *$$

$$\left[e^x f(x)\right]' = e^x\left(f(x) + f'(x)\right)$$

$$* = e^x\left[(p-q)\sin x + (q+p)\cos x\right] = e^x \sin x$$

$$\begin{cases} p-q=1 \\ p+q=0 \end{cases}$$

$$p=\frac{1}{2} \quad q=\frac{-1}{2}$$

$$J=\int e^x \cos x\,dx = e^x(p\sin x + q\cos x) + C$$

$$= \left[e^x(p\sin x + q\cos x)\right]' = e^x(p\sin x + q\cos x) + e^x(p\cos x - q\sin x)$$

$$= e^x\left[(p-q)\sin x + (p+q)\cos x\right] = e^x \cos x$$

$$\begin{cases} p-q=0 \\ p+q=1 \end{cases}$$

$$p=\frac{1}{2} \quad q=\frac{1}{2}$$

$$\int P(x)\sin x\,dx = q(x)\sin x + Q(x)\cos x$$

$$\int x\sin x\,dx = \overbrace{(ax^2+bx+c)}^{1}\sin x + \overbrace{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)}^{-x}\cos x + C$$

$$\left[(ax^2+bx+c)\sin x+(\alpha x^2+\beta x+\gamma)\cos x\right]' = *$$

$$((ax^2+bx+c)\sin x)' = (2ax+b)\sin x + \cos x(ax^2+bx+c)$$

$$((\alpha x^2+\beta x+\gamma)\cos x)' = (2\alpha x+\beta)\cos x - \sin x(\alpha x^2+\beta x+\gamma)$$

$$* = (2ax+b-\alpha x^2-\beta x-\gamma)\sin x + \underbrace{(2\alpha x+\beta+ax^2+bx+c)}_{0}\times\cos x$$

$$= x\sin x$$

$$\begin{cases} ax^2+(b+2\alpha)x+(c+\beta)=0 \\ -\alpha x^2+(2a-\beta)x+(b-\gamma)=x \end{cases} \qquad \begin{cases} a=0 \quad b+2\alpha=0 \quad c+\beta=0 \\ -\alpha=0 \quad 2\alpha-\beta=1 \quad b-\gamma=0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} a=0,\ \alpha=0 \rightarrow b=0 \rightarrow \gamma=0 \\ \beta=-1 \rightarrow c=1 \end{cases}$$

$$\int x\sin x\,dx = \sin x - x\cos x + C$$

* تمرین : با روش ضرایب نامعین $\underbrace{\int x^2\sin x\,dx \ \text{و}\ \int x^2\cos x\,dx}_{\text{درجه ۲}}$ و

$\int x\cos x\,dx$ (درجه ۲) را بدست آورید.

Subject:
Year: ۸۸ Month: ۱۰ Date: ۵

$n\geq 2$ $\int P(x)\sin x\,dx$: $P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1 x + a_0$

$F \longrightarrow \int\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)\sin x\,dx = \sum_{k=0}^{n} a_k \int x^k \sin x\,dx$

$\int x^k \sin x\,dx = *$ $\qquad I_k=\int \underbrace{x^k}_{u}\,\underbrace{\sin x}_{v'}\,dx$

$u=x^k \longrightarrow u'=kx^{k-1}$

$v'=\sin x \longrightarrow v=-\cos x$

$$I_k=-x^k\cos x+\int kx^{k-1}\cos x\,dx=-x^k\cos x+k\underbrace{\int x^{k-1}\cos x\,dx}_{J_{k-1}}$$

$$J_k=\int \underbrace{x^k}_{u}\,\underbrace{\cos x\,dx}_{v'}=x^k\sin x-\int kx^{k-1}\sin x\,dx= x^k\sin x-k\underbrace{\int x^{k-1}\sin x\,dx}_{I_{k-1}}$$

$u=x^k \longrightarrow u'=kx^{k-1}$

$v'=\cos x \longrightarrow v=\sin x$

$$I_k=-x^k\cos x+kJ_{k-1}=-x^k\cos x+k\left[x^{k-1}\sin x-(k-1)I_{k-2}\right]$$

$$J_k=x^k\sin x-kI_{k-1} \longrightarrow J_{k-1}=x^{k-1}\sin x-(k-1)I_{k-2}$$

$$\overset{*}{I_k}=\int x^k\sin x\,dx=-x^k\cos x+kx^{k-1}\sin x-k(k-1)I_{k-2}$$

$$F=\sum_{k=0}^{n} a_k I_k=\sum_{k=0}^{n} a_k\left[-x^k\cos x-k(k-1)I_{k-2}\right]$$

$$F=\left(\sum_{k=0}^{n} ka_k x^{k-1}\right)\sin x-\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)\cos x-\sum_{k=2}^{n} k(k-1)a_k I_{k-2}$$

$$I_k = -x^k \cos x + k J_{k-1} \Rightarrow I_{k-1} = -x^{k-1}\cos x + (k-1) J_{k-2}$$

$$J_k = x^k \sin x - k I_{k-1} = x^k \sin x - k\left(-x^{k-1}\cos x + (k-1) J_{k-2}\right)$$

$$J_k = \int x^k \cos x\, dx = x^k \sin x + k x^{k-1} \cos x - k(k-1) J_{k-2}$$

$$G = \int P(x) \cos x\, dx = \int \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right) \cos x\, dx = \sum_{k=0}^{n} \Big(a_k \underbrace{\int x^k \cos x\, dx}_{J_k}\Big)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k \left(x^k \sin x + k x^{k-1} \cos x - k(k-1) J_{k-2}\right)$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right) \sin x + \left(\sum_{k=0}^{n} k a_k x^{k-1}\right) \cos x - \sum_{k=2}^{n} k(k-1) a_k J_{k-2}$$

$e^x \log \xrightarrow{x} e^x$ (مشتق‌ها)

$\downarrow$

اولی, log مشتق
بگیرد.

$$\int \frac{ax^2+bx+c}{Ax^2+Bx+C}\, dx = *$$

$$\begin{array}{l|l} ax^2+bx+c & Ax^2+Bx+C \\ \hline ax^2+\frac{aBx}{A}+\frac{aC}{A} & \frac{a}{A} \\ \hline \left(b-\frac{aB}{A}\right)x+\left(c-\frac{aC}{A}\right) & \end{array}$$

۹۴

$$* = \int \left(\frac{a}{A} + \frac{\left(b-\frac{aB}{A}\right)x + \left(c - \frac{aC}{A}\right)}{Ax^2+Bx+C} \right)$$

$$= \int \left[\frac{a}{A} + \left(b-\frac{aB}{A}\right) \left(\frac{x + \left(\frac{c-\frac{aC}{A}}{b-\frac{aB}{A}} \right)}{Ax^2+Bx+C} \right) \right] dx$$

$$= \int \left[\frac{a}{A} + \left(b-\frac{aB}{A}\right) \cdot \frac{1}{2A} \; \frac{(2Ax+B) + \overbrace{\left(\frac{c-\frac{aC}{A}}{b-\frac{aB}{A}} - \frac{B}{2A} \right)}^{\alpha}}{Ax^2+Bx+C} \right] dx$$

$$= \frac{a}{A}x + \left(b - \frac{aB}{A}\right)\left(\frac{1}{2A}\right) L_n \left| Ax^2+Bx+C \right| + \underbrace{\int \frac{\alpha}{Ax^2+Bx+C} dx}_{\text{چند حالت دارد.}}$$

$$\begin{cases} A=0 \longrightarrow \underset{\text{یک عدد}}{\log} \\ B^2-4AC=0 \longrightarrow \text{کسر} \\ B^2-4AC>0 \longrightarrow \underset{\text{دو عدد}}{\log} \\ B^2-4AC<0 \longrightarrow \text{Arctg} \end{cases}$$

$$* = \frac{a}{A}x + \left(b - a\frac{B}{A}\right) L_n \left| Ax^2+Bx+C \right| + I$$

$$I = \int \frac{\alpha}{Ax^2+Bx+C} dx \xRightarrow{A=0} \int \frac{\alpha}{Bx+C} dx = \frac{\alpha}{B} \int \frac{1}{x+\frac{C}{B}} dx$$

$$\downarrow$$

$$\frac{a}{A} \Rightarrow \frac{a}{B}$$