جزوه ریاضی (۱)

تهیه و تنظیم: فاطمه قزلباش

www.mathematichouse.ir

فهرست مندرجات

فصل چهارم روشهای انتگرال گیری

فصل پنجم کاربردهای انتگرال معین

فصل ششم انتگرالهای مجازی

فصل هفتم دنباله ها و سریهای نامتناهی

فصل اول

دیفرانسیل و انتگرال

۱.۱. دیفرانسیل

فرض کنید $y = f(x)$ یک تابع مشتق پذیر باشد. بنا به تعریف مشتق داریم

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad , \qquad \Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

بنابراین برای Δxهای خیلی کوچک می توان نوشت:

$$f'(x) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \Rightarrow \quad \Delta y \approx f'(x)\Delta x$$

عبارت $f'(x)\Delta x$ را دیفرانسیل تابع $f(x)$ گویند و آن را با dy نشان می دهند.

مثال ۱ : دیفرانسیل تابع زیر را بیابید.

$y = \sin x + \tan x$

$dy = (\cos x + 1 + \tan^2 x)\Delta x$

نکته: اگر $y = x$ آنگاه $dy = dx = \Delta x$. بنابراین از این به بعد به جای Δx در تعریف دیفرانسیل، dx قرار می دهیم. در نتیجه

$$dy = f'(x)dx$$

۱. ۱. ۱. نماد لایب نیتز برای مشتق:

از رابطه قبلی داریم، $f'(x)=\dfrac{dy}{dx}$. بنابراین $\dfrac{dy}{dx}$ یعنی مشتق اول $f(x)$ نسبت به x. حال با استفاده از تعریف دیفرانسیل $f'(x)$ خواهیم داشت،

$$d(f'(x))=f''(x)dx \to d\left(\frac{dy}{dx}\right)=f''(x)dx \to f''(x)=\frac{d^2y}{dx^2}$$

به روش مشابه خواهیم داشت:

$$f^{(n)}(x)=\frac{d^ny}{dx^n} \qquad \forall n=1,2,\dots$$

مثال ۲ : برای تابع زیر $\dfrac{d^4y}{dx^4}$ را بدست آورید.

$$y=\sin x+\cos x$$

$$\to \frac{dy}{dx}=\cos x-\sin x \to \frac{d^2y}{dx^2}=-\sin x-\cos x$$

$$\to \frac{d^3y}{dx^3}=-\cos x+\sin x \to \frac{d^4y}{dx^4}=\sin x+\cos x$$

۱. ۱. ۲. قاعده زنجیره ای:

هر گاه $y=f(u)$ تابعی مشتق پذیر از u باشد و $u=g(x)$ تابعی مشتق پذیر از x باشد، آنگاه

$$(fog)'(x)=f'(u)\cdot u'(x) \to \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

مثال ۳ : فرض کنید $y=\sqrt{1+u^2}$ و $u=\tan x$ ، $\dfrac{dy}{dx}$ را بیابید.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}=\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}.\left(1+\tan^2x\right)=\frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2x}}\left(1+\tan^2x\right)=\tan x\sqrt{1+\tan^2x}$$

تعمیم قاعده زنجیره ای:

هر گاه $y=f_1(u_1)$ تابعی مشتق پذیر از u_1 باشد و $u_1=f_2(u_2)$ تابعی مشتق پذیر از u_2 باشد و به همین ترتیب $u_{n-1}=f_n(u_n)$ تابعی مشتق پذیر از u_n باشد، آنگاه

$$\frac{dy}{du_n}=\frac{dy}{du_1}\cdot\frac{du_1}{du_2}\cdots\frac{du_{n-1}}{du_n}$$

مثال ۴ : فرض کنید $y=2u^3-1$ و $u=\sqrt{x}$ و $x=\dfrac{t-1}{3t+4}$ ، $\dfrac{dy}{dt}$ را بدست آورید.

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}.\frac{dx}{dt}=6u^2\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\frac{7}{(3t+4)^2}\right)=\frac{21}{(3t+4)^2}$$

۱. ۱. ۳. کاربرد دیفرانسیل:

در عمل محاسبه Δy مشکل تر از محاسبه dy است. لذا بنا به رابطه $\Delta y\approx dy$، dy می تواند تقریب مناسبی برای Δy باشد:

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x = dy$$
$$\rightarrow \qquad f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

مثال ۵ : مقدار تقریبی $\sqrt{17}$ را بدست آورید.

حل:

$$\sqrt{17} = \sqrt{16+1} \rightarrow f(x) := \sqrt{x} \quad , \quad x_0 = 16 \quad , \quad \Delta x = 1$$
$$\sqrt{16+1} \approx \sqrt{16} + \frac{1}{2\sqrt{16}} \times 1 = 4 + \frac{1}{8} = 4.125$$

مثال ۶ : مقدار تقریبی $\sqrt[3]{0.009}$ را بدست آورید.

حل:

$$\sqrt[3]{0.009} = \sqrt[3]{9 \times 10^{-3}} = 0.1\sqrt[3]{9}$$
$$\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{8+1} \approx \sqrt[3]{8} + \frac{1}{3\sqrt[3]{8^2}} \times 1 = 2 + \frac{1}{12} \approx 2.083$$
$$\Rightarrow \quad \sqrt[3]{0.009} \approx 0.1 \times 2.083 = 0.2083$$

خواص دیفرانسیل:

فرض کنید u , v توابعی مشتق پذیر از x و c عدد ثابتی باشند. در این صورت

1) $d(c) = 0$
2) $d(cu) = cdu$
3) $d(u^r) = ru^{r-1}du \qquad \forall 0 \neq r \in \mathbb{R}$
4) $d(u+v) = du + dv$
5) $d(uv) = udv + vdu$
6) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$

مثال ۷ : فرض کنید $\sin x \cos y - \cos x \sin y = 1$ و y تابعی مشتق پذیر از x باشد. $\frac{dy}{dx}$ را بیابید.

حل:

$$d(\sin x \cos y - \cos x \sin y) = d(1) \xrightarrow{(1),(4)} d(\sin x \cos y) - d(\cos x \sin y) = 0$$
$$\xrightarrow{(5)} \sin x\, d(\cos y) + \cos y\, d(\sin x) - \cos x\, d(\sin y) - \sin y\, d(\cos x) = 0$$
$$\longrightarrow -\sin x \sin y\, dy + \cos y \cos x\, dx - \cos x \cos y\, dy + \sin y \sin x\, dx = 0$$
$$\longrightarrow (\cos x \cos y + \sin x \sin y)dx = (\cos x \cos y + \sin x \sin y)dy$$
$$\longrightarrow \frac{dy}{dx} = 1$$

از روش مشتق گیری ضمنی نیز می توان مثال فوق را حل کرد.

۱. ۲. انتگرال

تعریف پادمشتق(تابع اولیه): تابع $F(x)$را پادمشتق تابع $f(x)$ نامیم هرگاه داشته باشیم $F'(x) = f(x)$.

مثال ۸ : تابع $F(x) = x^3 - \sqrt{x}$ یک پادمشتق برای تابع $f(x) = 3x^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$ است زیرا

$$F'(x) = 3x^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}} = f(x)$$

اگر $F(x)$ یک پادمشتق تابع $f(x)$ باشد آنگاه هر تابع $G(x) = F(x) + c$ که در آن c عدد ثابت دلخواهی است، نیز پادمشتق $f(x)$ می باشد، زیرا $G'(x) = F'(x) + 0 = F'(x)$. تابع $F(x) + c$ را پادمشتق کلی $f(x)$ می نامیم.

قضیه ۱. ۲. ۱ : در یک بازه I اختلاف پادمشتق ها برای تابع $f(x)$ در یک مقدار ثابت c است.

۱. ۲. ۱. انتگرال نامعین

تعریف(انتگرال نامعین) : عمل معکوس دیفرانسیل گیری یا مشتق گیری را انتگرال گیری گویند. بنابراین انتگرال یک تابع یعنی یافتن پادمشتق کلی آن تابع. اگر $F(x)$ پاد مشتق تابع $f(x)$ باشد، آنگاه انتگرال $f(x)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

دو فرمول اولیه برای انتگرال که با استفاده از تعریف فوق می توان بدست آورد عبارتند از :

۱) $$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \ , \quad n \in \mathrm{N}$$

۲) $$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c \qquad r \in Q \ , r \neq -1$$

خواص انتگرال نامعین :

الف) $$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

ب) $$\int (f_1 \pm f_2)(x)dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$$

قسمت(ب) قابل تعمیم به n تابع است.

تذکر: باید دقت کرد که $\int f(x)g(x)dx \neq \int f(x)dx \times \int g(x)dx$ و برای این انتگرال ها یا عمل ضرب را انجام می دهیم و یا از تکنیک های انتگرال گیری استفاده می کنیم.

مثال۹ : انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

1) $\int x^7 dx = \frac{x^8}{8} + c$

2) $\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$

3) $\int (x^2 - x^7) dx = \int x^2 dx - \int x^7 dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^8}{8} + c$

4) $\int (x + \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}) dx = \int x dx + \int \sqrt{x} dx + \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \frac{x^2}{2} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = \frac{x^2}{2} + \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + 2x^{\frac{1}{2}} + c$

5) $\int (3x+7)^9 d(3x+7) = \frac{(3x+7)^{10}}{10} + c$

6) $\int \frac{x^2 - 1}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \int x^{\frac{-2}{3}} (x^2 - 1) dx = \int (x^{\frac{4}{3}} - x^{\frac{-2}{3}}) dx = \int x^{\frac{4}{3}} dx - \int x^{\frac{-2}{3}} dx$

$= \frac{3}{7} x^{\frac{7}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}} + c$

7) $\int \frac{x^2 - 1}{x - 1} dx = \int \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} dx = \int (x+1) dx = \frac{x^2}{2} + x + c$

8) $\int \frac{x^3 - 1}{x - 1} dx = \int \frac{(x-1)(x^2+1+x)}{x-1} dx = \frac{x^3}{3} + x + \frac{x^2}{2} + c$

9) $\int (x+1)(x-1) dx = \int (x^2 - 1) dx = \int x^2 dx - \int dx = \frac{x^3}{3} - x + c$

10) $\int \sqrt{x}(x+2) dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx + 2\int \sqrt{x} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + \frac{2 \times x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{4x^{\frac{3}{2}}}{3} + c$

۱. ۲. ۲. روش تغیر متغیر

همیشه محاسبه انتگرال به راحتی مثالهای فوق نمی باشد. برای انتگرال گیری روش های مختلفی وجود دارد. اولین و متداولترین روش عبارت است از روش تغییر متغیر که از رابطه زیر بدست می آید:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(g(x))d(g(x)) = \int f(u)du = F(u) + c = F(g(x)) + c$$
$$u := g(x)$$

مثال۱۰ : انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$\int (3x+7)^9 dx \quad \rightarrow \qquad f(x) = x^9 \quad , \quad g(x) = 3x+7 \rightarrow g'(x) = 3 \quad , \quad f(g(x)) = (3x+7)^9$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\int (3x+7)^9 \times 3dx = \frac{1}{3}\int (3x+7)^9 d(3x+7)$$
$$= \frac{1}{3}\frac{(3x+7)^{10}}{10} + c$$

عملاً برای استفاده از این روش احتیاج نیست که توابع f و g را مشخص کنیم کافی است که سه مرحله زیر را انجام دهیم : الف) انتخاب تغییر متغیر ب) دیفرانسیل گیری ج) جایگزینی

مثال ۱۱ : انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

1) $$\int \sqrt{6x+7}dx = \int \sqrt{u} \times \frac{1}{6}du = \frac{1}{6}\frac{(6x+7)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{9}(6x+7)^{\frac{3}{2}} + c$$

$$u = 6x+7 \rightarrow du = 6dx \rightarrow dx = \frac{1}{6}du$$

2) $$\int (x+2)\sqrt{x+1}dx = \int (u+1)\sqrt{u}du = \int u^{\frac{3}{2}}du + \int u^{\frac{1}{2}}du$$

$$\begin{cases} u = x+1 \\ du = dx \\ x = u-1 \\ x+2 = u+1 \end{cases}$$

$$= \frac{u^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + \frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c$$
$$= \frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + c$$

3) $$\int (x^2+3)^7 xdx = \int u^7 \frac{1}{2}du = \frac{1}{2}\int u^7 du = \frac{1}{16}u^8 + c = \frac{1}{16}(x^2+3)^8 + c$$

$$u = x^2+3 \rightarrow du = 2xdx$$

4) $$\int \left(6x^2+3x+1\right)^9 (4x+1)dx = \int u^9 \frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int u^9 du = \frac{1}{3}\frac{u^{10}}{10} + c = \frac{1}{30}\left(6x^2+3x+1\right)^{10} + c$$

$$u = 6x^2+3x+1 \rightarrow du = 12x+3dx = 3(4x+1)dx$$

5) $$\int \frac{x^7 dx}{(x^4+1)^5} \qquad x^4+1 = u \rightarrow 4x^3dx = du$$

$$\int \frac{x^7 dx}{(x^4+1)^5} = \int \frac{x^4 \times x^3 dx}{(x^4+1)^5} = \int \frac{(u-1)\frac{1}{4}du}{u^5} = \frac{1}{4}\int u^{-5}(u-1)du = \frac{1}{4}\int (u^{-4} - u^{-5})du$$
$$= -\frac{1}{12}u^{-3} + \frac{1}{16}u^{-4} + c = -\frac{1}{12}(x^4+1)^{-3} + \frac{1}{16}(x^4+1)^{-4} + c$$

سال ٦٧ : انتگرال $\int \frac{x^2+5x-1}{\sqrt{x}}dx$ برابر است با :

۱) $2\sqrt{x}(\frac{x^5}{5}+\frac{5}{3}x-1)+c$
۲) $2\sqrt{x}(5x^2+\frac{3}{5}x-1)+c$
۳) $2\sqrt{x}(\frac{x^2}{5}-\frac{5}{3}x+1)+c$
٤) $5\sqrt{x}(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{3}-\frac{1}{5})+c$

حل:

$$\int \frac{x^2+5x-1}{\sqrt{x}}dx=\int x^{\frac{-1}{2}}(x+5x-1)dx=\int x^{\frac{3}{2}}dx+5\int x^{\frac{1}{2}}dx-\int x^{\frac{-1}{2}}dx$$
$$=\frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}+\frac{5x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}-\frac{x^{\frac{-1}{2}+1}}{\frac{-1}{2}+1}+c$$
$$=\frac{2}{5}(x^{\frac{5}{2}})+\frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}+c=2\sqrt{x}\left[\frac{x^5}{5}+\frac{5}{3}x-1\right]+c$$

۱. ۳. انتگرال توابع مثلثاتی:

1) $\int \sin x dx=-\cos x+c$

2) $\int \cos x dx=\sin x+c$

3) $\int[1+\tan^2 x]dx=\int \sec^2 x dx=\tan x+c$

4) $\int[1+\cot^2 x]dx=\int \csc^2 x dx=-\cot x+c$

انتگرالهای مثلثاتی نیز مانند انتگرالهای توابع جبری همیشه به سادگی محاسبه نمی شوند. برای محاسبه این انتگرالها نیز از تکنیک تغییر متغیر استفاده می کنیم. گاهی نیز انتگرال مثلثاتی با استفاده از یک تغییر متغیر تبدیل به انتگرال توابع جبری می گردد.

مثال۱۲ : انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

1) $\int \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}dx=-\int \cos u du=-\sin u+c=-\sin\frac{1}{x}+c$

$u=\frac{1}{x}\to du=-\frac{1}{x^2}dx$

2) $\int \sin x\sqrt{1-\cos x}\,dx=\int\sqrt{u}du=\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+c=\frac{2}{3}(1-\cos x)^{\frac{3}{2}}+c$

$u=1-\cos x\to du=\sin x dx$

3) $\int \frac{\cot^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx=2\int \cot^2 u du=2\int[(1+\cot^2 u)-1]du=2(-\cot u-u)+c=2(-\cot\sqrt{x}-\sqrt{x})+c$

$u=\sqrt{x}\to du=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$

سال ٦٧ : حاصل انتگرال $\int \frac{\cos^3(x)}{\sin^4(x)}dx$ کدام است؟

الف) $\frac{-1}{3}\sin^{-3}x+c$ ب) $\frac{-1+3\sin^2 x}{3\sin^3 x}+c$ ج) $\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{3\sin^3 x}$ د) $\frac{1}{4}\cos^4 x+c$

حل:

$$\int \frac{\cos^3(x)}{\sin^4(x)}dx=\int \frac{\cos(x)\cos^2(x)}{\sin^4(x)}dx=\int \frac{\cos(x)(1-\sin^2 x)}{\sin^4(x)}dx$$

$$u=\sin(x) \qquad du=\cos x dx \qquad =\int \frac{1-u^2}{u^4}du=\int u^{-4}du-\int u^{-2}du$$

$$=\frac{-1}{3}u^{-3}+u^{-1}+c=-\frac{1}{3\sin^3 x}+\frac{1}{\sin x}+c$$

سال ٧٢ : حاصل انتگرال $I=\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$ کدام است؟

۱) $\tan x+\cot x+c$ ۳) $\frac{1}{\cos x}-\frac{1}{\sin x}+c$

۲) $\tan x-\cot x+c$ ٤) $\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin x}+c$

حل :

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}=\int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx=\int \frac{dx}{\cos^2 x}+\int \frac{dx}{\sin^2 x}=\int(1+\tan^2 x)dx+\int(1+\cot^2 x)dx$$
$$=\tan x-\cot x+c$$

سال ٧٧ : حاصل انتگرال $I=\int \frac{dx}{\sin^2 x-1}$ کدام است؟

۱) $I=\cot x+c$ ۲) $I=-\tan x+c$

۳) $I=-\frac{1}{2}Arc\sin(x)+c$ ٤) $I=\frac{1}{2}Arc\cos x+c$

حل:

$$I=\int \frac{dx}{\sin^2 x-1}=\int \frac{dx}{-(1-\sin^2 x)}=-\int \frac{dx}{\cos^2 x}=-\int(1+\tan^2 x)dx=-\tan x+c$$

۱. ۳. ۱. انتگرالهای مثلثاتی دیگر:

انتگرالهای مثلثاتی دیگری نیز وجود دارند که آنها را به صورت زیر دسته بندی می کنیم:

الف) $\int \sin^n(x)\cos^m(x)dx$ ب) $\int \sec^n(x)\tan^m(x)dx$

ج) $\int \tan^n(x)dx$ د) $\int \sin(nx)\cos(mx)dx$

ه) $\int \sin(nx)\sin(mx)dx$ و) $\int \cos(nx)\cos(mx)dx$

الف)برای این نوع انتگرال حالتهای زیر را در نظر می گیریم:

۱- یکی از توانهای n یا m برابر یک باشد.

$$\int \sin^n(x)\cos(x)dx = \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c = \frac{\sin^{n+1}(x)}{n+1} + c$$

$$u = \sin(x) \to du = \cos x dx$$

$$\int \sin(x)\cos^m(x)dx = -\int u^m du = -\frac{u^{m+1}}{m+1} + c = -\frac{\cos^{m+1}(x)}{m+1} + c$$

$$u = \cos(x) \to du = -\sin x dx$$

مثال۱۳ : انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int \sin x \cos^6 x dx = -\int u^6 du = -\frac{1}{7}u^7 + c = -\frac{1}{7}\cos^7 x + c$$

$$u = \cos x \to du = -\sin x dx$$

۲- حداقل یکی از توانها فرد باشد.

از توان فرد شروع می کنیم، یک توان از آن جدا می کنیم و توان زوج باقیمانده را بر حسب تابعی که توان زوج دارد،می نویسیم وسپس با یک تغییر متغیر مناسب انتگرال را محاسبه می کنیم.

مثال۱۴ : انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int \sin^3(x)\cos^m(x)dx = \int \sin(x)\sin^2(x)\cos^m(x)dx$$

$$= \int \sin(x)\left(1-\cos^2 x\right)\cos^m(x)dx$$

$$u = \cos(x) \to du = -\sin x dx$$

$$\Rightarrow -\int \left(1-u^2\right)u^m du = -\int u^m du + \int u^{m+2} du = -\frac{u^{m+2}}{m+2} + \frac{u^{m+3}}{m+3} + c$$

$$= -\frac{\cos^{m+1}(x)}{m+1} + \frac{\cos^{m+3}(x)}{m+3} + c$$

در حالت فوق m می تواند عدد گویا نیز باشد.

۳- هر دو توان زوج باشند.

در این صورت از رابطه مثلثاتی زیر استفاده می کنیم.

$$\begin{cases} \sin^n x = (\sin^2 x)^{\frac{n}{2}} = \left(\dfrac{1-\cos 2x}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \\ \cos^n x = (\cos^2 x)^{\frac{n}{2}} = \left(\dfrac{1+\cos 2x}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \end{cases}$$

مثال۱۵ : انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int \sin^2 x\cos^2 xdx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\times\frac{1+\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{4}\int (1-\cos^2 2x)dx$$
$$= \frac{1}{4}\int \sin^2 2xdx = \frac{1}{4}\int \frac{1-\cos 4x}{2}dx$$
$$= \frac{1}{8}\left[\int dx - \int \cos 4xdx\right] = \frac{1}{8}\left[x - \frac{1}{4}\sin 4x + c\right]$$

ب) برای این نوع انتگرال نیز حالتهای زیر را در نظر می گیریم:

۱-توان $\sec(x)$ برابر 2 باشد.

$$\int \sec^2(x)\tan^m(x)dx$$
$$u = \tan x \to du = \left(\tan^2(x)+1\right)dx = \sec^2(x)dx$$
$$\to \int u^m du = \frac{u^{m+1}}{m+1} + c = \frac{\tan^{m+1} x}{m+1} + c$$

۲-توان $\sec(x)$ زوج باشد (بزرگتر از 2) عبارت $\sec^2(x)$ جدامی کنیم و $\sec(x)$ باقیمانده را برحسب $\tan x$ می نویسیم وتغییر متغییر $u = \tan x$ را اعمال می کنیم.

مثال۱۶: انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

$$1)\quad \int \sec^4(x)\tan^m(x)dx = \int \sec^2(x)\sec^2(x)\tan^m(x)dx$$
$$= \int \left(1+\tan^2(x)\right)\sec^2(x)\tan^m(x)dx$$
$$u = \tan x \to du = \sec^2(x)dx$$
$$\Rightarrow \int (1+u^2)u^m du = \int u^m du + \int u^{m+2}du$$
$$= \frac{u^{m+1}}{m+1} + \frac{u^{m+3}}{m+3} + c = \frac{\tan^{m+1} x}{m+1} + \frac{\tan^{m+3} x}{m+3} + c$$

$$2)\quad \int \frac{\sec^4(x)}{\sqrt[7]{\tan^3(x)}}dx = \int \sec^4(x)\tan^{-\frac{3}{7}}(x)dx = \int \sec^2(x)\left(1+\tan^2(x)\right)\tan^{-\frac{3}{7}}(x)dx$$

$$u = \tan(x) \qquad dx = \sec^2(x) \qquad = \int (1+u^2)u^{-\frac{3}{7}}du = \int u^{-\frac{3}{7}}du + \int u^{\frac{11}{7}}du$$
$$= \frac{7u^{\frac{4}{7}}}{4} + \frac{7u^{\frac{19}{7}}}{19} + c$$
$$= \frac{7}{4}\tan^{\frac{4}{7}} x + \frac{7}{19}\tan^{\frac{19}{7}} x + c$$

سال ٧٦ : حاصل انتگرال $i=\int\frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx$ **کدام است؟**

۱) $\frac{1}{7}\cos^7(x)+c$ ۲) $\frac{1}{3}\sin^3 x+c$

۳) $\frac{1}{3}\tan^3 x+\frac{1}{5}\tan^5 x+c$ ٤) $\frac{1}{3}\tan^3 x+\sin^4 x+c$

حل :

$$i=\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2\cos^4 x}dx=\int\tan^2(x)\sec^4(x)dx=\int\tan^2(x)\sec^2(x)\sec^2(x)dx$$

$$u=\tan x \qquad =\int\tan^2(x)\left(1+\tan^2 x\right)\sec^2(x)dx=\int u^2(1+u^2)du$$

$$=\frac{u^3}{3}+\frac{u^5}{5}+c=\frac{\tan^3 x}{3}+\frac{\tan^5 x}{5}+c$$

۳- توان $\tan x$ **فرد باشد توان** $\sec(x)$ **بزرگتر از** 2 **باشد.**

در این صورت عبارت $\sec(x)\tan(x)$ **را جدا می کنیم و توان زوج باقیمانده را بر حسب** $\sec(x)$ **می نویسیم و تغییر متغیر** $u=\sec(x)$ **را اعمال می کنیم.**

مثال۱۷ : انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

$$1)\quad \int\tan^3(x)\sec^n(x)dx=\int\sec(x)\tan(x)\tan^2(x)\sec^{n-1}(x)dx$$

$$=\int(u^2-1)u^{n-1}du=\int(u^{n+1}-u^{n-1})du=\frac{u^{n+2}}{n+2}+\frac{u^n}{n}+c=\frac{\sec^{n+2}(x)}{n+2}+\frac{\sec^n(x)}{n}+c$$

$u=\sec(x)$

$du=\sec(x)\tan x dx$

$$2)\quad \int\tan^3(x)\sec^8(x)dx=\int\tan(x)\sec(x)\left(\tan^2(x)\sec^7(x)\right)dx$$

$$=\int\tan(x)\sec(x)\left(\sec^2(x)-1\right)\sec^7(x)dx$$

$u=\sec(x)$

$du=\sec(x)\tan x dx$

$$=\int(u^2-1)u^7du=\int(u^9-u^7)du$$

$$=\frac{u^{10}}{10}-\frac{u^8}{8}+c=\frac{\sec^{10}x}{10}-\frac{\sec^8 x}{8}+c$$

۴--توان $\sec(x)$**فرد و توان** $\tan x$ **زوج باشد. در این حالت از روش انتگرال گیری جز به جز استفاده می شود که در فصلهای بعدی توضیح داده می شود.**

ج) انتگرال فقط بر حسب توان $\tan x$ **باشد:**

$$\int \tan^n(x)dx = \int \tan^{n-2}(x)\tan^2(x)dx =$$

$$\int \tan^{n-2}(x)\left(\sec^2(x)-1\right)dx = \int \tan^{n-2}(x)\sec^2(x)dx - \int \tan^{n-2}(x)dx$$

$$= \frac{\tan^{n-1}(x)}{n-1} - \int \tan^{n-2}(x)dx$$

در رابطه فوق برای حالت $n = 2$ خواهیم داشت:

$$\int \tan^2 x dx = \int [1-1+\tan^2 x]dx = \int [1+\tan^2 x]dx - \int dx = \tan x - x + c$$

برای حالت $n = 1$ بعدا فرمولی معرفی خواهیم کرد.

با استفاده از فرمول عمومی با کاهش توان آخر سر یا به $\tan^2(x)$ خواهیم رسید یا به $\tan(x)$ که در هر حالت قابل حل است.

مثال۱۸ : انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

$$1)\quad \int \tan^3 x dx = \int \tan x \tan^2 x dx = \int \tan x \sec^2 x dx - \int \tan x dx = \frac{\tan^2 x}{2} - \int \tan x dx$$

$$2)\quad \int \tan^6(x)dx = \frac{\tan^5 x}{5} - \int \tan^4 x dx = \frac{\tan^5 x}{5} - \frac{\tan^3 x}{3} + \int \tan^2 x dx$$

$$= \frac{\tan^5 x}{5} - \frac{\tan^3 x}{3} + \tan x - x + c$$

برای حل انتگرالهای بشکل (د) و(ه) و(و) انتگرال را به حاصل جمع تبدیل می کنیم:

$$\int \sin(nx)\cos(mx)dx = \frac{1}{2}\int [\sin(n+m)x + \sin(n-m)x]dx$$

$$\int \sin(nx)\sin(mx)dx = \frac{1}{2}\int [\cos(n-m)x - \cos(n+m)x]dx$$

$$\int \cos(nx)\cos(mx)dx = \frac{1}{2}\int [\cos(n-m)x + \cos(n+m)x]dx$$

مثال۱۹ : انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int \sin 2x \cos 5x dx = \frac{1}{2}\int [\sin 7x + \sin(-3)x]dx = \frac{1}{2}\int [\sin 7x - \sin 3x]dx = -\frac{1}{14}\cos 7x + \frac{1}{6}\cos 3x + c$$

تمرین

دیفرانسیل توابع زیر را بیابید.

1) $y = x^2\sqrt[3]{2x+1}$

2) $y = x\sqrt{x} - \dfrac{x}{\sqrt{x}}$

3) $y = \dfrac{(x^2-3x)^2}{x}$

4) $y = \sqrt{\dfrac{x^3+1}{-3x+5}}$

5) $y = \tan(\sin x) + \sin(\tan x)$

6) $y = \sec(\tan x) - 3\cot(\tan x)$

7) $y = x^2 \sin\dfrac{1}{x} - x\cos\dfrac{1}{x}$

8) $y = \dfrac{2+\cos x}{2-\sin x}$

در تمرین های زیر $\dfrac{dy}{dx}$ را بیابید.

9) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 0$

10) $x = \sin(x+y)$

11) $\sqrt{xy} + 2x = \sqrt{y}$

12) $y\sqrt{2+3x} + x\sqrt{1+y} = x$

13) $y\sqrt{x} - x\sqrt{y} = 9$

14) $x^3 - 3x^2y + y^3 = 5$

15) $(x+y)^2 - (x-y)^2 = x^3 + y^3$

16) $x\sin y + y\cos x = 1$

17) $\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos y} = 4$

18) $3\sin^2 x + 4\cos^3 y = 2$

در تمرین های زیر با استفاده از قاعده زنجیره ای $\dfrac{dy}{dx}$ را بر حسب t بدست آورید.

19) $x = 2\cos t \quad , \quad y = 2\sin t$

20) $x = 1+t \quad , \quad y = 1-t^2$

21) $x = \tan t \quad , \quad y = 2t^2 - \dfrac{1}{t}$

22) $x = 4t+1 \quad , \quad x^3 - 3x^2y + y^3 = 5$

23) $2x^3 - 3xt^2 + t^3 = 1 \quad , \quad 3x^2y - 4xy^2 + 7y^3 = 0$

مقدار تقریبی کمیت های زیر را تعیین کنید.

24) $\sqrt[3]{7.5}$

25) $(1.25)^3$

26) $4.1\sqrt{4.1}$

27) $4\sin 64^\circ$

28) $\tan 148^\circ$

29) $\sqrt{\cos 179^\circ}$

انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

30) $\int\left(\dfrac{2}{x^3} + \dfrac{3}{x^2} + 5x\right)dx$

31) $\int \sqrt{x}\sqrt{1+x\sqrt{x}}\,dx$

32) $\int \dfrac{x^3}{(x^2+4)^{\frac{3}{2}}}dx$

33) $\int \dfrac{x+3}{(3-x)^{\frac{3}{2}}}dx$

34) $\int \dfrac{(t^{\frac{1}{3}}+2)^4}{\sqrt[3]{t^2}}dt$

35) $\int t^5\sqrt{t^2+1}\,dt$

36) $\int \sqrt{\frac{1}{x}-1}\,\frac{dx}{x^2}$

37) $\int \sqrt[3]{t+\frac{2}{t}}\left(\frac{t^2-1}{t}\right)dt$

38) $\int \frac{x^2+2x}{\sqrt{x^3+3x^2+1}}dx$

39) $\int \frac{x(3x^2+1)}{(3x^4+2x^2+1)^2}dx$

40) $\int \frac{\cos 3x}{\sqrt{1-2\sin 3x}}dx$

41) $\int \frac{\sin x}{(1+\cos x)^2}dx$

42) $\int \sin x\ \sin(\cos x)dx$

43) $\int \sec^4 x dx$

44) $\int \sin^3 x dx$

45) $\int \sin^4 3x dx$

46) $\int \cos^6 x dx$

47) $\int \sin^5 x \cos^2 x dx$

48) $\int \sin^2 \frac{y}{2}\cos^3 \frac{y}{2} dy$

49) $\int \sin^3 x\sqrt{\cos x}dx$

50) $\int \sin x \sin 3x \sin 5x dx$

51) $\int (\sin 3x - \sin 3x)^2 dx$

52) $\int \frac{\cos^3 3x}{\sqrt[3]{\sin 3x}}dx$

53) $\int \frac{\tan^{10} x}{\cos^2 x}dx$

54) $\int \tan^8 x dx$

55) $\int \tan^2 x \sec^6 x dx$

56) $\int \tan^5(\sin x)\sec^2(\sin x)\cos x dx$

57) $\int \tan\frac{1}{x}\cot\frac{1}{x}dx$

58) $\int \frac{\cos\frac{x}{4}}{\sqrt{\sin\frac{x}{4}}}dx$

فصل دوم

انتگرال معین

۲. ۱. نماد سیگما

تعریف: فرض کنید F یک رابطه باشد و $m \le n$ در این صورت مجموع

$$F(m)+F(m+1)+F(m+2)+\cdots+F(n-1)+F(n)$$

را با نماد $\sum_{i=m}^{n} F(i)$ نشان می دهیم. m و n را به ترتیب حد پایین و حد بالای سیگما گوییم.

مثال ۱: حاصل عبارتهای زیر را بیابید.

$$1)\ \sum_{i=0}^{4}\frac{i}{2i-1}=\frac{0}{0-1}+\frac{1}{2-1}+\frac{2}{4-1}+\frac{3}{6-1}+\frac{4}{8-1}=0+1+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\frac{4}{7}=\frac{298}{105}$$

$$2)\ \sum_{i=3}^{7}(3i+1)A_i=10A_3+13A_4+16A_5+19A_6+22A_7$$

خواص سیگما:

خواص زیر از سیگما برای انجام محاسبات مفید می باشند.

۱) $\sum_{i=m}^{n} F(i)=\sum_{k=m}^{n} F(k)$ یعنی به جای حرف i هر حرف دیگری می توان قرار داد.

۲) هر گاه c یک عدد ثابت باشد آنگاه داریم $\sum_{i=1}^{n} c=cn$.

اثبات:

$$\sum_{i=1}^{n} c = \underbrace{c + c + \cdots + c}_{n} = cn$$

۳) هر گاه c یک عدد ثابت باشد آنگاه داریم $\sum_{i=m}^{n} c = c(n-m+1)$.

اثبات:

$$\sum_{i=m}^{n} c = \sum_{i=1}^{n} c - \sum_{i=1}^{m-1} c = cn - c(m-1) = c(n-m+1)$$

۴) هر گاه c یک عدد ثابت باشد آنگاه داریم $\sum_{i=m}^{n} cF(i) = c\sum_{i=m}^{n} F(i)$.

اثبات:

$$\sum_{i=m}^{n} cF(i) = cF(m) + cF(m+1) + \cdots + cF(n) =$$
$$= c(F(m) + F(m+1) + \cdots + F(n)) = c\sum_{i=m}^{n} F(i)$$

۵) $\sum_{i=m}^{n} (F(i) + G(i)) = \sum_{i=m}^{n} F(i) + \sum_{i=m}^{n} G(i)$

اثبات:

$$\sum_{i=m}^{n} (F(i) + G(i)) = (F(m) + G(m)) + (F(m+1) + G(m+1)) + \cdots + (F(n) + G(n)) =$$
$$= (F(m) + F(m+1) + \cdots + F(n)) + (G(m) + G(m+1) + \cdots + G(n))$$
$$= \sum_{i=m}^{n} F(i) + \sum_{i=m}^{n} G(i)$$

۶) $\sum_{i=m}^{n} (F(i) - F(i-1)) = F(n) - F(m-1)$

اثبات:

$$\sum_{i=m}^{n} (F(i) - F(i-1)) = (F(m) - F(m-1)) + (F(m+1) - F(m)) + \cdots + (F(n) - F(n-1))$$
$$= F(n) - F(m-1)$$

۷) هر گاه c یک عدد ثابت باشد آنگاه داریم

$$\sum_{i=m}^{n} F(i) = \sum_{i=m-c}^{n-c} F(i+c) \quad \text{و} \quad \sum_{i=m}^{n} F(i) = \sum_{i=m+c}^{n+c} F(i-c)$$

اثبات: قرار می دهیم $j = i - c$ در این صورت داریم

$$i = j + c \rightarrow \sum_{i=m}^{n} F(i) = \sum_{j+c=m}^{n} F(j+c) = \sum_{j=m-c}^{n-c} F(j+c) = \sum_{i=m-c}^{n-c} F(i+c)$$

بطور مشابه با قرار دادن $j = i + c$ رابطه دوم حاصل می شود.

مثال ۲: حاصل عبارتهای زیر را بیابید.

$$1)\ \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right) = -\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i+1} - \frac{1}{i}\right) = -\sum_{i=2}^{n+1}\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i-1}\right)$$

$$= -\left(\frac{1}{n+1} - 1\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$2)\ \sum_{i=1}^{n}(2^{-i} - 2^{1-i}) = \sum_{i=1}^{n}(2^{-i} - 2^{-(i-1)}) = 2^{-n} - 2^{0} = \frac{1}{2^n} - 1$$

$$3)\sum_{i=2}^{6} \frac{i+1}{i-1} = \frac{3}{1} + \frac{4}{2} + \frac{5}{3} + \frac{6}{4} + \frac{7}{5} = \frac{180+120+100+90+82}{60} = \frac{572}{60}$$

قضیه۲. ۱. ۱: اگر n عدد صحیح و مثبتی باشد آنگاه

الف) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

ب) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

ج) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

د) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$

اثبات: الف)

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1$$

دو رابطه فوق را جمله به جمله با هم جمع می کنیم:

$$2\sum_{i=1}^{n} i = (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1)$$

$$= n(n+1)$$

بنابراین $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

ب) داریم $i^3-(i-1)^3=3i^2-3i+1$. بنابراین $\sum_{i=1}^{n}[i^3-(i-1)^3]=\sum_{i=1}^{n}[3i^2-3i+1]$ دو طرف این رابطه به صورت زیر می باشند:

$$\sum_{i=1}^{n}[i^3-(i-1)^3]=n^3$$

$$\sum_{i=1}^{n}[3i^2-3i+1]=3\sum_{i=1}^{n}i^2-3\sum_{i=1}^{n}i+\sum_{i=1}^{n}1=3\sum_{i=1}^{n}i^2-3\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)+n$$

با مساوی قرار دادن دو رابطه فوق فرمول (ب) بدست می آید:

$$3\sum_{i=1}^{n}i^2=n^3+\frac{3n(n+1)}{2}-n=\frac{2n^3+3n^2+3n-2n}{2}=\frac{2n^3+3n^2+n}{2}=\frac{2n^3+2n^2+n^2+n}{2}$$

$$=\frac{2n^2(n+1)+n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

اثبات قسمتهای (ج) و (د) به خواننده واگذار می کنیم.

(راهنمایی: برای قسمت (ج) از رابطه $i^4-(i-1)^4=4i^3-6i^2+4i-1$ استفاده کنید و برای قسمت (د) فرمول مشابهی بدست آورید.)

مثال ۳: مجموع های زیر را محاسبه کنید.

$$1)\sum_{i=-6}^{43} i = \sum_{i=1}^{50}(i-7) = \sum_{i=1}^{50} i - \sum_{i=1}^{50} 7 = \frac{50(50+1)}{2} - 350 = 1275 - 350 = 925$$

$$2)\sum_{i=1}^{10}(6i^2 - 4i^3 + 2) = 6\sum_{i=1}^{10} i^2 - 4\sum_{i=1}^{10} i^3 + \sum_{i=1}^{10} 2 = 10(10+1)(20+1) - 100(10+1)^2 + 20 = -9770$$

$$3)\sum_{i=1}^{41}\left(\sqrt[3]{3i+2} - \sqrt[3]{3i-1}\right) = \sqrt[3]{3\times 41+2} - \sqrt[3]{3-2} = 5 - 1 = 4$$

$$4)\sum_{i=5}^{10}\frac{2}{(4i-3)(4i-1)} = \sum_{i=1}^{6}\frac{2}{(4(i+4)-3)(4(i+4)-1)} = \sum_{i=1}^{6}\frac{2}{(4i+13)(4i+15)}$$

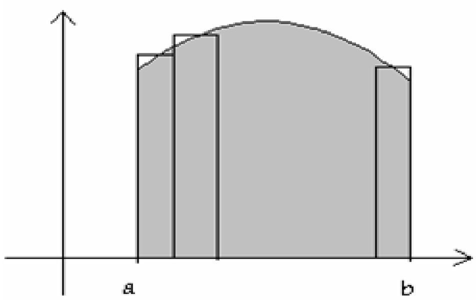
$$= \sum_{i=1}^{6}\left(\frac{1}{(4i+13)} - \frac{1}{(4i+15)}\right) = \frac{1}{37} - \frac{1}{19}$$

$$5)\sum_{i=1}^{n} 4i^2(i-2) = 4\sum_{i=1}^{n} i^3 - 8\sum_{i=1}^{n} i^2 = 4\left(\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right) - 8\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$$

$$= \frac{n(n+1)(3n^2-5n-4)}{3}$$

۲. ۲. محاسبه مساحت یک ناحیه در صفحه

فرض کنید تابع f بر بازهٔ بستهٔ کراندار $[a,b]$ پیوسته و نامنفی باشد. منظور از مساحت تحت منحنی $y = f(x)$ از $x = a$ تا $x = b$، یعنی مساحت A ناحیه مسطح R محدود به خطوط $x = a$ و $x = b$، محور x و منحنی $y = f(x)$. شکل (۱) را ببینید.



شکل (۱)

بازهٔ $[a,b]$ را به وسیله انتخاب دلخواه $n-1$ نقطه از آن به n زیر بازهٔ کوچکترتقسیم می کنیم، این نقاط را به صورت زیر نامگذاری می کنیم:

$$a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b$$

بنابراین بین این نقاط رابطه $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ بر قرار است. مجموعه

$$\{\ [x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]\ \}$$

را یک افراز از بازهٔ $[a,b]$ گویند و آن را با Δ نشان می دهند.

حال برای هر $i=1,2,\dots n$ تعریف می کنیم $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ و قرار می دهیم

$$\|\Delta\| = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1}\} = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2 \dots\dots \Delta x_n\}$$

$\|\Delta\|$ را نرم افراز Δ می گویند.

خطوط قائم $x = x_0, x = x_1, \dots, x = x_n$ را رسم می کنیم. این خطوط ناحیه R را به n نوار باریک تقسیم می کند. تابع f پیوسته است و در نتیجه اگر Δx_i به قدر کافی کوچک باشد، مقدارش بر زیر بازهٔ $[x_{i-1}, x_i]$ فقط کمی تغییر می کند. لذا فرض می کنیم f بر $[x_{i-1}, x_i]$ مقدار ثابت $f(p_i)$ داشته باشد که p_i یک نقطه دلخواه از بازه فوق است. حال مجموع مساحت نوارها تقریب خوبی برای مساحت کل ناحیه است که به صورت زیر نمایش داده می شود:

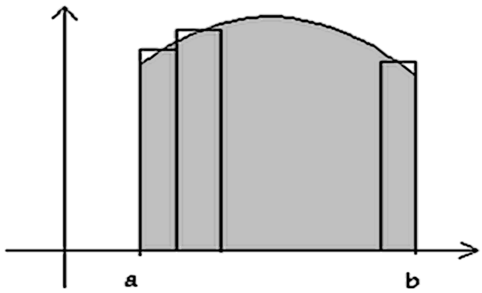
$$\sum_{i=1}^{n} f(p_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta x_i$$

این تقریب وقتی عرض نوارها به اندازه کافی کوچک شود بهتر خواهد شد. پس

$$A = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(p_i)(x_i - x_{i-1}) = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta x_i$$

که اگر افراز فاصله $[a,b]$ را منظم در نظر بگیریم خواهیم داشت:

$$A = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n} f\left(a + \frac{b-a}{n} i\right)\frac{b-a}{n}$$



شکل (۱)

مثال ۴ : مساحت ناحیه محدود به منحنی $y = 4 - x^2$ محور xها و خطوط $x = 0$ و $x = 1$ را بیابید.

حل:

$$A=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}i\right)\frac{b-a}{n}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{n}\left(4-\left(0+\frac{1-0}{n}i\right)^2\right)\frac{1-0}{n}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{n}\left(4-\left(\frac{1}{n}i\right)^2\right)\frac{1}{n}=\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{4}{n}-\sum_{i=0}^{n}\frac{i^2}{n^3}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(4-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}\right)=\frac{11}{3}$$

مثال ۵ : مساحت ناحیه محدود به منحنی $y=x^3+1$ محور xها و خطوط $x=0$ و $x=2$ را بیابید.

حل:

$$A=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}i\right)\frac{b-a}{n}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{n}\left(\left(0+\frac{2-0}{n}i\right)^3+1\right)\frac{2-0}{n}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{n}\left(\left(\frac{2}{n}i\right)^3+1\right)\frac{2}{n}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{16}{n^4}\sum_{i=0}^{n}i^3+\frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n}1\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4n^2(n+1)^2}{n^4}+2\right)=6$$

۲. ۳. انتگرال معین:

تعریف: فرض کنید تابع f بر بازهٔ $[a,b]$ تعریف شده باشد و $x_0,x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},x_n$ نقاطی در $[a,b]$ باشند بطوریکه

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

همچنین برای هر $i=1,2,\ldots n$ ، p_i نقطه دلخواه در $[x_{i-1},x_i]$ بطول $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ باشد. قرار می دهیم

$$\|\Delta\|=\max\{x_1-x_0,x_2-x_1,\ldots,x_n-x_{n-1}\}=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2\ldots\ldots\Delta x_n\}$$

هرگاه حد زیر موجود باشد مقدار آن را انتگرال معین تابع f بر بازهٔ $[a,b]$ گوییم و با نماد $\int_a^b f(x)dx$ نشان می دهیم و f را بر بازهٔ $[a,b]$ انتگرالپذیر گوییم:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\|\Delta\|\to0}\sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta x_i$$

مثال ۱ : حدود زیر را بیابید.

$$1)\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 x\,dx$$

$$2)\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+n}+\frac{1}{2+n}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\frac{1}{n}+1}+\frac{1}{\frac{2}{n}+1}+\cdots+\frac{1}{\frac{n}{n}+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\frac{i}{n}+1}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{x+1}dx$$

$$3)\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)=\pi\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sin(\frac{i\pi}{n})\cdot\frac{1}{n}=\pi\int_0^1\sin(\pi x)dx$$

روش محاسبه مقدار انتگرال های فوق را بعداً بیان می کنیم.

خواص انتگرال معین:

۱) اگر تابع f انتگرال پذیر باشد آنگاه $\int_a^b f(x)\,dx$ یک عدد است که به متغیر x بستگی ندارد.

۲) $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$

۳) هر گاه f بر $[a,b]$ انتگرال پذیر بوده و $f(x)\ge 0$ آنگاه $\int_a^b f(x)dx\ge 0$

۴) هرگاه $f(x)$ و $g(x)$ بر $[a,b]$ انتگرال پذیر بوده و $f(x)\ge g(x)$ آنگاه

$$\int_a^b f(x)dx\ge\int_a^b g(x)dx$$

۵) هر گاه f بر $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه f مقادیر ماکزیمم و مینیمم خود را بر آن بازه اختیار می کند. یعنی $m\le f(x)\le M$ که در آن M,m به ترتیب مقادیر مینیمم و ماکزیمم تابع f بر $[a,b]$ می باشد، در این صورت

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$$

۶) $\int_a^a f(x)dx=0$

۷) $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

۸) هر گاه f بر $[a,b]$ پیوسته بوده و c یک نقطه درونی $[a,b]$ باشد آنگاه

$$\int_a^b f(x)=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

مثال ۶ : بدون محاسبه انتگرال، معین کنید کدام انتگرال بزرگتر است.

الف) $\int_0^1 xdx$ یا $\int_0^1 x^2dx$

$$x\in[0\ ,\ 1]\Rightarrow x^2\le x\Rightarrow\int_0^1 x^2dx\le\int_0^1 xdx$$

ب) $\int_1^2 xdx$ یا $\int_1^2 x^3dx$

$$x\in[1\ ,\ 2]\Rightarrow x\le x^3\Rightarrow\int_1^2 xdx\le\int_1^2 x^3dx$$

ج) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 xdx$ یا $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{10}xdx$

$$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\ \Rightarrow\ 0\le\sin(x)\le 1$$

$$\Rightarrow\sin^{10}(x)\le\sin^2(x)\Rightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{10}xdx\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 xdx$$

مثال ۷ : فرض کنید $f(x)=\begin{cases}2-x & x<1\\ x^3 & x\ge 1\end{cases}$ انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

$$1)\ \int_{-2}^3 f(x)dx=\int_{-2}^1 f(x)dx+\int_1^3 f(x)dx=\int_{-2}^1(2-x)dx+\int_1^3 x^3dx$$

$$2)\ \int_2^{-1} f(x)dx=-\int_{-1}^2 f(x)dx=-\int_{-1}^2\left[\int_{-1}^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx\right]=$$

$$=-\left[\int_{-1}^1(2-x)dx+\int_1^2 x^3dx\right]$$

$$3)\ \int_0^2 f(x+1)dx=\int_0^2(x+1)^3dx$$

$$f(x+1)=\begin{cases}2-(x+1) & x+1<1\\ (x+1)^3 & x+1\ge 1\end{cases}\Rightarrow f(x+1)=\begin{cases}1-x & x<0\\ (x+1)^3 & x\ge 0\end{cases}$$

۲. ۴. قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال:

هر گاه f بر $[a,b]$ پیوسته باشد، آنگاه $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$ که درآن F یک پاد مشتق f بر $[a,b]$ است.

مثال۸ : حاصل انتگرال های زیر را بدست آورید.

$$1)\ \int_1^2 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$$

$$2)\ \int_1^2 dx = x\Big|_1^2 = 2-1=1$$

$$3)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)dx = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos(\frac{\pi}{2})+\cos 0 = 1$$

$$4)\ \int_0^2 |x+3|dx = \int_0^2 (x+3)dx = \int_0^2 xdx + \int_0^2 3dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 + 3x\Big|_0^2 = 2+6=8$$

$$x\in[0,2]\Rightarrow x+3>0\Rightarrow |x+3| = x+3$$

$$5)\ I=\int_{-3}^{3} \left|x^2+3x+2\right|dx = ? \qquad x^2+3x+2=0\to x=-1,-2$$

$$\Rightarrow I=\int_{-3}^{-2}\left|x\ \ +3x+2\right|dx+\int_{-2}^{-1}\left|x\ \ +3x+2\right|dx+\int_{-1}^{3}\left|x+3x+2\right|dx$$

$$=\int_{-3}^{-2}(x+3x+2)d+\int_{-2}^{-1}-(x^2+3x+2)\,dx+\int_{-1}^{3}(x^2+3x+2)\,dx$$

ادامه به عهده خواننده.

$$6)\ I=\int_{-1}^{1}[x]dx = \int_{-1}^{0}[x]dx+\int_0^1[x]dx = \int_{-1}^{0} -dx+\int_0^1 0dx = -x\Big|_{-1}^{0} = 1$$

$$7)\ I=\int_0^1 [2x]dx = \int_0^{\frac{1}{2}}[2x]dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}[2x]dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} dx = x\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$8)\ I=\int_{-1}^{1}\sqrt{1-|x|}\,dx = \int_{-1}^{0}\sqrt{1-|x|}dx+\int_0^1\sqrt{1-|x|}dx$$

$$\Rightarrow I=\int_1^0\sqrt{1+x}dx+\int_0^1\sqrt{1-x}dx$$

ادامه به عهده خواننده.

مثال۹ : تحقیق کنید که $\frac{1}{6}\le\int_0^2\frac{1}{10+x}dx\le\frac{1}{5}$

حل:

$$x\in[0,2]\Rightarrow 0\le x\le 2\Rightarrow 10\le 10+x\le 12\Rightarrow\frac{1}{12}\le\frac{1}{10+x}\le\frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{6}\le\int_0^2\frac{dx}{10+x}\le\frac{1}{5}$$

سال ٦٤ : مقدار انتگرال $\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx$ کدام است؟

۱) 0 ۲) 2 ۳) $\frac{1}{3}$ ٤) $\frac{2}{3}$

حل:

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx = \int_1^0 \frac{-1}{2}\sqrt{u}du = \frac{1}{3}$$
$$1-x^2 = u \to -2xdx = du$$

سال ٦٧ : انتگرال $\int_0^{\pi}\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}}dx$ **برابر است با :**

۱) 2 ۲) 0 ۳) 1 ٤) $\sqrt{\frac{2}{2}}$

حل :

$$\int_0^{\pi}\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}}dx = \int_0^{\pi} \sin(x)dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = -\cos\pi + \cos(0)$$
$$= -(-1)+1 = 2$$

سال ٦٨ : انتگرال $I = \int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx$ **برابر با کدامیک از مقادیر زیر می باشد؟**

۱) π ۲) 1 ۳) $(\pi+1)$ ٤) $\pi-1$

حل:

$$I = \int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\frac{1}{x})}{x^2}dx = -\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \sin u du = \cos u\Big|_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} - \cos\pi = 0-(-1) = 1$$
$$u = \frac{1}{x} \to du = \frac{-1}{x^2}dx$$

سال۷۰: مقدار انتگرال $\int_{-2}^{2}\frac{x}{\sqrt{1+8x^2}}dx$ **چقدر است؟**

۱) 0 ۲) 1 ۳) 2 ٤) 3

حل:

$$\int_{-2}^{2}\frac{x}{\sqrt{1+8x^2}}dx = \frac{2}{16}\sqrt{1+8x^2}\Big|_{-2}^{2} = 0$$
$$u = 1+8x^2$$
$$du = 16xdx$$

البته این سوال را از طریق خواص انتگرال معین نیز با توجه به انتگرال که در بازهٔ متقارن تعریف شده است، براحتی می توان حل کرد.

سال ۷۰ : مقدار $\int_{\frac{-\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 6\sin 2xdx$ **کدام است؟**

۱) 3 ۲) 6 ۳) $\frac{3+3\sqrt{3}}{2}$ ٤) $\frac{3-3\sqrt{3}}{2}$

حل به عهده خواننده.

سال ۷۲ : حاصل انتگرال $I=\int_0^2 |1-x|\,dx$ **کدام است؟**

۱) 0 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) 1 ٤) 2

$$\left.\begin{array}{l} 0<x<1 \Rightarrow |1-x|=1-x \\ 1<x<2 \Rightarrow |1-x|=x-1 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow I=\int_0^1 (1-x)\,dx+\int_1^2 (x-1)\,dx = x-\frac{x^2}{2}\Big|_0^1+\frac{x^2}{2}-x\Big|_1^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

سال ۷۵ : مقدار $I=\int_2^3 |2-x|\,dx$ **چقدر است؟**

$$x\in[2,3]\Rightarrow 2-x<0\Rightarrow |2-x|=-(2-x)=x-2\Rightarrow I=\int_2^3 (x-2)\,dx=\frac{x^2}{2}-2x\Big|_2^3=\frac{1}{2}$$

قضیه ۲. ۴. ۱: فرض کنیم f بر بازهٔ I پیوسته بوده و$F(x)=\int_a^x f(t)dt$ که در آن a نقطه ثابتی بر I و x نقطه متغیری از Iباشد. در این صورت به ازای هر x در I داریم $F'(x)=f(x)$.

مثال ۱۰ : از توابع زیر مشتق بگیرید :

1) $f(x)=\int_0^x t^{30}(1-t)^{30}\,dt \Rightarrow f'(x)=x^{30}(1-x)^{30}$

2) $f(x)=\int_1^x \sqrt{t}\,dt \Rightarrow f'(x)=\sqrt{x}$

تبصره : با استفاده از قضیه تغییر متغیر و قاعده زنجیره ای داریم :

$$f(x)=\int_a^{u(x)} g(t)dt \Rightarrow f'(x)=g(u(x))\cdot u'(x)$$

همچنین

$$f(x)=\int_{v(x)}^{u(x)} g(t)dt \Rightarrow f'(x)=g(u(x))\cdot u'(x)-g(v(x))\cdot v'(x)$$

مثال ۱۱ : مشتق بگیرید.

حل:

$$1)\quad f(x)=\int_3^{x^2}\sqrt{t^2+1}dt \Rightarrow f'(x)=\sqrt{x^4+1}\times 2x$$

$$2)\quad f(x)=\int_4^{\sin x}\sqrt{1+\sin t}\,dt \Rightarrow f'(x)=\cos(x)\sqrt{1+\sin(\sin x)}$$

مثال۱۲ : هر گاه $f(t)=\int_1^{2t}\frac{\sin u}{u}du$ ، $F(x)=\int_x^1 f(t)dt$ ، $F''(\frac{\pi}{4})$ را بیابید.

حل:

$$F'(x)=-f(x)\Rightarrow F''(x)=-f'(x)=-2\frac{\sin(2x)}{2x}\Bigg|_{x=\frac{\pi}{4}}=\frac{-2\sin(\frac{\pi}{2})}{\frac{\pi}{2}}=\frac{-4}{\pi}$$

مثال۱۳ : حدود زیر را پیدا کنید.

حل: با استفاده از هوپیتال داریم

$$1)\quad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^3+1}\times\int_1^x(t^2+t)dt=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{3x^2+1}=\frac{1}{3}$$

$$2)\quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\times\int_0^x t\sqrt{3+t^2}dt=\lim_{x\to 0}\frac{x\sqrt{3+x^2}}{2x}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

خواص دیگری از انتگرال معین:

۱) $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt$

۲) فرض کنید f بر بازهٔ $[-a,0]$ پیوسته باشد داریم :

$$\int_{-a}^0 f(x)dx=\int_0^a f(-x)dx$$

زیرا

$$-x=t\Rightarrow -dx=dt\Rightarrow \int_0^a f(-x)dx=-\int_0^{-a} f(t)dt=\int_{-a}^0 f(t)dt=\int_{-a}^0 f(x)dx$$

۳) اگر f فرد باشد آنگاه $I=\int_{-a}^a f(x)dx=0$ زیرا

$$I=\int_{-a}^0 f(x)dx+\int_0^a f(x)dx\Rightarrow I=\int_{-a}^0 -f(-x)dx+\int_0^a f(x)dx$$

$$f(-x)=-f(x)\qquad =-\int_0^{-a}-f(-x)dx+\int_0^a f(x)dx$$

$$=-\int_0^a f(x)dx+\int_0^a f(x)dx=0$$

۴) اگر زوج باشد آنگاه $I=\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=2\int_0^a f(x)dx$. زیرا

$$I=\int_{-a}^{a} f(x)dx=\int_{-a}^{0} f(x)dx+\int_0^a f(x)dx=\int_{-a}^{0} f(-x)dx+\int_o^a f(x)dx$$

$$f(-x)=f(x) \qquad =\int_0^a f(x)dx+\int_0^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$$

۵)

$$\int_0^a \frac{f(x)\,dx}{f(x)+f(a-x)}=\int_0^a \frac{f(a-x)}{f(x)+f(a-x)}dx$$

از طرف دوم : $\begin{cases} a-x=t \\ -dx=dt \end{cases} \Rightarrow \int_a^0 \frac{-f(t)\,dt}{f(a-t)+f(t)}=\int_0^a \frac{f(t)\,dt}{f(a-t)+f(t)}$

$$=\int_0^a \frac{f(x)dx}{f(a-x)+f(x)}$$

مثال۱۴ : با استفاده از تساوی فوق نشان دهید که :

$$I=\int_0^a \frac{f(x)dx}{f(x)+f(a-x)}=\frac{a}{2}$$

حل:

$$I=\int_0^a \frac{f(x)dx}{f(x)+f(a-x)}=\int_0^a \frac{f(a-x)}{f(x)+f(a-x)}dx$$

$$\Rightarrow 2I=I+I=\int_0^a \frac{f(x)+f(a-x)}{f(x)+f(a-x)}dx=\int_0^a dx=a\Rightarrow I=\frac{a}{2}$$

٦) اگر $f(x)=f(x+a)$ آنگاه داریم :

$$\int_0^{na} f(x)\,dx=n\int_0^a f(x)\,dx$$

طرف اول : $\int_0^{na} f(x)\,dx=\int_0^a f(x)\,dx+\int_a^{2a} f(x)\,dx+\ldots\ldots+\int_{(n-1)a}^{na} f(x)\,dx$

با توجه به $f(x)=f(x+a)$

$$\int_0^a f(x)dx=\int_0^a f(x+a)dx=\int_a^{2a} f(t)dt$$

و برای بقیه انتگرالهای طرف دوم رابطه بالا قابل تحقیق هست لذا حکم ثابت است.

۷) داریم : $\int_0^a f(x)\,dx=\int_0^a f(a-x)\,dx$

زیرا اگر قرار دهیم $a-x=t$ آنگاه $-dx=dt$ و در نتیجه

$$\int_0^a f(a-x)\,dx=\int_a^0 -f(t)\,dt=\int_0^a f(t)\,dt=\int_0^a f(x)\,dx$$

مثال ۱۵ : حاصل انتگرال های زیر را بدست آورید:

$$I=\int_0^1 \frac{x^4\,dx}{x^4+(1-x)^4}=\frac{1}{2} \qquad f(x)=x^4 \ , \ a=1$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}\ \ dx}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}=\frac{\pi}{4} \qquad f(x)=\sqrt{\sin x} \ , \ a=\frac{\pi}{2}$$

مثال ۱۶ : تحقیق کنید: $\int_{-2}^{2} x^3\cos(nx)\,dx=0$

حل:

$$f(x)=x^3\cos(nx)$$

$$f(-x)=(-x)^3\cos(-nx)=-x^3\cos(nx)=-f(x)$$

یعنی f فرد باشد و بازه متقارن لذا حاصل انتگرال صفر است.

مثال ۱۷ : تحقیق کنید :

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx=\int_0^1 x^n(1-x)^m\,dx$$

حل:

$$1-x=t\Rightarrow -dx=dt\Rightarrow -\int_1^0 (1-t)^m\,t^n\,dt=\int_0^1 (1-t)^m\,t^n\,dt=\int_0^1 (1-x)^m x^n\,dx$$

مثال ۱۸ : نشان دهید حاصل انتگرال زیر برابر 2π است.

$$I=\int_0^{2\pi} \frac{\sin 4x}{\sin 4x+\cos 4x}dx+4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 4x}{\sin 4x+\cos 4x}dx$$

حل:

$$f(x)=\frac{\sin 4x}{\sin 4x+\cos 4x}=f(x+\frac{\pi}{2})\Rightarrow I=4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 4x\ \ dx}{\sin 4x+\cos 4x}+4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 4x\,dx}{\sin 4x+\cos 4x}$$

$$I=4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 4x+\cos 4x}{\sin 4x+\cos 4x}dx=2\pi$$

مثال ۱۹ : نشان دهید : $\int_0^{\pi} x\,f(\sin x)\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx$

حل:

$$\int_0^{\pi} x\,f(\sin x)\,dx=\int_0^{\pi}(\pi-x)f(\sin(\pi-x))\,dx=\int_0^{\pi} \pi f(\sin x)\,dx-\int_0^{\pi} x\,f(\sin x)\,dx$$

$$\Rightarrow 2\int_0^{\pi} x\,f(\sin x)\,dx=\pi\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx\Rightarrow \int_0^{\pi} x\,f(\sin x)\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx$$

سال ۷۳) حاصل انتگرال $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\cos(x)\,dx}{x^6+x^4+1}$

۱) π ۲) 0 ۳) $\frac{\pi}{2}$ ٤) 2π

حل:

$$f(x)=\frac{x\cos(x)}{x^6+x^4+1} \quad \Rightarrow \quad f(-x)=\frac{-x\cos(-x)}{(-x)^6+(x)^4+1}=\frac{-x\cos(x)}{x^6+x^4+1}=-f(x)$$

تابع f فرد است و بازه متقارن لذا حاصل انتگرال برابر صفر می باشد .

سال ٧٤) حاصل انتگرال $I=\int_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2xdx}$ کدام است؟

۱) $100\sqrt{2}$ ۲) $200\sqrt{2}$ ۳) 200 ٤) 100

حل : برای تابع $\cos 2x$ دوره تناوب π می باشد لذا

$$\int_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\,dx = 100\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,dx = 100\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}}dx$$

$$=100\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sin x dx = 200\sqrt{2}$$

سال ٦٧) مقدار انتگرال $\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{x\,\cos(x)}{2}dx$ برابر است با :

۱) $\frac{\alpha\sin(\alpha)}{1+\alpha^2}$ ۲) $\int_0^{\alpha}\frac{x\cos x}{1+x^2}dx$ ۳) 0 ٤) $\alpha\arctan\alpha$

حل:

$$f(-x)=\frac{-x\,\cos(-x)}{1+(-x)^2}=\frac{-x\,\cos(x)}{1+x^2}=-f(x)$$

یعنی تابع f فرد است و بازه متقارن لذا حاصل انتگرال برابر صفر است.

سال ۷۰) مقدار انتگرال $\int_{-2}^{2}\frac{x}{\sqrt{1+8x^2}}dx$ چقدر است؟

۱) 0 ۲) 1 ۳) 2 ٤) 4

حل:

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+8x^2}} \quad \Rightarrow \quad f(-x)=\frac{-x}{\sqrt{1+8(-x)^2}}=\frac{-x}{\sqrt{1+8x^2}}=-f(x)$$

تابع f فرد است و بازه متقارن لذا حاصل انتگرال برابر صفر است.

سال ۷۱) مقدار $\int_{-2}^{2}x^3dx$ کدام است؟

۱) 16 ۲) 8 ۳) 4 ٤) 0

حل: دقیقا مشابه مثال قبل می باشد.

۲. ۳. قضیه (مقدار میانگین برای انتگرالها):

اگر f بر $[a,b]$ پیوسته باشد نقطه ای مانند c در $[a,b]$ هست به طوری که

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

تعریف (مقدار میانگین یک تابع): فرض کنیم f تابع انتگرال پذیری بر بازۀ $[a,b]$ باشد. عدد $f(c)=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)$ مقدار میانگین یا مقدار متوسط f بر $[a,b]$ نام دارد.

مثال ۲۰ : مقدار میانگین تابع $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ از $x=-2$ تا $x=2$ چقدر است؟

حل: نمودار $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ یک نیم دایره به شعاع ۲ می باشد که مساحت زیر نمودار و بالای محور x ها آن برابر است با 2π. بنابراین

$$\text{میانگین}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{2-(-2)}\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$$

سال ۷۲) مقدار میانگین تابع $f(x)=x^3$ از $x=-1$ تا $x=1$ چقدر است؟

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) 0 ۳) $\frac{1}{2}$ ٤) 1

حل:

$$\text{میانگین}=\frac{1}{b-a}\int_{-1}^{1} f(x)dx=\frac{1}{1-(-1)}\int_{-1}^{1} x^3dx=0$$

زیرا x^3 یک تابع فرد است و بازه متقارن.

تمرین

حدود زیر را محاسبه کنید.

1) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+4}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$

2) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n\sqrt{n^2+1}}+\frac{2}{n\sqrt{n^2+4}}+\cdots+\frac{n}{n\sqrt{n^2+n^2}}\right)$

3) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n^3}}+\frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n^3}}+\cdots+\frac{\sqrt{n+n}}{\sqrt{n^3}}\right)$

4) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}\right)$

5) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{(n+1)^5+(n+2)^5+\cdots+(n+n)^5}{n^6}\right)$

6) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n}\left(\cos\frac{\pi}{n}+\cos\frac{2\pi}{n}+\cdots+\cos\frac{n\pi}{n}\right)$

انتگرال های زیر را بیابید.

7) $\int_{-1}^{2}(x-1)(2x+3)dx$

8) $\int_{0}^{3}(x+2)\sqrt{x+1}dx$

9) $\int_{-3}^{3}\sqrt{7-x^2}dx$

10) $\int_{-2}^{2}(x^2+1)\sqrt{x^3+3x+2}dx$

11) $\int_{0}^{1}\frac{y^2+2y}{\sqrt[3]{y^3+3y^2+4}}dy$

12) $\int_{2}^{3}\frac{x^3-1}{x-1}dx$

13) $\int_{1}^{64}(\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}+\sqrt[3]{t})dt$

14) $\int_{1}^{2}\frac{x^3+2x^2+x+2}{(x+1)^2}dx$

15) $\int_{-3}^{2}\frac{2x^3-24x^2+48x+5}{x^2-8x+16}dx$

16) $\int_{2}^{3}|2x-3|dx$

17) $\int_{-1}^{2}(|x-1|+|x|)dx$

18) $\int_{-1}^{3}\sqrt{|3x+1|+|2-x|}dx$

19) $\int_{-2}^{2}x|x-3|dx$

20) $\int_{-1}^{1}[2x+1]dx$

21) $\int_{-1}^{1}([2x]+[x])dx$

22) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos x dx$

23) $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\sin 2x\cos 4x dx$

24) $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\sin^3 t\cos^2 t dt$

25) $\int_{0}^{\pi}|\cos x-\sin x|dx$

26) $\int_{0}^{\pi}(|2\cos x-1|+|1-\sin x|)dx$

27) $\int_{4}^{16}\left(D_x\int_{5}^{x}(2\sqrt{t}-1)dt\right)dx$

۲۸) فرض کنید

$$f(x)=\begin{cases}-x+\sin x & 0\le x<\frac{\pi}{2}\\ \cos^2 x & \frac{\pi}{2}\le x<\pi\\ \tan^2 x & \pi\le x<\frac{3\pi}{2}\end{cases}$$

انتگرال $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}f(x)dx$ را بیابید.

مشتق توابع زیر را بدست آورید.

29) $F(x)=\int_{1}^{x}\frac{dt}{5t\sqrt{t}+t^3+4}$

30) $F(x)=\int_{2}^{x}\frac{\sin t}{t}dt$

31) $F(x)=\int_{1}^{x^2}\sqrt{\sin t}dt$

32) $F(x)=\int_{x}^{x^2+1}\cos\sqrt{t}dt$

33) $F(x)=\int_{x+2}^{3x+\sqrt{x}}\frac{1-t}{t}dt$

34) $F(x)=\int_{\cos x}^{\sin x}\frac{t^2dt}{1-t^2}$

۳۵) مقدار میانگین $f(x)=\sin x$ را بر بازه $[0,2\pi]$ تعیین کنید.

۳۶) مقدار میانگین $f(x)=|2-x|+|1+3x|+|x|$ را بر بازه $[-1,3]$ تعیین کنید.

۳۷) مقدار میانگین $f(x)=|\sin x-1|+\left[1+\frac{\pi}{x}\right]$ را بر بازه $[0,2\pi]$ تعیین کنید.

۳۸) تساوی زیر را نشان دهید: $\int_{0}^{t}f(x)g(t-x)dx=\int_{0}^{t}g(x)f(t-x)dx$

فصل سوم

توابع معکوس، لگاریتمی، نمایی و هذلولوی(هیپربولیک)

۳. ۱. توابع معکوس

تعریف(تابع یک به یک): تابع f را یک به یک (۱-۱) گویند اگر و تنها اگر به ازای هر دو عضو متمـایز x_1 و x_2 از دامنه f داشته باشیم $f(x_1) \neq f(x_2)$، به عبارت دیگر

$$\forall x_1, x_2 \in D_f \qquad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

یا بطور معادل

$$\forall x_1, x_2 \in D_f \qquad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_1$$

مثال ۱ : توابع زیر یک به یک می باشند.

1) $f(x) = 4x - 3$

$$f(x_1) = f(x_2) \rightarrow 4x_1 - 3 = 4x_2 - 3 \rightarrow 4x_1 = 4x_2 \rightarrow x_1 = x_2$$

2) $f(x) = \dfrac{3x+1}{4x-2}$

$$f(x_1) = f(x_2) \rightarrow \frac{3x_1+1}{4x_1-2} = \frac{3x_2+1}{4x_2-2} \rightarrow (3x_1+1)(4x_2-2) = (3x_2+1)(4x_1-2)$$

$$12x_1x_2 - 6x_1 + 4x_2 - 2 = 12x_1x_2 - 6x_2 + 4x_1 - 2 \rightarrow -10x_1 = -10x_2 \rightarrow x_1 = x_2$$

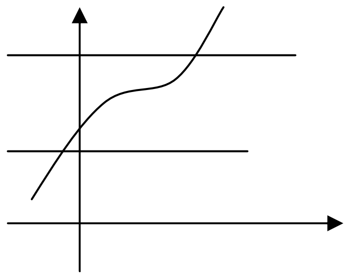
مثال ۲ : تابع زیر یک به یک نیست.

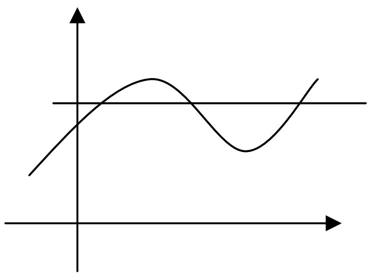
$f(x)=4-x^2$

$f(x_1)=f(x_2)\to 4-{x_1}^2=4-{x_2}^2\to {x_1}^2={x_2}^2\to x_1=\pm x_2$

نکته: هر خط موازی محور xها منحنی تابع یک به یک f را حداکثر در یک نقطه قطع می کند.

مثال ۳ : شکل(۱) نمودار یک تابع یک به یک است ولی شکل (۲) نمودار تابع یک به یک نمی باشد.


شکل (۱)


شکل (۲)

قضیه۳. ۱. ۱: هرگاه f بر یک بازه اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد آنگاه بر آن بازه یک به یک است.

مثال ۴ : تابع زیر بر بازه $(0,+\infty)$ یک به یک است.

$$f(x)=\frac{x^4-1}{x}\to f'(x)=\frac{3x^4+1}{x^2}>0$$

بنابراین f اکیداً صعودی و در نتیجه یک به یک است.

تعریف (تابع معکوس): هرگاه $y=f(x)$ یک تابع یک به یک روی بازه $[a,b]$باشد آنگاه تابع معکوس f روی بازه $[a,b]$ که آن را با f^{-1} نشان می دهند به صورت زیر تعریف می شود:

$$y=f(x)\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$$

از تعریف فوق نتیجه می شود که تنها توابع یک به یک دارای معکوس می باشند. بنابراین برای بدست آوردن f^{-1}، ابتدا ثابت می کنیم f یک به یک است سپس از رابطه $y=f(x)$، x را بر حسب y بدست می آوریم و در نهایت جای x و y را عوض می کنیم.

مثال ۵ : معکوس توابع زیر را در صورت وجود بیابید.

1) $f(x)=x^3\to f'(x)=2x^2\geq 0$

بنابراین تابع یک به یک است لذا معکوس پذیر است.

$y=x^3\to x=\sqrt[3]{y}\to f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$

$$2)\ \ f(x)=\frac{2x+3}{x-1}\rightarrow f'(x)=\frac{-5}{(x-1)^2}\le 0$$

بنابراین تابع یک به یک است و در نتیجه معکوس پذیر است.

$$y=\frac{2x+3}{x-1}\rightarrow yx-y=2x+3\rightarrow x(y-2)=y+3\rightarrow x=\frac{y+3}{y-2}$$

$$\rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x+3}{x-2}$$

$$3)\ \ f(x)=x^4-4x\rightarrow f'(x)=4x^3-4\rightarrow\begin{cases}f'(x)\ge 0 & x\ge 1\\ f'(x)<0 & x<1\end{cases}$$

پس تابع یک به یک نیست و درنتیجه معکوس پذیر نمی باشد.

$$4)\ \ f(x)=\begin{cases}x & x<1\\ x^2 & 1\le x\le 9\\ 27\sqrt{x} & x>9\end{cases}\rightarrow f'(x)=\begin{cases}1 & x<1\\ 2x & 1<x<9\\ \dfrac{27}{2\sqrt{x}} & x>9\end{cases}\rightarrow f'(x)>0$$

بنابراین تابع یک به یک است و در نتیجه معکوس پذیر است.

$$\rightarrow\begin{cases}x<1\ \rightarrow x=y\ \ ,\ \ y<1\\ 1\le x\le 9\rightarrow x=\sqrt{y}\ \ ,\ \ 1\le y\le 81\\ x>9\ \rightarrow x=\left(\dfrac{y}{27}\right)^2\ \ ,\ \ y>81\end{cases}\rightarrow f^{-1}(x)=\begin{cases}x\ \ ,\ \ x<1\\ \sqrt{x}\ \ ,\ \ 1\le x\le 81\\ \left(\dfrac{x}{27}\right)^2\ \ ,\ \ x>81\end{cases}$$

خواص تابع معکوس

هر گاه f معکوس پذیر باشد آنگاه

۱) f^{-1} نیز معکوس پذیر است و معکوس آن f است یعنی $f=(f^{-1})^{-1}$.

۲) دامنه f برابر با برد f^{-1} و برد f برابر با دامنه f^{-1} است.

۳) اگر I تابع همانی باشد آنگاه $f^{-1}of=I\ \ ,\ \ fof^{-1}=I$.

۴) نمودار f^{-1} قرینه نمودار f نسبت به نیمساز ربع اول و سوم است.

۵) هرگاه f بر $[a,b]$پیوسته و صعودی (نزولی) باشد آنگاه f^{-1} نیز بر $[f(a),f(b)]$ پیوسته و صعودی (نزولی) است. این خصوصیت به *قضیه تابع معکوس* معروف است.

قضیه ۳. ۱. ۲ (مشتق تابع معکوس) : فرض کنید f در همسایگی نقطـه x پیوسـته و یـک بـه یـک باشـد. همچنین در x دارای مشتق غیر صفر متناهی باشد. در این صـورت f^{-1} در نقطـه $y=f(x)$ دارای مـشتقی بـه صورت زیر است

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} \qquad x = f^{-1}(y) \quad (y = f(x))$$

یا به عبارت دیگر

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

مثال ۶ : فرض کنید $f(x) = 2x + \sin^3 x$، $(f^{-1})'(0)$ را بیابید.

حل: اولاً $f'(x) = 2 + 3\sin^2 x\cos x = 2 + \frac{3}{2}\sin x \sin 2x \geq \frac{1}{2} > 0$ بنابراین f معکوس پذیر است.

ثانیاً داریم $f(0) = 0$ بنابراین

$$(f^{-1})'(f(0)) = \frac{1}{f'(0)} \to (f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}$$

مثال ۷ : فرض کنید $f(x) = x^8 + 3x^4 + 2x^2 + 1 \quad (x \geq 0)$، $(f^{-1})'(7)$ را بیابید.

حل: اولاً $f'(x) = 8x^7 + 12x^3 + 4x \geq 0$ ثانیاً $f(1) = 7$ در نتیجه

$$(f^{-1})'(f(1)) = \frac{1}{f'(1)} \to (f^{-1})'(7) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{24}$$

مثال ۸ : فرض کنید $f(x) = \int_0^x \sqrt{2 + \sin^{11} t}\,dt$، نشان دهید

الف) f معکوس پذیر است.

ب) $(f^{-1})'(0)$، $(f^{-1})'(f(\frac{3\pi}{2}))$ و $(f^{-1})'(\pi)$ را بیابید.

حل: الف) $f'(x) = \sqrt{2 + \sin^{11} x} > 0$ بنابراین f یک به یک و در نتیجه معکوس پذیر است.

ب) داریم $f(0) = 0$ و

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$(f^{-1})'(f(\frac{3\pi}{2})) = \frac{1}{f'(\frac{3\pi}{2})} = \frac{1}{\sqrt{2-1}} = 1$$

$$(f^{-1})'(\pi) = \frac{1}{f'(\pi)} = \frac{1}{\sqrt{2-0}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۳. ۲. معکوس توابع مثلثاتی

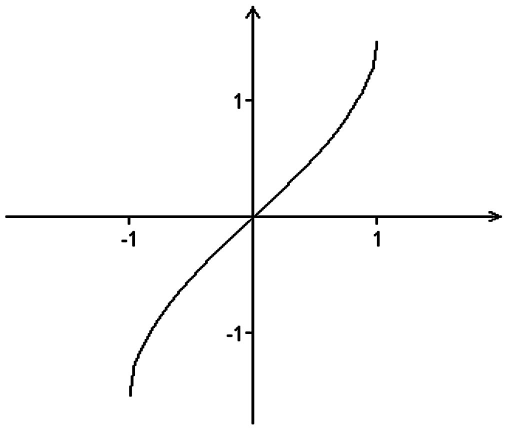
۳. ۲. ۱. معکوس تابع سینوس :

تابع سینوس در حالت کلی یک به یک نیست اما با محدود کردن دامنه تابع به فاصله $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ می توان آن را به یک تابع یک به یک تبدیل کرد که در آن دامنه معکوس خواهد داشت. معکوس این تـابع را بـا arcsin یـا $\sin^{-1}$ نشان می دهیم.

بنابراین خواهیم داشت :

$$\sin:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$$
$$\sin^{-1}:[-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

و این به این معنی خواهد بود که دامنه این تابع فاصله $[-1,1]$ می باشد. از آنجا که سینوس در حالت کلی پیوسته است معکوس آن نیز پیوسته خواهد بود.



شکل (۳) نمودار $y=\sin^{-1}x$

با استفاده از قضیه مشتق تابع معکوس می توان مشتق این تابع را به صورت زیر بدست آورد با توجه به انتخاب دامنه خواهیم داشت:

$$y=\sin^{-1}x\to x=\sin y$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

و با استفاده از مشتق زنجیره ای، اگر u تابعی از x باشد آنگاه

$$y=\sin^{-1}(u)\Rightarrow y'=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

و همین طور فرمول انتگرال زیر بدست خواهد آمد

$$\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\sin^{-1}u+c$$

که تغییرات روی این انتگرال را می توان به فرم زیر نوشت :

الف) $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ ب) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-a^2x^2}}$ ج) $\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+ax+b}}$

که هر کدام را می توان با انجام تغییراتی به تابع $\sin^{-1}x$ تبدیل کرد.

الف) $$\int\frac{dx}{\sqrt{1-a^2x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{1-(ax)^2}}=\int\frac{\frac{1}{a}du}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{1}{a}\sin^{-1}(u)+c=\frac{1}{a}\sin^{-1}(ax)+c$$

$$u=ax\Rightarrow du=adx$$

پس $$\int\frac{dx}{\sqrt{1-a^2x^2}}=\frac{1}{a}\sin^{-1}(ax)+c$$

ب) $$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{a^2(1-\frac{x^2}{a^2})}}=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}=\sin^{-1}\frac{x}{a}+c$$

بنابراین $$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\sin^{-1}\frac{x}{a}+c$$

ج) $$\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+ax+b}}=\int\frac{dx}{\sqrt{d-(x-\frac{a}{2})^2}}=\int\frac{du}{\sqrt{d-u^2}}=\sin^{-1}\frac{u}{\sqrt{d}}+c$$

$$x-\frac{a}{2}=u\Rightarrow dx=du$$

که در آن $d=\frac{-a^2}{4}+b$ می باشد.

مثال ۱۰ : از توابع زیر مشتق بگیرید:

$$y=\arcsin(3x+1)\quad\rightarrow y'=\frac{3}{\sqrt{1-(3x+1)^2}}$$

$$y=\arcsin(\tan x)\quad\rightarrow y'=\frac{1+\tan^2x}{\sqrt{1-\tan^2x}}$$

مثال ۱۱ : دامنه تابع زیر را پیدا کنید:

$$y=\arcsin(3x+1)\quad\Rightarrow -1\le 3x+1\le 1$$

$$-2 \le 3x \le 0 \Rightarrow -\frac{2}{3} \le x \le 0$$

مثال ۱۲ : انتگرال توابع زیر را بیابید.

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin^{-1}(\sqrt{3}x) + c$

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{7-x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{7}} + c$

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-5)^2}} = \sin^{-1}(x-5) + c$

سال ٦٥) مشتق $y = \arcsin 2x$ در نقطه $x = 0$ چقدر است؟

۱) -1 ۲) 0 ۳) 1 ٤) 2

حل: $y' = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}\Big|_{x=0} = 2$

سال ٦٦) ضریب زاویه خط مماس بر منحنی $y = \arcsin(x+1)$ در نقطه $x = -1$ چقدر است؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) 1 ٤) 2

حل: می دانیم که ضریب زاویه خط مماس برابر با مقدار مشتق تابع به ازای نقطه تماس می باشد:

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-(x+1)^2}}\Big|_{x=-1} = 1$$

سال ٦٧) فرض کنید $y = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$ در این صورت y' کدام است؟

۱) $\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$ ۲) $\frac{\arcsin x + 2x}{\sqrt{1-x^2}}$ ۳) $\arcsin x$ ٤) $\arccos x$

حل: $y' = \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow y' = \arcsin x$

سال ٦٨) دامنه $y = \arcsin(1-x)$ کدامیک از مقادیر زیر است؟

۱) $[-\infty, 0]$ ۲) $[-1, 0]$ ۳) $[0, 2]$ ٤) $[-\infty, +\infty]$

حل: $y = \arcsin(1-x) \to -1 \le 1-x \le 1 \to -2 \le -x \le 0 \to 0 \le x \le 2 \to x \in [0,2]$

سال ٦٩) حوزه تعریف $f(x) = \sqrt{\arcsin(\log_2^x)}$ عبارت است از :

۱) $x > 2$ ۲) $-1 \le x \le 1$ ۳) $1 \le x \le 2$ ٤) $x > 0$

حل: برای اینکه رادیکال با معنی باشد باید $\arcsin(\log_2^x) \geq 0$ و برای اینکه $\arcsin(x)$ بامعنی باشد، باید داشته باشیم $-1 \leq \log_2^x \leq 1$ و با توجه به شکل تابع $y = \arcsin(x)$ خواهیم داشت:

$$1 \geq \log_2^x \geq 0 \Rightarrow 1 \leq x \leq 2$$

سال ۶۹) برد $x \in R \quad y = \arcsin\sqrt{x}$ برابر کدامیک از مقادیر زیر است؟

$1) R_f = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ $\quad 2) R_f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ $\quad 3) R_f = \left]0, \pi\right[$ $\quad 4) R_f = \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right]$

حل: برد $y = \arcsin x$ در حالت کلی $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ است ولی چون $\sqrt{x}$مثبت است لذا برد تابع برابر است با $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$خواهد بود.

سال ۷۳) مقدار مشتق $y = \arcsin(\sin\sqrt{x})$ در نقطه $x = \frac{1}{4}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) 1 ٤) 2

حل:

$$y = \sqrt{x} \qquad \Rightarrow y' = \left.\frac{1}{2\sqrt{x}}\right|_{x=\frac{1}{2}} = 1$$

سال ٧٤) مشتق $y = arc\sin(\sqrt{x})$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2\sqrt{x - x^2}}$ ۲) $\frac{1}{2\sqrt{x^2 - x}}$ ۳) $\frac{1}{4\sqrt{x - x^2}}$ ۴) $\frac{2}{\sqrt{x - x^2}}$

حل:

$$y' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1 - x}} = \frac{1}{2\sqrt{x - x^2}}$$

سال ٧٤) معکوس $y = \arcsin(x - 1)$ کدام است؟

۱) $y = 1 + \sin x$ ۲) $y = 1 - \sin(x)$ ۳) $y = \sin(x + 1)$ ٤) $y = \sin(x - 10)$

حل: $y = \arcsin(x - 1) \Rightarrow \sin(y) = x - 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = 1 + \sin(x)$

سال ٧٤) حاصل انتگرال $\int \frac{dx}{\sqrt{28 - 12x - x^2}}$ برابر است با :

۱) $\arcsin(x + 6) + c$ ۳) $\arcsin(\frac{x + 6}{8}) + c$

۲) $\arccos(\frac{x + 6}{8}) + c$ ٤) $\arccos(x + 6) + c$

حل:
$$\int\frac{dx}{\sqrt{28-12x-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{64-(x+6)^2}}=\arcsin(\frac{x+6}{8})+c$$

سال ۷۷) حاصل انتگرال $\int\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$ کدام است؟

۱) $I=\arcsin(1-x)+c$ ۲) $I=\arcsin(x-1)+c$

۳) $I=\arcsin(1-x)+c$ ۴) $I=-\arccos(x-1)+c$

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}}=\arcsin(x-1)+c$$

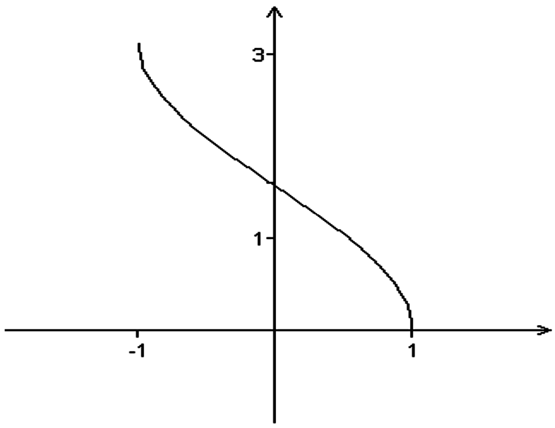
۳. ۲. ۲. معکوس تابع کسینوس :

تابع کسینوس نیز در حالت کلی یک به یک نیست اما با محدود کردن دامنه تابع به فاصله $[0,\pi]$می توان آن را به یک تابع یک به یک تبدیل کرد که در آن دامنه معکوس خواهد داشت. معکوس این تابع را با arccos یا $\cos^{-1}$ نشان می دهیم.

بنابراین خواهیم داشت :

$\cos:[0,\pi]\to[-1,1]$
$\cos^{-1}:[-1,1]\to[0,\pi]$

یعنی دامنه این تابع فاصله$[-1,1]$می باشد. کسینوس نیز در حالت کلی پیوسته است لذا معکوس آن نیز پیوسته خواهد بود.



شکل (۴) نمودار $y=\cos^{-1}x$

مشتق $y=\cos^{-1}x$ نیز مشابه $y=\sin^{-1}x$ بدست می آید:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

اگر u تابعی از x باشد آنگاه

$$y=\cos^{-1}(u)\Rightarrow y'=\frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

همچنین داریم

$$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \sin^{-1}u + c = -\cos^{-1}u + c$$

مثال ۱۳ : ثابت کنید $\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}$.

حل: قرار می دهیم $f(x) = \sin^{-1}x + \cos^{-1}x$. در این صورت

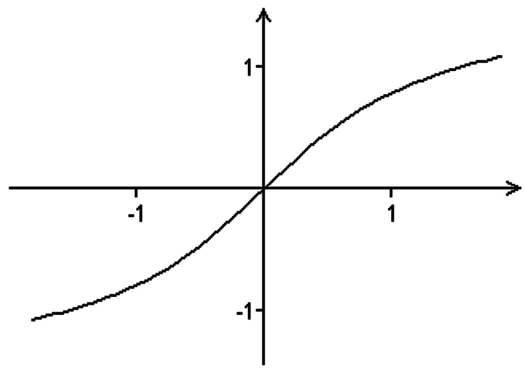
$$f'(x) = (\sin^{-1}x)' + (\cos^{-1}x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \Rightarrow f(x) = c$$

ازطرفی $f(0) = \sin^{-1}0 + \cos^{-1}0 = \frac{\pi}{2}$ بنابراین $c = \frac{\pi}{2}$.

۳. ۲. ۳. معکوس تابع تانژانت :

با توجه به رسم تابع تانژانت معلوم است که این تابع در حالت کلی یک تابع یک به یک نمی باشد. اما با محدود کردن دامنه این تابع در فاصلهٔ $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ می توان آن را به یک تابع یک به یک تبدیل کرد. بنابراین در این فاصله معکوس پذیر خواهد. معکوس تابع تانژانت را با arctan یا $\tan^{-1}$ نشان می دهیم. بنابراین دامنه و برد آن بصورت زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} \tan : (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \to (-\infty,+\infty) \\ \tan^{-1} : (-\infty,+\infty) \to (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \end{cases}$$



شکل (۵) نمودار $y = \tan^{-1}x$

مشتق تابع $\tan^{-1}$ را می توان بصورت زیر بدست آورد:

$$y = \tan^{-1}x \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

و با استفاده از مشتق زنجیره ای خواهیم داشت:

$$y = \tan^{-1}u \Rightarrow y' = \frac{u'}{1+u^2}$$

که در آن u تابعی از x می باشد.

با استفاده از فرمول مشتق می توان فرمولی برای انتگرال بدست آورد:

$$\int \frac{1}{1+u^2}dx = \tan^{-1}u + c$$

در حالت کلی اگر انتگرالی کسری داشته باشیم که مخرج آن درجه دوم با $\Delta < 0$ آنگاه آن را باید به $\tan^{-1}x$ مربوط کنیم.

تغییراتی که روی فرمول فوق می توان اعمال نمود به قرار زیر است.

الف) $\int \frac{dx}{1+a^2x^2}$ ب) $\int \frac{dx}{a^2+x^2}$ ج) $\int \frac{dx}{x^2+ax+b}$

(الف)

$$\int \frac{dx}{1+a^2x^2} \Rightarrow \int \frac{\frac{1}{a}du}{1+u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}(u) + c = \frac{1}{a}\tan^{-1}(ax) + c$$

$u = ax \Rightarrow du = adx$

(ب)

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} \Rightarrow \int \frac{dx}{a^2(1+\frac{x^2}{a^2})} = \frac{a}{a^2}\tan^{-1}(\frac{x}{a}) + c = \frac{1}{a}\tan^{-1}(\frac{x}{a}) + c$$

(ج)

$$\int \frac{dx}{x^2+ax+b} \Rightarrow \int \frac{dx}{x^2+ax+\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{4}+b} = \int \frac{dx}{b-\frac{a^2}{4}+(x+\frac{a}{2})^2}$$

$\Delta = a^2 - 4b < 0$

که به انتگرال نوع (ب) تبدیل می شود.

مثال۱۴ : حاصل انتگرال های زیر را بدست آورید .

1) $\int \frac{dx}{6+x^2} = \frac{1}{\sqrt{6}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{6}}$

2) $\int \frac{dx}{1+3x^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}(\sqrt{3}x) + c$

3) $\int \frac{dx}{1+(x+7)^2} = \int \frac{dt}{1+t^2} = \tan^{-1}t + c = \tan^{-1}(x+7) + c$

$x+7 = t \Rightarrow dx = dt$

4) $\int \frac{dx}{x^2+2x+3} = \int \frac{dx}{x^2+2x+1-1+3} = \int \frac{dx}{2+(x+1)^2} = \int \frac{dt}{2+t^2}$

$$\begin{aligned} x+1=t \\ dx=dt \end{aligned} \quad =\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)+c=\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)+c$$

5) $$\int\frac{dx}{x^2+3x+4}\Rightarrow\int\frac{dx}{x^2+3x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+4}=\int\frac{dx}{(4-\frac{9}{4})+(x+\frac{3}{2})^2}$$

$$=\int\frac{dx}{\frac{7}{4}+(x+\frac{3}{2})^2}=\int\frac{dt}{\frac{7}{4}+t^2}=\frac{2}{\sqrt{7}}\tan^{-1}\left(\frac{t}{\sqrt{7}}\right)+c=\frac{2}{\sqrt{7}}\tan^{-1}\left(\frac{(x+\frac{3}{2})^2}{\frac{\sqrt{7}}{2}}\right)+c$$

$$x+\frac{3}{2}=t\Rightarrow dx=dt$$

سال ٦٥) مقدار انتگرال $\int_0^{\sqrt{\frac{3}{16}}}\frac{dx}{1+4x^2}$ چقدر است؟

۱) $\frac{\pi}{12}$ ۲) $\frac{\pi}{8}$ ۳) $\frac{\pi}{6}$ ٤) $\frac{\pi}{4}$

حل:

$$\int_0^{\sqrt{\frac{3}{16}}}\frac{dx}{1+4x^2}=\frac{1}{2}\arctan(2x)\Big|_0^{\sqrt{\frac{3}{16}}}=\frac{1}{2}\arctan(\frac{\sqrt{3}}{2})-\frac{1}{2}\arctan(0)=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12}$$

سال ٦٧) حاصل انتگرال معین $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2}$ کدام است؟

۱) $\frac{-\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) π ٤) 2π

حل:

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2}=\arctan x\Big|_{-1}^{1}=\arctan(1)-\arctan(-1)=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$$

سال ۷۳) جواب انتگرال $I=\int\frac{dx}{x^2+4x+5}$ کدام است؟

۱) $\arctan(x+2)+c$ ۳) $\arctan(x-2)+c$

۲) $\sqrt{(x+2)^2+1}$ ٤) $\sqrt{(x+2)^2-1}$

حل:

$$\int\frac{dx}{x^2+4x+5}=\int\frac{dx}{x^2+4x+4-4+5}=\int\frac{dx}{1+(x+2)^2}=\arctan(x+2)+c$$

$$\Delta=16-20=-4<0$$

سال ۷٤) حاصل $\int_0^1 \frac{x^2+2}{1+x^2}dx$ کدام است؟

۱) $1+\frac{\pi}{2}$ ۲) $1+\frac{\pi}{8}$ ۳) $1+\frac{\pi}{3}$ ٤) $1+\frac{\pi}{4}$

حل:

$$\int_0^1 \frac{x^2+2}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{x^2+1+1}{1+x^2}dx = \int_0^1 \left(\frac{x^2+1}{1+x^2}+\frac{1}{x^2+1}\right)dx = \int_0^1 dx + \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = x\Big|_0^1 + \arctan x\Big|_0^1$$

$$=1+\frac{\pi}{4}$$

سال ۷۵) حاصل انتگرال $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{3}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{12}$ ٤) $\frac{7\pi}{12}$

حل:

$$I=\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x\Big|_1^{\sqrt{3}} = \arctan x\sqrt{3} - \arctan 1 = \frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4} = \frac{4\pi-3\pi}{12} = \frac{\pi}{2}$$

سال ۷۵) حاصل $\int \frac{dx}{4x^2+25}$ کدام است؟

الف) $\frac{1}{10}\arcsin\frac{2x}{5}$ ج) $\frac{1}{5}\arctan\frac{2x}{5}+c$

ب) $\frac{1}{10}\arctan\frac{2x}{5}+c$ د) $\frac{1}{5}\arcsin\frac{x}{5}$

حل:

$$I=\frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2+\frac{25}{4}} = \frac{1}{4}\times\left[\frac{2}{5}\times\arctan\frac{2x}{5}\right] = \frac{1}{10}\arctan(\frac{2x}{5})+c$$

سال ۷۶) $\tan(\arctan 2)$ برابر کدام است؟

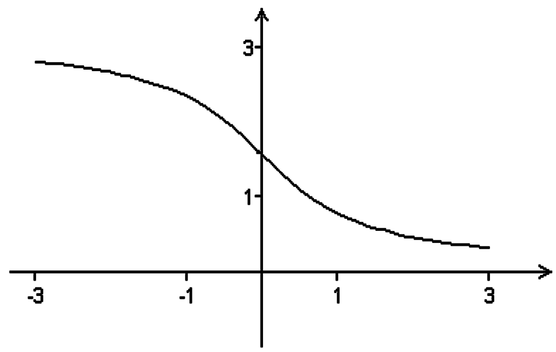
۱) -2 ۲) -1 ۳) 1 ٤) 2

حل : چون $\arctan$ و $\tan$ معکوس یکدیگر هستند لذا حاصل برابر 2 است.

۳. ۲. ۴. معکوس تابع کتانژانت :

این تابع نیز در حالت کلی یک تابع یک به یک نمی باشد. اما با محدود کردن دامنه این تابع در فاصلهٔ $(0,\pi)$ می توان آن را به یک تابع یک به یک تبدیل کرد. بنابراین در این فاصله معکوس پذیر خواهد. معکوس تابع کتانژانت را با $arc\cot$ یا $\cot^{-1}$ نشان می دهیم. بنابراین دامنه و برد آن بصورت زیر خواهد بود:

$$\begin{cases}\cot:(0,\pi)\to(-\infty,+\infty)\\ \cot^{-1}:(-\infty,+\infty)\to(0,\pi)\end{cases}$$



شکل (۶) نمودار $y=\cot^{-1}x$

مشتق تابع $\cot^{-1}$ نیز بصورت زیر بدست می آید:

$$y=\cot^{-1}x\Rightarrow y'=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{-(1+\tan^2 y)}=-\frac{1}{1+x^2}$$

و با استفاده از مشتق زنجیره ای خواهیم داشت:

$$y=\cot^{-1}u\Rightarrow y'=\frac{-u'}{1+u^2}$$

که در آن u تابعی از x می باشد.

هچنین $$\int\frac{1}{1+u^2}dx=\tan^{-1}u+c=-\cot^{-1}u+c$$

مثال ۱۵: ثابت کنید $\tan^{-1}x+\cot^{-1}x=\frac{\pi}{2}$.

حل: به عهده خواننده.

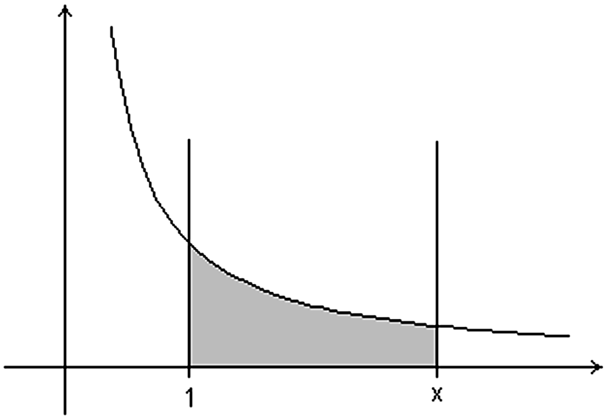
۳.۳. توابع لگاریتمی

تعریف(تابع لگاریتم طبیعی): فرض کنید $x>0$ ، تابع $\ln$ که بصورت زیر تعریف می شود را تابع لگاریتم طبیعی گویند:

$$\ln(x)=\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$$

به عبارت دیگر مساحت زیر منحنی $\frac{1}{t}$ بین خطوط $t=1$ و $t=x$ را تابع $\ln$ گویند.

بنابراین دامنه این تابع همه اعداد حقیقی مثبت غیر از صفر است و برد آن همه اعداد حقیقی می باشد.



شکل (۷) نمودار تابع $y=\frac{1}{t}$

خواص تابع لگاریتم طبیعی

۱) $\ln(1)=\int_1^1 \frac{1}{t}\,dt=0$

۲) اگر a و b دوعدد مثبت باشند آنگاه $\ln(ab)=\ln a+\ln b$.

۳) اگر a و b دوعدد مثبت باشند بطوری که $b\neq 0$ آنگاه $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b$.

۴) اگر r یک عدد حقیقی و a عدد حقیقی مثبت باشند آنگاه $\ln(a^r)=r\ln a$.

۵) $\frac{d}{dx}(\ln(x))=\frac{d}{dx}\left(\int_1^x \frac{1}{t}\,dt\right)=\frac{1}{x}$

۶) اگر u تابعی از x باشد آنگاه $\frac{d}{dx}(\ln|u|)=\frac{d}{du}\left(\int_1^u \frac{1}{t}\,dt\right)\cdot\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}\cdot u'=\frac{u'}{u}$. بنابراین

$$\int \frac{1}{u}\,du=\ln|u|+c$$

۷) باتوجه به خاصیت (۵) و تعریف ($x>0$) داریم، $(\ln x)'=\frac{1}{x}>0$. پس تابع لگاریتم طبیعی یک تابع صعودی است.

۸) اگر $x>1$ آنگاه $\ln(x)>0$ و اگر $0<x<1$ آنگاه $\ln(x)<0$.

۹) با استفاده از تعریف حد می توان نشان داد که

$$a)\quad \lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$$

$$\forall M \quad \exists N \quad \ni \quad n > N \Rightarrow \ln(n) > M$$

کا فی است به ازای M مقدار $N = 3^M$ در نظر بگیریم حال اگر $N = 3^M$ آنگاه

$$\Rightarrow \ln(n) > \ln 3^M = M\ln(3) > M$$

$$b)\quad \lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$$

$$t = \frac{1}{x} \to \lim_{x \to 0^+} \ln(x) = \lim_{t \to +\infty} \ln\left(\frac{1}{t}\right) = -\lim_{t \to +\infty} \ln(t) = -\infty$$

۱۰) بر طبق قضیه و استناد به تعریف تابع لگاریتم طبیعی، تابع لگاریتم طبیعی تابع پیوسته ای است. لذا همواره خواهیم داشت:

$$\lim_{x \to a} \ln(f(x)) = \ln(\lim_{x \to a} f(x))$$

بنابراین با توجه به اطلاعات فوق می توان تابع لگاریتم طبیعی را رسم کرد، شکل (۸) را ببینید.

می توان درستی روابط (۲) ، (۳) و (۴) را بصورت زیر نشان داد:

$$2)\quad y = \ln(ax) \Rightarrow y' = \frac{a}{ax} = \frac{1}{x} \to \int \frac{a}{ax}dx = \int \frac{1}{x}dx \to \ln(ax) = \ln(x) + c$$

$$x = 1 \Rightarrow \ln a = 0 + c \Rightarrow c = Lna$$

$$\Rightarrow \ln(ax) = \ln(x) + Ln(a)$$

$$b = x \Rightarrow Ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$

$$3)\quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln(x) - \ln(b)$$

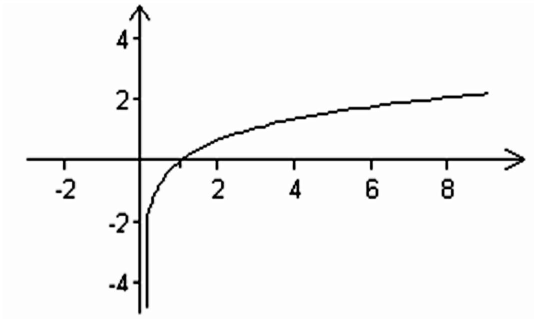
$$0 = \ln\left(b \times \frac{1}{b}\right) = \ln b + \ln\left(\frac{1}{b}\right) \to \ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b$$

$$4)\quad y = \ln x^r \Rightarrow y' = \frac{rx^{r-1}}{x^r} \Rightarrow y' = \frac{r}{x}$$

$$y = r\ln(x) \Rightarrow y' = \frac{r}{x} \Rightarrow \ln x^r = r\ln(x) + c$$

$$x = 1 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow \ln x^r = r\ln(x)$$

$$x = a \Rightarrow \ln a^r = r\ln a$$



شکل (۸) نمودار $y = \ln x$

مثال ۱۶ : مشتق توابع زیر را بیابید.

$$1)\quad y=\ln(x^2+1)\to y'=\frac{2x}{x^2+1}$$

$$2)\quad y=\ln(\sin x)\to y'=\frac{\cos x}{\sin x}=\cot x$$

$$3)\quad y=\ln(\ln x)\to y'=\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}=\frac{1}{x\ln x}$$

$$4)\quad y=x\ln x\to y'=\ln x+1$$

$$5)\quad y=\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)=\ln x-\ln(x-1)\to y'=\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}=\frac{-1}{x(x-1)}$$

مثال ۱۷ : دامنه توابع زیر را تعیین کنید.

$$1)\quad y=\ln(3x+2)\to 3x+2>0\to x>-\frac{2}{3}$$

$$2)\quad y=\ln(x^2+x+1)\to x^2+x+1>0\to \Delta=1-4=-3<0$$

چون $\Delta < 0$ پس چند جمله ای هم علامت با ضریب x^2 یعنی مثبت است، لذا دامنه $\mathbb{R}$ می باشد.

$$3)\quad y=\ln(x^2+3x+2)\to x^2+3x+2>0\to (x+1)(x+2)>0\to x>-1, x<-2$$

$$4)\quad y=\ln(\ln(3x+1))\to \ln(3x+1)>0\to 3x+1>1\to x>0$$

مثال ۱۸ : انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

1) $\int \frac{x^2}{x^3+1}dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{3}\ln|u|+c = \frac{1}{3}\ln|x^3+1|+c$

$u = x^3+1 \to du = 3x^2dx$

2) $\int \frac{\cos x}{2\sin x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{2}\ln|u|+c = \frac{1}{2}\ln|2\sin x+1|+c$

$u = 2\sin x+1 \to du = 2\cos x dx$

3) $\int \frac{(2+\ln^2 x)}{x(1-\ln x)}dx = -\int \frac{3+u^2-2u}{u}du = \int (-\frac{3}{u}-u+2)du = -3\ln|u| - \frac{1}{2}u^2+2u+c$

$\begin{cases} u = 1-\ln x \to du = -\frac{1}{x}dx \\ \ln x = 1-u \end{cases}$ $\quad = -3\ln|1-\ln x| - \frac{1}{2}(1-\ln x)^2 + 2(1-\ln x)+c$

4) $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{1}{u}du = -\ln|u|+c = -\ln|\cos x|+c = \ln|\sec x|+c$

$u = \cos x \to du = -\sin x dx$

سال ۶۴) نقطه مینیمم نسبی تابع $y = \ln(x^2+1)$ کدام است؟

۱) $(0,0)$ ۲) $(1,\ln 2)$ ۳) $(2,\ln 5)$ ۴) مینیمم نسبی ندارد.

حل:

$$y' = \frac{2x}{x^2+1} = 0 \to x = 0 \to y = \ln(0+1) = 0 \to (0,0)$$

$$y'' = \frac{2(x^2+1)-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2} \to y''(0) = 2 > 0$$

سال ۶۷) مقدار $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x}$ برابر است با:

۱) ∞ ۲) 0 ۳) -1 ۴) 1

حل:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x+1}}{1} = 1$$

سال ۶۹) مشتق تابع $y = \ln(\ln(\ln x))$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{x\ln x\ln(\ln x)}$ ۲) $\frac{1}{\ln(\ln x)}$ ۳) $\frac{1}{x\ln x}$ ۴) $\frac{1}{\ln x}$

حل:

$$y = \ln(\ln(\ln x)), u = \ln(\ln x) \to u' = \frac{1}{x\ln x} \to y' = \frac{u'}{u} = \frac{1}{x\ln x\ln(\ln x)}$$

سال ۷۲) اگر $f(x)=\ln\left(\dfrac{\sqrt{x}}{x^2+1}\right)$ ، $f'(1)$ برابر است با:

۱) -1 ۲) $-\dfrac{1}{2}$ ۳) $\dfrac{1}{2}$ ۴) 1

حل:

$$f(x)=\ln\left(\frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\right)\to u=\frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\to u'=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2+1)-2x\sqrt{x}}{(x^2+1)^2}$$

$$\to f'(x)=\frac{u'}{u}\to f'(1)=\frac{u'(1)}{u(1)}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$$

سال ۷۳) مشتق مرتبه nام تابع $y=\ln x$ کدام است؟

۱) $\dfrac{(-1)^n(n-1)!}{x^n}$ ۲) $\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$ ۳) $\dfrac{(n-1)^n}{x^{n-1}}$ ۴) $\dfrac{n(n-1)}{x^{n+1}}$

حل:

$$y=\ln x\to y'=\frac{1}{x}\to y''=\frac{-1}{x^2}\to y'''=\frac{2}{x^3}\to y^{(4)}=\frac{-6}{x^4}\to\cdots y^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$$

سال ۷۳) ماکزیمم تابع $y=\ln(4x-x^2)$ کدام است؟

۱) 2 ۲) $\ln 2$ ۳) 4 ۴) $2\ln 2$

حل:

$$y'=\frac{4-2x}{4x-x^2}=0\to x=2\to y=\ln(8-4)=\ln 4=2\ln 2$$

سال ۷۳) ماکزیمم تابع $y=\ln(\sqrt{4x-x^2})$ کدام است؟

۱) 2 ۲) $\ln 2$ ۳) 4 ۴) $2\ln 2$

حل به عهده خواننده.

سال ۷۴) ماکزیمم تابع $y=\ln(8x-x^2)$ کدام است؟

۱) $2\ln 2$ ۲) $4\ln 2$ ۳) 4 ۴) 2

حل به عهده خواننده.

سال ۷۶) مقدار $\lim_{x \to \infty} \left(\ln \frac{2x^2}{x^2+1} \right)$ برابر است با:

۱) $-\ln 2$ ۲) $2 \ln 2$ ۳) $-e$ ۴) 2

حل: تابع لگاریتم طبیعی پیوسته است، بنابراین حد از تابع عبور می کند:

$$\lim_{x \to \infty} \left(\ln \frac{2x^2}{x^2+1} \right) = \ln \left(\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2}{x^2+1} \right) = \ln 2$$

سال ۷۶) حاصل انتگرال $\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$ کدام است؟

۱) $-\cos(\ln x)+c$ ۲) $\sin(\ln x)+c$ ۳) $\frac{1}{x}\cos(\ln x)+c$ ۴) $-\frac{1}{x}\sin(\ln x)+c$

حل:

$$\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx = \int \sin u du = -\cos u + c = -\cos(\ln x) + c$$

$$u = \ln x \to du = \frac{1}{x} dx$$

با استفاده از خاصیت (۶) توابع لگاریتم طبیعی خواهیم داشت:

$$\int \frac{dx}{(ax+b)} = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + c$$

انتگرالهایی را که می توان به کمک تابع لگاریتم طبیعی حل کرد، می توان بصورت زیر دسته بندی نمود:

الف)
$$\int \frac{dx}{(ax+b)(cx+d)} = \int \left(\frac{A}{ax+b} + \frac{B}{cx+d}\right)dx = \frac{A}{a}\ln|ax+b| + \frac{B}{c}\ln|cx+d| + C$$

مثال ۱۹ : انتگرال زیر را حل کنید.

$$\int \frac{dx}{(2x+1)(x+1)} = \int \left(\frac{A}{2x+1} + \frac{B}{x+1}\right)dx = \int \frac{A(x+1)+B(2x+1)}{(2x+1)(x+1)}dx = \int \frac{x(A+2B)+A+B}{(2x+1)(x+1)}dx$$

$$= \int \left(\frac{2}{2x+1} - \frac{1}{x+1}\right)dx = \int \frac{2dx}{2x+1} - \int \frac{dx}{x+1} = \ln|2x+1| - \ln|x+1| + c$$

$$\begin{cases} A+2B=0 \\ A+B=1 \end{cases} \Rightarrow A=2 \ , \ B=-1$$

روش فوق را روش تجزیه به کسرهای جزئی گوییم که در فصل بعد بیان می کنیم.

ب) برای محاسبه انتگرالی بفرم $\int \frac{dx}{x^2+ax+b}$ که $\Delta \geq 0$ از تابع لگاریتم استفاده می کنیم. یعنی مخرج کسر را تجزیه کرده و آن را به شکل انتگرال قسمت (الف) در می آوریم.

مثال ۲۰ : انتگرال زیر را حل کنید.

$$\int \frac{dx}{x^2+3x+2} = \int \frac{dx}{(x+2)(x+1)} = \int \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = \ln|x+1| - \ln|x+2| + c$$

سال ٦٤) مقدار انتگرال نامعین $I = \int \frac{xdx}{x-1}$ کدام است؟

۱) $I = x + \ln(x-1) + c$ ۲) $I = x(1-x)^{-2} + c$

۳) $I = \frac{1}{2}x^2(1-x)^{-2} + c$ ٤) $I = \frac{1}{2}x^2 + 2\ln(1-x) + c$

حل:
$$I = \int \frac{xdx}{x-1} = \int \frac{(x-1+1)dx}{x-1} = \int \frac{x-1}{x-1}dx + \int \frac{dx}{x-1} = x + \ln(x-1) + c$$

سال ٦٦) حاصل انتگرال $\int \frac{dx}{x\ln x}$ کدام است؟

۱) $\ln(\ln(x)) + c$ ۲) $\ln(x) + c$ ۳) $\frac{1}{2}\ln(x) + c$ ٤) $x\ln(x) + c$

حل:

$$\int \frac{dx}{x\ln(x)} \Rightarrow \int \frac{du}{u} = \ln u + c = \ln(\ln(x)) + c$$
$$u = \ln(x) \to du = \frac{1}{x}dx$$

سال ۷۰) حاصل انتگرال $\int \frac{x+1}{x^2-x}dx$ کدام است؟

۱) $\ln\left(\frac{(x-1)^2}{|x|}\right) + c$ ۲) $\ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + c$ ۳) $\ln\left|\frac{x}{x-1}\right| + c$ ٤) $\ln\frac{|x|}{(x-1)^2} + c$

حل:

$$\int \frac{x+1}{x^2-x}dx = \int \frac{x+1}{x(x-1)}dx = \int \frac{2x-x+1}{x(x-1)}dx = \int \frac{2x-(x-1)}{x(x-1)}dx$$
$$= \int \left(\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x} \right) dx = 2\ln|x-1| - \ln|x| = \ln(x-1)^2 - \ln(|x|) + c = \ln\left(\frac{(x-1)^2}{|x|}\right) + c$$

۳. ۳. ۱ معرفی عدد نپر:

تابع لگاریتم طبیعی را بصورت $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt$ تعریف کردیم که این انتگرال نشان دهندهٔ مساحت منحنی $\frac{1}{t}$ از $t = 1$ تا $t = x$ می باشد. این مساحت در شکل (۸) با ناحیه هاشور خورده مشخص است. بدیهی است که نقطه ای وجود دارد روی محور x ها که به ازای آن نقطه مقدار این مساحت دقیقا برابر یک باشد این نقطه روی محور x را عدد نپر نامیده و با e نمایش می دهیم. می توان نشان داد که $2 < e < 3$, e یک عدد گنگ است که مقدار تقریبی آن 2.719 می باشد. پس $\ln(e) = 1$.

۳. ۴. توابع نمایی

تابع لگاریتم طبیعی بر بازه $(0,\infty)$ صعودی و پیوسته است، لذا یک به یک و در نتیجه معکوس پذیر است. معکوس تابع لگاریتم طبیعی را با exp نشان می دهیم و آن را تابع نمایی می نامیم:

$$\exp: (-\infty, +\infty) \to (0,\infty)$$
$$y = \exp(x)$$

خواص تابع نمایی

1) $\ln: (0,\infty) \to (-\infty,+\infty) \Rightarrow \exp: (-\infty,+\infty) \to (0,\infty)$

2) $\ln(1) = 0 \Rightarrow \exp(0) = 1$

3) $\ln(e) = 1 \Rightarrow \exp(1) = e$

4) $\exp(\ln(x)) = x \quad , \quad \ln(\exp(x)) = x$

تعریف می کنیم:

$$e^x := \exp(x)$$

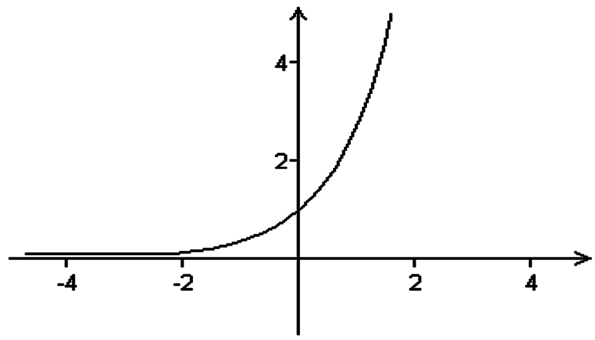
روابط زیر در حل مسائل مفید می باشند،

$$e^{Ln\, f(x)} = f(x) \quad , \quad \ln(e^{f(x)}) = f(x)$$

5) $\lim_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty$

6) $\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$

ازآنجا که دو تابع معکوس نسبت به خط $y = x$ قرینه می باشد لذا شکل $y = e^x$ را می توان بصورت زیر در نظر گرفت:



شکل (۹) نمودار تابع $y=e^x$

قضیه ۳. ۴. ۱: به ازای هر x,y دلخواه $\exp(x+y)=\exp(x)\exp(y)$.

اثبات:

$$\exp(x)=X \ ,\ \exp(y)=Y \Rightarrow x=\ln(X) \ ,\ y=\ln(Y)$$
$$\Rightarrow x+y=\ln(X)+\ln(Y)=\ln(XY) \Rightarrow \exp(x+y)=\exp(\ln(XY))=XY=\exp(x)\exp(y)$$

مشتق و انتگرال تابع نمایی:

چون $e^x\times e^{-x}=1\Rightarrow e^{-x}=\dfrac{1}{e^x}$ ، **مشتق** $y=e^x$ **بصورت زیر خواهد بود:**

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{d}{dx}(e^x)=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}=\dfrac{1}{\frac{d\ln(y)}{dy}}=\dfrac{1}{\frac{1}{y}}=y\\ y=e^x\Rightarrow x=\ln(y)\end{array}\right\}\Rightarrow \dfrac{d}{dx}(e^x)=e^x$$

و به همین ترتیب خواهیم داشت: $\dfrac{d^n}{dx^n}e^x=e^x$

فرمول انتگرال زیر با توجه به تعریف مشتق بدست خواهد آمد:

$$\int e^x dx=e^x+c$$

و با استفاده از مشتق زنجیره ای خواهیم داشت: $y=e^u\Rightarrow y'=u'e^u$

سال ٦٤) **معکوس تابع** $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ **کدام است؟**

۱) $y=\frac{1}{2}(e^{-2x}+1)$ **۲)** $y=\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})$

۳) $y=\frac{1}{2}(e^{-2x}-1)$ **٤)** $y=\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})$

حل:

$$y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})\Rightarrow -y=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=\ln(x+\sqrt{1+x^2})^{-1}=\ln\left(\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\right)\quad (I)$$

$$y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})=\ln\left(\frac{(x+\sqrt{1+x^2})(x-\sqrt{1+x^2})}{x-\sqrt{1+x^2}}\right)=\ln(\frac{x^2-1-x^2}{x-\sqrt{1+x^2}})$$

$$=\ln(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x})\qquad (II)$$

$$(I)\ ,\ (II)\Rightarrow\begin{cases}e^{-y}=\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\\ e^{y}=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}\end{cases}$$

$$e^y-e^{-y}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}-\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{x+\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}+x}{1+x^2-x^2}=2x$$

$$\Rightarrow x=\frac{e^y-e^{-y}}{2}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

سال ٦٤) معکوس تابع $y=e^{2x}$ کدام است؟

۱) $y=\ln\frac{x}{2}$ ۲) $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ ۳) $y=\ln\sqrt{x}$ ٤) $y=\ln 2x$

حل:

$$y=e^{2x}\to 2x=\ln y\to x=\frac{1}{2}\ln y\to x=\ln\sqrt{y}\to y=\ln\sqrt{x}$$

سال ٦٦) حاصل انتگرال $\int\frac{2e^{2x}}{2+e^{2x}}dx$ کدام است؟

۱) $\ln(2e^{2x})+c$ ۲) $\ln(2+e^{2x})+c$ ۳) $\frac{1}{2}\ln(2+e^{2x})+c$ ٤) $(2+e^{2x})+c$

حل:

$$\int\frac{2e^{2x}}{2+e^{2x}}dx=\int\frac{du}{u}=\ln(u)+c=\ln(2+e^{2n})+c$$
$$u=2+e^{2x}\to dx=2e^{2x}dx$$

سال ٦٦) برد تابع با ضابطهٔ $y=\frac{1}{e^x+1}$ کدام مجموعه است؟

۱) $\{y|0<y\le 1\}$ ۲) $\{y|0\le y\le 1\}$ ۳) $\{y|0\le y<1\}$ ٤) $\{y|0<y<1\}$

حل:

$$e^x > 0 \Rightarrow e^x + 1 > 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{e^x + 1} < 1 \qquad \Rightarrow 0 < y < 1$$

سال ٦٦) مختصات نقطه عطف تابع $y = xe^x$ در نقطه $x = 0$ کدام است؟

۱) $(-2, \frac{-2}{e^2})$ ۲) $(-1, \frac{1}{e})$ ۳) $(1, e)$ ٤) $(2, 2e^2)$

حل:

$$y' = e^x + xe^x \to y'' = e^x + e^x + xe^x = 2e^x + xe^x = 0 \to x = -2 \to y = \frac{-2}{e^2}$$

سال ٦٦) مشتق تابع $y = e^{x^2+2x}$ در $x = 0$ کدام است؟

۱) 1 ۲) 2 ۳) 3 ٤) 4

حل:

$$y' = (2x+2)e^{x^2+2x}\Big|_{x=0} \Rightarrow y' = 2$$

سال ٦٧) مقدار $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{e^x - 1}{x}\right)\left(\frac{\sin 2x}{x}\right)$ کدام است؟

۱) 0 ۲) 1 ۳) $\frac{1}{2}$ ٤) 2

حل به عهدهٔ خواننده.

سال ٦٧) مقدار حد $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^e - 1}{x^\pi - 1}$ برابر است با :

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) 0 ۳) 1 ٤) $\frac{e}{\pi}$

حل:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^e - 1}{x^\pi - 1} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 1} \frac{ex^{e-1}}{\pi x^{\pi-1}} = \frac{e}{\pi}$$

سال ٦٧) مشتق تابع $y = e^{x^2} - e^{-x^2}$ کدام است؟

۱) $y' = 2x(e^{x^2} - e^{-x^2})$ ۲) $y' = 2x(e^{x^2} + e^{-x^2})$

۳) $y' = e^{x^2} + e^{-x^2}$ ٤) $y' = e^{x^2} - e^{-x^2}$

حل:

$$y' = 2xe^{x^2} + 2xe^{-x^2} = 2x(e^{x^2} + e^{-x^2})$$

سال ٦٧) مقدار $\int_0^2 e^{\frac{1}{2}x}dx$ برابر است با :

۱) 0 ۲) $2(1-e)$ ۳) $2(e+1)$ ٤) $2(e-1)$

حل:

$$\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax} + c \quad \Rightarrow \int_0^2 e^{\frac{1}{2}x}dx = 2e^{\frac{1}{2}x}\Big|_0^2 = 2e-2 = 2(e-1)$$

سال ٦٩) انتگرال $\int (\cot e^x)e^x dx$ برابراست با :

۱) $\ln(\cot e^x)$ ۲) $\cot e^x$ ۳) $\sin e^x$ ٤) $\ln(\sin e^x)$

حل:

$$\int (\cot e^x)e^x dx = \int \cot u du = \int \frac{\cos u}{\sin u}dx = \ln(\sin u) + c = \ln(\sin e^x)) + c$$

سال ٦٩) انتگرال $I = \int_0^{Ln5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$ برابر کدامیک از مقادیر زیر است؟

۱) $2\pi - 1$ ۲) $2\pi + 1$ ۳) $2+\pi$ ٤) $4-\pi$

حل:

$$I = \int_0^{Ln5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx = \int \frac{\sqrt{w-4}}{w}dx = \int \frac{\sqrt{t}}{t+4}dx$$

$$\begin{cases} e^x + 3 = w \\ e^x dx = dw \end{cases} \qquad \begin{cases} w - 4 = t \\ dw = dt \end{cases} \qquad \begin{cases} t = \tan^2\theta \\ dt = 2\tan\theta(1+\tan^2\theta) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad I = \int \frac{2\tan^2\theta(1+\tan^2\theta)d\theta}{4+\tan^2\theta} = \int \frac{2u^2}{4+u^2}du = 2\int \frac{u^2+4-4}{4+u^2}du = 2u - 4\arctan(\frac{u}{2})$$

$$u = \tan\theta \to du = (1+\tan^2\theta) \qquad = 2\tan\theta - 4\arctan(\frac{\tan\theta}{2}) = 2\sqrt{t} - 4\arctan\sqrt{\frac{t}{2}}$$

$$= 2\sqrt{e^x-1} - 4\arctan\sqrt{\frac{e^x-1}{2}}\Bigg|_0^{Ln(5)} = 4-\pi$$

روش حل مثال فوق را در فصل چهارم توضیح می دهیم.

سال ۷۰) مقدار $\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2}-1}{x^2}$ چقدر است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) 1 ۳) 3 ٤) 4

حل:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2}-1}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2xe^{x^2}}{2x} = \lim_{x \to 0} e^{x^2} = 1$$

سال ۷۲) حد $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(\sin mx)}{\ln \sin x}$ کدام است؟

۱) 1 ۲) $-m$ ۳) $\frac{1}{m}$ ٤) m

حل: با استفاده از قائده هوپیتال خواهیم داشت

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(\sin mx)}{\ln(\sin x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{m\cos mx}{\sin mx}}{\frac{\cos x}{\sin x}} = \lim_{x \to 0} \frac{m\sin x \cos mx}{\cos x \sin mx} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\frac{\sin mx}{m}} = 1$$

سال ۷۳) حاصل $\int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln x)}$ برابر کدام است؟

۱) $\ln(1+e)$ ۲) e ۳) $\frac{1}{e}$ ٤) $\ln 2$

حل:

$$\int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln x)} = \int \frac{dt}{t} = \ln(t) = \ln(1+\ln x)\Big|_1^e = \ln(2) - \ln(1) = \ln 2$$

$$1+\ln(x) = t \to \frac{1}{x}dx = dt$$

سال ۷۳) اگر $y = e^{-\sqrt{x}}, x = \frac{2}{t-1}$ مقدار $\frac{dy}{dt}$ به ازای $t = 3$ کدام است؟

۱) $\frac{4}{e}$ ۲) $\frac{2}{e}$ ۳) $\frac{1}{2e}$ ٤) $\frac{1}{4e}$

حل:

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\times\frac{dx}{dt}\quad\Rightarrow\quad\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=3}=\frac{-1}{2}\times e^{-1}\times(-\frac{2}{4})=\frac{1}{4e}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2\sqrt{x}}\times e^{-\sqrt{x}}\quad,\quad\frac{dx}{dt}=\frac{-2}{(t-1)^2}\quad,\quad t=3\rightarrow x=1$$

سال ۷٤) حد عبارت $\frac{e^x-1}{x^2-2x}$ **وقتی** $x\rightarrow 0$ **کدام است؟**

۱) $\frac{-1}{2}$ ۲) 0 ۳) $\frac{1}{2}$ ٤) ∞

حل:

$$\lim_{x\rightarrow 0}\frac{e^x-1}{x^2-2x}=\lim_{x\rightarrow 0}\frac{e^x}{2x-2}=\frac{-1}{2}$$

سال ۷٤) حاصل انتگرال $\int_0^1\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ **کدام است؟**

۱) $2e-1$ ۲) $2(e-1)$ ۳) $e-1$ ٤) $e-2$

حل:

$$\sqrt{x}=u\Rightarrow\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=du\Rightarrow\int_0^1 e^u\times 2du=2e^u\Big|_0^1=2(e-1)=2(e-1)$$

سال ۷٤) معادله خط مماس بر منحنی نمایش $y=x+e^x$ **در نقطه** $x=0$ **کدام است؟**

۱) $y=2x+1$ ۲) $y-2x=1$ ۳) $y-2x=-1$ ٤) $y+2x=-1$

حل:

$$y'=1+e^x\Big|_{x=0}=2\quad\Rightarrow y-y_0=y'(x_0)(x-x_0)\Rightarrow y-1=2(x-0)\Rightarrow y=2x+1$$

سال ۷٤) نقطه عطف $y=e^{x^4-\frac{4}{3}x^3+\frac{1}{3}}$ **کدام است؟**

۱) $(-e\ ,\ e^{x^4+\frac{4}{3}x^3+\frac{1}{3}})$ ۲) $(0,\frac{1}{3})$ ۳) $(1,1)$ ٤) $(-e\ ,\ e^{x^4-\frac{4}{3}x^3+\frac{1}{3}})$

حل:

$$y' = (4x^3 - 4x^2)e^{x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{3}}$$
$$\Rightarrow y'' = (12x^2 - 8x)e^{x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{3}} + (4x^3 - 4x^2)^2 e^{x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{3}} = 0$$
$$\Rightarrow 12x^2 - 8x + (4x^3 - 4x^2)^2 = 0 \Rightarrow 12x^2 - 8x + (4x^2)^2(x-1)^2 = 0$$
$$\Rightarrow 12x^2 - 8x + 16x^4(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \to y = \frac{1}{3}$$

سال ۷٤) حاصل انتگرال $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$ برابر است با :

۱) $\arctan e^x + c$ ۲) $\ln(2+e^x)+c$ ۳) $\arctan\frac{x}{2}+c$ ٤) $\ln(e^x+ex)+c$

حل:

$$e^x = u \Rightarrow e^x dx = dx \Rightarrow \int \frac{dx}{1+u^2} = \arctan u + c \Rightarrow \arctan e^x + c$$

سال ۷۵) اگر $\ln 2 = A$ باشد مقدار $\ln\frac{2}{e}$ کدام است؟

۱) $A-1$ ۲) $A-2$ ۳) $1-A$ ٤) $2-A$

حل:

$$\ln\frac{2}{e} = \ln 2 - \ln e = A - 1$$

سال ۷۵) اگر $f(x) = xe^x$ مقدار $f'(0)$ کدام است؟

۱) 0 ۲) -1 ۳) ∞ ٤) 1

حل به عهده خواننده.

سال ۷۵) ضریب زاویه خط مماس در نقطه $x = \frac{\pi}{2}$ بر نمودار تابع $y = e^x \sin x$ کدام است؟

۱) 1 ۲) $e^{\frac{\pi}{2}}$ ۳) $1+e^{\frac{\pi}{2}}$ ٤) $1-e^{\frac{\pi}{2}}$

حل:

$$y' = \cos(x)\times e^x + e^x \sin x \Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = e^{\frac{\pi}{2}}$$

سال ۷۶) اگر $f(x) = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$ آنگاه $f^{-1}(x)$ کدام است؟

۱) $\ln\frac{2x+1}{2x-1}$ ۲) $\ln\frac{2x-1}{2x+1}$ ۳) $\frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1}$ ٤) $\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$

حل:

$$y=\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}\Rightarrow y(e^{2x}-1)=e^{2x}+1\Rightarrow e^{2x}(y-1)=1+y$$

$$\Rightarrow e^{2x}=\frac{1+y}{y-1}\Rightarrow 2x=\ln\frac{1+y}{y-1}\qquad\Rightarrow x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{y-1}$$

$$f^{-1}(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{x-1}$$

سال ۷۶) مقدار مشتق $e^{\sin x}$ در $x=0$ کدام است؟

۱) 0 ۲) $\frac{1}{e}$ ۳) 1 ٤) e

حل:

$$y'=(\cos x)e^{\sin x}\Big|_{x=0}=1$$

سال ۷۶) مقدار مشتق e^{x^2+1} در نقطه $x=1$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{e}$ ۲) $2e$ ۳) e^2 ٤) $2e^2$

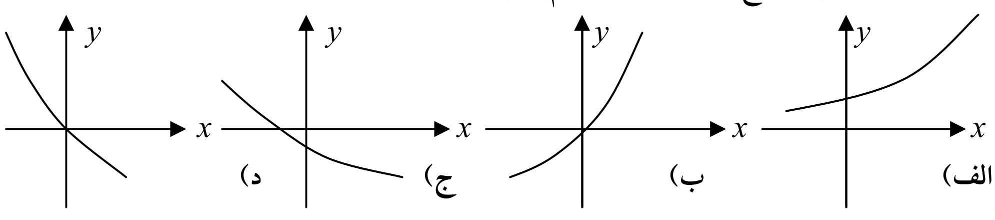
حل: بر عهده خواننده.

سال ۷۷) برد تابع با ضابطه $y=e^{-|x|}$ کدام مجموعه است؟

۱) $(-\infty,0)$ ۲) $[0,1]$ ۳) $[-1,1]$ ٤) $(-\infty,1)$

حل: مجموعه های اول و سوم و چهارم چون شامل مقادیر منفی می باشند پس برد نمی تواند باشند لذا ۲ جواب است.

سال ۷۷) نمودار تابع $y=e^{x-1}$ به کدام صورت است؟



حل : گزینه الف صحیح است زیرا در سه گزینه دیگر برد منفی شده است.

سال ۷۷) حاصل انتگرال گیری $I=\int\frac{e^x dx}{1-e^x}$ کدام است؟

۱) $I=\ln(\frac{x}{1+e^x})+c$ ۲) $I=-\ln(1+e^x)+c$

۳) $I=\ln(1-e^x)+c$ ٤) $I=-\ln(1-e^x)+c$

حل: بر عهده خواننده.

سال ۷۷) عرض نقطه ماکزیمم یا می نیمم تابع $y=e^x$ کدام است؟

الف) e **ب)** e^2 **ج)** 1 **د) ماکزیمم و می نیمم ندارد.**

حل:

$$y=e^x \Rightarrow y'=e^x>0$$

بنابراین تابع همواره صعودی است و ماکزیمم و می نیمم ندارد.

مثال ۲۲ : حاصل انتگرال زیر را پیدا کنید.

$$\int_{-1}^{1}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx \qquad \Rightarrow \qquad f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

$$f(-x)=\frac{e^{-x}-e^x}{e^{-x}+e^x}=-(\frac{e^x-e^{-x}}{e^{-x}+e^x})=-f(x)$$

تابع فرد است و بازه انتگرال گیری متقارن لذا حاصل انتگرال صفر است.

مثال ۲۳ : حاصل انتگرالهای زیر را بدست آ ورید.

1) $\int\frac{1}{1+e^x}dx=\int\frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}dx=\int dx-\int\frac{e^x}{1+e^x}dx==x-\ln(1+e^x)+c$

2) $\int e^{(x-e^x)}dx=\int e^x\cdot e^{-e^x}dx=\int\frac{e^x}{e^{e^x}}dx==\int\frac{du}{e^u}=\int e^{-u}du=-e^{-u}+c=-e^{-e^x}+c$

$e^x=u\to e^xdx=dx$

3) $\int\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}dx=\int\frac{e^x\times e^x}{\sqrt{e^x+1}}dx=\int\frac{(t-1)dt}{\sqrt{t}}=\int t^{\frac{1}{2}}dt-\int t^{-\frac{1}{2}}dt=\frac{2}{3}(e^x+1)^{\frac{3}{2}}-2(e^x+1)^{\frac{1}{2}}+c$

$e^x+1=t\Rightarrow e^xdx=dt$

4) $\int e^x\cdot e^{ex}dx=\int u^e du=\frac{u^{e+1}}{e+1}+c=\frac{(e^x)^{e+1}}{e+1}+c$

$e^x=u\Rightarrow e^xdx=du$

5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xe^{\sin x}dx=\int e^u du=e^u=e^{\sin x}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=e^{\sin\frac{\pi}{2}}-e^0=e-1$

$\sin x=u\Rightarrow\cos xdx=du$

۳. ۴. ۱. تابع نمایی در پایه a :

بعد از اینکه به توانهای حقیقی دلخواه عدد e معنی بخشیده ایم، می خواهیم همین کار را برای هر عدد مثبت $a \neq 1$ انجام دهیم. بنابراین تعریف می کنیم :

$$a^x := \exp(a \ln x) = e^{xLna}$$

تابع a^x در خواص زیر صدق می کند:

۱) $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ ۲) $a^x a^y = a^{x+y}$

۳) $(a^x)^y = a^{xy}$ ٤) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

خواص فوق را با استفاده از تعریف می توان نشان داد. به این معنی که هر عملی روی a^x داشته باشیم ابتدا آن را بر حسب e می نویسم و از خواص e^x استفاده می کنیم.

$$1)\quad a^{-x} = e^{-x\ln(a)} = \frac{1}{e^{x\ln a}} = \frac{1}{a^x}$$

$$2)\quad a^x a^y = e^{xLna} \times e^{yLna} = e^{(x+y)Lna} = a^{x+y}$$

اثبات روابط (۳) و (۴) به عهده خواننده.

همین طور حدود زیر را می توان نتیجه گرفت:

$$\begin{cases} Lim a^x = 0 \\ x \to \infty \\ 0 < a < 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} Lim a^x = 0 \\ x \to -\infty \\ a > 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Lim a^x = +\infty \\ x \to +\infty \\ a > 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} Lim a^x = \infty \\ x \to -\infty \\ 0 < a < 1 \end{cases}$$

مشتق و انتگرال تابع a^x بصورت زیر خواهد بود:

$$\frac{d}{dx}a^x = \frac{d}{dx}e^{x\ln a} = e^{x\ln a} \times \frac{d}{dx}(x \ln a) = a^x \ln a \quad \Rightarrow \quad y = a^u \to y' = u'a^u \ln a$$

بنابراین

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

سال ۶۴) مشتق تابع $y = a^x$ کدام است؟

۱) $y' = a^{x-1}$ ۲) $y' = a^x \ln a$ ۳) $y' = ax^{a-1}$ ٤) $y' = xa^{x-1}$

حل: در متن درس دیدیم که

$$y' = a^x \ln a$$

سال ٦٧) (کنکور آزمایشی) حاصل انتگرال $\int 3^{2x} dx$ کدام است؟

۱) $\frac{3^{2x}}{\ln 3}+c$ ۲) $\frac{1}{2}3^{2x}\ln 3$ ۳) $\frac{3^{2x}}{\ln 9}+c$ ٤) $\frac{3^{2x+1}}{2x+1}+c$

حل:

$$\int 3^{2x} dx = \int e^{2xLn3}dx = \int \frac{1}{2\ln 3}e^u du = \frac{1}{2\ln 3}e^u + c = \frac{1}{2\ln 3}e^{2x\ln 3} + c = \frac{3^{2x}}{\ln 9}+c$$

$$2x\ \ln 3 = u \Rightarrow 2\ln 3dx = du$$

سال ۷۰) مقدار مشتق عبارت 2^{2x} در $x=0$ کدام است؟

۱) $\ln 2$ ۲) $\frac{2}{\ln 2}$ ۳) $2\ln 2$ ٤) $\frac{1}{\ln 2}$

حل:

$$y = 2^{2x} \Rightarrow y' = 2\ln 2 \times 2^{2x} \Rightarrow y'\Big|_{x=0} = 2\ln 2$$

سال ۷۳) مشتق مرتبه n ام $y=2^x$ کدام است؟

۱) $2^x \ln 2$ ۲) $(2^x)^n(\ln 2)^n$ ۳) $(2^x)^n \ln 2$ ٤) $2^x(\ln 2)^n$

حل:

$$y' = 2^x \times \ln 2 \Rightarrow y'' = 2^x \times \ln(2)\times \ln 2 = 2^x \times (\ln 2)^2 \Rightarrow y^{(n)} = 2^x(\ln 2)^n$$

مثال ۲۴ : از توابع زیر مشتق بگیرید:

1) $y = x\,(\frac{1}{3})^x \rightarrow y' = (\frac{1}{3})^x + x\times(\frac{1}{3})^x \ln(\frac{1}{3}) = (\frac{1}{3})^x(1-x\ \ln 3)$

2) $y = 3^{\sin x} \rightarrow y' = \cos x \times 3^{\sin x}\times \ln 3$

3) $y = 4^{\tan x} \rightarrow y' = (1+\tan^2 x)4^{\tan x}\ \ln 4$

مثال ۲۵ : حد توابع زیر را پیدا کنید:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x\times \ln a}{1} = \ln a$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{ae^{ax}-be^{bx}}{1} = a-b$

$$3)\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}\right)=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{(e^x-1)+xe^x}\right)=\frac{0}{0}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x}=\frac{1}{2}$$

$$4)\quad \lim_{x\to 0}\frac{4^{\sin x}-1}{8^{\tan x}-1}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\times 4^{\sin x}\times \ln 4}{(1+\tan^2 x)\times 8^{\tan x}\times \ln 8}=\frac{\ln 4}{\ln 8}$$

$$5)\quad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{e^{\sin x}-e}{\cos x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\times e^{\sin x}}{-\sin x}=0$$

۳. ۴. ۲. تابع لگاریتمی در پایه a :

دیدیم که $y=a^x=e^{x\ln a}$ و $y'=a^x\ln a$، یعنی مشتق همواره مثبت است اگر $a>1$ و منفی است اگر $a<1$ باشد. بنابراین یکنواست لذا یک به یک و معکوس پذیر خواهد بود. البته حالت $a=1$ را استثناء می کنیم چون تابع یک به یک نیست و معکوس ندارد $(1^x=1)$.

معکوس تابع نمایی در مبنای a را با Log_a نشان می دهیم و بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$Log_a : R^+ \to (-\infty,\infty)$$
$$y=Log_a x \Leftrightarrow x=a^y$$

خواص این تابع بصورت زیر است:

۱) $a^{Log_a x}=x \quad , Log_a^{a^x}=x$

۲) $Log_a x=\dfrac{\ln x}{\ln a}$

$$y=Log_a x \to a^y=x \Rightarrow \ln a^y=\ln x \Rightarrow y\ln a=\ln x \Rightarrow Log_a x=\frac{\ln x}{\ln a}$$

۳) $Log_a 1=0:\ \ Log_a 1=\dfrac{\ln(1)}{nna}=0$

٤) $Log_a(\frac{1}{x})=-Log_a x:\qquad Log_a(\frac{1}{x})=\dfrac{\ln(\frac{1}{x})}{\ln a}=\dfrac{-\ln(x)}{\ln a}=-Log_a x$

٦) $Log_a(xy)=Log_a x+Log_a y:\qquad Log_a(xy)=\dfrac{\ln(xy)}{\ln a}=\dfrac{\ln x+\ln y}{\ln a}=Log_a x+Log_a y$

۷) $Log_a b^x = xLog_a b : \; Log_a b^x = \dfrac{\ln b^x}{\ln a} = x\,\dfrac{\ln b}{\ln a} = xLog_a b$

۸) $Log_a x = Log_b x \times Log_a b : \; Log_b x \times Log_a b = \dfrac{\ln x}{\ln b} \times \dfrac{\ln b}{\ln a} = \dfrac{\ln x}{\ln a} = Log_a x$

مشتق تابع لگاریتمی در پایه a:

$$y = Log_a x \to y = \frac{\ln x}{\ln a} \to y' = \frac{1}{x \ln a}$$

مثال ۲۶ : دامنه توابع زیر را بدست آورید:

۱) $Log_7(3x+1)$ ۲) $Log_7(x^2+1)$ ۳) $Log_7(\ln(x))$

حل:

۱) $3x+1>0 \Rightarrow x > -\dfrac{1}{3}$

۲) $x^2+1>0 \quad \Rightarrow \quad D_f = \Re$

۳) $\ln(x) > 0 \Rightarrow x > 1$

مثال۲۷ : از توابع زیر مشتق بگیرید:

حل:

1) $y = Log_7(\sin x) \Rightarrow y = \dfrac{\ln(\sin x)}{\ln 7} \Rightarrow y' = \dfrac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\ln 7} = \dfrac{\cot x}{\ln 7}$

2) $y = Log_5(x^2+1) \Rightarrow y = \dfrac{\ln(x^2+1)}{\ln 5} \Rightarrow y' = \dfrac{1}{\ln 5} \times \dfrac{2x}{x^2+1}$

3) $y = \dfrac{x}{Log_7 x} \Rightarrow y' = \dfrac{Log_7 x - x \times \frac{\frac{1}{x}}{\ln 7}}{(Log_7 x)^2} = \dfrac{\ln x - 1}{(\ln 7)(Log_7 x)^2}$

مثال ۲۸ : حد توابع زیر را پیدا کنید:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{Log_2(x^2+1)}{x \sin x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{2x}{(x^2+1)\ln 2}}{\sin x + x \cos x}$

دوباره هوپیتال می گیریم . ادامه به عهده دانشجویان.

$$2)\quad \lim_{x \to e} \frac{Log_2(\ln(x))}{x-e} = \lim_{x \to e} \frac{\frac{\ln(\ln(x))}{\ln 2}}{x-e} = \frac{1}{\ln 2} \lim_{x \to e} \frac{\frac{1}{x \ln x}}{1} = \frac{1}{e \ln 2}$$

رسم منحنی $y = Log_a x$:

1) $Log_a 1 = 0 \Rightarrow$ **محل برخورد منحنی با محور** x**ها** $(1,0)$

$$2)\quad y = Log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \Rightarrow y' = \frac{\frac{1}{x}}{\ln a} = \frac{1}{x \ln a}$$

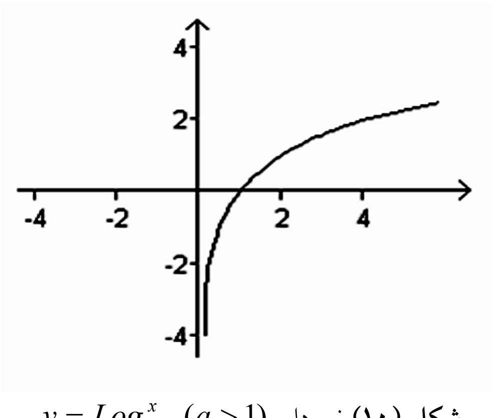
$0 < a < 1 \Rightarrow y' < 0$ **نزولی**

$a > 1 \Rightarrow y' > 0$ **صعودی**

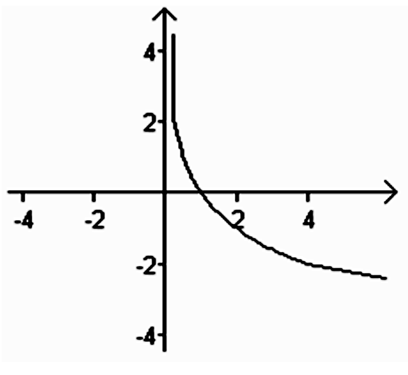
$$3)\quad a > 1 \Rightarrow \ln a > 0 \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} Log_a x = +\infty \qquad \lim_{x \to 0} Log_a x = -\infty$$

$$4)\quad 0 < a < 1 \Rightarrow \ln a < 0 \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} Log_a x = -\infty \qquad \lim_{x \to 0} Log_a x = +\infty$$

نمودار $y = Log_a x$ **در شکل های (۱۰) و (۱۱) صفحه بعد نمایش داده شده است.**



شکل (۱۰) نمودار $(a > 1)$ $y = Log_a^x$



شکل (۱۱) نمودار $(0 < a < 1)$ $y = Log_a^x$

سال ۶۴) تابع معکوس $a > 0$ $y = a^x$ **کدام است؟**

الف) a^x　ب) $\frac{1}{a^x}$　ج) x^a　د) $\log_a^x$

حل : با توجه متن درس گزاره (د) درست است.

سال ۶۵) $\underset{x \to 1}{Lim} \frac{Log_e^x}{x-1}$ **کدام است؟**

۱) $-\infty$　۲) -1　۳) 1　٤) ∞

حل:

$$\underset{x \to 1}{Lim} \frac{\ln x}{x-1} = \underset{x \to 1}{Lim} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1$$

سال ٦٦) قلمرو تابع $Log_{10}(x+2) + Log_{10}(x-2)$ **کدام است؟**

۱) $(2,+\infty)$　۲) $(\frac{5}{2},+\infty)$　۳) $(3,+\infty)$　٤) $(\frac{7}{2},+\infty)$

حل:

$$\left.\begin{array}{l} Log_{10}(x+2) \Rightarrow x+2>0 \Rightarrow x>-2 \\ Log_{10}(x-2) \Rightarrow x-2>0 \Rightarrow x>2 \end{array}\right\} \Rightarrow (x>-2) \cap (x>2) \to (x>2) = (2,+\infty)$$

سال ٦٦) اگر $Log_{10}x = 5$ **در این صورت** $Log_e x$ **کدام است؟**

۱) $\frac{1}{5}\mathrm{Log}_{10}^{e}$　۲) $\frac{1}{5}\mathrm{Log}_{e}^{10}$　۳) $5\ \mathrm{Log}_{10}^{e}$　٤) $5\mathrm{Log}_{e}^{10}$

حل:

$$Log_{10}x = 5 \Rightarrow \frac{\ln x}{\ln 10} = 5 \Rightarrow \ln x = 5\ln 10 \Rightarrow \frac{\ln x}{\ln e} = \frac{5\ln 10}{\ln e} \Rightarrow Log_e x = 5Log_e 10$$

سال ٦٦) حاصل $A = (x^{Log_a^y})(y^{Log_a^x})^{-1}$ **برابر است با:**

۱) Log_y^x　۲) Log_x^y　۳) 1　٤) -1

حل:

$$y^{Log_a^x}=e^{Log_a^x \ln y}=e^{\frac{\ln x}{\ln a}\times \ln y}=e^{\ln x \times \frac{\ln y}{\ln a}}=x^{Log_a^y}\Rightarrow A=1$$

سال ٦٦) نقطه می نیمم تابع $y=\dfrac{x}{\ln x}$ کدام است؟

۱) $\left(-\dfrac{1}{e},e\right)$ ۲) $(-e,e)$ ۳) (e,e) ٤) $\left(\dfrac{1}{e},\dfrac{1}{e}\right)$

حل:

$$y'=\frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}=0\Rightarrow \ln(x)=1\Rightarrow x=e\Rightarrow y=e$$

سال ٦٦) مقدار حد $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+ax)}{x}$ کدام است؟

۱) a ۲) $\dfrac{1}{a}$ ۳) 1 ٤) 0

حل:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{a}{1+ax}}{1}=a$$

سال ٦٧) مقدار می نیمم تابع $y=5^{(x^2-3)^3+27}$ کدام است؟

۱) 1 ۲) 5^{27} ۳) 5^{54} ٤) 125^{27}

حل:

$$y'=3(x^2-3)^2\times 2x\times 5^{(x^2-3)^3+27}\times \ln(5)=0\Rightarrow x=0\Rightarrow y=1$$

سال ٦٧) قلمرو تابع $y=\sqrt{Log_{\frac{1}{2}}^x}$ کدام است؟

۱) $(0,1)$ ۲) $(0,1]$ ۳) $(0,2)$ ٤) $(0,2)$

حل:

$$y=\sqrt{\frac{\ln x}{\ln(\frac{1}{2})}}=\sqrt{\frac{\ln x}{-\ln(2)}}$$

زیر رادیکال باید مثبت باشد، بنابراین $\ln(x)<0\Rightarrow 0<x<1$. همچنین $x=1$ هم قابل قبول است (زیر رادیکال صفر می شود) لذا دامنه $[0,1]$ می باشد.

سال ٦٧) اگر $Log_e^x=2$ در این صورت Log_{10}^x کدام است؟

۱) $\frac{1}{2Log_{10}^{e}}$ ۲) $\frac{1}{2Log_{e}^{10}}$ ۳) $2Log_{10}^{e}$ ٤) $-2Log_{10}^{e}$

حل:

$$Log_{e}^{x}=2\Rightarrow \ln x=2\Rightarrow \frac{\ln x}{\ln 10}=\frac{2}{\ln 10}\Rightarrow Log_{10}^{x}=\frac{2}{\ln 10}=2\frac{\ln e}{\ln 10}=2Log_{10}^{e}$$

تذکر: $\ln e=1$

سال ٦٧) (کنکور آزمایشی) تابع $f(x)=Log_{a}(x+\sqrt{x^{2}}+1)$ به شرط $a>1,a\neq 1$ تابع:

۱) فرد است وتابع همیشه نزولی است . ۳)زوج است و تابع همیشه صعودی

۲) فرد است و تابع همیشه صعودی است ٤)زوج است و تابع همیشه نزولی

حل :

$$f(-x)=Log_{a}(x+\sqrt{x^{2}}+1)=Log_{a}\left(\frac{(-x+\sqrt{x^{2}+1})(x+\sqrt{x^{2}+1})}{x+\sqrt{x^{2}+1}}\right)$$

$$=Log_{a}\frac{1}{x+\sqrt{x^{2}+1}}=-Log_{a}(x+\sqrt{x_{2}+1})=-f(x)$$

یعنی فرد است.

$$y=\frac{\ln(x+\sqrt{x^{2}+1})}{\ln a}\Rightarrow y'=\frac{1}{\ln a}\times\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^{2}+1}}}{x+\sqrt{x^{2}+1}}=\frac{1}{\ln a}\times\frac{\frac{\sqrt{x^{2}+1}+x}{\sqrt{x^{2}+1}}}{x+\sqrt{x^{2}+1}}=\frac{1}{\ln a}\times\frac{1}{\sqrt{x^{2}+1}}>0$$

یعنی مشتق مثبت است پس تابع صعودی است.

سال ٦٨) توابع حقیقی $f(x)=\ln(\frac{1+2x}{1-2x})$ و $g(x)=a^{x}-\frac{1}{a^{x}}$ مفروض اند، کدامیک از گزاره های زیر درست است؟

۱) هر دو تابع زوج هستند. ۳) هر دو تابع فرد هستند.

۲) $f(x)$ فرد و $g(x)$ زوج هستند. ٤) $f(x)$ زوج و $g(x)$ فرد است.

حل:

$$f(-x)=\ln\left(\frac{1-2x}{1+2x}\right)=\ln\left(\frac{1+2x}{1-2x}\right)^{-1}=-\ln(\frac{1+2x}{1-2x})=-f(x)$$

f فرد است به همین ترتیب g فرد است.

سال ٦٨) کدامیک از مقادیر زیر مشتق تابع $y=\log_{x^{2}}^{x^{x}}$ می باشند؟

۱) $2x$ ۲) x^{2} ۳) $x^{3}+x$ ٤) $\frac{1}{2}$

حل:

$$y=\frac{\ln x^x}{\ln x^2}=\frac{x\ln x}{2\ln x}=\frac{1}{2}x\Rightarrow y'=\frac{1}{2}$$

سال ٦٨) حوزه تعریف تابع $y=Log_2(Log_3(Log_4^x))$ عبارت است از:

۱) $4<x<\infty$ ۲) $x<2$ ۳) تمام اعداد حقیقی ٤) اعداد مثبت

حل:

$$y=Log_2(Log_3(Log_4^x)) \quad \Rightarrow Log_3(Log_4^x)>0$$

$$\frac{\ln(Log_4^x)}{\ln 3}>0\Rightarrow \ln(Log_4^x)>0\Rightarrow Log_4^x>1\rightarrow\frac{\ln x}{\ln 4}>1\Rightarrow \ln x>\ln 4\Rightarrow x>4$$

سال ۷۲) مقدار Log_{27}^9 کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ٤) $\frac{3}{4}$

حل:

$$Log_{27}^9=\frac{\ln 9}{\ln 27}=\frac{\ln 3^2}{\ln 3^3}=\frac{2\ln 3}{3\ln 3}=\frac{2}{3}$$

سال ۷۳) معکوس $a>0,a\neq 1,y=1+a^{-x}$ کدام است؟

۱) $Log_a^{\frac{1}{1-x}}$ ۲) Log_a^{x-1} ۳) Log_a^{1-x} ٤) $Log_a^{\frac{1}{x-1}}$

حل:

$$y=1+a^{-x}\Rightarrow y-1=a^{-x}\Rightarrow\frac{1}{a^x}=y-1\Rightarrow a^x=\frac{1}{y-1}\Rightarrow x=\log_a^{\frac{1}{y-1}}\Rightarrow y=\log_a^{\frac{1}{x-1}}$$

سال ۷۳) دامنه تابع $f(x)=Log(x+\sqrt{x^2-1})$ کدام است؟

۱) R ۲) $(-1,1)$ ۳) $[1,\infty)$ ٤) $(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$

حل: تابع Log برای مقدار مثبت تعریف شده است. لذا دامنه $[1,\infty)$ است. هر کدام از آنها را می توان با جایگذاری یک عضو مردود دانست .

1) $R:\quad x=0\rightarrow\sqrt{-1}\rightarrow$ بی معنی است.

2) $(-1,1):\quad x=0\rightarrow\sqrt{-1}\rightarrow$ بی معنی است.

فقط گزینه۳ درست است،که هم رادیکال با معنی است و هم $x+\sqrt{x^2-1}>0$ است.

سال ۷۳) حد عبارت $\dfrac{3^{x-2}-1}{x^2-2x}$ وقتی $x \to 2$ کدام است؟

۱) 0 ۲) 1 ۳) $\ln\sqrt{3}$ ٤) $\ln 3$

حل:

$$\lim_{x \to 2}\frac{3^{x-2}-1}{x^2-2x}=\frac{0}{0}=\lim_{x \to 2}\frac{3^{x-2}\times \ln 3}{2x-2}=\frac{\ln 3}{2}=\ln 3^{\frac{1}{2}}=\ln\sqrt{3}$$

سال ٧٤) مقدار $\dfrac{1}{Log_2^{216}}+\dfrac{1}{Log_3^{216}}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) 3 ۳) 6 ٤) $\frac{1}{6}$

حل:

$$\frac{1}{Log_3^{216}}=Log_{216}^{3} \quad , \quad \frac{1}{Log_2^{216}}=Log_{216}^{2} \Rightarrow Log_{216}^{6}=\frac{1}{Log_6^{216}}=\frac{1}{3}$$

سال ٧٦) اگر $x=Log_8^{25}$ و $yLog_5^2=1$ آنگاه کدام گزینه درست است؟

۱) $y=x$ ۲) $2y=3x$ ۳) $y=2x$ ٤) $y=3x$

حل:

$$x=Log_8^{25}=\frac{\ln 25}{\ln 8}=\frac{2\ln 5}{3\ln 2}=\frac{2}{3}Log_2^5 \quad , \quad y=\frac{1}{\log_5^2}=\log_2^5 \Rightarrow x=\frac{2}{3}y$$

سال ٧٦) حاصل $\lim\limits_{x \to \infty}\dfrac{2^x}{x^3}$ کدام است؟

۱) 2 ۲) 1 ۳) 0 ٤) $+\infty$

حل:

$$\lim_{x \to \infty}\frac{2^x}{x^3}=\lim_{x \to \infty}\frac{2^x\times \ln 2}{3x^2}=\lim_{x \to \infty}\frac{2^x\times(\ln 2)^2}{6x}=\lim_{x \to \infty}\frac{2^x\times(\ln 2)^3}{6}=+\infty$$

سال ٧٦) به ازای کدام مقدار a ، تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(x)}{1-x^3} & x\neq 1\\ a & x=1\end{cases}$ پیوسته است؟

۱) -3 ۲) $\frac{-1}{3}$ ۳) $\frac{-2}{3}$ ٤) $\frac{-3}{2}$

حل:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{1-x^3} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{-3x^2} = -\frac{1}{3}$$

برای پیوسته بودن باید $f(1) = \frac{-1}{3}$ باشد یعنی $a = -\frac{1}{3}$.

سال ۷۷) در مورد تابع $y = Log\frac{x+1}{x-1}$ عبارت صحیح کدام است؟

۱) یک تابع زوج است. ۲) یک تابع فرد است.

۳) نه فرد است و نه زوج. ٤) در $(-\infty,1)$ فرد و در $(-1,\infty)$ زوج است.

حل:

$$f(-x) = Log\frac{-x+1}{-x-1} = Log\left(-\frac{(x-1)}{-x-1}\right) = Log\frac{x-1}{x+1} = Log\,(\frac{x+1}{x-1})^{-1} = -Log\frac{x+1}{x-1} = -f(x)$$

سال ۷۷) دامنه تابع $y = Log_x^{x-2}$ کدام است؟

۱) $D = (-2,-\infty)$ ۳) $x > 2$

۲) $D = R - \{2\}$ ٤) $R - \{-2\}$

حل: به عهده خواننده.

سال ۷۷) هر گاه $Log_3^x + Log_4^8 = Log_x^3$ باشد مقدارx کدام است؟

۱) 2 ۲) $\sqrt{3}$ ۳) 3 ٤) 1

حل :

$$Log_3^x + \frac{3}{2} = \frac{1}{Log_3^x} \to (Log_3^x)^2 + \frac{3}{2}Log_3^x - 1 = 0 \quad , \quad X := \log_3^x$$

$$\Rightarrow X^2 + \frac{3}{2}X - 1 = 0 \Rightarrow X_1, X_2 = \frac{-\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}+4}}{2} = \frac{\frac{-3}{2} \pm \frac{5}{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_1 = \frac{\frac{-3}{2}+\frac{5}{2}}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow Log_3^{x_1} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2Log_3^{x_1} = 1 \Rightarrow Log_3^{x_1^2} = 1 \Rightarrow x_1^2 = 3 \Rightarrow x_1 = \sqrt{3} \\ X_2 = \frac{-\frac{3}{2}-\frac{5}{2}}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \Rightarrow Log_3^{x_2} = -2 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{9} \end{cases}$$

۳. ۵. کاربرد تابع لگاریتم طبیعی

یکی از کاربردهای مهم تابع لگاریتم طبیعی، رفع ابهام صورتهای مبهم به فرم $0^0, \infty^0, 1^\infty, \infty^\infty$ است. فرض می کنیم $f(x)$ و $G(x)$ توابع پیوسته ای باشند که f تابعی مثبت است. حد

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^{G(x)}$$

را در نظر می گیریم. در این صورت خواهیم داشت:

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^{G(x)} = \lim_{x \to a} e^{G(x) Ln f(x)} = e^L$$

که در آن $\lim_{x \to a} G(x) \ln(f(x)) = L$، مشروط به اینکه حد موجود ومتناهی باشد.

مثال ۲۹ : $\lim_{x \to 0^+} x^x$ را حساب کنید.

حل:

$$\lim_{x \to 0^+} x^x = \lim_{x \to 0^+} e^{xLn(x)} = e^L$$

که در آن $\lim_{x \to 0^+} xLn(x) = L$ با استفاده از قائده هوپیتال حد برابر 1 است:

$$\lim_{x \to 0^+} xLn(x) = \lim_{x \to 0^+} \left[\frac{Ln(x)}{\frac{1}{x}} \right] = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \to 0^+} \left[\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} \right] = 0 \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} x^x = e^L = 1$$

مثال ۳۰ : $\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$ را حساب کنید.

حل:

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} Ln(1+x)} \Rightarrow \lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0} e^{\frac{1}{x} \ln(1+x)} = e^{\lim \frac{\ln(1+x)}{x}} = e^L$$

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1 \quad \Rightarrow \lim (1+x)^{\frac{1}{x}} = e^1 = e$$

مثال ۳۱ : $\lim_{x \to \infty} (1+\frac{1}{x})^x$ را بدست آورید.

حل:

$$\frac{1}{x} = t \quad , \quad x \to \infty \Rightarrow t \to 0 \quad \to \quad \lim_{x \to \infty} (1+\frac{1}{x})^x = \lim_{t \to 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e$$

دو مثال فوق را گاهی برای تعریف عدد نپر بکار می برند.

مثال ۳۲: $\lim_{x \to +\infty} (1+\frac{a}{x})^x$ را بدست آورید.

حل:

$$\lim_{x \to +\infty} (1+\frac{a}{x})^x = \lim_{t \to 0^+} (1+t)^{\frac{a}{t}} = \lim_{t \to 0^+} e^{\frac{a}{t}\ln(1+t)} = e^L \quad , \quad t = \frac{a}{x}$$

$$L = \lim_{t \to 0^+} \frac{a\ln(1+t)}{t} = a.1 = a \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} (1+\frac{a}{x})^x = e^a$$

تبصره: رابطه $\lim_{x \to +\infty} (1+\frac{a}{x})^x = e^a$ در صورت تعویض $+\infty$ با $-\infty$ برقرار می ماند در واقع با جانشانی $x = -t$ خواهیم داشت:

$$\lim_{x \to -\infty} (1+\frac{a}{x})^x = \lim_{t \to \infty} (1-\frac{a}{t})^{-t} = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{(1-\frac{a}{t})^t} = \frac{1}{e^{-a}} = e^a$$

بنابراین می توان نتیجه گرفت

$$\lim_{x \to -\infty} (1+\frac{a}{x})^x = e^a.$$

سال ٦۵)مقدار $\lim_{x\to 0}(1+\sin(x))^{\csc(x)}$ کدام است؟

۱) e^{-2} ۲) e^{-1} ۳) e ٤) e^{2}

حل:

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin(x))^{\csc(x)} = \lim_{x\to 0} e^{\csc(x)\ln(1+\sin(x))} = e^{L}$$

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin(x))}{\sin(x)} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos(x)}{1+\sin(x)}}{\cos(x)} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0}(1+\sin(x))^{\cos(x)} = e^{1} = e$$

سال ٦٦)مقدار $\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{e}$ ۲) $\frac{1}{e}$ ۳) $-e$ ٤) e

حل:

$$\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln(1-x)} = e^{\lim \frac{\ln(1-x)}{x}} = e^{L}$$

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-1}{1-x}}{1} = -1 \Rightarrow \lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

سال ٦٦)حد تابع $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{2x}$ کدام است؟

۱) $e-2$ ۲) $\frac{e}{2}$ ۳) $2e$ ٤) e^{2}

حل:

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{2x} = \lim_{x\to\infty}\left[(1+\frac{1}{x})^{x}\right]^{2} = \left[\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}\right]^{2} = e^{2}$$

یکی دیگر از کاربردهای مهم تابع لگاریتم طبیعی در مشتق گیری از توابع پیچیده که از ترکیب چند تابع حاصل می شوند و توابعی به شکل $f(x)^{g(x)}$ می باشد. به عبارت دیگر به جای مشتق گیری از تابع از لگاریتم تابع مشتق گرفته می شود:

$$y=f(x)^{g(x)} \to \ln y=g(x)\ln f(x) \to \frac{y'}{y}=g'(x)\ln f(x)+g(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}$$
$$\to y'=f(x)^{g(x)}\left(g'(x)\ln f(x)+g(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}\right)$$

مثال ۳۳ : مشتق توابع زیر را بیابید.

$$1)\quad y=\frac{x^4\sqrt{x^2-1}}{(x+1)^4}\to \ln y=\ln\left(\frac{x^4\sqrt{x^2-1}}{(x+1)^4}\right)=\ln(x^4)+\ln(\sqrt{x^2-1})-\ln(x+1)^4$$
$$=4\ln x+\frac{1}{2}\ln(x^2-1)-4\ln(x+1)$$
$$\to\frac{y'}{y}=\frac{4}{x}+\frac{x}{x^2-1}-\frac{4}{x+1}\to y'=\left(\frac{x^4\sqrt{x^2-1}}{(x+1)^4}\right)\left(\frac{4}{x}+\frac{x}{x^2-1}-\frac{4}{x+1}\right)$$

$$2)\quad y=\frac{\sqrt[3]{x+1}}{(x+2)\sqrt{x+3}}\to \ln|y|=\ln\left|\left(\frac{\sqrt[3]{x+1}}{(x+2)\sqrt{x+3}}\right)\right|$$
$$=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\ln|x+2|-\frac{1}{2}\ln|x+3|$$
$$\to\frac{y'}{y}=\frac{1}{3(x+1)}-\frac{1}{x+2}-\frac{1}{2(x+3)}\to y'=\left(\frac{\sqrt[3]{x+1}}{(x+2)\sqrt{x+3}}\right)\left(\frac{1}{3(x+1)}-\frac{1}{x+2}-\frac{1}{2(x+3)}\right)$$

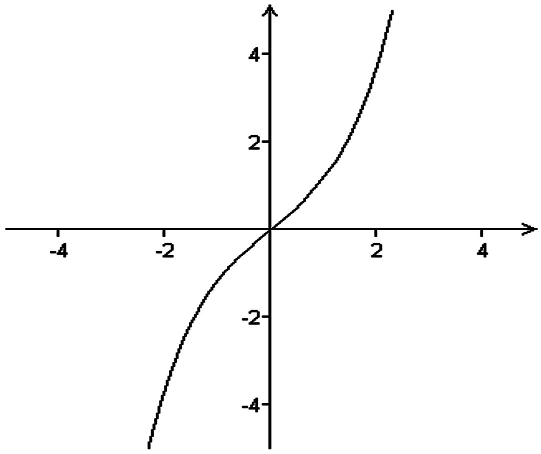
$$3)\quad y=x^{\sin x}\to \ln y=\sin x\cdot\ln x\to\frac{y'}{y}=\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x}$$
$$\to y'=x^{\sin x}\left(\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)$$

۳. ۶. توابع هذلولوی (هیپربولیک)

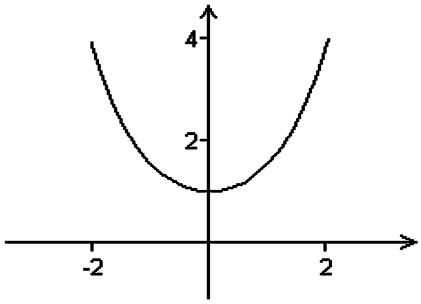
توابع e^x و e^{-x} وقتی کنار هم قرار می گیرند آنقدر رفتار منظم دارند که شایسته است نام خاص برای آنها انتخاب کنیم. این توابع در حل انتگرال ها و معادلات دیفرانسیل کاربرد پیدا می کند.

توابع کسینوس هیپربولیک و سینوس هیپربولیک به شکل زیر تعریف می شوند:

$$\cosh(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x}),\ \sinh(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$$



شکل (۱۲) نمودار $y = \sinh(x)$



شکل (۱۳) نمودار $y = \cosh(x)$

هر دو تابع e^{x} و e^{-x} بر $(-\infty, \infty)$ پیوسته و مشتق پذیرند و در نتیجه توابع $\sinh(x)$ و $\cosh(x)$ نیزچنین هستند. با استفاده از توابع فوق می توان نتایج زیر را بررسی کرد:

$$1)\quad \begin{cases} y = \sinh(x) \Rightarrow \sinh(0) = 0 \\ y = \cosh(x) \Rightarrow \cosh(0) = 1 \end{cases}$$

$$2)\quad \begin{cases} \forall x \to \cosh(x) > 0 \\ x > 0 \to \sinh(x) > 0, x < 0 \to \sinh(x) < 0 \end{cases}$$

$$3)\quad \begin{cases} \sinh(x) = \frac{1}{2}(e^{-x} - e^{x}) = -\frac{1}{2}(e^{-x} - e^{x}) = -\sinh(x) \\ \cosh(-x) = \frac{1}{2}(e^{-x} + e^{x}) = \cosh(x) \end{cases}$$

یعنی تابع $\sinh(x)$ تابعی فرد و تابع $\cosh(x)$ تابعی زوج است.

$$4)\ \begin{cases} y=\sinh(x)\Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dx}(e^{x}-e^{-x})=\dfrac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})=\cosh(x) \\ y=\cosh(x)\Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dx}(e^{x}+e^{-x})=\dfrac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})=\sinh(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=\sinh(u)\Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}\Rightarrow y'=u'\cosh(u) \\ y=\cosh(x)\Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}\Rightarrow y'=u'\sinh(u) \end{cases}$$

$$5)\ \begin{cases} \int\sinh(x)dx=\cosh(x)+c \\ \int\cosh(x)\,dx=\sinh(x)+c \end{cases}\rightarrow \begin{cases} \int\sinh(u)du=\cosh(u)+c \\ \int\cosh(u)\,du=\sinh(u)+c \end{cases}$$

$$6)\ \lim_{x\to\infty}\cosh(x)=\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty}\sinh(x)=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to-\infty}\sinh(x)=-\infty$$

مثال ۳۴ : از تابع $\sinh(\cosh(x))$ مشتق بگیرید.

حل:

$$\frac{d}{dx}\sinh(\cosh(x))=\cosh(\cosh(x))\frac{d}{dx}\cosh(x)=\cosh(\cosh(x))\sinh(x)$$

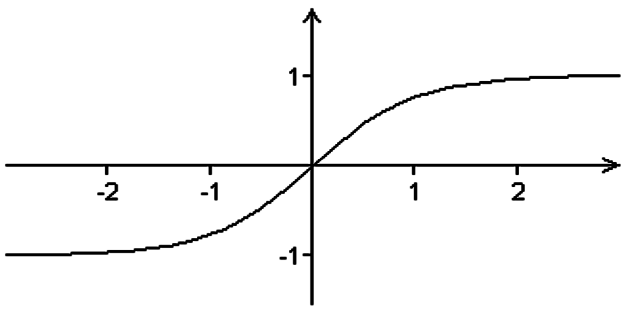
مثال ۳۵ : انتگرال $\int_0^{\ln 2}\cosh(x)\,dx$ را محاسبه کنید.

حل:

$$\int_0^{\ln 2}\cosh(x)\,dx=\sinh(x)\Big|_0^{\ln(2)}=\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})\Big|_0^{\ln(2)}=\frac{1}{2}(e^{\ln(2)}-e^{-\ln(2)})=\frac{1}{2}(2-\frac{1}{2})=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

توابع تانژانت و کتانژانت هیپربولیک نیز به شکل زیر تعریف می شوند:

$$\tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x}=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}} \quad , \quad \coth x=\frac{\cosh x}{\sinh x}=\frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}$$



شکل (۱۴) نمودار $y=\tanh(x)$

اتحادهای هذلولوی را می توان بصورت زیر بدست آورد .

۱) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

$$\Rightarrow \cosh^2 x - \sinh^2 x = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2 - \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2 =$$

$$\frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}) = \frac{1}{4}(4) = 1$$

۲) $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh x$

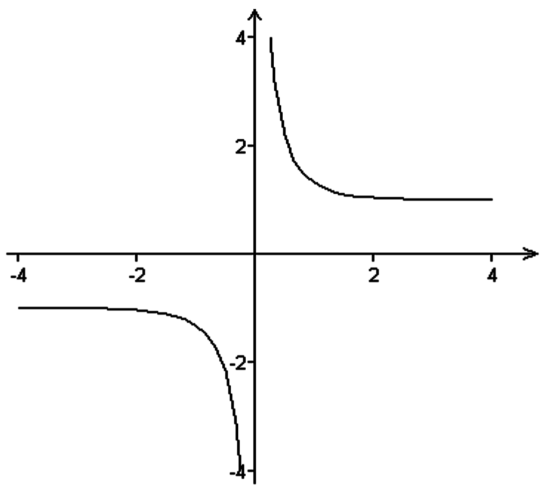
$$\sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y = \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})(e^y + e^{-y}) - \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})(e^y - e^{-y}) =$$

$$\frac{1}{4}(e^{x+y} - e^{-x+y} + e^{x-y} - e^{-x-y} + e^{x+y} + e^{-x+y} - e^{x-y} - e^{-x-y}) =$$

$$\frac{1}{2}(e^{x+y} - e^{-x-y}) = \sinh(x+y)$$

۳) $\sinh(x-y) = \sinh x \cosh y - \cosh x \sinh y$

٤) $\cosh(x-y) = \cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y$



شکل (۱۵) نمودار $y = \coth(x)$

مشتق و انتگرال تانژانت و کتانژانت هیپربولیک به صورت زیر است:

$$y = \tanh x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right) = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$$

$$y = \coth x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\cosh x}{\sinh x}\right) = \frac{\sinh^2 x - \cosh^2 x}{\sinh^2 x} = (1 - \coth^2 x)$$

$$y = \tanh u \Rightarrow y' = u'(1 - \tanh^2 u)$$

$$y = \coth u \Rightarrow y' = u'(1 - \coth^2 u)$$

$$\begin{cases}\int \tanh x dx = \ln(\cosh x) + c \\ \int \coth x\, dx = \ln(\sinh x) + c\end{cases} \to \begin{cases}\int \tanh u du = \ln(\cosh u) + c \\ \int \coth u\, du = \ln(\sinh u) + c\end{cases}$$

مثال ۳۶ : حاصل انتگرال زیر را بدست آورید:

$$I = \int \sinh^2(x)\cosh^3(x)dx = \int \sinh^2(x)\cosh(x)\cosh^2(x)dx =$$
$$\int \sinh^2(x)\cosh(x)(1+\sinh^2(x))\,dx = \int u^2(1+u^2)\,du = \int (u^2+u^4)\,du$$
$$= \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + c = \frac{\sinh^3 x}{3} + \frac{\sinh^5 x}{5} + c$$

مثال ۳۷ : نشان دهید: $(\sinh x + \cosh x)^n = \sinh(nx) + \cosh(nx)$

حل:

$$\begin{matrix}\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \\ \cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\end{matrix} \Rightarrow \sinh(x) + \cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x} + e^x + e^{-x}) = e^x$$

بنابراین طرف اول برابر است با e^{nx} و به همین ترتیب می توان نشان داد که طرف دوم نیز برابر e^{nx} است.

۳. ۷. توابع هذلولوی معکوس

چون توابع e^x و e^{-x} توابعی معکوس پذیر هستند، توابع $\sinh(x)$ ، $\cosh(x)$ ، $\tanh(x)$ و $\coth(x)$ نیز معکوس پذیر هستند و معکوس آنها به صورت زیر تعریف می شود:

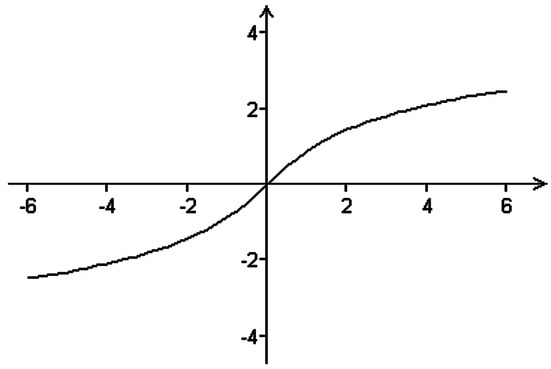
الف) $y = \sinh^{-1}(x) \Leftrightarrow x = \sinh y$

ب) $y = \cosh^{-1}(x) \Leftrightarrow x = \cosh y$

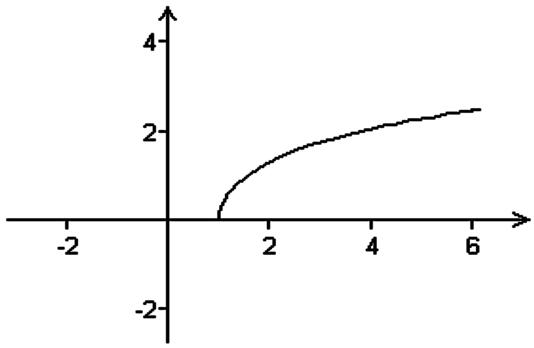
ج) $y = \tanh^{-1}(x) \Leftrightarrow x = \tanh y$

د) $y = \coth^{-1}(x) \Leftrightarrow x = \coth y$

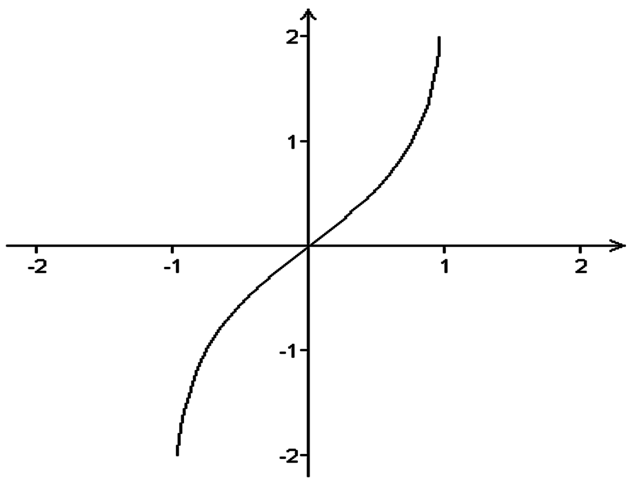
نمودار این توابع به صورتهای زیر هستند:



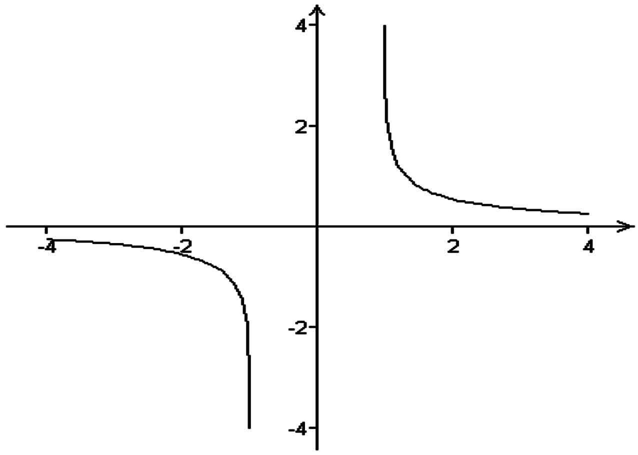
شکل (۱۶) نمودار $y = \sinh^{-1}(x)$



شکل (۱۷) نمودار $y = \cosh^{-1}(x)$



شکل (۱۸) نمودار $y = \tanh^{-1}(x)$



شکل (۱۹) نمودار $y = \coth^{-1}(x)$

می توان برای توابع فوق روابطی بر حسب تابع لگاریتم طبیعی بدست آورد:

$$1)\quad y = \sinh^{-1}(x) \;\Rightarrow\; x = \sinh y = \frac{e^{y} - e^{-y}}{2} \;\Rightarrow 2x = e^{y} - e^{-y} \;\Rightarrow 2x = e^{y} - \frac{1}{e^{y}}$$

$$\Rightarrow\; e^{2y} - 2xe^{y} - 1 = 0 \;\Rightarrow\; e^{y} = x + \sqrt{x^{2}+1} \;\Rightarrow\; y = \ln(x + \sqrt{x^{2}+1})$$

$$\sinh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^{2}+1}) \qquad -\infty < x < \infty$$

$$2)\quad y = \cosh^{-1}(x) \;\Rightarrow\; x = \cosh y = \frac{e^{y} + e^{-y}}{2} \;\Rightarrow 2x = e^{y} + e^{-y} \;\Rightarrow 2x = e^{y} + \frac{1}{e^{y}}$$

$$\Rightarrow\; e^{2y} - 2xe^{y} + 1 = 0 \;\Rightarrow\; e^{y} = x + \sqrt{x^{2}-1} \;\Rightarrow\; y = \ln(x + \sqrt{x^{2}-1})$$

$$\cosh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^{2}-1}) \qquad x \geq 1$$

$$3)\quad y = \tanh^{-1}(x) \;\Rightarrow\; x = \tanh y = \frac{e^{y} - e^{-y}}{e^{y} + e^{-y}} \;\Rightarrow x(e^{y} + e^{-y}) = e^{y} - e^{-y}$$

$$\Rightarrow x(e^{y} + \frac{1}{e^{y}}) = e^{y} - \frac{1}{e^{y}} \;\Rightarrow\; x(e^{2y} + 1) = e^{2y} - 1 \;\Rightarrow\; e^{2y} = \frac{1+x}{1-x}$$

$$\Rightarrow\; 2y = \ln\frac{1+x}{1-x} \;\Rightarrow\; y = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} \qquad |x| < 1$$

بطور مشابه بدست می آوریم:

$$\coth^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1} = \tanh^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) \qquad |x| > 1$$

مثال ۳۸ : عبارات زیر را محاسبه کنید.

$$1)\quad y = \cosh^{-1}(\sec\frac{\pi}{3}) = \cosh^{-1}\left(\frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}}\right) = \cosh^{-1}(2) = \ln(2+\sqrt{3})$$

$$2)\quad y=\sinh^{-1}(\sin\frac{\pi}{4})=\sinh^{-1}(\frac{\sqrt{2}}{2})=\ln(\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{\frac{3}{2}})=\ln(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}})$$

$$3)\quad y=\tanh^{-1}(\cos\frac{2\pi}{3})=\tanh^{-1}(\frac{-1}{2})=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}\right)=-\frac{1}{2}\ln 3$$

مشتق توابع هذلولوی معکوس را می توان با استفاده از قاعده زنجیره ای بدست آورد:

$$1)\quad y=\sinh^{-1}(u)\ \Rightarrow\ u=\sinh y\ \Rightarrow\ \frac{du}{dx}=\frac{du}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\cosh y\cdot\frac{dy}{dx}\qquad(\cosh^2 y-\sinh^2 y=1)$$

$$\Rightarrow\ \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$2)\quad y=\cosh^{-1}(u)\ \Rightarrow\ u=\cosh y\ \Rightarrow\ \frac{du}{dx}=\frac{du}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\sinh y\cdot\frac{dy}{dx}\qquad(\cosh^2 y-\sinh^2 y=1)$$

$$\Rightarrow\ \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{u^2-1}}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$3)\quad y=\tanh^{-1}(u)\ \Rightarrow\ u=\tanh y\ \Rightarrow\ \frac{du}{dx}=\frac{du}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=(1-\tanh^2 y)\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow\ \frac{dy}{dx}=\frac{1}{1-u^2}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$4)\quad y=\coth^{-1}(u)=\tanh^{-1}(\frac{1}{u})\ \Rightarrow\ \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{-1}{u^2}}{1-\left(\frac{1}{u}\right)^2}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{1}{1-u^2}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$\Rightarrow\ \frac{dy}{dx}=\frac{1}{1-u^2}\cdot\frac{du}{dx}$$

مثال ۳۹: مشتق توابع زیر را بیابید.

$$1)\quad y=\sinh^{-1}(\sqrt{x})\ \Rightarrow\ \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1+x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x^2+x}}$$

$$2)\quad y=\cosh^{-1}(\sec x)\ \ (0\le x<\frac{\pi}{2})\Rightarrow\ \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{\sec^2 x-1}}\cdot\sec x\,\tan x=\frac{\sec x\,\tan x}{\tan x}=\sec x$$

$$3)\quad y=\tanh^{-1}[\ln(x+1)]\ \Rightarrow\ \frac{dy}{dx}=\frac{1}{1-[\ln(x+1)]^2}\cdot\frac{1}{x+1}=\frac{1}{(x+1)(1-[\ln(x+1)]^2)}$$

۳. ۷. ۱. انتگرالهایی که جوابشان توابع هذلولوی معکوس می باشند:

ارزش اصلی توابع هذلولوی در مفید بودن آنها در انتگرال گیری نهفته است. فرمولهای زیر بااستفاده از مشتق این توابع بدست آمده اند:

$$1)\ \int \frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}} = \sinh^{-1}(\frac{u}{a})+c$$

$$2)\ \int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \cosh^{-1}(\frac{u}{a})+c$$

$$3)\ \int \frac{du}{a^2-u^2} = \begin{cases} \frac{1}{a}\tanh^{-1}(\frac{u}{a})+c & |u|<a \\ \frac{1}{a}\coth^{-1}(\frac{u}{a})+c & |u|>a \end{cases}$$

مثال ۴۰: انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

$$1)\ \int \frac{du}{\sqrt{17+8x+x^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{1+(x+4)^2}} = \sinh^{-1}(x+4)+c$$

$$2)\ \int \frac{du}{\sqrt{4x+4x^2-8}} = \int \frac{du}{\sqrt{(2x+1)^2-9}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u^2-9}} = \frac{1}{2}\cosh^{-1}(\frac{u}{3})+c = \frac{1}{2}\cosh^{-1}(\frac{2x+1}{3})+c$$

$$u=2x+1 \rightarrow du=2dx$$

$$3)\ \int_{\ln 6}^{\ln 9} \frac{e^x dx}{25-e^{2x}} = \int_6^9 \frac{du}{25-u^2} = \frac{1}{5}\coth^{-1}(\frac{u}{5})\Big|_6^9 = \frac{1}{5}\coth^{-1}(\frac{9}{5}) - \frac{1}{5}\coth^{-1}(\frac{6}{5})$$

$$u=e^x \rightarrow du=e^x dx$$

$$= \frac{1}{10}\ln\left(\frac{\frac{9}{5}+1}{\frac{9}{5}-1}\right) - \frac{1}{10}\ln\left(\frac{\frac{6}{5}+1}{\frac{6}{5}-1}\right) = \frac{1}{10}\ln(\frac{14}{4}) - \frac{1}{10}\ln(11) = \frac{1}{10}\ln(\frac{7}{22})$$

تمرین

در تمرینهای زیر معین کنید که تابع داده شده معکوس پذیر است یا نه. سپس در صورت معکوس پذیری، معکوس آن را بدست آورید.

1) $f(x)=\frac{1}{2}x^3+1$ 2) $f(x)=\sqrt{x+3}$

3) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ 4) $f(x)=|2x-3|$

5) $f(x)=3\sqrt[3]{x}+1$ 6) $f(x)=|x|+x$

7) $f(x)=\frac{3x+1}{2x+4}$ 8) $f(x)=\frac{x-3}{x+1}$

9) $f(x)=1-\cos x$ $0\le x\le \pi$

10) $f(x)=2\sin x$ $-\frac{\pi}{2}\le x\le \frac{\pi}{2}$

در تمرینهای زیر بدون محاسبه تابع معکوس، مشتق تابع معکوس را در نقاط خواسته شده بیابید.

11) $f(x)=\sqrt{3x+1}$ $(f^{-1})'(1)$

12) $f(x)=4x^3+2x$ $(f^{-1})'(6)$

13) $f(x)=\frac{1}{2}\cos^2 x$ $0\le x\le \frac{\pi}{2}$ $(f^{-1})'(\frac{1}{4})$

14) $f(x)=\int_x^2 t\,dt$ $x<0$ $(f^{-1})'(-6)$

15) $f(x)=\int_2^x \sqrt{9+t^4}\,dt$ $(f^{-1})'(0)$

مقدار تابع داده شده را پیدا کنید.

16) $\sin^{-1}(\frac{-1}{2})$ 17) $\cos^{-1}(-\frac{1}{2})$ 18) $\cot^{-1}(-\frac{\sqrt{3}}{3})$ 19) $\tan^{-1}(\sqrt{3})$

20) $\sin^{-1}(\frac{-\sqrt{3}}{2})$ 21) $\cos^{-1}(-\frac{\sqrt{2}}{2})$ 22) $\cot^{-1}(-1)$ 23) $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$

۲۴) فرض کنید $y=\sin^{-1}(\frac{1}{2})$ مفروض است، مطلوب است.

$\cos y$, $\tan y$, $\cot y$, $\sec y$, $\csc y$

۲۵) فرض کنید $y=\tan^{-1}(-2)$ مفروض است، مطلوب است.

$\cos y$, $\sin y$, $\cot y$, $\sec y$, $\csc y$

مقدار دقیق کمیت داده شده را پیدا کنید.

26) $\cos^{-1}(\sin\frac{\pi}{6})$ 27) $\cos\left[\sin^{-1}(\frac{-1}{2})+\sin^{-1}(\frac{1}{4})\right]$

28) $\tan^{-1}(\tan\frac{\pi}{3})$ 29) $\cot\left[\sin^{-1}(-\frac{\sqrt{2}}{2})\right]$

30) $\sin\left[\cos^{-1}(-\frac{2}{3})+\sin^{-1}(\frac{-1}{3})\right]$

31) $\cos\left[\sin^{-1}\frac{2}{3}+\cos^{-1}\frac{1}{3}\right]$

32) $\tan\left[\tan^{-1}(-\frac{2}{5})+\cos^{-1}(-\frac{1}{\sqrt{2}})\right]$

33) $\tan\left[\tan^{-1}\frac{3}{\sqrt{10}}+\tan^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}\right]$

34) $\cot(\sin^{-1}(-1))$

مشتق توابع زیر را بدست آورید.

35) $f(x)=x^2\sin^{-1}(x^2)$ 36) $f(x)=2\tan^{-1}\frac{x}{3}$

37) $f(x)=\sin^{-1}(\frac{3x-1}{x+5})$ 38) $f(x)=\cos^{-1}x+4\sin^{-1}\frac{x}{2}$

39) $f(x)=\cot^{-1}e^x$ 40) $f(x)=\ln(\cot^{-1}(\sqrt{x^2+4}))$

41) $f(x)=\sqrt{x}\cos^{-1}(x^2)+\sin^{-1}\sqrt{x}$

42) $f(x)=x\cot^{-1}x+\ln\sqrt{1+x^2}$

43) $f(x)=\ln\sqrt[3]{x^2+1}$ 44) $f(x)=\ln\frac{x+2}{x+7}$

45) $f(x)=\tan^3 x\left(\frac{3x-1}{x^5}\right)\sin^{-1}2x(\sqrt{x+5})$

46) $f(x)=\sin^2(\ln(x))$ 47) $f(x)=(x+1)\ln(\ln(x))$

48) $f(x)=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 49) $f(x)=\sqrt[3]{\ln(x^3)}$

50) $f(x)=e^{\cos x}$ 51) $f(x)=xe^{-\ln x+\tan^{-1}2x}$

52) $f(x)=e^{\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}}$ 53) $f(x)=\ln\left(\frac{e^{4x}-1}{e^{4x}+1}\right)$

54) $f(x)=4^{3\cos x}$ 56) $f(x)=2^{5x}3^{4x^2}$

57) $f(x)=Log_3(\tan^{-1}x)$ 58) $f(x)=Log(Log(x+1))$

59) $f(x)=x^{\sqrt{x}}$ 60) $f(x)=(\cos x)^{\sin x}$

61) $f(x)=(\ln x)^{\ln x}$ 62) $f(x)=(x)^{x^x}$

63) $f(x)=\coth(\ln x)$ 64) $f(x)=\sin^{-1}(\tanh x^2)$

65) $f(x)=\ln(\coth(3x)-\sinh(x-2))$

با مشتق گیری ضمنی مقدار y' را تعیین کنید :

66) $\ln(2x+y)+2yx=3$ 67) $x^2y+\ln(xy^2)=4x$

68) $\sin(x+y)+\ln(x-y)=x$ 69) $\ln(x+y)-\ln(xy)=4$

70) $e^y=\ln(x^3+3y)$ 71) $ye^{2x}+xe^{2y}=1$

73) $y^2e^{2x}+xy^3=1$ 74) $x^y=e^{x-y}$

حاصل انتگرالهای زیر را بدست آورید.

75) $\int\frac{dx}{\sqrt{5-3x^2}}$ 76) $\int\frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$

77) $\int\frac{\cos x\,dx}{\sqrt{4-\sin^2 x}}$ 78) $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

79) $\int\frac{dx}{x^2-6x+18}$ 80) $\int\frac{dx}{x^2+2x+5}$

81) $\int\frac{e^x\,dx}{e^{2x}-6e^x+13}dx$ 82) $\int\frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$

83) $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2}$ 84) $\int\frac{dx}{\sqrt{6+9x-x^2}}$

85) $\int\frac{4x}{x^2+3}dx$ 86) $\int\frac{4\ln^3 x+3}{x[\ln x^4+3\ln(x)]}dx$

87) $\int\frac{3x^2+2}{x^3+2x}dx$ 89) $\int\frac{1+\ln(x)}{5+x\ln(x)}dx$

90) $\int\frac{2x+1}{x+3}dx$ 91) $\int\frac{3x^5-2x^3+5x^2-2}{x^3+1}dx$

92) $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+\sin\sqrt{x})}dx$

93) $\int \frac{dx}{1+e^x}$

94) $\int \frac{e^{3x}}{(1-2e^{3x})^2}dx$

95) $\int \frac{e^{2x}}{3+e^x}dx$

96) $\int x^2 e^{2x^3}\,dx$

97) $\int \frac{1}{\cos^2 x}e^{\tan x}dx$

98) $\int \frac{10^{\ln x^2}}{x}dx$

99) $\int \frac{xe^{6x^2}}{\sqrt{1+e^{6x^2}}}dx$

100) $\int (x+1)e^x 7^{xe^x}\,dx$

101) $\int \frac{10^x+1}{10^x-1}dx$

102) $\int \frac{2^x}{\sqrt{3\cdot 2^x+4}}dx$

103) $\int \tanh(\ln x)dx$

104) $\int \tanh^3(x)\sec h^2(x)dx$

105) $\int \sinh^3(x)\cosh^2(x)\,dx$

حدود زیر را محاسبه کنید.

106) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-x}-2\ln(1+x)}{x\sin x}$

107) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(5^x-1)(4^x-1)}{(3^x-1)(6^x-1)}$

108) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln(3^x+1)}{\ln(2^x+1)}$

109) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{\ln(3^x+1)}{\ln(2^x+1)}$

110) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\ln\left(\frac{x+3}{x-3}\right)$

111) $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}dt$

112) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x^{\frac{1}{x}})$

113) $\lim\limits_{x\to +\infty} (e^x+x)^{\frac{2}{x}}$

114) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

115) $\lim\limits_{x\to 0} \left[(\cos x)e^{\frac{x^2}{2}}\right]^{\frac{4}{x^4}}$

116) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^x$

117) $\lim\limits_{x\to 0^+} (x)^{x^x}$

118) $\lim\limits_{x\to 0} (1+\sin x)^{\csc x}$

119) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$

۱۲۰) هرگاه $\underset{x\to\infty}{Lim}\left(\frac{nx+1}{nx-1}\right)^x=9$، n را تعیین کنید.

۱۲۱) فرض کنید $f(x)=\int_1^x e^{3t}\sqrt{9t^4+1}dt$ و $g(x)=x^n e^{3x}$. اگر $\underset{x\to\infty}{Lim}\left(\frac{f'(x)}{g'(x)}\right)=1$، n را بیابید.

درستی روابط زیر را تحقیق کنید.

122) $\sinh^2(x)+\cosh^2(x)=\cosh(2x)$

123) $\cosh^2(x)=\frac{\cosh 2x+1}{2}$

124) $\sinh^2(x)=\frac{\cosh 2x-1}{2}$

125) $\tanh(x+y)=\frac{\tanh(x)+\tanh(y)}{1+\tanh(x)\tanh(y)}$

126) $\sinh^2(x)-\sinh^2(y)=\sinh(x+y)\sinh(x-y)$

127) $\sinh(3x)=3\sinh(x)+4\sinh^3(x)$

128) $\cosh(3x)=4\cosh^3(x)+3\cosh(x)$

مقادیر زیر را حساب کنید.

129) $\cosh^{-1}\left[\frac{1}{2}\left(e+\frac{1}{e}\right)\right]$

130) $\coth^{-1}(2\cosh(0))$

131) $\sinh(3\sinh^{-1}(\frac{1}{4}))$

مشتق توابع زیر را بیابید.

132) $y=x^2\cosh^{-1}(x^2)$

133) $y=\tanh x+x\coth^{-1}(2\cosh x)$

134) $y=\tanh^{-1}(\sec(e^x))$

135) $y=x\sinh^{-1}x-\ln(\tanh^{-1}x)$

136) $y=\frac{\sinh^{-1}(\tan x)}{\tanh x}$

137) $y=(\coth^{-1}(x^2+1))^3$

انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

138) $\int \frac{x^{3}}{\sqrt{x^{4}-1}} dx$

139) $\int \frac{1}{x\sqrt{(\ln x)^{2}+16}} dx$

140) $\int \frac{\sin x}{\cos^{2} x+2\cos x-8} dx$

141) $\int_{1}^{2} \frac{dt}{\sqrt{t^{2}-4t}}$

142) $\int_{3}^{4} \frac{7^{t}\, dt}{49^{t}-1}$

فصل چهارم

روشهای انتگرال گیری

در فصل های قبل برخی روشهای انتگرال گیری را توضیح دادیم. در این فصل روشهای دیگری را برای محاسبه انتگرال شرح می دهیم.

۴. ۱. انتگرال گیری به روش جانشینی توابع مثلثاتی

اگر تابع زیر علامت انتگرال شامل عباراتی به فرم $\sqrt{a^2-u^2}$، $\sqrt{a^2+u^2}$ و $\sqrt{u^2-a^2}$ که $a>0$، باشد. می توان از تغییر متغیر مناسبی استفاده کرده و انتگرال را به صورت انتگرال توابع مثلثاتی نوشت. در زیر اینگونه انتگرالها را در حالتهای مختلف بررسی می کنیم.

حالت اول : اگر انتگرال شامل عباراتی به صورت $\sqrt{a^2-u^2}$ باشد.

در این حالت از تغییر متغیر $u=a\sin\theta$ که $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ استفاده می کنیم و داریم:

$$\sqrt{a^2-u^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}=\sqrt{a^2(1-\sin^2\theta)}=a\cos\theta \quad (a>0 \;\;,\;\; -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2})$$

همچنین داریم

$$du=a\cos(\theta)d\theta \qquad , \qquad \theta=\sin^{-1}\frac{u}{a}$$

تذکر: علت انتخاب θ در فاصله $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ آن است که در انتهای حل مسئله باید بجای θ مقدار اصلی آن را قرار داد که چون سینوس در این فاصله معکوس پذیر است لذا θ را در این فاصله انتخاب کردیم. واضح است که اگر $u \geq 0$ باشد، θ در فاصله $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ و اگر $u < 0$ باشد، θ در فاصله $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ انتخاب می شود.

مثال ۱ : حاصل انتگرال $\int\sqrt{1-x^2}dx$ را بدست آورید.

حل: قرار می دهیم $x=\sin(\theta)$ لذا

$$x>0 \Rightarrow 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2} \Rightarrow dx=\cos\theta d\theta$$
$$x<0 \Rightarrow \frac{-\pi}{2}\leq\theta\leq 0 \Rightarrow dx=\cos\theta d\theta$$

و در نتیجه خواهیم داشت:

$$\int\sqrt{1-x^2}dx=\int\sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta d\theta=\int\cos^2\theta d\theta=\frac{1}{2}\int(1+\cos 2\theta)d\theta$$
$$=\frac{1}{2}(\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta)+c=\frac{1}{2}(\theta+\sin\theta\cos\theta)+c$$

داریم $\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-x^2}$ و بنابراین

$$\int\sqrt{1-x^2}dx=\frac{1}{2}(\sin^{-1}x+x\sqrt{1-x^2})+c$$

مثال ۲ : حاصل انتگرال زیر را بدست آورید:

$$I=\int\frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx$$

حل: قرار می دهیم $x=2\sin(\theta)$ که

$$x>0 \Rightarrow 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2} \Rightarrow dx=\cos\theta d\theta$$
$$x<0 \Rightarrow \frac{-\pi}{2}\leq\theta\leq 0 \Rightarrow dx=\cos\theta d\theta$$

و در نتیجه

$$\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4-4\sin^2\theta}=2\sqrt{1-\sin^2\theta}=2\cos\theta$$
$$I=\int\frac{2\cos\theta}{4\sin^2\theta}\times 2\cos\theta d\theta=\int\cot^2\theta d\theta=\int(1+\cot^2\theta-1)d\theta=-\cot\theta-\theta+c$$

داریم $\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}{\frac{x}{2}}=\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$ و بنابراین:

$$I = \frac{-\sqrt{4-x^2}}{x} - \sin^{-1}\frac{x}{2} + c$$

مثال ۳ : حاصل انتگرال زیر را بدست آورید:

$$I = \int \frac{dx}{(5-4x-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

حل : انتگرال را بفرم زیر می توان نوشت:

$$I = \int \frac{dx}{(9-(x+2)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

فرض کنیم $x+2 = 3\sin\theta$ **که**

$$x > -2 \Rightarrow 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \;\; \Rightarrow dx = 3\cos\theta d\theta$$

$$x < -2 \Rightarrow \frac{-\pi}{2} \le \theta \le 0 \;\; \Rightarrow dx = 3\cos\theta d\theta$$

و در نتیجه

$$\left[9-(x+2)^2\right]^{\frac{3}{2}} = \left[9-9\sin^2\theta\right]^{\frac{3}{2}} = 27\cos^3\theta$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{3\cos\theta d\theta}{27\cos^3\theta} = \frac{1}{9}\int \sec^2\theta d\theta = \frac{1}{9}\tan\theta + c \Rightarrow I = \frac{1}{9}\cdot\frac{x+2}{\sqrt{5-4x-x^2}} + c$$

مثال ۴ : حاصل انتگرال زیر را بدست آورید.

$$I = \int \frac{\sec^2 x \; dx}{(4-\tan^2 x)^{\frac{3}{2}}}$$

حل : فرض کنید $u = \tan x$ **آنگاه** $du = \sec^2 x\, dx$ **و**

$$I = \int \frac{du}{(4-u^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{du}{(4-u^2)\sqrt{4-u^2}}$$

حال قرار می دهیم $u = 2\sin\theta$ ،

$$u > 0 \Rightarrow 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \;\; \Rightarrow du = 2\cos\theta d\theta$$

$$u < 0 \Rightarrow \frac{-\pi}{2} \le \theta \le 0 \;\; \Rightarrow du = 2\cos\theta d\theta$$

بنابراین

$$I = \int \frac{2\cos\theta d\theta}{4\cos^2\theta(2\cos\theta)} = \frac{1}{4}\int \sec^2\theta d\theta = \frac{1}{4}\tan\theta + c = \frac{1}{4}\frac{\tan x}{\sqrt{4-\tan^2 x}} + c$$

زیرا $\sin\theta=\frac{u}{2}$ و در نتیجه $\cos\theta=\frac{1}{2}\sqrt{4-u^2}$ و $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\tan x}{\sqrt{4-\tan^2 x}}$.

حالت دوم : اگر انتگرال شامل عباراتی به صورت $\sqrt{a^2+u^2}$ باشد.

از تغییر متغیر $u=a\tan\theta$ ، $\frac{-\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ استفاده می کنیم . در این صورت

$$\sqrt{a^2+u^2}=\sqrt{a^2+a^2\tan^2\theta}=\sqrt{a^2(1+\tan^2\theta)}=\sqrt{a^2\sec^2\theta}=a\sec\theta$$

همچنین داریم

$$dr=a\sec^2\theta d\theta \quad , \quad \theta=\tan^{-1}\frac{u}{a}$$

تذکر: علت انتخاب θ در فاصله $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ آن است که تابع تانژانت در این فاصله معکوس پذیر است و اگر $u>0$ و θ در فاصله $(0,\frac{\pi}{2})$ و اگر $u<0$ باشد θ در فاصله $(-\frac{\pi}{2},0)$ انتخاب می شود.

مثال ۵ : حاصل انتگرال زیر را بدست آورید:

$$I=\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$$

حل : فرض کنیم $x=\tan\theta$ و

$$x>0\Rightarrow 0\le\theta<\frac{\pi}{2}\ \Rightarrow dx=\sec^2\theta d\theta$$

$$x<0\Rightarrow \frac{-\pi}{2}<\theta\le 0\ \Rightarrow dx=\sec^2\theta d\theta$$

و در نتیجه

$$I=\int\frac{\sec^2\theta d\theta}{\tan\theta\sqrt{\tan^2\theta+1}}=\int\frac{\sec^2\theta d\theta}{\tan\theta\sec\theta}=\int\frac{\sec\theta}{\tan\theta}d\theta=\int\frac{1}{\sin\theta}d\theta=\int\csc\theta d\theta$$
$$=\ln\left|\csc(\theta)-\cot\theta\right|+c$$

که

$$\int\csc\theta d\theta=\int\frac{\csc\theta(\csc\theta-\cot\theta)}{\csc\theta-\cot\theta}d\theta=\int\frac{1}{u}du=\ln|u|+c=\ln|\csc\theta-\cot\theta|+c$$
$$u=\csc\theta-\cot\theta\to du=(-\csc\theta\cot\theta+\csc^2\theta)d\theta=\csc\theta(\csc\theta-\cot\theta)d\theta$$

(رابطه فوق را به عنوان یک فرمول انتگرال گیری به خاطر بسپارید.)

حال داریم $\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}=\frac{1}{x}$ و $\csc(\theta)=\sqrt{1+\cot^2\theta}=\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}$ بنابراین

$$I = \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}\right| + c$$

مثال ۶ : مقدار انتگرال معین زیر را به دست آورید:

$$I = \int_{\sqrt{3}}^{3\sqrt{3}} \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+9}}dx$$

حل: فرض کنیم $x = 3\tan\theta$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ زیرا $x > 0$ است. بنابراین $dx = 3\sec^2\theta\, d\theta$ و در نتیجه

$$\sqrt{x^2+9} = \sqrt{9\tan^2\theta + 9} = 3\sqrt{\tan^2\theta + 1} = 3\sec\theta$$

$$x = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \;,\quad x = 3\sqrt{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{3\sec^2\theta}{9\tan^2\theta(3\sec\theta)}d\theta = \frac{1}{9}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}d\theta = \frac{1}{9}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cot\theta\cdot\csc\theta \; d\theta$$

$$= -\frac{1}{9}\csc\theta\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{9}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} - 2\right) = \frac{-2\sqrt{3}}{27} + \frac{2}{9}$$

حالت سوم: اگر انتگرال شامل عبارتی بصورت $\sqrt{u^2-a^2}$ باشد. از تغییر متغیر $u = a\sec\theta$ که θ در فاصله $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ قرار دارد، استفاده می کنیم. اگر $u \ge a$ باشد، θ در فاصله $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ و اگر $u \le -a$ باشد، θ در فاصله $\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ انتخاب می شود و داریم

$$\sqrt{u^2-a^2} = \sqrt{a^2\sec^2\theta - a^2} = \sqrt{a^2(\sec^2\theta - 1)} = a\tan\theta$$

$$du = a\sec\theta\tan\theta\, d\theta$$

اگر $u \ge a$ باشد آنگاه $\theta = \sec^{-1}\frac{u}{a}$ و اگر $u \le -a$ باشد آنگاه $\theta = 2\pi - \sec^{-1}\frac{u}{a}$.

مثال ۷ : انتگرال زیر را حل کنید.

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{4x+x^2}}$$

حل: انتگرال را می توان به شکل $I = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2-4}}$ نوشت.

فرض کنیم $x+2 = 2\sec(\theta)$. اگر $x \ge 2$ آنگاه $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$ و اگر $x \ge 2$ آنگاه $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$

بنابراین $dx = 2\sin\theta\tan\theta d\theta$ و در نتیجه

$$\sqrt{(x+2)^2-4} = \sqrt{4\sec^2\theta - 4} = 2\sqrt{\tan^2\theta} = 2\tan\theta$$

$$\Rightarrow I=\int\frac{2\sec\theta\tan\theta}{\tan\theta}d\theta=\int\sec\theta\,d\theta=\ln\left|\sec\theta+\tan\theta\right|+c=\ln\left|\frac{x+2}{2}+\frac{\sqrt{4x+x^2}}{2}\right|+c$$

$$\left(\tan\theta=\sqrt{\sec^2\theta-1}=\sqrt{\left(\frac{x+2}{2}\right)^2-1}=\frac{\sqrt{(x+2)^2-4}}{2}=\frac{\sqrt{4x+x^2}}{2}\right)$$

انتگرال $\int\sec\theta\,d\theta=\ln\left|\sec\theta+\tan\theta\right|+c$ مشابه انتگرال $\int\csc\theta\,d\theta=\ln\left|\csc\theta-\cot\theta\right|+c$ که در مثال ۵ محاسبه شد، بدست می آید. این انتگرال را نیز به عنوان یک فرمول به خاطر بسپارید.

۴. ۲. انتگرال گیری به روش جزء به جزء

روش جزء به جزء، از انتگرال گیری رابطه دیفرانسیلی زیر بدست می آید:

$$d(uv)=udv+vdu$$

از طرفین رابطه انتگرال می گیریم،

$$\int d(uv)=\int udv+\int vdu\Rightarrow\int udv=uv-\int vdu$$

تذکر: اگر انتگرال شامل توابع مثلثاتی معکوس، توابع نمایی و لگاریتمی یا حاصل ضرب توابع مختلفی که مشتق یکدیگر نیستند، باشد آن را می توان از روش جزء به جزء حل کرد. مثلا توابعی بصورت زیر:

$$\int x\tan^{-1}xdx\quad,\quad\int x\sin xdx\quad,\quad\int xe^xdx\quad,\quad\int\ln xdx$$

مثال ۸ : انتگرال های زیر را حل کنید.

1) $\int x\sin xdx=-x\cos x-\int(-\cos x)dx=-x\cos x+\sin x+c$

$u=x\quad\Rightarrow du=dx$

$dv=\sin xdx\quad\Rightarrow v=-\cos x$

2) $\int\ln xdx=x\ln x-\int x\cdot\frac{1}{x}dx=x\ln x-x+c$

$u=\ln x\Rightarrow du=\frac{1}{x}dx$

$dv=dx\Rightarrow v=x$

3) $\int\tan^{-1}xdx=x\tan^{-1}x-\int\frac{x}{1+x^2}dx=x\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)$

$u=\tan^{-1}x\quad,\quad dv=dx\Rightarrow\quad du=\frac{1}{1+x^2}\quad,\quad v=x$

تذکر: گاهی برای محاسبه یک انتگرال باید چندین بار از روش جزء به جزء استفاده کنیم.

مثال۹ : انتگرال زیر را حل کنید.

$$I=\int(x^2-2x+5)e^{-x}dx=-e^{-x}(x^2-2x+5)+2\int(x-1)e^{-x}dx$$
$$u=x^2-2x+5 \Rightarrow du=(2x-2)dx$$
$$dv=e^{-x}dx \Rightarrow v=-e^{-x}$$

بار دیگر از روش جزء به جزء برای حل انتگرال جدید استفاده می‌کنیم:

$$x-1=u \to dv=e^{-x}dx$$
$$du=dx \to v=-e^{-x}$$
$$\Rightarrow I_1=2\int(x-1)e^{-x}dx=-2e^{-x}(x-1)-2\int-e^{-x}dx$$
$$=-2xe^{-x}+c$$

بنابراین

$$I=-e^{-x}(x^2-2x+5)-2xe^{-x}+c$$

نکته: با استفاده از روش جزء به جزء از توانهای فرد توابع سکانت و کسکانت انتگرال می گیریم.

مثال۱۰ : انتگرال زیر را حل کنید.

$$I=\int\sec^3 x dx=\sec x\tan x-\int\sec x\tan^2 x dx=\sec x\tan x-\int\sec x(\sec^2 x-1)dx$$
$$\begin{cases}u=\sec x \Rightarrow du=\sec x\tan x dx\\ dv=\sec^2 x dx \Rightarrow v=\tan x\end{cases}$$
$$=\sec x\tan x-\int\sec^3 x dx+\int\sec x dx$$
$$=\sec x\tan x-I+\ln|\sec x+\tan x|$$
$$\Rightarrow 2I=\sec x\tan x-\ln|\sec x+\tan x|$$
$$\Rightarrow I=\frac{1}{2}\left(\sec x\tan x-\ln|\sec x+\tan x|\right)+c$$

سال ٦٤) مقدار انتگرال معین $I=\int_{-1}^{1}xe^x dx$ کدام است؟

۱) $e-\frac{1}{e}$ ۲) $\frac{2}{e}$ ۳) $2e$ ٤) $3e$

حل:

$$I=\int_{-1}^{1}xe^x dx=xe^x-\int_{-1}^{1}e^x dx=xe^x\Big|_{-1}^{1}-e^x\Big|_{-1}^{1}=e+\frac{1}{e}-(e-\frac{1}{e})=\frac{2}{e}$$
$$u=x \Rightarrow du=dx$$
$$e^x dx=dv \Rightarrow v=e^x$$

سال ٦٥) مقدار $\int_1^2 \ln(x)\,dx$ کدام است؟

۱) $-1+2\ln 2$ ۲) $-1+3\ln 2$ ۳) $2\ln 2$ ٤) π

حل:

$$\int_1^2 \ln(x)\,dx = x\ln(x)\Big|_1^2 - \int_1^2 dx = x\ln(x) - x\Big|_1^2 = 2\ln(2) - 2 + 1 = 2\ln 2 - 1$$

$$\begin{cases} u = \ln(x) \\ dx = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x}dx \\ v = x \end{cases}$$

سال ٦٦) مقدار انتگرال معین $\int_0^1 xe^x dx$ کدام است؟

۱) 0 ۲) 1 ۳) 2 ٤) 3

حل:

$$\int_0^1 xe^x dx = xe^x - e^x\Big|_0^1 = e - e - (-1) = 1$$

سال ٦٦) حاصل انتگرال $\int \arctan x\,dx$ کدام است؟

۱) $I = \int \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c$ ۲) $I = \int \arctan x - \ln(1+x^2) + c$

۳) $I = \arctan x - (1+x^2)\ln x + c$ ٤) هیچکدام

حل:

$$\begin{cases} u = \arctan x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{1+x^2}dx \\ v = x \end{cases}$$

$$I = \int \arctan x dx = x\arctan x - \int \frac{xdx}{1+x^2} = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c$$

سال ٦٩) انتگرال $I = \int \frac{xdx}{\cos^2 x}$ برابر کدامیک از عبارتهای زیر است؟

۱) $x\tan x + x$ ۲) $x\tan x + \cos x$ ۳) $x\tan x + \ln(\cos x)$ ٤) $x\cos x + \tan x$

حل:

$$\int \frac{xdx}{\cos^2 x} = x\tan x - \int \tan x dx = x\tan x + \ln(\cos x) + c$$

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = \frac{dx}{\cos^2 x} \Rightarrow v = \tan x$$

سال ۷۲)حاصل انتگرال $\int \ln(x^2)dx$ کدام است؟

۱) $x\ln x - x + c$ ۲) $2(x\ln x - x) + c$ ۳) $\ln(x - x^2) + c$ ٤) $\ln x - x^2 + c$

حل:

$$\int \ln(x^2)dx \quad \rightarrow \quad u = \ln(x^2) \Rightarrow du = \frac{2x}{x^2}dx = \frac{2}{x}dx \quad , \quad dv = dx \Rightarrow v = x$$

$$\int \ln(x^2)dx = x\ln(x^2) - \int 2dx = x\ln(x^2) - 2x + c = 2x\ln x - 2x + c = 2(x\ln x - x) + c$$

سال ۷۳)مقدار $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$ کدام است؟

۱) $2-\pi$ ۲) $\pi - 2$ ۳) 2 ٤) -2

حل:

$$I = \int x^2 \sin(x)dx$$

$$u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx$$
$$\sin xdx = dv \Rightarrow v = -\cos(x) \qquad \Rightarrow I = -x^2\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\cos(x)dx$$

$$u = x \Rightarrow dv = dx$$
$$dv = \cos xdx \Rightarrow v = \sin(x) \qquad \Rightarrow I = 0 + 2\left[x\sin(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)dx \right]$$

$$\Rightarrow I = 2(x\sin(x) + \cos(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2(\frac{\pi}{2} - 1) = \pi - 2$$

سال ٧٤)حاصل انتگرال $\int e^x \sin(x)dx$ کدام است؟

۱) $e^x\sin(x) - e^x\cos x$ ۲) $\dfrac{e^x\sin(x) + e^x\cos x}{2}$

۳) $e^x\sin(x) + e^x\cos x$ ٤) $\dfrac{e^x\sin(x) - e^x\cos x}{2}$

حل:

$$\int e^x \sin xdx = -e^x\cos x + \int e^x\cos xdx$$

$$u = e^x \Rightarrow du = e^x dx$$

$$dv = \sin xdx \Rightarrow v = -\cos x$$

$$\int e^x\cos xdx = e^x\sin(x) - \int e^x \sin xdx$$

$$u = e^x \Rightarrow du = e^x dx$$

$$dv = \cos xdx \Rightarrow v = \sin x$$

$$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$$

$$\Rightarrow \quad \int e^x \sin x dx = \frac{e^x \sin x - e^x \cos x}{2}$$

سال ۷٤)حاصل $\int \frac{dx}{x\cos^2(1+\ln x)}$ کدام است؟

۱) $-\cot(1+\ln x)$ ۳) $\frac{1}{\cos(1+\ln x)}$

۲) $\tan(1+\ln x)$ ٤) $\frac{1}{\cos(1+\ln x)} + \tan(1+\ln x)$

حل:

$$u = 1+\ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx \Rightarrow \int \frac{du}{\cos^2(u)} = \tan(u) + c = \tan(1+\ln x) + c$$

سال ۷٦)حاصل $2\int_0^1 \tan^{-1} x dx$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{4} - \ln 2$ ۳) $\frac{\pi}{2} + \ln 2$ ۲) $\frac{\pi}{2} - \ln 2$ ٤) $\frac{\pi}{4} + \ln 2$

حل به عهده خواننده.

سال ۷۷) حاصل $\int_0^1 \ln(x^2+1)dx$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2} + \ln 2 - 1$ ۲) $\ln 2 + 2 - \frac{\pi}{2}$ ۳) $\ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$ ٤) $\ln 2 + 1 - \frac{\pi}{2}$

حل:

$$u = \ln(x^2+1) \Rightarrow du = \frac{2x}{x^2+1}dx$$

$$dv = dx \Rightarrow v = x$$

$$I = x\ln(x^2+1) - \int \frac{2x^2 dx}{x^2+1} = x\ln(x^2+1) - 2\int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx$$

$$= \left(x\ln(x^2+1) - 2x + 2\tan^{-1} x\right)\Big|_0^1 = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$$

۴. ۲. ۱. فرمولهای تحویل:

یکی از کاربردهای انتگرالگیری به روش جزء به جزء بدست آوردن فرمولهای تحویل می باشد که در زیر آنها را می آوریم.

مثال ۱۱: نشان دهید که:

برای هر $n = 2,3,\ldots$ ، $\int \sin^n(x)\,dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1}(x)\cos(x) + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}(x)\,dx$ (۱)

حل: با اختیار $dv = \sin(x)\,dx \quad , \quad u = \sin^{n-1}(x)$ خواهیم داشت

$$du = (n-1)\sin^{n-2}(x)\cos(x)\,dx \qquad , \qquad v = -\cos(x)$$

و در نتیجه

$$\int \sin^n(x)\,dx = -\sin^{n-1}(x)\cos(x) + (n-1)\int \sin^{n-2}(x)\cos^2(x)\,dx$$

اما $\cos^2(x) = 1-\sin^2(x)$ بنابراین :

$$\int \sin^n(x)\,dx = -\sin^{n-1}(x)\cos(x) + (n-1)\int \sin^{n-2}(x)\,dx - (n-1)\int \sin^n(x)dx$$

که در آن جمله آخر سمت راست شامل انتگرالی است که می خواهیم حساب کنیم. با بردن این جمله به طرف چپ معادله و تلفیق دو جمله شامل $\int \sin^n(x)\,dx$ فرمول زیر بدست می آید:

$$n\int \sin^n(x)\,dx = -\sin^{n-1}(x)\cos(x) + (n-1)\int \sin^{n-2}(x)\,dx$$

که با رابطه (۱) معادل است.

مثال ۱۲ : نشان دهید که $\int (\ln(x))^n\,dx = x(\ln(x))^n - n\int (\ln(x))^{n-1}dx$

حل :

$$u = (\ln(x))^n \quad , \quad dv = dx \quad , \quad du = n\,(\ln(x))^{n-1}\frac{1}{x}dx \quad , \quad v = x$$

$$\Rightarrow \int (\ln(x))^n\,dx = x\,(\ln(x))^n - n\int (\ln(x))^{n-1}dx$$

مثال ۱۳ : $\int \tan^n(x)\,dx$ را بر حسب n بحث کنید.

الف) $n=1 \Rightarrow \int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\ln\left|\cos x\right| + c$

ب) $n=2 \Rightarrow \int \tan^2 x\,dx = \int (1-1+\tan^2 x)\,dx = \int (1+\tan^2 x)\,dx + \int dx = \tan x - x + c$

ج) $n>2$

$$\int \tan^n(x)\,dx = \int (\sec^2(x)-1)\tan^{n-2}(x)dx = \int \left(\sec^2(x)\tan^{n-2}(x) - \tan^{n-2}(x)\right)dx$$

$$= \frac{\tan^{n-1}x}{n-1} - \int \tan^{n-2}(x)\,dx$$

مثال ۱۴ : $\int \sec^n(x)\,dx$ را بر حسب n بحث کنید.

الف) $n=1 \Rightarrow \int \sec x dx = \ln\left|\sec x + \tan x\right| + c$

ب) $n=2 \Rightarrow \int \sec^2(x)\,dx = \int 1+\tan^2(x)\,dx = \tan(x) + c$

ج) $n>2$

$$u = \sec^{n-2}x \Rightarrow du = (n-2)\sec^{n-3}(x)\sec(x)\tan(x)dx$$
$$dv = \sec^2 x dx \Rightarrow v = \tan(x)$$
$$\Rightarrow \int \sec^n(x)\,dx = \sec^{n-2}(x)\tan(x) - (n-2)\int \sec^{n-2}(x)\tan^2(x)\,dx$$
$$= \sec^{n-2}(x)\tan(x) - (n-2)\int \sec^{n-2}(x)(\sec^2(x)-1)\,dx$$
$$\Rightarrow \int \sec^n(x)\,dx = \sec^{n-2}(x)\tan(x) - (n-2)\int \sec^n(x)\,dx + (n-2)\int \sec^{n-2}(x)\,dx$$
$$\int \sec^n(x)\,dx = \frac{\sec^{n-2}(x)\tan(x)}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2}(x)\,dx$$

بنابراین انتگرالهای به شکل $\int \sec^n(x)\,dx$ در نهایت به $\int \sec(x)\,dx$ یا $\int \sec^2(x)\,dx$ ختم می شوند.

مثال ۱۵ : انتگرال زیر را محاسبه کنید:

$$\int \sec^3 x \tan^2 x dx = \int \sec^3 x(\sec^2 x - 1)dx = \int \sec^5 x dx - \int \sec^3 x dx$$
$$= \left(\frac{\sec^3 x \tan x}{4} + \frac{3}{4}\int \sec^3 x dx \right) - \int \sec^3 x dx$$
$$= \frac{\sec^3 x \tan x}{4} - \frac{1}{4}\int \sec^3 x dx$$
$$= \frac{\sec^3 x \tan x}{4} - \frac{1}{4}\left(\frac{\sec x \tan x}{2} + \frac{1}{2}\int \sec x dx \right)$$
$$= \frac{\sec^3 x \tan x}{4} - \frac{\sec x \tan x}{8} - \frac{1}{8}\ln|\sec x + \tan x| + c$$

۴. ۳. انتگرال گیری به روش تجزیه به کسرهای جزیی

از این روش برای توابع گویا استفاده می شود. هر تابع به شکل $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ که در آن $p(x)$ و $q(x)$ توابع چند جمله ای هستند را یک تابع گویا گویند. برای حل انتگرال هایی که شامل توابع گویا باشند و درجه صورت از درجه مخرج بزرگتر است ابتدا صورت را بر مخرج تقسیم می کنیم تا به صورت زیر در آید:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = p_1(x) + \frac{p_2(x)}{q(x)}$$

که $p_1(x)$ و $p_2(x)$ چند جمله ای هایی از درجه کمتر از $q(x)$ هستند. چون محاسبه انتگرال $p_1(x)$ به آسانی انجام می شود لذا روش کار را برای انتگرال هایی که شامل توابع گویای $\frac{p(x)}{q(x)}$ هستند که درجه صورت از درجه مخرج کوچکتر است، بیان می کنیم.

برای حل چنین انتگرال هایی مخرج کسر یعنی $q(x)$ را به عوامل اول تجزیه می کنیم. حالتهای زیر را در تجزیه $q(x)$ در نظر می گیریم:

حالت اول: در تجزیه $q(x)$ همه عوامل خطی، از مرتبه اول و غیر تکراری باشند. یعنی

$$q(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$$

در این حالت $\frac{p(x)}{q(x)}$ را هم ارز با عبارت زیر قرار می دهیم:

$$\frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2} + \cdots + \frac{A_n}{x - x_n}$$

که با مخرج مشترک گرفتن و متحد قرار دادن ضرایب توانهای هم درجه در طرفین می توان اعداد $A_n, \ldots, A_2, A_1$ را بدست آورد. چون تساوی برای هر x برقرار است، برای راحتی می توان ریشه های مخرج را در صورت های دو طرف تساوی قرار داد و ضرایب $A_n, \ldots, A_2, A_1$ را بدست آورد.

مثال ۱۶ : انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$I=\int\frac{dx}{(x-1)(x^2+5x+4)}$$

حل: همان طور که مشاهده می شود مخرج کسر یک چندجمله ای از درجه ۳ است که به صورت زیر تجزیه می شود:

$$(x-1)(x^2+5x+4)=(x-1)(x+1)(x+4)$$

بنا براین

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+5x+4)}=\frac{1}{(x-1)(x+1)(x+4)}\equiv\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{x+1}+\frac{A_3}{x+4}$$

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)(x+4)}\equiv\frac{A_1(x+1)(x+4)+A_2(x-1)(x+4)+A_3(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)(x+4)}$$

$$x=1\ \rightarrow 1=4A_1\rightarrow A_1=\frac{1}{4}$$

$$x=-1\rightarrow 1=-6A_2\rightarrow A_2=-\frac{1}{6}$$

$$x=-4\rightarrow 1=15A_3\rightarrow A_3=\frac{1}{15}$$

در نتیجه

$$I=\int\frac{dx}{(x-1)(x^2+5x+4)}=\frac{1}{4}\int\frac{1}{x-1}dx-\frac{1}{6}\int\frac{1}{x+1}dx+\frac{1}{15}\int\frac{1}{x+4}dx$$
$$=\frac{1}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln|x+1|+\frac{1}{15}\ln|x+4|+c$$

مثال ۱۷ : انتگرال زیر را حل کنید.

$$I=\int\frac{2x^2-7x+7}{x^3-6x^2+11x-6}dx$$

حل:

$$x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x-2)(x-3)\Rightarrow\frac{2x^2-7x+7}{x^3-6x^2+11x-6}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{x-2}+\frac{A_3}{x-3}$$

با روش فوق ضرایب A_3, A_2, A_1 به صورت زیر بدست می آیند:

$$A_1=1\quad,\quad A_2=2\quad,\quad A_3=-1$$

بنابراین

$$I=\int\frac{2x^2-7x+7}{x^3-6x^2+11x-6}dx=\int\frac{dx}{x-1}+2\int\frac{dx}{x-2}-\int\frac{dx}{x-3}$$
$$=\ln|x-1|+2\ln|x-2|-\ln|x-3|+c$$

حالت دوم: در تجزیه $q(x)$ همه عوامل خطی و از مرتبه اول بوده و برخی از آنها تکراری باشند. در این صورت برای عوامل غیر تکراری مشابه حالت قبل عمل می کنیم و اگر $(x-x_0)$ یکی از عواملی باشد که m بار تکرار شده، معادل با آن عبارت زیر را قرار می دهیم:

$$\frac{A_1}{x-x_0}+\frac{A_2}{(x-x_0)^2}+\cdots+\frac{A_n}{(x-x_0)^n}$$

ضرایب $A_1, A_2, \ldots, A_n$ مانند حالت قبل بدست می آیند.

مثال ۱۸ : انتگرال زیر را حل کنید.

$$I=\int\frac{dx}{(x-2)(x^2-x-2)}$$

حل:

$$(x-2)(x^2-x-2)=(x-2)(x-2)(x+1)=(x-2)^2(x+1)$$

$$\Rightarrow\frac{1}{(x-2)^2(x+1)}=\frac{A_1}{x-2}+\frac{A_2}{(x-2)^2}+\frac{B}{x+1}=\frac{A_1(x-2)(x+1)+A_2(x+1)+B(x-2)^2}{(x-2)^2(x+1)}$$

$$x=2\to 1=3A_2\to A_2=\frac{1}{3}$$

$$x=-1\to 1=9B\to B=\frac{1}{9}$$

برای بدست آوردن A_1 می توان یک مقدار دلخواه به جای x قرار داد. بطور مثال قرار می دهیم $x=0$. در این صورت

$$x=0\to 1=-2A_1+A_2-4B\to 1=-2A_1+\frac{1}{3}-4\times\frac{1}{9}\to A_1=-\frac{5}{9}$$

$$\Rightarrow I=\int\frac{1}{(x-2)^2(x+1)}dx=-\frac{5}{9}\int\frac{1}{x-2}dx+\frac{1}{3}\int\frac{1}{(x-2)^2}dx+\frac{1}{9}\int\frac{1}{x+1}dx$$

$$=-\frac{5}{9}\ln|x-2|-\frac{1}{3(x-1)}+\frac{1}{9}\ln|x+1|+c$$

مثال ۱۹ : انتگرال زیر را حل کنید.

$$I=\int\frac{2x^2-3x+3}{x^3-2x^2+x}dx$$

حل:

$$x^3-2x^2+x=x(x-1)^2\Rightarrow\frac{2x^2-3x+3}{x^3-2x^2+x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{D}{x-1}$$

$$\frac{2x^2-3x+3}{x(x-1)^2}=\frac{A(x-1)^2+Bx+Dx(x-1)}{x(x-1)^2}=\frac{(A+D)x^2+(-2A-D+B)x+A}{x(x-1)^2}$$

با معادل قرار دادن طرفین، معادلات زیر حاصل می‌شوند:

$$\begin{cases} A+D=2 \\ -2A-D+B=-3 \Rightarrow A=3, B=2, D=1 \\ A=3 \end{cases}$$

بنابراین

$$I=3\int \frac{dx}{x}+2\int \frac{dx}{(x-1)^2}-\int \frac{dx}{x-1}=3\ln|x|-\frac{2}{x-1}+\ln|x-1|+c$$

حالت سوم: در تجزیه $q(x)$ عوامل مرتبه دوم غیر قابل تجزیه و غیر تکراری وجود داشته باشد. در این صورت اگر ax^2+bx+c یک عامل مرتبه دوم غیر قابل تجزیه ($\Delta<0$) از $q(x)$ باشد، معادل با این عامل قرار می دهیم:

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} \qquad \text{یا} \qquad \frac{A(2ax+b)+B}{ax^2+bx+c}$$

مثال ۲۰ : حاصل انتگرال زیر را بدست آورید.

$$I=\int \frac{x+1}{x^2+3x+5}dx$$

حل:

$$\frac{x+1}{x^2+3x+5}=\frac{A(2x+3)+B}{x^2+3x+5}=\frac{2Ax+(3A+B)}{x^2+3x+5}\to A=\frac{1}{2} \quad , \quad B=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{2}\int \frac{2x+3}{x^2+3x+5}dx-\frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+3x+5}dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+3x+5\right|-\frac{1}{2}\int \frac{1}{(x+\frac{3}{2})^2+\frac{11}{2}}dx=\frac{1}{2}\left[\ln\left|x^2+3x+5\right|-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{11}}\tan^{-1}\left(\frac{x+\frac{3}{2}}{\sqrt{\frac{11}{2}}}\right)\right]+c$$

مثال ۲۱ : حاصل انتگرال زیر را بدست آورید.

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+3x+5)}$$

حل:

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+3x+5)}=\int\left(\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+3x+5}\right)dx$$

$$=\int \frac{A(x+1)(x^2+3x+5)+B(x^2+3x+5)+(Cx+D)(x+1)^2}{(x+1)^2(x^2+3x+5)}dx$$

$$=\int \frac{(A+C)x^3+(4A+B+2C+D)x^2+(8A+3B+C+2D)x+(5A+5B+D)}{(x+1)^2(x^2+3x+5)}dx$$

$$\begin{cases} A+C=0 \\ 4A+B+2C+D=0 \\ 8A+3B+C+2D=0 \\ 5A+5B+D=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 24+B+D=0 \\ 7A+3B+2D=0 \\ 5A+5B+D=1 \end{cases} \Rightarrow A=-\frac{1}{9}, B=\frac{1}{3}, D=-\frac{1}{9}, C=\frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow I=\int [\frac{-\frac{1}{9}}{x+1}+\frac{\frac{1}{3}}{(x+1)^2}+\frac{\frac{1}{9}x-\frac{1}{9}}{x^2+3x+5}]dx$$

$$=-\frac{1}{9}\ln|x+1|-\frac{1}{3(x+1)}+\frac{1}{18}\int \frac{2x+3-5}{x^2+3x+5}dx$$

$$=-\frac{1}{9}\ln|x+1|-\frac{1}{3(x+1)}+\frac{1}{18}\int \frac{2x+3}{x^2+3x+5}dx-\frac{1}{8}\int \frac{5}{x^2+3x+5}dx$$

$$=-\frac{1}{9}\ln|x+1|-\frac{1}{3(x+1)}+\frac{1}{18}\ln|x^2+3x+5|-\frac{5}{18}\int \frac{1}{(x+\frac{3}{2})^2+\frac{11}{4}}dx$$

$$=-\frac{1}{9}\ln|x+1|-\frac{1}{3(x+1)}+\frac{1}{18}\ln|x^2+3x+5|-\frac{5}{18}\cdot\frac{2}{\sqrt{11}}\tan^{-1}\left(\frac{x+\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{11}}{2}}\right)+c$$

$$=-\frac{1}{9}\ln|x+1|-\frac{1}{3(x+1)}+\frac{1}{18}\ln|x^2+3x+5|-\frac{5}{9\sqrt{11}}\tan^{-1}\left(\frac{2x+3}{\sqrt{11}}\right)+c$$

حالت چهارم: در تجزیه $q(x)$ عوامل مرتبه دوم غیر قابل تجزیه و تکراری وجود داشته باشد. در این صورت اگر $(ax^2+bx+c)^n$ یک عامل مرتبه دوم غیر قابل تجزیه ($\Delta<0$) از $q(x)$ باشد، معادل با این عامل قرار می دهیم:

$$\frac{A_1(2ax+b)+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2(2ax+b)+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{A_n(2ax+b)+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

و یا عبارت زیر را قرار می دهیم:

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

مثال ۲۲ : حاصل انتگرال زیر را بدست آورید.

$$I=\int \frac{(2x-1)dx}{(x^2+x+1)^2}$$

حل:

$$I=\int\frac{(2x-1)dx}{(x^2+x+1)^2}=\int\left(\frac{A_1(2x+1)+B_1}{x^2+x+1}+\frac{A_2(2x+1)+B_2}{(x^2+x+1)^2}\right)dx$$
$$=\int\left(\frac{2A_1x^3+(3A_1+B_1)x^2+(3A_1+B_1+2A_2)x+(A_1+B_1+A_2+B_2)}{(x^2+x+1)^2}dx\right)$$

با مساوی قرار دادن ضریب توانهای مساوی در طرفین خواهیم داشت:

$$A_1=B_1=0 \quad , \quad A_2=1 \quad , \quad B_2=-2$$

$$I=\int\frac{(2x-1)dx}{(x^2+x+1)^2}=\int\frac{(2x+1)-2}{(x^2+x+1)^2}dx$$
$$=\int\left(\frac{(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}-\frac{2}{(x^2+x+1)^2}\right)dx=-\frac{1}{x^2+x+1}-2\int\frac{1}{(x^2+x+1)^2}dx$$
$$=-\frac{1}{x^2+x+1}-2\int\frac{1}{\left((x+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}\right)^2}dx$$

انتگرال آخر را با استفاده از جانشینی مثلثاتی حل می کنیم:

$$\int\frac{1}{\left((x+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}\right)}dx=\int\frac{\sec^2\theta}{\tan^2\theta+\frac{1}{2}}d\theta=\sqrt{2}\tan^{-1}(\sqrt{2}\tan\theta)=\sqrt{2}\tan^{-1}\left(\sqrt{2}(x+\frac{1}{2})\right)$$
$$x+\frac{1}{2}=\tan\theta\rightarrow dx=\sec^2(\theta)d\theta$$
$$(x+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}=\tan^2\theta+\frac{1}{2}$$

۴.۴. انتگرال گیری از تابع گویای سینوس و کسینوس

برای محاسبه انتگرال توابع گویا از $\sin x$ و $\cos x$ می توان از تغییر متغیر $t=\tan\frac{x}{2}$ استفاده نمود. با توجه به این تغییر متغیر خواهیم داشت:

$$\sin x=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2} \quad , \quad \cos x=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$
$$dt=\frac{1}{2}(1+\tan^2\frac{x}{2})dx=\frac{1}{2}(1+t^2)dx \quad \Rightarrow \quad dx=\frac{2dt}{1+t^2}$$

و در نتیجه

$$\int f(\sin x,\cos x)\,dx=\int f(\frac{2t}{1+t^2}\ ,\ \frac{1-t^2}{1+t^2})\frac{2dt}{1+t^2}$$

تابع انتگرال آخر تابع گویائی از t است که در صورت محاسبه این انتگرال، انتگرال مورد نظر محاسبه خواهد شد.

مثال ۲۳ : مطلوب است محاسبه انتگرال $\int \frac{dx}{\sin x}$.

حل :

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c$$

مثال ۲۴ : مطلوب است انتگرال: $I = \int \frac{1-\sin(x)}{1+\cos(x)} dx$

حل:

$$I = \int \frac{1-\frac{2t}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{1+t^2-2t}{1+t^2} dt = \int (1-\frac{2t}{1+t^2}) dt$$

$$= t - \ln(1+t^2) + c = \tan\frac{x}{2} - \ln(1+\tan^2\frac{x}{2}) + c = \tan\frac{x}{2} - \ln(\sec^2\frac{x}{2}) + c$$

با اینکه روش فوق برای حل این نوع انتگرالها عمومیت دارد، با اینحال در عمل، اغلب جانشینهای دیگری برای محاسبه انتگرال مناسبترند.

مثال ۲۵ : مطلوب است محاسبه انتگرال: $\int \frac{dx}{2-\sin^2 x}$

حل : روش اول: با فرض $u = \tan x$ داریم

$$dx = \frac{du}{1+u^2} \quad , \quad \sin^2 x = \tan^2 x \cdot \cos^2 x = \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x} = \frac{u^2}{1+u^2}$$

$$\int \frac{dx}{2-\sin^2(x)} = \int \frac{du}{(2-\frac{u^2}{1+u^2})(1+u^2)} = \int \frac{du}{2+u^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\frac{u}{\sqrt{2}} + c$$

روش دوم: اگر قرار دهیم $t = \tan\frac{x}{2}$ آنگاه

$$\int \frac{dx}{2-\sin^2 x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2-\frac{4t^2}{(1+t^2)^2}} = \int \frac{2(1+t^2)}{2(t^4+2t^2+1)-4t^2} dt$$

$$= \int \frac{1+t^2}{t^4-2t^2+1} dt = \int \frac{t^2+1}{(t-1)^2(t+1)^2} dt$$

ادامه به عهده خواننده.

مثال ۲۶ : انتگرال $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x+2}dx$ را حساب کنید.

حل:

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos x+2}dx=\int \frac{\sin^2 x}{\cos x+2}\sin x\,dx=\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos x+2}\sin x\,dx$$

جانشینی $u=\cos x$ را انجام می دهیم، پس $du=-\sin(x)dx$ و

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos x+2}dx=\int \frac{u^2-1}{u+2}du=\int\left(u-2+\frac{3}{u+2}\right)du=\frac{1}{2}u^2-2u+3\ln\left|u+2\right|+c$$
$$=\frac{1}{2}\cos^2 x-2\cos x+3\ln(\cos x+2)+c$$

۴. ۵. انتگرال گیری از توابع غیر گویا (اصم)

برای محاسبه انتگرال توابعی بصورت $f(x,x^{\frac{m}{n}},\dots,x^{\frac{p}{q}})$ که در آن f تابعی گویا از متغیر x با توانهای متفاوت می باشد، تغییر متغیر $x=t^k$ را اعمال می کنیم، که در آن k کوچکترین مضرب مشترک بین فرجه های رادیکالهای شامل x می باشد.

مثال ۲۷ : انتگرال زیر را حل کنید:

$$I=\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}dx$$

حل:

$$x=t^4\Rightarrow dx=4t^3dt$$
$$\Rightarrow I=4\int \frac{t^5dt}{t^3+1}=4\int (t^2-\frac{t^2}{t^3+1})\,dt=4\int t^2dt-4\int \frac{t^2}{t^3+1}dt$$
$$=\frac{4}{3}t^3-\frac{4}{3}\ln|t^3+1|+c=\frac{4}{3}\left[x^{\frac{3}{4}}-\ln|x^{\frac{3}{4}}+1|\right]+c$$

مثال ۲۸ : انتگرال زیر را حل کنید:

$$I=\int \frac{dx}{\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}}$$

حل:

$$x=t^6\Rightarrow dx=6t^5dt\quad,\quad \sqrt{x}=t^3\quad,\quad \sqrt[3]{x}=t^2$$

$$\Rightarrow I=\int\frac{6t^5}{t^3+2t^2}dt=6\int\frac{t^3}{t+2}dt=6\int(t^2-2t+4-\frac{8}{t+2})dt$$
$$=2t^3-6t^2+24t-48\ln|t+2|+c$$
$$=2\sqrt{x}-6\sqrt[3]{x}+24\sqrt[6]{x}-48\ln(\sqrt[3]{x}+2)+c$$

تمرین

جانشینی مثلثاتی

انتگرالهای زیر را حل کنید.

1) $\int\frac{\sin x}{\sqrt{2-\cos^2 x}}dx$

2) $\int\sqrt{x^2-2x+2}dx$

3) $\int\frac{dx}{(x^2-4x+13)^{\frac{3}{2}}}$

4) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-16}}$

5) $\int\frac{x}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx$

6) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$

7) $\int\frac{\sqrt{x^2-9}}{x^2}dx$

8) $\int\sqrt{2x-x^2}dx$

9) $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}$

10) $\int_1^3\frac{dx}{x^4\sqrt{x^2+3}}$

11) $\int_0^4\frac{dx}{(16+x^2)\sqrt{16+x^2}}$

12) $\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$

13) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x dx}{\sqrt{4-\tan^2 x}}$ 14) $\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{12+4x-x^2}} dx$

انتگرال گیری جزء به جزء

انتگرالهای زیر را حل کنید.

15) $\int xe^{3x} dx$ 16) $\int x \sin 2x dx$

17) $\int x^2 \ln x dx$ 18) $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx$

19) $\int \sin x \ln(\cos x) x dx$ 20) $\int \sin(\ln x) dx$

21) $\int x^3 e^{x^2} dx$ 22) $\int x^2 \sinh x dx$

23) $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^x}} dx$ 24) $\int \sec^5 x dx$

25) $\int \frac{\cot^{-1}(\ln x)}{x} dx$ 26) $\int_0^1 x \sin^{-1} x dx$

27) $\int_0^{\frac{\pi^2}{2}} \cos(\sqrt{2x}) dx$ 28) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} x \cot x \csc x dx$

روابط زیر را اثبات کنید.

29) $\int x^n e^x dx = x^n e^x - n\int x^{n-1} e^x dx$

30) $\int x^n \sin(x) dx = -x^n \cos(x) + n\int x^{n-1} \cos(x) dx$

31) $\int x^a (\ln x)^n dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} (\ln x)^n - \frac{n}{a+1}\int x^a (\ln x)^{n-1} dx$

32) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) dx = \frac{1}{2}\frac{3}{4}\ldots\ldots\frac{n-1}{n}\frac{\pi}{2} \qquad n = 2k$

انتگرال گیری به روش تجزیه به کسرهای جزیی

انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

33) $\int \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)} dx$ 34) $\int \frac{x}{(2x+1)^2} dx$

35) $\int \frac{dx}{(x^2-x)(x^2-x+1)}$ 36) $\int \frac{3x+1}{x^2+4x+7} dx$

37) $\int \frac{x+2}{x(x^2+4x+6)} dx$ 38) $\int \frac{x^2}{x^2+x-6} dx$

39) $\int \frac{4x-11}{2x^2+7x-4}dx$

40) $\int \frac{x^2+4x-1}{x^3-x}dx$

41) $\int \frac{1}{x^3+3x^2}dx$

42) $\int \frac{6x^2-2x-1}{4x^3-x}dx$

43) $\int \frac{2x^4-2x+1}{2x^5-x^4}dx$

44) $\int \frac{3x+1}{(x^2-4)^2}dx$

45) $\int \frac{dx}{x^3+x^2+x}$

46) $\int \frac{x+3}{4x^4+4x^3+x^2}dx$

47) $\int \frac{dx}{(x^2+1)^3}$

48) $\int_0^4 \frac{x-2}{2x^2+7x+3}dx$

49) $\int_0^1 \frac{3x^2+7x}{x^3+6x^2+11x+6}dx$

50) $\int_0^4 \frac{x^2}{2x^3+9x^2+12x+4}dx$

51) $\int_{-1}^0 \frac{x^2}{(2x^2+2x+1)^2}dx$

52) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x+\sin^3 x}dx$

انتگرال گیری از توابع گویا سینوس و کسینوس

53) $\int \frac{\cos x}{\cos x+\sin x}dx$

54) $\int \frac{\cos x}{1+2\cos x}dx$

55) $\int \frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}dx$

56) $\int \frac{dx}{5+4\cos x}$

57) $\int \frac{dx}{\tan x-1}$

58) $\int \frac{dx}{\sin x-\tan x}$

59) $\int \frac{dx}{\cot x(6+7\cos 2x)}$

60) $\int \frac{5dx}{6+4\sec x}dx$

61) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{3dx}{2\sin 2x+1}$

62) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{2+\cos x}dx$

63) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\tan x+1}$

64) $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{3dx}{2\cos x+1}$

۶۵) با استفاده از جانشانی $t=\tan\frac{x}{2}$ نشان دهید:

$$\int \sec x dx = \ln|\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})|+c$$

۶۶) با استفاده از جانشانی $t=\sin x$ نشان دهید:

$$\int \sec x dx = \ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}+c$$

۶۷) نشان دهید فرمول تمرین قبل با فرمول زیر معادل است:

$$\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + c$$

راهنمایی: صورت و مخرج عبارت زیر رادیکال را در $(1+\sin x)$ ضرب کنید.

۶۸) الف) فرمولهایی مشابه تمرینهای (۶۵) و (۶۶) برای $\int \csc x dx$ بدست آورید.

ب) ثابت کنید فرمولهای قسمت (الف) با فرمول زیر معادل است:

$$\int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + c$$

انتگرال گیری از توابع اصم

انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

69) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x^7}+\sqrt[4]{x^5}}dx$ 70) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^3}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}}dx$

72) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x}+1)}dx$ 73) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x}+2}{\sqrt[6]{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}+1}dx$

74) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{\sqrt{x}+1}}$ 75) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$

76) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx$ 77) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2x}(\sqrt{2x}+9)}$

فصل پنجم

کاربردهای انتگرال معین

تاکنون روشهای محاسبه انتگرال را مطالعه کردیم. اینک در این فصل کاربردهای انتگرال را مورد بحث قرار می دهیم.

۵. ۱. محاسبه مساحت با استفاده از انتگرال

در فصل دوم بخش ۲. ۲ مشاهده کردیم که اگر $f(x) \geq 0$ آنگاه مساحت ناحیه محدود به منحنی $y = f(x)$، محور xها و خطوط $x = a$ و $x = b$ از رابطه زیر بدست می آید:

$$A = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(p_i)(x_i - x_{i-1}) = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta x_i$$

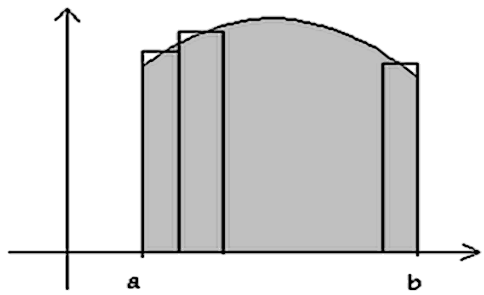
و با توجه به تعریف انتگرال معین مقدار حد فوق برابر است با انتگرال معین تابع f بر بازهٔ $[a,b]$. بنا براین

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

اگر $f(x) \leq 0$ آنگاه $-f(x) \geq 0$ و $A = \int_a^b (-f(x))\,dx$.

بنابراین بطور کلی مساحت محدود به منحنی $y = f(x)$، محور xها و خطوط $x = a$ و $x = b$ برابراست با

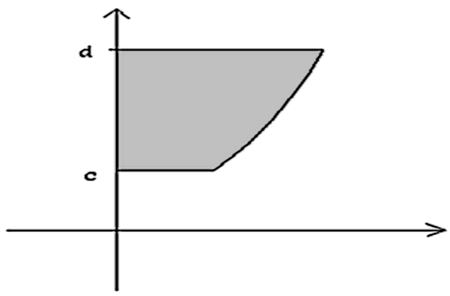
$$A=\int_a^b |f(x)|dx$$



شکل (۱)

همچنین مساحت محدود به منحنی $x=f(y)$، محور yها و خطوط $y=c$ و $y=d$ از رابطه زیر بدست می آید:

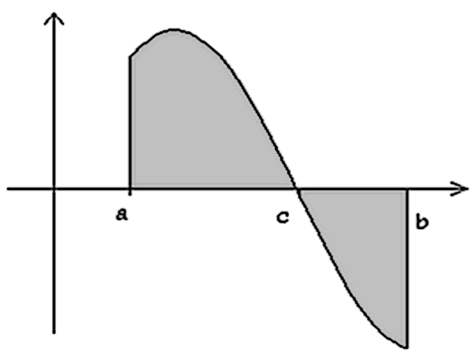
$$A=\int_c^d |f(y)|dy$$



شکل (۲)

نکته: اگر منحنی $y=f(x)$ در فاصله $[a,b]$ محور xها را در نقطه $x=c$ قطع کند آنگاه مساحت محدود به منحنی، محور xها و خطوط $x=a$ و $x=b$ برابر است با

$$A=\int_a^c |f(x)|dx+\int_c^b |f(x)|dx$$



شکل (۳)

برای حل مسائل بهتر است شکل کلی از ناحیه ای را که می خواهیم مساحت آن را بدست آوریم، رسم کنیم. البته قابل ذکر است که ممکن است خیلی از مسائل را بدون شکل نیز به جواب برسانیم (مانند مثال ۱) ولی مسائلی نیز وجود دارد که تا شکل آن رسم نشود پیدا کردن مساحت کمی دشوار خواهد بود مخصوصاً اگر ناحیه توسط سه منحنی احاطه شود. در رسم شکل دقت اصلی باید در تقاطع منحنیها و تقاطع با محورهای مختصات مورد نظر باشد.

مثال ۱ : مساحت ناحیه محدود به منحنی $y = x^3 + 1$ محور xها و خطوط $x = 0$ و $x = 2$ را بیابید.

حل:

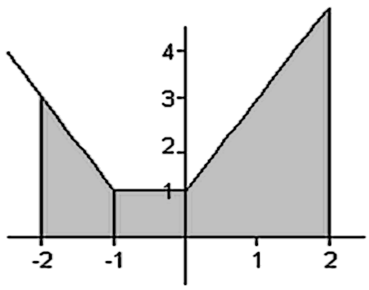
$$A = \int_0^2 (x^3 + 1)dx = \frac{x^4}{4} + x\Big|_0^2 = 4 + 2 = 6 .$$

مثال ۲ : مساحت ناحیه محدود به منحنی $y = |x+1| + |x|$ محور xها و خطوط $x = -2$ و $x = 2$ را بیابید.

حل: برای حل این مساله بهتر است شکل منحنی رسم شود. با توجه به تعریف قدر مطلق داریم:

$$|x| = \begin{cases} x & x \ge 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} \quad , \quad |x+1| = \begin{cases} x+1 & x \ge -1 \\ -x-1 & x < -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = \begin{cases} -2x-1 & x < -1 \\ 1 & -1 \le x < 0 \\ 2x+1 & x \ge 0 \end{cases}$$



شکل (۴)

بنابراین

$$A = \int_{-2}^{-1} (-2x-1)dx + \int_{-1}^{0} dx + \int_0^2 (2x+1)dx = (-x^2 - x)\Big|_{-2}^{-1} + 1 + (x^2 + x)\Big|_0^2 = 2 + 1 + 6 = 9 .$$

نکته: اگر خطوط $x = a$ و $x = b$ در مساله داده نشده باشد، نقاط تقاطع منحنی با محورهای مختصات را بدست می آوریم.

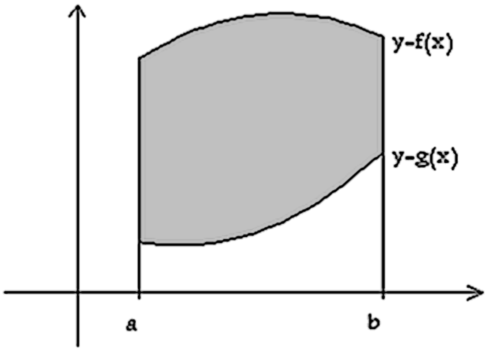
۵. ۱. ۱. مساحت بین دو منحنی

فرض کنید f و g مثبت باشند. مساحت ناحیه بین این دو منحنی از خط $x = a$ تا خط $x = b$ برابر است با

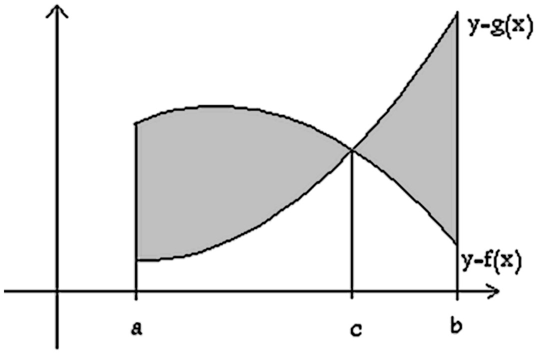
$$A=\int_a^b \left|f(x)-g(x)\right|dx$$

اگر دو منحنی در فاصله $[a,b]$ یکدیگر را در نقطه به طول c قطع کنند آنگاه مساحت بین این دو منحنی در فاصله $[a,b]$ برابر است با

$$A=\int_a^c \left|f(x)-g(x)\right|dx+\int_c^b \left|f(x)-g(x)\right|dx$$



شکل (۵)



شکل (۶)

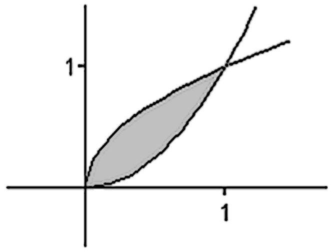
مثال ۳ : مساحت ناحیه محدود به دو منحنی $y=x^2$ و $y=\sqrt{x}$ را بیابید.

حل: ابتدا دو منحنی را با هم قطع می دهیم تا حدود انتگرال گیری مشخص گردد:

$$\begin{cases} y=x^2 \\ y=\sqrt{x} \end{cases} \Rightarrow \quad x=0 \quad , \quad x=1$$

از طرفی چون در فاصله $[0,1]$ داریم $\sqrt{x}\geq x^2$ مساحت بین دو منحنی عبارت است از

$$A=\int_0^1 \left|x^2-\sqrt{x}\right|dx=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1=\frac{1}{3}$$



شکل (۷)

مثال ۴ : مساحت ناحیه محدود به دو منحنی $y=\sin x$ و $y=\cos x$ را در فاصله $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ بیابید.

حل:

$$\begin{cases} y=\sin x \\ y=\cos x \end{cases} \quad 0\le x\le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \quad x=\frac{\pi}{4}$$

یعنی دو منحنی در نقطه $x=\frac{\pi}{4}$ از فاصله $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ یکدیگر را قطع می کنند. همچنین با توجه به شکل داریم:

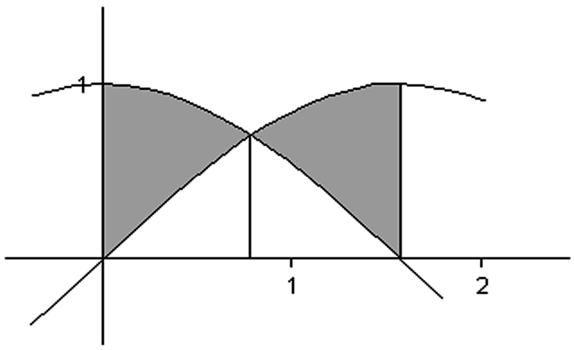
$$0\le x\le \frac{\pi}{4} \Rightarrow \quad \sin x\le \cos x$$

$$\frac{\pi}{4}\le x\le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \quad \cos x\le \sin x$$

بنابراین

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)dx=(\sin x+\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-(\cos x+\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=(\sqrt{2}-1)-(1-\sqrt{2})=2\sqrt{2}-2=2(\sqrt{2}-1)$$

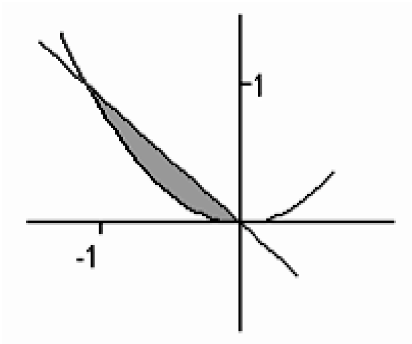


شکل (۸)

سال ٦٤) سطح محصور بین منحنی های $y=-x, y=x^2$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ٤) $\frac{1}{2}$

حل:



شکل (۹)

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow x^2 = -x \Rightarrow \quad x^2 + x = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \end{array}$$

$$A = \int_{-1}^{0} (-x - x^2)\, dx = \frac{-x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{0} = 0 - (-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3-2}{6} = \frac{1}{6}$$

سال ٦٤) سطح محصور بین خط $y = x + 2$ و محورx ها در فاصله $[0,1]$ برابر است با:

۱) $\frac{3}{2}$ واحد سطح ۲) 2 واحد سطح ۳) $\frac{5}{2}$ واحد سطح ٤) 3 واحد سطح

حل به عهده خواننده.

سال ٦٥) مساحت محدود بین دو منحنی $y = -x^2 + 1$ و $y = |x|$ چقدر است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ٤) 1

حل:

$$y = |x| = \begin{cases} x & x \ge 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

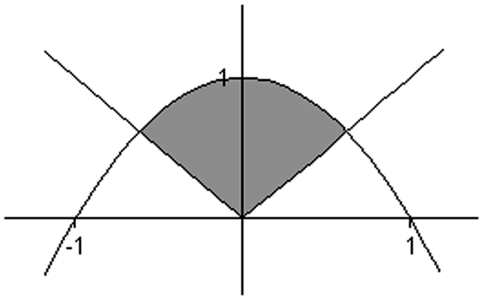
$$\begin{cases} y = -x^2 + 1 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow -x^2 + 1 = x \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \xrightarrow{x \ge 0} x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\begin{cases} y = -x^2 + 1 \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow -x^2 + 1 = -x \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \xrightarrow{x < 0} x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

بنابراین

$$A = \int_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^{0} (-x^2 + 1 + x) + \int_{0}^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} (-x^2 + 1 - x) dx$$

ادامه به عهده خواننده.



شکل (۱۰)

سال ۶۵) مساحت محصور بین منحنی های $x-y-1=0$ و $y^2=2x+1$ کدام است؟

۱) $\frac{14}{3}$ ۲) $\frac{16}{3}$ ۳) $\frac{17}{3}$ ٤) $\frac{19}{3}$

حل:

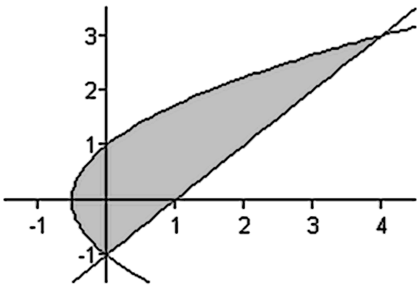
$$\begin{cases} x-y-1=0 \rightarrow x=y+1 \\ y^2=2x+1 \rightarrow x=\dfrac{y^2-1}{2} \end{cases} \Rightarrow y+1=\frac{y^2-1}{2} \Rightarrow y^2-2y-3=0 \Rightarrow (y-3)(y+1)=0$$

$$\Rightarrow y=3 \quad , \quad y=-1$$

$$A=\int_{-1}^{3}\left[(y+1)-(\frac{y^2-1}{2})\right]dy=\int_{-1}^{3}\left(y+1-\frac{y^2}{2}+\frac{1}{2}\right)dy=\int_{-1}^{3}\left(\frac{-y^2}{2}+y+\frac{3}{2}\right)dy$$

$$=\left(\frac{-y^3}{6}+\frac{y^2}{2}+\frac{3}{2}y\right)\Bigg|_{-1}^{3}=(\frac{-27}{6}+\frac{9}{2}+\frac{9}{2})-(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}-\frac{3}{2})$$

$$=\frac{-27}{6}+\frac{18}{2}-\frac{1}{6}-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=\frac{-28}{6}+\frac{20}{2}=\frac{16}{3}$$



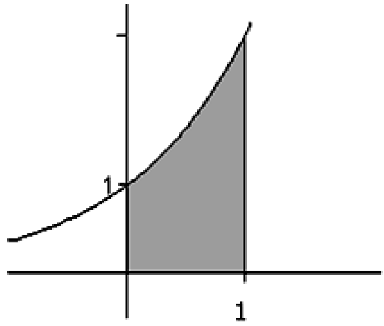
شکل (۱۱)

سال ٦٦) سطح محصور بین منحنی $y=e^{2x}$ و محورx ها ، در فاصله $x=0$ تا $x=1$ چقدر است؟

۱) $\frac{1}{2}(e^2-1)$ ۲) e^2-1 ۳) $\frac{1}{2}(e^2+1)$ ٤) e^2+1

حل:

$$\int_0^1 e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(e^2-1)$$



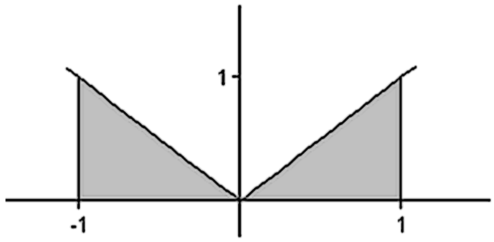
شکل (۱۲)

سال ٦٦) سطح محدود به منحنی نمایش تابع $y=|x|$ و محور ox و خطوط $x=\pm 1$ چقدر است؟

۱) 1 ۲) 2 ۳) 3 ٤) 4

حل:

$$\int_{-1}^0 -xdx + \int_0^1 xdx = \frac{-x^2}{2}\Big|_{-1}^0 + \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$$



شکل (۱۳)

سال ٦٧) مساحت سطح محصور بین منحنی های $y=x^2\ ,\ x+y=2$ کدام است؟

۱) 2 ۲) $\frac{5}{6}$ ۳) $\frac{7}{2}$ ٤) $\frac{9}{2}$

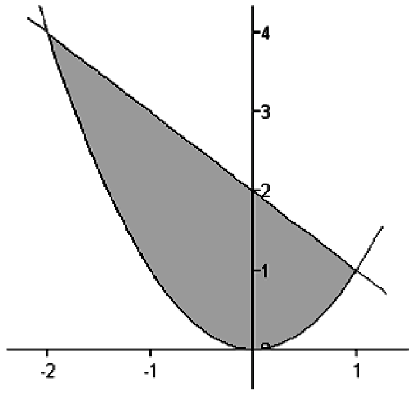
حل:

$$\begin{cases} y=x^2 \\ y=2-x \end{cases} \Rightarrow x^2+x-2=0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1\pm 3}{2} \Rightarrow x=1 \quad , \quad x=-2$$

$$A = \int_{-2}^1 (2-x-x^2)dx = 2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^1$$

$$= (2-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}) - (-4-2+\frac{8}{3}) = 8 - \frac{1}{2} - 3 = \frac{9}{2}$$



شکل (۱۴)

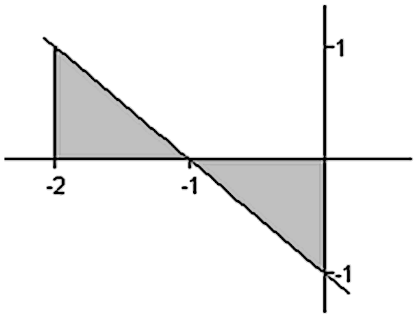
سال ٦٧) سطح محصور بین تابع $x+y=1$ و خطوط $x=-2$ و $x=0$ کدام است؟

۱) 0 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) 1 ٤) 2π

حل: $y=-x-1$

$$\int_{-2}^{-1}(-x-1)dx+\int_{-1}^{0}[-(-x-1)]dx=\frac{-x^2}{2}-x\Big|_{-2}^{-1}+\frac{x^2}{2}+x\Big|_{-1}^{0}=$$

$$=(\frac{-1}{2}+1)-(-2+2)-(\frac{1}{2}-1)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$



شکل (۱۵)

سال ٧١) مساحت محدود بین نمودارهای $y=x+3$ و $y=x^2+x-13$ از $x=1$ تا $x=3$ چقدر است؟

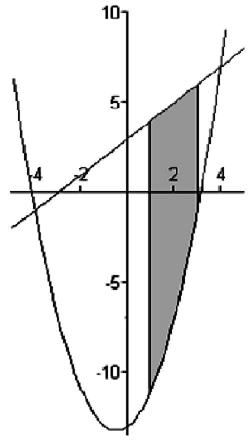
۱) $19\frac{1}{3}$ ۲) $21\frac{1}{3}$ ۳) $25\frac{1}{3}$ ٤) $23\frac{1}{3}$

حل:

$$\begin{cases} y=x^2+x-13 \\ y=x+3 \end{cases} \Rightarrow x^2+x-13=x+3 \Rightarrow x^2=16 \Rightarrow x=\pm 4$$

$$\int_1^3[x+3-(x^2+x-13)]dx$$

$$=\int_1^3(-x^2+16)dx=\frac{-x^3}{3}+16x\Big|_1^3=\left(\frac{-27}{3}+48\right)-\left(\frac{-1}{3}+16\right)=23\frac{1}{3}$$



شکل (۱۶)

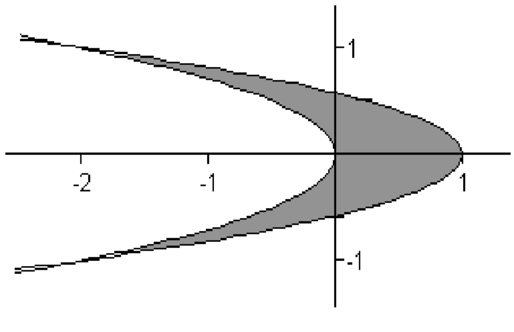
سال ۷۲) سطح محصور به سهمی های $x = 1 - 3y^2$ و $x = -2y^2$ کدام است؟

۱) 0 ۲) $\frac{3}{8}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ٤) $\frac{4}{3}$

حل:

$$\begin{cases} x = -2y^2 \\ x = 1 - 3y^2 \end{cases} \Rightarrow -2y^2 = 1 - 3y^2 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1 \Rightarrow x = -2$$

$$\int_{-1}^{1} [(1 - 3y^2) + 2y^2] dy = \int_{-1}^{1} (1 - y^2) dy = y - \frac{y^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = (1 - \frac{1}{3}) - (-1 + \frac{1}{3}) = \frac{4}{3}$$



شکل (۱۷)

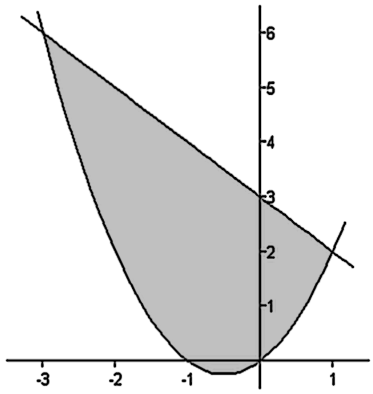
سال ۷۲) مساحت محدود به نمودار دو تابع $y = x^2 + x$, $y = 3 - x$ کدام است؟

۱) $\frac{26}{3}$ ۲) $\frac{28}{3}$ ۳) $\frac{32}{3}$ ٤) $\frac{34}{3}$

حل:

$$x^2 + x = 3 - x \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \Rightarrow x = 1, -3 \Rightarrow y = 2, y = 6$$

$$\int_{-3}^{1} (3 - x - x^2 - x)\, dx = \frac{32}{3}$$



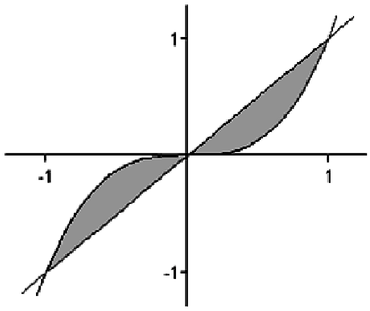
شکل (۱۸)

سال ۷٤) سطح محدود به منحنی تابع $y = x^3$ و خط $y = x$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) 1 ٤) 4

حل:

$$\int_{-1}^{0}(x^3 - x)dx + \int_{0}^{1}(x - x^3)dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{0} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\Big|_{0}^{1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$



شکل (۱۹)

سال ۷٤) سطح محصور بین منحنی های $y^2 = 2x + 1$ و $x - y - 1 = 0$ کدام است؟

۱) $\frac{17}{3}$ ۲) $\frac{14}{3}$ ۳) $\frac{16}{3}$ ٤) $\frac{19}{3}$

حل به عهده خواننده.

سال ۷۲) مساحت محدود به نمودار دو تابع $y = 2x - 5$, $y = -x^2 + 6x - 5$ کدام است؟

۱) $\frac{26}{3}$ ۲) $\frac{28}{3}$ ۳) $\frac{32}{3}$ ٤) $\frac{34}{4}$

حل به عهده خواننده.

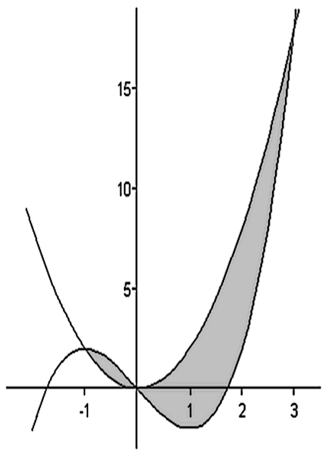
سال ۷۲) مساحت محدود به نمودار دو تابع $y = x^3 - 2x$, $y = 2x^2$ در فاصله $[0,3]$ کدام است؟

۱) $\frac{81}{4}$ ۲) $\frac{97}{4}$ ۳) $\frac{95}{4}$ ٤) $\frac{93}{4}$

حل:

$$\begin{cases} y = x^3 - 2x \\ y = 2x^2 \end{cases} \Rightarrow x^3 - 2x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = -1,0,3$$

$$\int_0^3 (2x^2 - x^3 + 2x)dx = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + x^2 \Big|_0^3 = \frac{81}{4}$$



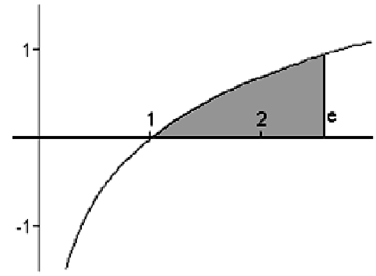
شکل (۲۰)

سال ۷۲) مساحت محدود به نمودار $y = \ln x$ و محور xها و خط به معادله $x = e$ کدام است؟

۱) $-e$ ۲) $\frac{1}{e}$ ۳) 1 ٤) e

حل:

$$A = \int_1^e \ln(x)\,dx = x\ln(x) - x \Big|_1^e = (e-e) - (0-1) = 1$$



شکل (۲۱)

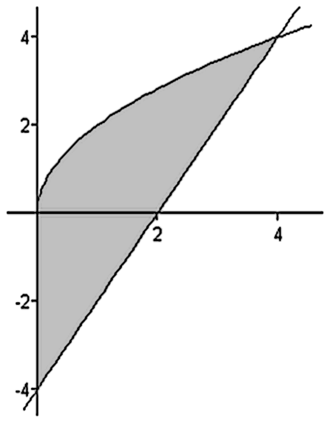
سال ۷۶) مساحت ناحیه محدود بین نمودار تابع $y = 2\sqrt{x}$ و خط $y = 2x - 4$ و محور yها کدام است؟

۱) $\frac{20}{3}$ ۲) $\frac{22}{3}$ ۳) $\frac{26}{3}$ ٤) $\frac{32}{3}$

حل:

$$2x - 2\sqrt{x} - 4 = 0 \Rightarrow x - \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4$$

$$\int_0^4 [(2\sqrt{x}) - (2x-4)]\,dx = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - x^2 + 4x\Big|_0^4 = \frac{32}{3}$$



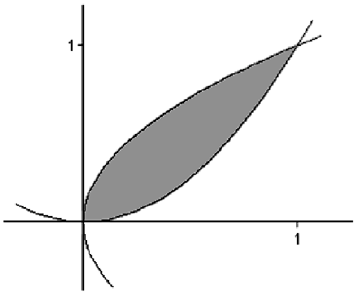
شکل (۲۲)

سال ۷۷) سطح محصور بین دو منحنی $y = x^2$, $x = y^2$ کدام است؟

۱) $\frac{7}{6}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ٤) $\frac{1}{3}$

حل:

$$\int_0^1 (y - y^2)\,dy = \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$



شکل (۲۳)

مثال ۵ : مساحت محدود به سه منحنی $y - x^2$, $y = 8 - x^2$, $y = 4x + 12$ را بدست آورید.

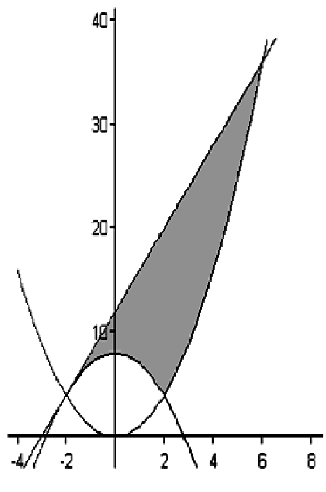
حل:

$$\begin{cases} y = 8 - x^2 \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow 8 - x^2 = x^2 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$\begin{cases} y = 4x + 12 \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 4x - 12 = 0 \Rightarrow x = -2,6$$

$$\begin{cases} y = 4x + 12 \\ y = 8 - x^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$A = \int_{-2}^{2} (4x + 12 - 8 + x^2)dx + \int_{2}^{6} (4x + 12 - x^2)dx = \frac{56}{3} + 104$$



شکل (۲۴)

۵. ۲. محاسبه حجم با استفاده از انتگرال

فرض کنیم ناحیه R که محدود به منحنی $y = f(x)$ و خطوط $x = a$ و $x = b$ می باشد، حول محور x ها دوران کند. هدف پیدا کردن حجم حادث از این دوران می باشد.

ابتدا بازه $[a,b]$ را به زیر بازه هایی افراز می کنیم. فرض کنیم افراز دلخواهی که داریم دارای بازه $[x_i, x_{i+1}]$ باشد. نوار مستطیلی مشخص شده در شکل (۲۵) را حول محور x ها دوران می دهیم، شکل حاصل استوانه ای است که شعاع آن $f(x_i)$ وارتفاع آن $x_{i+1} - x_i$ می باشد. حجم این استوانه برابر است با $\Delta v_i = [f(x_i)]^2 \times \pi \times \Delta x$ که $\Delta x = x_{i+1} - x_i$.

مجموع این استوانه ها در امتداد محور xها (شکل (۲۵)) برابر حجم کل ناحیه خواهد بود که با توجه بـه تعریـف انتگرال معین خواهیم داشت:

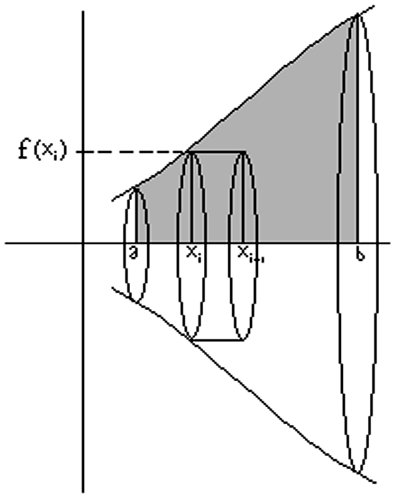
$$v = \int_a^b \pi [f(x)]^2 \, dx$$

اگر ناحیه حول خط $y = c$ دوران کرده باشد(شکل (۲۶)) آنگاه حجم حادث از دوران برابر است با

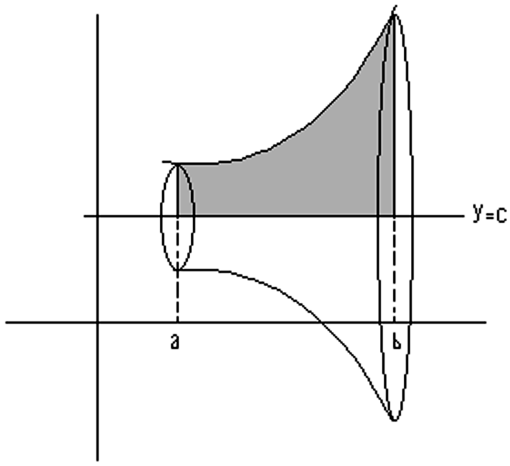
$$v = \int_a^b \pi [f(x) - c]^2 \, dx$$

نکته: اگر منحنی $y = f(x)$ در فاصله $[a,b]$ محور xها را در نقطه $x = c$ قطع کند آنگاه حجم جسم حاصـل از دوران ناحیه محدود به منحنی، محور xها و خطوط $x = a$ و $x = b$ حول محور xها برابر است با

$$v = \int_a^c \pi [f(x)]^2 \, dx + \int_c^b \pi [f(x)]^2 \, dx$$



شکل (۲۵)



شکل (۲۶)

حال اگر ناحیه R که محدود به تابع $x = f(y)$ و خطوط $y = c$ و $y = d$ باشد و حول محور y ها دوران کند. آنگاه حجم جسم حاصل برابر است با

$$v = \int_c^d \pi [f(y)]^2 \, dy$$

و اگر ناحیه حول خط $x = a$ دوران کرده باشد آنگاه حجم حادث از دوران برابر است با

$$v = \int_c^d \pi [f(y) - a]^2 \, dy$$

برای محاسبه حجم در حالت کلی اقدامات زیر را انجام می دهیم:

۱) ناحیه ای که باید دوران پیدا کند را مشخص می کنیم.

۲) محور دوران هر محوری که باشد نوار مستطیلی فوق را عمود بر آن محور در نظر می گیریم.

۳) اگر نوار مستطیلی عمود بر محور xها باشد در انتگرال dx قرار داده تابع بر حسب x است. اگر نوار عمود بر محور y ها باشد در انتگرال dy قرار داده و تابع بر حسب y می باشد.

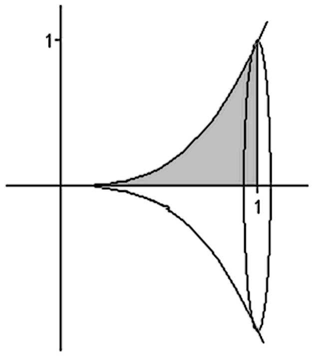
٤) حدود انتگرال برابر است با حدود تغییرات نوار باریک مستطیل شکل.

۵) اگر ناحیه، محور دوران را قطع کرده باشد، حجم کل برابر است با مجموع حجم های مجزای بوجود آمده.

مثال ۶ : حجم جسم حاصل از دوران ناحیه محدود به منحنی $y = x^3$ ، خطوط $x = 0$ ، $x = 1$ و محور xها حول محور xها را بیابید.

حل:

$$v=\int_0^1 \pi[x^3]^2\,dx=\frac{\pi}{7}x^7\Big|_0^1=\frac{\pi}{7}$$



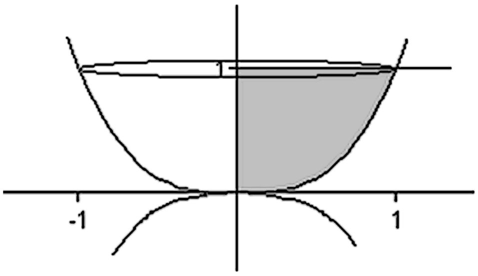
شکل (۲۷)

مثال ۷ : حجم جسم حاصل از دوران ناحیه محدود به منحنی $y=x^3$ ، خطوط $y=0$ ، $y=1$ و محور yها حول محور yها را بیابید.

حل: چون محور دوران محور yهاست پس تابع باید بر حسب y باشد:

$$y=x^3 \Rightarrow x=\sqrt[3]{y}$$

$$v=\int_0^1 \pi[\sqrt[3]{y}]^2\,dy=\frac{2\pi}{5}y^{\frac{5}{2}}\Big|_0^1=\frac{2\pi}{5}$$



شکل (۲۸)

توجه: در دو مثال فوق اگر بازه انتگرال گیری از ۱- تا ۱ باشد باید دو حجم محاسبه شود، یکی از ۱- تا ۰ و یکی از ۰ تا ۱-.

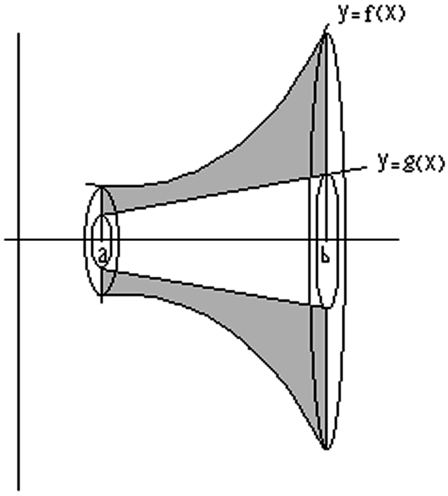
۵. ۲. ۱. حجم جسم حاصل از دوران ناحیه بین دو منحنی:

فرض کنیم ناحیه R که محدود به منحنی های $y=f(x)$ ، $y=g(x)$ خطوط $x=a$ و $x=b$ باشد، حول محور x ها دوران کند. حجم جسم حاصل برابراست با

$$v=\int_a^b \pi\left|\,[f(x)]^2-[g(x)]^2\right|dx$$

و اگر ناحیه فوق حول خط $y=c$ دوران کند آنگاه

$$v=\int_a^b \pi\left|\ [f(x)-c]^2-[g(x)-c]^2\right|dx$$



شکل (۲۹)

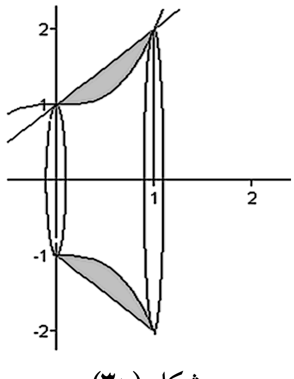
هنگامی که محور دوران محور yها یا هر خط موازی با آن باشد، انتگرالهای فوق بر حسب y است.

مثال ۸ : حجم جسم حاصل از دوران ناحیه محدود به منحنی $y=x^3+1$ و خطوط $y=x+1$، $x=0$ ، $x=1$ حول محور xها را بیابید.

حل:

$$v=\int_0^1 \pi\left[(x+1)^2-(x^3+1)^2\right]dx=\pi\int_0^1(x^2+2x-x^6-2x^3)dx$$

$$=\pi\left(\frac{x^3}{3}+x^2-\frac{x^7}{7}-\frac{x^4}{2}\right)\Big|_0^1=\frac{29}{42}$$

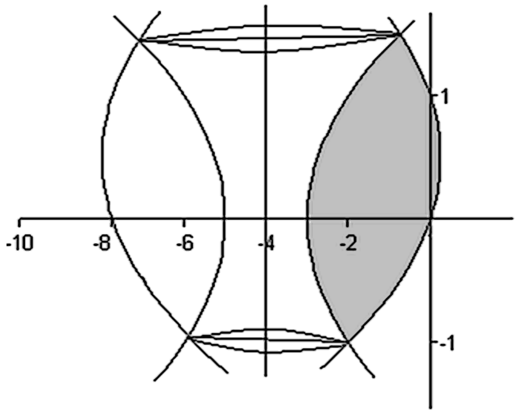


شکل (۳۰)

مثال ۹ : حجم جسم حاصل از دوران ناحیه محدود به دو سهمی $x=y-y^2$ و $x=y^2-3$، حول خط $x=-4$ را بیابید.

حل: برای تعیین حدود انتگرال گیری، نقاط تقاطع دو منحنی را بدست می آوریم:

$$\begin{cases} x = y - y^2 \\ x = y^2 - 3 \end{cases} \Rightarrow y - y^2 = y^2 - 3 \Rightarrow 2y^2 - y - 3 = 0 \Rightarrow y = -1 \quad , \quad y = \frac{3}{2}$$



شکل (۳۱)

$$v = \int_{-1}^{\frac{3}{2}} \pi \left| \ [y - y^2 - (-4)]^2 - [y^2 - 3 - (-4)]^2 \right| dy$$

$$= \int_{-1}^{\frac{3}{2}} \pi \left| \ [y - y^2 + 4]^2 - [y^2 - 3 + 4]^2 \right| dy$$

$$= \int_{-1}^{\frac{3}{2}} \pi (-2y^3 - 9y^2 + 8y + 15) dy$$

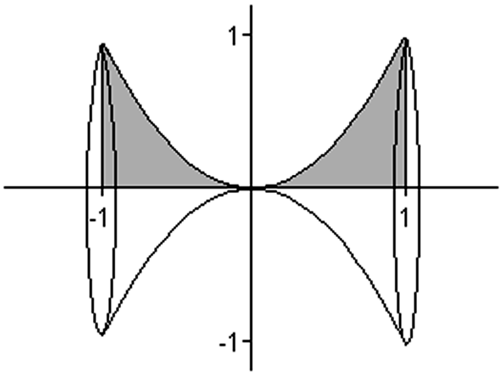
$$= \pi \left[-\frac{y^4}{2} - 3y^3 + 4y^2 + 15y \right] \Bigg|_{-1}^{\frac{3}{2}} = \frac{875}{32} \pi$$

سال ٦٤) حجم حاصل از دوران سهمی $y = x^2$ حول محور x ها در فاصله $x = -1$ تا $x = 1$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{3}$ ۳) $\frac{\pi}{3}$ ٤) $\frac{2\pi}{5}$

حل:

$$v = \pi \int_{-1}^{0} x^4 dx + \pi \int_{0}^{1} x^4 dx = \pi \frac{x^5}{5} \Bigg|_{-1}^{0} + \pi \frac{x^5}{5} \Bigg|_{0}^{1} = +\frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{5} = \frac{2\pi}{5}$$



شکل (۳۲)

سال ٦٥) حجم حاصل از دوران سهمی $y=x^2$ حول محور x ها در فاصله $x=0$ تا $x=1$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{6}$ ۲) $\frac{\pi}{5}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ٤) $\frac{\pi}{3}$

مانند مثال قبل است و حجم جسم عبارت است از نصف آن حجم که برابر $\frac{\pi}{5}$ می باشد.

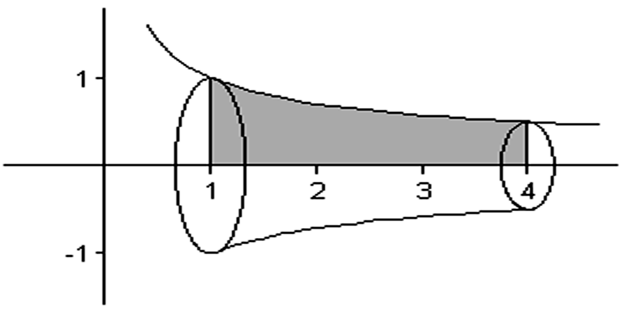
سال ٦٦) حجم حاصل از دوران ناحیه محصور بین منحنی $xy^2=1, x=1, x=4$ حول محورx کدام است؟

۱) π ۲) 2π ۳) $2\pi\ln 2$ ٤) $2\pi\ln 2$

حل:

$$y^2=\frac{1}{x}\Rightarrow y=\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$v=\pi\int_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx=\pi\int_1^4 \frac{1}{x}dx=\pi\ln(x)\Big|_1^4=\pi(\ln 4-\ln 1)=\pi\ln 4=2\pi\ln 2$$

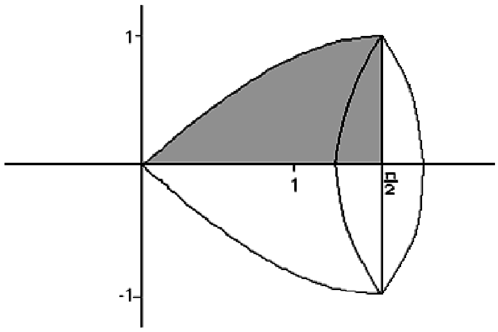


شکل (۳۳)

سال ٦٧) حجم حاصل از دوران سطح زیر منحنی y =sinx در فاصله $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ حول محورx ها برابر است با :

۱) $\frac{\pi^2}{8}$ ۲) $\frac{\pi^2}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ٤) π^2

حل: $\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{\pi}{2}\left[x - \frac{1}{2}\sin^2 x\right]^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}\times\left[\frac{\pi}{2}-0\right] = \frac{\pi^2}{4}$



شکل (۳۳)

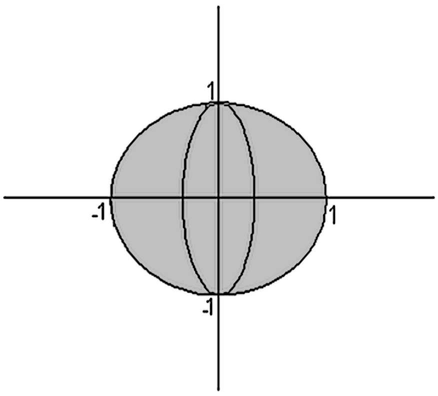
سال ٦٧) حجم حادث از دوران سطح منحنی $x^2+y^2=1$ حول محورx ها برابر است با:

۱) π ۲) $\frac{4\pi}{3}$ ۳) 2π ۴) $\frac{3\pi}{4}$

حل:

$$\pi\int_0^1 (1-x^2)\,dx = \pi\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \pi\left[1-\frac{1}{3}\right] = \frac{2\pi}{3}$$

و حجم کل عبارت است $\frac{2\pi}{3}\times 2 = \frac{4\pi}{3}$



شکل (۳۵)

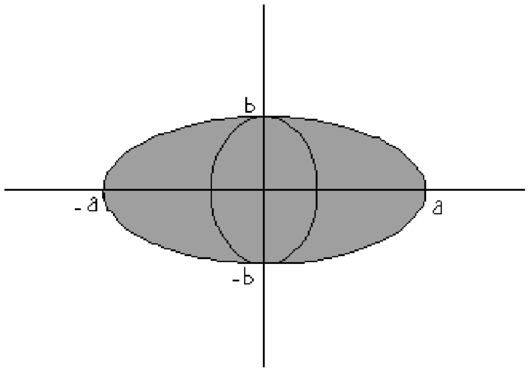
در مثال قبل چون منحنی متقارن است حدود انتگرال گیری را نصف کرده و حجم نصف جسم را بدست آورده و در نهایت حجم کل برابر است با دو برابر حجم محاسبه شده.

سال ٦٩) حجم حاصل از دوران بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ حول محورx ها برابر است با:

۱) $\frac{4}{3}\pi ba^2$ ۲) ab^2 ۳) $\frac{3}{4}ba^2$ ٤) $\frac{4}{3}\pi ab^2$

حل:

$$\pi\int_0^a (b^2-\frac{b^2x^2}{a^2})\,dx=\pi\left[b^2x-\frac{b^2}{a^2}\times\frac{x^3}{3}\right]_0^a=\pi\left[ab^2-\frac{ab^2}{3}\right]=\frac{2\pi a^2b}{3}\Rightarrow v=\frac{4}{3}\pi ab^2$$



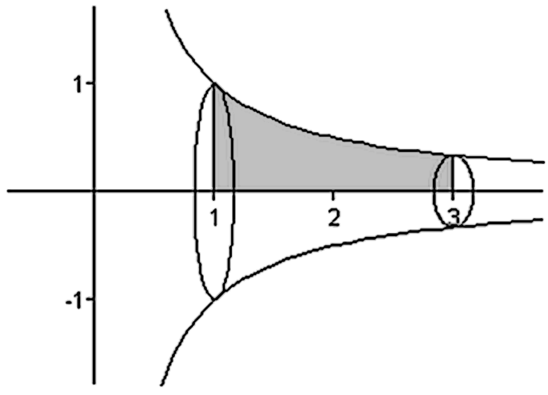
شکل (۳۶)

سال ۷۰) حجم حاصل از دوران سطح محدود به ناحیه $x=1,\ x=3,\ y=\frac{1}{x}$ حول محورox چقدر است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{3}$ ۳) $\frac{2\pi}{3}$ ٤) $\frac{3\pi}{2}$

حل:

$$\pi\int_1^3 \frac{1}{x^2}\,dx=\pi\times\frac{x^{-2+1}}{-1}\Big|_1^3=\frac{-\pi}{x}\Big|_1^3=\frac{-\pi}{3}+\pi=\frac{2\pi}{3}$$



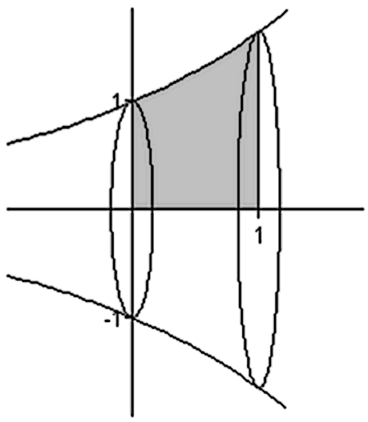
شکل (۳۷)

سال ۷۰) حجم حاصل از دوران ناحیه محدود به نمودار $y=e^{\frac{x}{2}}$ و خطوط $x=0$ و $x=1$ محورox ، حول محور ox کدام است؟

۱) $\pi(e-1)$ ۲) $\pi(e^2-1)$ ۳) $\frac{\pi}{2}(e-1)$ ٤) $\frac{\pi}{2}(e^2-1)$

حل:

$$\pi\int_0^1 (e^{\frac{x}{2}})^2\,dx = \pi\int_0^1 e^x\,dx = \pi(e^x)\Big|_0^1 = \pi(e-1)$$



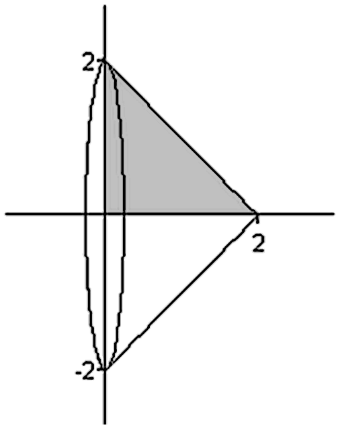
شکل (۳۸)

سال ۷۲) حجم حاصل از دوران ناحیه محدود به خط به معادله $x+y=2$ و محورهای ox, oy حول محور oxکدام است؟

۱) $\frac{7\pi}{4}$ ۲) $\frac{8\pi}{3}$ ۳) $\frac{9\pi}{4}$ ٤) $\frac{10\pi}{3}$

حل:

$$\pi\int_0^2 (2-x)^2dx = \pi\int_0^2 (4+x^2-4x)\,dx$$
$$= \pi\left[4x+\frac{x^3}{3}-\frac{4x^2}{2}\right]_0^4 = \pi\left[8+\frac{8}{3}-8\right] = \frac{8\pi}{3}$$



شکل (۳۹)

سال ۷٦) حجم حاصل از دوران ناحیه محدود به منحنی تابع $y = x^2 - x + 2$ و خطوط $x = 1$ و $x = 3$ و محورx ها حول خط $x = 2$ کدام است؟

۱) $\frac{220\pi}{3}$ ۲) $\frac{160\pi}{3}$ ۳) $\frac{110\pi}{3}$ ٤) $\frac{80\pi}{3}$

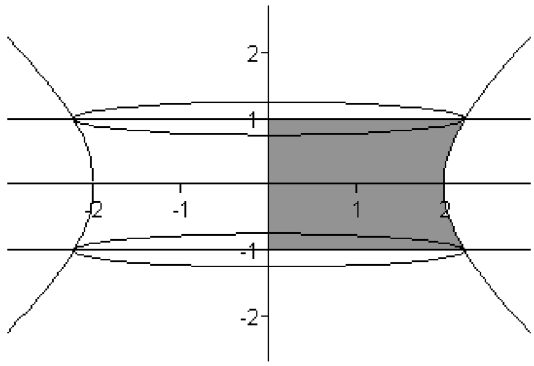
حل به عهده خواننده.

سال ۷۷) ناحیه محدود به نمودار تابع با ضابطه $x^2 - y^2 = 4$ و $y = -1$ و $y = 1$ حول محورy ها دوران می کند، حجم حاصل چقدر است؟

۱) $\frac{22\pi}{3}$ ۲) $\frac{28\pi}{3}$ ۳) $\frac{25\pi}{3}$ ٤) $\frac{26\pi}{3}$

حل:

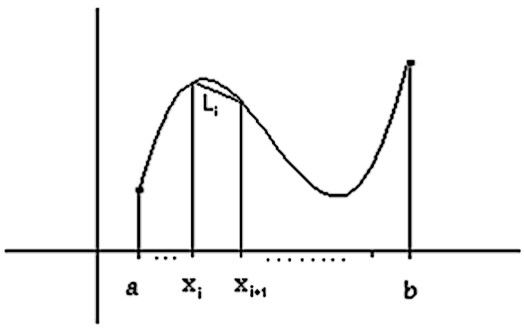
$$\pi\int_{-1}^{1} (4 - y^2)\, dy = \pi\left[4y - \frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \pi\left[4 - \frac{1}{3}\right] - \left[-4 + \frac{1}{3}\right] = \frac{22}{3}\pi$$



شکل (۴۰)

۵. ۳. محاسبه طول قوس یک منحنی با استفاده از انتگرال

اگر تابع $y = f(x)$ در فاصله $[a,b]$ پیوسته باشد. در این صورت با افراز بازه $[a,b]$ و محاسبه طول L_i و جمع بندی و محاسبه حد که نهایتاً به انتگرال تبدیل می شود می توان طول منحنی را بدست آورد.



شکل (۴۱)

فرمول طول قوس را در حالت کلی به سه صورت می توان مطرح کرد:

۱) اگر $y=f(x)$ باشد آنگاه طول قوس منحنی از $x=a$ تا $x=b$ عبارت است از

$$L=\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

۲) اگر $x=f(y)$ باشد آنگاه طول قوس منحنی از $y=c$ تا $y=d$ عبارت است از

$$L=\int_c^d \sqrt{1+(f'(y))^2}\,dy$$

۳) اگر $x=f(t)$ و $y=g(t)$ باشد آنگاه طول قوس منحنی $t=a$ تا $t=b$ عبارت است از

$$L=\int_a^b \sqrt{(f'(t))^2+(g'(t))^2}\,dt \qquad a\le t\le b$$

سال ٦٥) $f(x)=\frac{1}{3}(x^2+2)^{\frac{3}{2}}$, $0\le x\le 3$ در این صورت طول تابع f مساوی کدام است؟

۱) 9 ۲) 10 ۳) 12 ٤) 2

حل:

$$f'(x)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}(2x)(x^2+2)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow L=\int_0^3 \sqrt{1+x^2(x^2+2)}\,dx$$

$$\Rightarrow L=\int_0^3 \sqrt{1+x^4+2x^2}\,dx=\int_0^3 \sqrt{(1+x^2)^2}\,dx=\int_0^3 (1+x^2)\,dx=x+\frac{x^3}{3}\Big|_0^3=12$$

سال ٦٧) اگر $f(x)=x^{\frac{3}{2}}$, $0\le x\le 4$ باشد در این صورت طول گراف f مساوی با کدام است؟

۱) $\frac{7}{27}$ ۲) $\frac{10}{27}$ ۳) $\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1)$ ٤) $\frac{8}{27}(10\sqrt{10}+1)$

حل:

$$f'(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow (f'(x))^2=\frac{9}{4}x$$

$$L=\int_0^4 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx=\frac{8}{27}(1+\frac{9}{4}x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^4=\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1)$$

سال ٦٩) طول یک حلقه مربوط به منحنی $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ برابر است با:

۱) a ۲) $8a$ ۳) $2a$ ٤) $4a$

حل:

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dx=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,dt$$
$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1+\cos^2 t-2\cos t)+a^2\sin^2 t}\,dt=\int_0^{2\pi}a\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}\;dt$$
$$=2a\int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{1-\cos t}{2}}\;dt=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt=-a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}=4a-(-4a)=8a$$

سال ۷۳) طول قوس منحنی $y=\frac{2}{3}x\sqrt{x}$ در فاصله $[0,3]$ مساوی کدام است؟

۱) $\frac{14}{3}$ ۲) $\frac{14}{9}$ ۳) $\frac{14}{27}$ ٤) $\frac{14}{1}$

حل:

$$y'=\frac{2}{3}(\sqrt{x}+\frac{x}{2\sqrt{x}})=\frac{2}{3}(\frac{3}{2}\sqrt{x})=\sqrt{x}\Rightarrow L=\int_0^3\sqrt{1+x}dx=\frac{14}{3}$$

سال ٧٤) طول قوس منحنی $y=4\sin\theta$ و $x=4\cos\theta$ از $\theta=0$ تا $\theta=\pi$ کدام است؟

۱) 2π ۲) 4π ۳) 8π ٤) 16π

حل:

$$L=\int_0^{\pi}\sqrt{16\cos^2\theta+16\sin^2\theta}\,d\theta=\int_0^{\pi}4d\theta=4\pi$$

سال ٧٤) طول قوس منحنی $y=e^t\sin t,\ x=e^t\cos t$ از $t=0$ تا $t=4$ برابر است با:

۱) $\sqrt{2}(e^4-1)$ ۳) $2(e^4+1)$ ۳) $\sqrt{2(e^4+1)}$ ٤) $2(e^4-1)$

حل:

$$x'=e^t\cos t-e^t\sin t$$
$$y'=e^t\sin t+e^t\cos t$$
$$L=\int_0^4\sqrt{(e^t\cos t-e^t\sin t)^2+(e^t\cos t+e\sin t)^2}\,dt=\int_0^4 e^t\sqrt{2}\;dt=\sqrt{2}e^t\Big|_0^4=\sqrt{2}e^4-\sqrt{2}$$

سال ٧٦) طول قوس $y=\sqrt{4-x^2}$ را در فاصله $[0,2]$ به دست آورید.

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) π ۳) 3π ٤) 4π

حل:

$$y'=\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}=\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$L=\int_0^2\sqrt{1+\frac{x^2}{4-x^2}}\,dx=\int_0^2\sqrt{\frac{4-x^2+x^2}{4-x^2}}\,dx$$

$$=\int_0^2\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{2\cos\theta}\,2\cos\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{2\cos\theta}2\cos\theta\,d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta=2\times\frac{\pi}{2}=\pi$$

$$\begin{cases}x=2\sin\theta\\dx=2\cos d\theta\end{cases}$$

سال ۷۷) طول خم تابع پارامتری با ضابطه $\begin{cases}x=1-t\\y=t^{\frac{3}{2}}\end{cases}$ وقتی $0\le t\le 1$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{9}(13\sqrt{13}-4)$　　۳) $\frac{1}{27}(13\sqrt{13}-8)$

۲) $\frac{1}{9}(13\sqrt{13}-8)$　　٤) $\frac{1}{8}(13\sqrt{13}-4)$

حل:

$$\left.\begin{array}{l}x'=-1\\y'=\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}\end{array}\right\}\Rightarrow\quad L=\int_0^1\sqrt{1+\frac{9}{4}t}\,dt=\int_1^{\frac{13}{4}}\sqrt{u}\times\frac{9}{4}du$$

$$1+\frac{9}{4}t=u\Rightarrow\frac{9}{4}dt=du$$

$$\Rightarrow L=\frac{9}{4}\times\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Bigg|_1^{\frac{13}{4}}=\frac{8}{27}(u)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^{\frac{13}{4}}=\frac{8}{27}[(\frac{13}{4})^{\frac{3}{2}}-1]=\frac{1}{27}(13\sqrt{13}-8)$$

سال ۷۷) طول قوس 60^0 از دایره به معادله پارامتری $\begin{cases}x=10\cos\theta\\y=10\sin\theta\end{cases}$ کدام است؟

(1) $\frac{10\pi}{3}$　　(2) $\frac{\sqrt{10}\pi}{3}$　　(3) $\frac{3}{10}\pi$　　(4) $3\sqrt{10}\pi$

حل:

$$\begin{array}{l}x'=10(-\sin\theta)\\y'=10\cos\theta\\(x')^2+(y')^2=(10)^2\end{array}\qquad\Rightarrow L=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{(10)^2}\,d\theta=\frac{10\pi}{3}$$

تمرین

مجموع های زیر را بدست آورید.

$$1)\sum_{i=-3}^{6} 2i(i-1)$$

$$2)\sum_{i=1}^{15} (3i-1)(i^2+4i)$$

$$3)\sum_{i=0}^{39} (\sqrt{2i-1}-\sqrt{2i-3})$$

$$4)\sum_{i=2}^{11}\left(\frac{1}{(5i-1)(5i+4)}\right)$$

$$5)\sum_{i=1}^{n} 4(3^{i}-3^{i-1})$$

مساحت ناحیه محدود به منحنی ها و خطوط داده شده در زیر را بیابید.

$6) y^2 = x - 1 \quad , \quad x = 3$

$7) y = 2 - x^2 \quad , \quad y = -x$

$8) x^2 = 18 - y \quad , \quad y = x^2$

$9) xy^2 = y^2 - 1 \quad , \quad x = 1 \quad , \quad y = 1 \quad , \quad y = 4$

$10) y = x^3 - 2x^2 - 3x \quad , \quad y = 2x^3 - 3x^2 - 9x$

$11) y = |x| \quad , \quad y = x^2 - 1 \quad , \quad x = -1 \quad , \quad x = 1$

$12) y = x^2 \quad , \quad x = y^3 \quad , \quad x + y = 2$

$13) y = 2 - x \quad , \quad y = x^2$

$14) x - y = 1 \quad , \quad y^2 = 2x + 1$

$15) yx^2 + y = 1 \quad , \quad x = -1 \quad , \quad x = 1 \quad , \quad y = 0$

$16) y^2 = x \quad , \quad x = 8 \quad , \quad y = 1$

۱۷) مساحت مثلث به رئوس $(1,1)$، $(3,3)$ و $(4,-1)$ را با استفاده از انتگرال گیری بیابید.

۱۸) مساحت ذوزنقه به رئوس $(1,2)$، $(-1,1)$، $(2,1)$ و $(2,-1)$ را با استفاده از انتگرال گیری بیابید.

۱۹) مساحت دو ناحیه بسته ای که از تقاطع منحنی $y = \frac{1}{2}x^2$ و دایره $x^2 + y^2 = 8$ پدید می آید را بدست آورید.

۲۰) مساحت سه ناحیه بسته ای که از تقاطع هذلولی $\frac{1}{2}x^2 - y^2 = 1$ و بیضی $\frac{1}{4}x^2 + y^2 = 1$ پدید می آید را بدست آورید.

۲۱) با استفاده از انتگرال حجم کره را بدست آورید.

۲۲) مطلوب است محاسبه حجم حاصل از دوران ناحیه محصور بین $y = \ln(2x)$، محور x و خط $x = e$ حول محور y.

۲۳) حجم جسم دواری که از دوران ناحیه محصور بین منحنی $y = x^2$، محور x و خطوط $x = 1$ و $x = 2$ حول خط $x = -2$ بوجود می آید را پیدا کنید.

۲۴) ابتدا مساحت محصور بین $x^2 + y^2 = 5 \, , \, y^2 = 4x \, , \, x^2 = 4y$ را محاسبه کرده سپس این ناحیه را حول خط $y = -7$ دوران دهید و حجم حاصل را محاسبه کنید.

۲۵) مطلوب است محاسبه حجم حاصل از دوران ناحیه محصور بین $y = e^{-x}$، خطوط $x = 0$ و $x = 1$ حول محور y.

۲۶) مطلوب است محاسبه حجم حاصل از دوران ناحیه محصور بین $y = \sin^{-1} x$، خطوط $x = 0$ و $x = 1$ حول محور x .

۲۷) مطلوب است محاسبه حجم حاصل از دوران ناحیه محصور بین $y = xe^{-x}$، خطوط $x = 0$ و $x = 3$ حول محور x .

۲۸) مطلوب است محاسبه حجم حاصل از دوران ناحیه محصور بین $y=\sinh x$ ، خطوط $x=-1$ و $x=1$ حول محور x .

۲۹) مطلوب است محاسبه حجم حاصل از دوران ناحیه محصور بین $y=\cos x$ ، خطوط $x=0$ و $x=\frac{\pi}{2}$ حول محور y.

۳۰) مطلوبست حجم جسم حاصل از دوران مثلث به رئوس $(2,2)$، $(3,1)$ و $(1,0)$

الف- حول محور x .

ب- حول محور y .

۳۱) حجم حاصل از دوران ناحیه محدود به سهمی $x=y^2+2$ و خط $x=y+8$ حول محور y را بیابید.

۳۲) حجم حاصل از دوران ناحیه محدود به سهمی $x=y^2$، محور x و خط $x=4$ حول خط $x=4$ را بیابید.

۳۳) حجم یک استوانه به ارتفاع h و شعاع قاعده r را بیابید.

۳۴) حجم حاصل از دوران هر یک از نواحی زیر را در حول محور x محاسبه کنید:

الف - $y=\sqrt{x}$ $\quad 0\le x\le 1$

ب - $y=\sin x$ $\quad 0\le x\le 1$

ج - ناحیه محصور بین $y=\sin x, y=\cos x, 0\le x\le \frac{\pi}{4}$

د - ناحیه محصور بین $y=\sqrt{4-x^2},\ y=1,\ 0\le x\le 3$

ه- ناحیه محصور بین $y=[\sqrt{2x+1}],\ x=4,\ x=7$

۳۵) مطلوبست حجم جسم حاصل از دوران ناحیه محدود به دو سهمی $y=x^2$ و $y=1+x-x^2$ حول خط $y=-3$.

۳۶) مطلوبست حجم جسم حاصل از دوران ناحیه محدود به سهمی $y^2=4x$ و خط $y=x$ حول خط $x=4$.

۳۷) طول قوس سهمی $y^2=6x$ از $x=6$ تا $x=12$ را محاسبه کنید.

۳۸) طول قوس منحنی $y=\ln x$ از $x=1$ تا $x=e$ را محاسبه کنید.

۳۹) با استفاده از انتگرال محیط دایره ای به شعاع ۱ را بدست آورید.

۴۰) محیط منحنی $x=4\sqrt{2}\sin(t)$, $y=\sin 2t$ را محاسبه کنید.

۴۱) طول قوس منحنی $3y=(x^2-2)^{\frac{3}{2}}$ از $x=3$ تا $x=6$ را محاسبه کنید.

۴۲) طول قوس منحنی $9x^{\frac{2}{3}}+4y^{\frac{2}{3}}=36$ در ربع دوم از $x=-1$ تا $x=-\frac{1}{8}$ را محاسبه کنید.

۴۳) طول قوس منحنی $8y=x^4+2x^{-2}$ از $x=1$ تا $x=2$ را محاسبه کنید.

۴۴) طول قوس منحنی $x^2=(2y+3)^3$ از $(1,1)$ تا $(7\sqrt{7},2)$ را محاسبه کنید.

۴۵) طول قوس منحنی $y=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^{-1}$ از $(2,\frac{19}{12})$ تا $(5,\frac{314}{15})$ را محاسبه کنید.

۴۶) اگر $f(x)=\int_0^x\sqrt{\cos t}\,dt$ طول قوس نمودار f را از $x=0$ تا $x=\pi$ را بدست آورید.

فصل ششم

انتگرالهای مجازی

انتگرالهای مجازی تعمیمی از انتگرالهای معین هستند که حداقل یکی از حدود انتگرال گیری در آنها نامتناهی است و یا انتگرالده در یکی از حدود انتگرال گیری یا یک نقطه در فاصله انتگرال گیری دارای حد نامتناهی می باشد.

۶. ۱. انتگرال مجازی نوع اول

تعریف ۱: هرگاه f به ازای هر $x \geq a$ پیوسته باشد آنگاه

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx$$

اگر حد موجود و متناهی باشد انتگرال مجازی را همگرا و در غیر این صورت انتگرال را واگرا گوییم.

تعریف ۲: هرگاه f به ازای هر $x \leq b$ پیوسته باشد آنگاه

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)dx$$

اگر حد موجود و متناهی باشد انتگرال مجازی را همگرا و در غیر این صورت آن را واگرا گوییم.

تعریف ۳: هرگاه f به ازای هر x پیوسته باشد و c عدد دلخواهی باشد که تابع در آن پیوسته است (c را معمولاً صفر در نظر می گیرند.) آنگاه

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \underset{a\to-\infty}{Lim}\int_a^c f(x)dx + \underset{b\to+\infty}{Lim}\int_c^b f(x)dx$$

اگر حدهای فوق موجود و متناهی باشند انتگرال را همگرا و در غیر این صورت واگرا گوییم.

مثال ۱ : معین کنید که انتگرال زیر واگراست یا همگرا.

$$\int_5^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt[3]{9-x^2}} = \underset{b\to+\infty}{Lim}\int_5^b \frac{xdx}{\sqrt[3]{9-x^2}} = \underset{b\to+\infty}{Lim}\left(-\frac{3}{4}(9-x^2)^{\frac{2}{3}}\Big|_5^b\right) = \underset{b\to+\infty}{Lim}\left(-\frac{3}{4}(9-b^2)^{\frac{2}{3}} + 3\sqrt[3]{4}\right) = -\infty$$

بنابراین انتگرال واگراست.

مثال ۲ : معین کنید که انتگرال زیر واگراست یا همگرا.

$$\int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{3dx}{x^2+9} = \underset{b\to+\infty}{Lim}\int_{\sqrt{3}}^b \frac{3dx}{x^2+9} = \underset{b\to+\infty}{Lim}\left(\tan^{-1}(\frac{x}{3})\Big|_{\sqrt{3}}^b\right) = \underset{b\to+\infty}{Lim}(\tan^{-1}b - \frac{\pi}{3}) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$

بنابراین انتگرال همگراست.

مثال ۳ : معین کنید که انتگرال زیر واگراست یا همگرا.

$$\int_{-\infty}^0 x\, 5^{-x^2} dx = \underset{a\to-\infty}{Lim}\int_a^0 x\, 5^{-x^2} dx = \underset{a\to-\infty}{Lim}\left(-\frac{1}{\ln 5}5^{-x^2}\Big|_a^0\right) = \underset{a\to-\infty}{Lim}\left(-\frac{1}{\ln 5}(1-5^{-a^2})\right) = -\frac{1}{\ln 5}$$

بنابراین انتگرال همگراست.

مثال ۴ : معین کنید که انتگرال زیر واگراست یا همگرا.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}dx = \int_{-\infty}^0 e^{-|x|}dx + \int_0^{+\infty} e^{-|x|}dx = \int_{-\infty}^0 e^x dx + \int_0^{+\infty} e^{-x}dx$$

$$= \underset{a\to-\infty}{Lim}(\int_a^0 e^x dx) + \underset{b\to+\infty}{Lim}(\int_0^b e^{-x}dx) = \underset{a\to-\infty}{Lim}\left(e^x\Big|_a^0\right) + \underset{b\to+\infty}{Lim}\left(-e^{-x}\Big|_0^b\right)$$

$$= \underset{a\to-\infty}{Lim}(1-e^a) + \underset{b\to+\infty}{Lim}(-e^{-b}+1) = 1+1 = 2$$

بنابراین انتگرال همگراست.

مثال ۵ : حجم جسم حاصل از دوران ناحیه محدود به منحنی $y=\frac{1}{x}$ **و** $y=0$ **از** $x=1$ **تا** $+\infty$ **را بیابید.**

$$v = \int_1^{+\infty} \pi(\frac{1}{x})^2 dx = \pi \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \pi \lim_{b \to +\infty} (-\frac{1}{x})\Big|_1^b = \pi \lim_{b \to +\infty} (-\frac{1}{b}+1) = \pi$$

مثال ۶ : ثابت کنید

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^7 dx \neq \lim_{a \to +\infty} \int_{-a}^{a} x^7 dx$$

حل: بنا به تعریف انتگرال مجازی طرف چپ رابطه فوق برابر است با

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^7 dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^0 x^7 dx + \lim_{b \to +\infty} \int_0^b x^7 dx = \lim_{a \to -\infty} \left(\frac{x^8}{8} \right)\Big|_a^0 + \lim_{b \to +\infty} \left(\frac{x^8}{8} \right)\Big|_0^b$$

$$= \lim_{a \to -\infty} \left(-\frac{a^8}{8} \right) + \lim_{b \to +\infty} \left(\frac{b^8}{8} \right) = -\infty + \infty$$

چون حدهای فوق نامتناهی هستند پس انتگرال مجازی واگراست. حال طرف راست را محاسبه می کنیم:

$$\lim_{a \to +\infty} \int_{-a}^{a} x^7 dx = \lim_{a \to +\infty} \left(\frac{x^8}{8} \right)\Big|_{-a}^{a} = \lim_{a \to +\infty} \left(\frac{a^8}{8} - \frac{(-a)^8}{8} \right) = 0$$

بنابراین دو طرف رابطه نمی توانند مساوی باشند.

۶. ۲. انتگرال مجازی نوع دوم

تعریف ۱ : هرگاه f در هر x از بازه $(a,b]$ از چپ پیوسته بوده و $\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ آنگاه در صورت وجود حد داریم

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

تعریف ۲ : هرگاه f در هر x از بازه $[a,b)$ از راست پیوسته بوده و $\lim_{x \to b^-} f(x) = \pm\infty$ آنگاه در صورت وجود حد داریم

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

تعریف ۳ : هرگاه f در هر x از بازه $[a,b]$ بجز $c\in(a,b)$ پیوسته بوده و $\lim_{x\to c}|f(x)|=+\infty$ آنگاه

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx+\lim_{\delta\to 0^+}\int_{c+\delta}^b f(x)dx$$

در صورت متناهی بودن حدهای فوق انتگرال مجازی را همگرا و در غیر این صورت آن را واگرا گوییم.

مثال ۷ : معین کنید که انتگرال زیر واگراست یا همگرا.

$$\int_0^{16} x^{-\frac{3}{4}}dx$$

حل: مشاهده می شود که $\lim_{x\to 0^+}(x^{-\frac{3}{4}})=+\infty$ بنابراین انتگرال فوق یک انتگرال مجازیست. لذا

$$\int_0^{16} x^{-\frac{3}{4}}dx=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{0+\varepsilon}^{16} x^{-\frac{3}{4}}dx=\lim_{\varepsilon\to 0^+}(4x^{\frac{1}{4}})\Big|_{\varepsilon}^{16}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}(8-4\varepsilon^{\frac{1}{4}})=8$$

مثال ۸ : انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

حل: مشاهده می شود که $\lim_{x\to 1^-}(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}})=+\infty$ بنابراین انتگرال فوق یک انتگرال مجازیست. لذا

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\lim_{\varepsilon\to 0^+}(\sin^{-1}x)\Big|_0^{1-\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}(\sin^{-1}(1-\varepsilon)-0)=\frac{\pi}{2}$$

مثال ۹ : انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x\,dx$$

حل: مشاهده می شود که $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (\tan x) = +\infty$ **بنابراین انتگرال فوق یک انتگرال مجازیست و داریم**

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \tan x dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} (\ln|\cos x|)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} (\ln(\cos(\frac{\pi}{2}-\varepsilon)) - 0) = \ln(0) = -\infty$$

بنابراین انتگرال واگراست.

مثال ۱۰ : انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int_0^4 \frac{1}{x^2-2x-3} dx$$

حل: مشاهده می شود که

$$\lim_{x \to 3} \left(\left| \frac{1}{x^2-2x-3} \right| \right) = \lim_{x \to 3} \left(\frac{1}{|x+1||x-3|} \right) = +\infty$$

بنابراین انتگرال فوق یک انتگرال مجازیست. لذا

$$\int_0^4 \frac{1}{x^2-2x-3} dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_0^{3-\varepsilon} \frac{1}{(x+1)(x-3)} dx + \lim_{\delta \to 0^+} \int_{3+\delta}^4 \frac{1}{(x+1)(x-3)} dx$$

$$= \frac{1}{4} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_0^{3-\varepsilon} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+1} \right) dx + \frac{1}{4} \lim_{\delta \to 0^+} \int_{3+\delta}^4 \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+1} \right) dx$$

$$= \frac{1}{4} \lim_{\varepsilon \to 0^+} (\ln|x-3| - \ln|x+1|)\Big|_0^{3-\varepsilon} + \frac{1}{4} \lim_{\delta \to 0^+} (\ln|x-3| - \ln|x+1|)\Big|_{3+\delta}^4$$

$$= \frac{1}{4} \lim_{\varepsilon \to 0^+} (\ln\varepsilon - \ln|4-\varepsilon| - \ln 3) + \frac{1}{4} \lim_{\delta \to 0^+} (-\ln 5 - \ln\delta + \ln|4+\delta|)$$

$$= +\infty - \infty$$

انتگرال واگراست.

تمرین

واگرایی و همگرایی انتگرالهای زیر را بررسی کنید.

1) $\int_{-2}^{0}\frac{dx}{2x+3}$

2) $\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{e^x}}$

3) $\int_{2}^{4}\frac{xdx}{\sqrt{x-2}}$

4) $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^4+x^2}$

5) $\int_{-\infty}^{3}4^x\,dx$

6) $\int_{-\infty}^{0}xe^x dx$

7) $\int_{0}^{1}\frac{(\ln x)^2}{x}dx$

8) $\int_{0}^{+\infty}\frac{3^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

9) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{4x^2+4x+5}$

10) $\int_{-3}^{0}\frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$

11) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\cot^2 t\,dt$

12) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\tan\theta\,d\theta$

13) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{1-\sin t}$

14) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x-3)^4}$

به ازای چه مقادیری از n انتگرالهای زیر همگرا هستند؟

15) $\int_{0}^{1}x^n dx$

16) $\int_{0}^{1}x^n\ln x\,dx$

17) $\int_{0}^{1}x^n(\ln x)^2 dx$

۱۸) با استفاده از روش انتگرال گیری ثابت کنید محیط دایره $x^2+y^2=a^2$ برابر است با $2\pi a$.

۱۹) آیا می توان حجم جسم حاصل از دوران ناحیه محدود به منحنی $y=x^{-\frac{1}{3}}$، خط $x=8$ و محورهای x و y حول محور x را با عددی متناهی نمایش داد؟

۲۰) آیا می توان حجم جسم حاصل از دوران ناحیه محدود به منحنی $y=x^{-\frac{1}{2}}$، خط $x=1$ و محورهای x و y حول محور x را با عددی متناهی نمایش داد؟ آیا می توان مساحت ناحیه بین این منحنی و محورهای مختصات را با عدد متناهی نشان داد؟

۲۱) آیا می توان مساحت ناحیه سمت راست محور y و محدود به منحنی $x^2+xy^2-4y^2=0$ و مجانبش را با عددی متناهی نشان داد؟

۲۲) آیا می توان مساحت ناحیه محدود به منحنی $2xy-y=1$ ، محور x و خط $x=1$ را با عددی متناهی نشان داد؟

فصل هفتم

دنباله ها و سریهای نامتناهی

۷. ۱. دنباله ها

تعریف دنباله : دنباله تابعی است که حوزه تعریف آن ، مجموعه اعداد صحیح مثبت است (اعداد طبیعی). یعنی

$$f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$$
$$n\mapsto f(n)$$

$f(n)$ را با a_n نشان می دهند و آن را جمله عمومی دنباله گویند.

یک دنباله را معمولا به صورت $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}=\{a_1,a_2,\ldots\}$ یا مختصراً a_n نمایش می دهند. بطور مثال $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ یا $\left\{\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\ldots,\frac{n}{n+1},\ldots\right\}$ یک دنباله می باشد.

۷. ۱. ۱. همگرایی دنباله:

منظور از حد یک دنباله یعنی حد جمله عمومی آن هرگاه n به سمت مثبت بی نهایت میل می کند و بصورت زیر تعریف می شود :

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N > 0 \;\; \ni \;\; \forall n > N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$$

اگر حد فوق متناهی باشد آنگاه گویند دنباله همگراست و اگر حد وجود نداشته باشد یا برابر ∞ باشد آن را واگرا گوئیم.

مثال ۱: $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$.

اثبات:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \;\; \ni \;\; \forall\, n > N \Rightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon \Rightarrow n < \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow N \geq \frac{1}{\varepsilon}$$

بنابراین دنباله همگراست.

مثال۲ : همگرایی یا واگرایی دنباله های زیر را بررسی کنید.

$$\left\{\frac{3n+1}{5n-1}\right\}_{n=1}^{\infty} \quad , \quad \{n\}_{n=1}^{\infty} \quad , \quad \left\{\frac{\ln n}{n^2}\right\}_{n=1}^{\infty} \quad , \quad \left\{(-1)^n \frac{n}{2n+1}\right\}_{n=1}^{\infty} \quad , \quad \left\{\frac{1+n-n^2}{n^3+n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

حل:

$$a)\quad a_n = \frac{3n+1}{5n-1} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} a_n = \frac{3}{5}$$

بنابراین دنباله همگراست.

$$b)\quad a_n = n \Rightarrow \lim_{n \to \infty} a_n = \infty$$

دنباله واگراست.

$$c)\quad a_n = \frac{\ln n}{n^2} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} a_n = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n}}{2n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2n^2} = 0$$

دنباله همگراست.

$$d)\quad a_n = (-1)^n \frac{n}{2n+1} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} a_n = \begin{cases} \frac{1}{2} & n = 2k \\ -\frac{1}{2} & n = 2k+1 \end{cases}$$

دنباله واگراست.

$$e)\quad a_n=\frac{1+n-n^2}{n^3+n+1}\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n=0$$

بنابراین دنباله همگراست.

مثال۳ : با استفاده از تعریف نشان دهید دنباله زیر واگراست.

$$\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$$

حل: فرض می کنیم دنباله همگرا باشد. در این صورت

$$\forall\varepsilon>0\quad \exists N>0 \quad \ni \quad \forall n>N\Rightarrow \left|(-1)^n-L\right|<\varepsilon$$

$$\to\begin{cases}|1-L|<\varepsilon & n=2k\\ |-1-L|<\varepsilon & n=2k+1\end{cases}\xrightarrow{\varepsilon=\frac{1}{2}}\begin{cases}-\frac{1}{2}<1-L<\frac{1}{2} & n=2k\\ -\frac{1}{2}<-1-L<\frac{1}{2} & n=2k+1\end{cases}$$

$$\to\begin{cases}\frac{1}{2}<L<\frac{3}{2} & n=2k\\ -\frac{3}{2}<L<-\frac{1}{2} & n=2k+1\end{cases}$$

چون دو مقدار برای حد دنباله بدست می آید، دنباله واگراست.

قضیه۷. ۱. ۱ : اگر $\lim_{n\to\infty} a_n=L$ و $\lim_{n\to\infty} b_n=L'$ آنگاه

الف- $\lim_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=L\pm L'$ ب- $\lim_{n\to\infty}(a_nb_n)=LL'$ ج- اگر $L'\neq 0$ آنگاه $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{L}{L'}$

بنابراین بر طبق قضیه فوق اگر دنباله های a_n و b_n همگرا باشند آنگاه حاصل جمع و حاصل ضرب آنها همگراست.

نتیجه۱ : اگر a_n همگرا بوده ولی b_n واگرا باشد آنگاه $a_n\pm b_n$ واگراست.

نتیجه۲ : اگر a_n واگرا بوده و b_n واگرا باشد آنگاه در مورد $a_n\pm b_n$ چیزی نمی توان گفت.

مثال ۴ : با استفاده از قضیه قبل نشان دهید دنباله زیر همگراست.

$$\left\{\frac{n^2}{4n-3}\sin\frac{\pi}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

حل:

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}=\left\{\frac{n}{4n-1}\right\}_{n=1}^{\infty}\to L=\frac{1}{4}\quad,\quad \{b_n\}_{n=1}^{\infty}=\left\{n\sin\frac{\pi}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}\to L=\pi$$

$$\to\{c_n\}_{n=1}^{\infty}=\{a_nb_n\}_{n=1}^{\infty}=\left\{\frac{n^2}{4n-1}\sin\frac{\pi}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}\to L\cdot L'=\frac{\pi}{4}$$

قضیه ۷. ۱. ۲ (فشردگی):

اگر به ازای هر $n>N$ داشته باشیم $a_n\le c_n\le b_n$ و $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=L$ آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=L$.

قضیه ۷. ۱. ۳ : اگر $f(n)=a_n$ و $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=L$ آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=L$ ولی عکس این قضیه برقرار نیست.

مثال ۴ : همگرایی دنباله های زیر را به کمک دو قضیه فوق بررسی کنید:

الف) $\left\{\frac{\ln(n)}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$　　　ب) $\left\{\frac{\sin(n)}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

حل:

الف) $a_n=\frac{\ln(n)}{n}\to\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0$

پس حد دنباله نیز برابر صفر است.

ب) $a_n=\frac{\sin(n)}{n}\to\frac{-1}{n}\le\frac{\sin(n)}{n}\le\frac{1}{n}\quad,\quad \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-1}{n}=0$

پس $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin(n)}{n}=0$.

۷. ۱. ۲. دنباله های یکنوا و کراندار

تعریف۱: دنباله $\{a_n\}$ را صعودی گوئیم هر گاه به ازای هر n ، $a_{n+1}\ge a_n$ $(\frac{a_{n+1}}{a_n}\ge 1, a_{n+1}-a_n\ge 0)$ و نزولی گوئیم هر گاه $a_{n+1}\le a_n$ $(\frac{a_{n+1}}{a_n}\le 1, a_{n+1}-a_n\le 0)$. دنباله صعودی را با نماد $a_n\uparrow$ و دنباله نزولی را با نماد $a_n\downarrow$ نشان می دهیم. یک دنباله صعودی یا نزولی را یک دنباله یکنوا گوئیم.

اگر $a_{n+1} > a_n \quad (\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1, a_{n+1} - a_n > 0)$ یا $a_{n+1} < a_n \quad (\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1, a_{n+1} - a_n < 0)$ آنگاه دنباله را به ترتیب اکیدا صعودی یا اکیدا نزولی گویند.

نکته: صعودی یا نزولی بودن دنباله را می توان از طریق مشتق گیری نیز تشخیص داد.

مثال ۵ : صعودی یا نزولی بودن دنباله های زیر را مشخص کنید.

$$\left\{\frac{n+1}{2n-1}\right\}_{n=1}^{\infty} \quad , \quad \left\{\frac{4n}{5n+1}\right\}_{n=1}^{\infty} \quad , \quad \left\{\frac{e^n}{(n+1)!}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

حل:

$$a) \quad f(n) = \frac{n+1}{2n-1} \to f'(n) = \frac{-3}{(2n-1)^2} < 0 \to a_n \downarrow$$

$$b) \quad f(n) = \frac{4n}{5n+3} \to f'(n) = \frac{12}{(5n+3)^2} > 0 \to a_n \uparrow$$

$$c) \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e^{n+1}}{(n+2)!} \times \frac{(n+1)!}{e^n} = \frac{e}{n+2} > 1 \to a_n \uparrow$$

تعریف۲: دنباله $\{a_n\}$را کراندار از پایین نامند هر گاه عددی مانند M موجود باشد به طوری که به ازای هر n , $a_n \geq M$.

تعریف۳: دنباله $\{a_n\}$را کراندار از بالا نامند هر گاه عددی مانند M' موجود باشد به طوری که به ازای هر n , $a_n \leq M'$.

تعریف۴: دنباله ای که هم از بالا و هم از پایین کراندار باشد را کراندار گویند.

قضیه ۷. ۱. ۴ : هر دنباله یکنوا و کراندار همگراست.

مثال۶ : دنباله زیر همگرا ست.

$$\left\{\frac{2^n}{1+2^n}\right\}_{n=1}^{\infty} \quad \to \quad 0 \leq \frac{2^n}{1+2^n} \leq 1 \quad , \quad f'(n) = \frac{(\ln 2)2^n}{(1+2^n)^2} > 0 \to a_n \uparrow$$

بنابراین دنباله کراندار و صعودی است و در نتیجه همگراست.

قضیه۷. ۱. ۵ : هر دنباله صعودی (نزولی) و از بالا (پایین) کراندار، همگراست.

مثال۷ : دنباله های زیر همگرا هستند.

$$\left\{\frac{2^n}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty} \to 0<\frac{2^n}{n!} \quad , \quad \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2}{n+1}\le 1 \to a_n \downarrow \quad , \quad a_n>0$$

$$\left\{\frac{3n-1}{4n+5}\right\}_{n=1}^{\infty} \to f'(n)=\frac{19}{(4n+5)^2}>0 \quad , \quad \frac{3n-1}{4n+5}=\frac{3-\frac{1}{n}}{4+\frac{1}{5}}<\frac{3}{4} \to a_n \uparrow \quad , \quad a_n<\frac{3}{4}$$

$$\left\{\frac{n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}\right\}_{n=1}^{\infty} \to \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n+1}{2n+1}<1 \to a_n \downarrow \quad , \quad a_n>0$$

سال ٦٧) دنباله $\left\{n\sin\frac{2\pi}{n}\right\}$ **به چه عددی همگراست؟**

۱) $\frac{2}{\pi}$ ۲) $\frac{1}{\pi}$ ۳) π ٤) 2π

حل :

$$f(n)=n\sin\frac{2\pi}{n} \to \lim_{n\to\infty}\left(n\sin\frac{2\pi}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{1}{n}}=2\pi$$

بنابراین حد دنباله برابر 2π **می باشد.**

۷. ۲. سری های نامتناهی

تعریف ۱: هر گاه $\{u_n\}$ **یک دنباله باشد و** $S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n=\sum_{i=1}^{n}u_i$ **آنگاه دنباله** $\{S_n\}$ **یک سری نامتناهی یا به طور مختصر یک سری می نامیم و بصورت زیر نمایش می دهیم**

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\cdots u_n+\cdots$$

که u_n **را جمله عمومی سری نامند و** $S_k=u_1+u_2+\cdots+u_k=\sum_{i=1}^{k}u_i$ **را مجموع جزیی** k**ام سری گویند.**

تعریف۲ (همگرایی سری): سری $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ **را همگرا نامند هر گاه دنباله** S_n **همگرا باشد و اگر** $\lim_{n\to+\infty}S_n=s$ **آنگاه مقدار سری** $\sum u_n$ **را برابر** s **می گیریم.**

مثال ۸ : همگرائی سری های زیر را بررسی کنید.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty}\ln(\frac{n+1}{n})$$

حل:

$$a) \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\to S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$$

$$\to \lim_{n\to\infty} S_n=1$$

$$b) \quad \sum_{n=1}^{\infty}\ln(\frac{n+1}{n})=\sum_{n=1}^{\infty}(\ln(n+1)-\ln n)\to S_n=\ln2-\ln1+\ln3-\ln2+\cdots+\ln(n+1)-\ln n=\ln(n+1)-\ln1=\ln(n+1)$$

$$\to \lim_{n\to\infty} S_n=\infty$$

بنابراین اولین سری همگرا و دومی واگرا است.

قضیه۷. ۲. ۱ (شرط لازم همگرائی): هرگاه سری $\sum u_n$ همگرا باشد، آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$.

نتیجه: اگر $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$ **آنگاه سری** $\sum u_n$ **واگراست.**

عکس قضیه فوق بر قرار نمی باشد یعنی $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$ **اطلاعی از سری نمی دهد.**

مثال ۹ : سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ یک سری واگراست (در بخش بعد ثابت می کنیم). در حالی که $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$.

مثال۱۰ : در مورد همگرایی یا واگرایی سری های زیر بحث کنید.

$$a) \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \to \lim_{n\to\infty}(-1)^n \neq 0$$

$$b) \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\neq 0$$

$$c) \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)\to \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)=1\neq 0$$

بنابراین هر سه سری فوق واگرا هستند.

۷. ۲. ۱. سری هندسی:

سری بفرم $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ $(\sum_{n=0}^{\infty} ar^{n})$ که در آن a و r اعداد ثابتی می باشند یک سری هندسی است. اگر $|r|<1$ آنگاه سری هندسی همگرا به $s=\frac{a}{1-r}$ می باشد. در حالتیکه $|r|\geq 1$ باشد سری فوق واگرا می باشد. (r را قدر نسبت سری می گویند.) (در بخش های بعد ثابت می کنیم.)

مثال ۱۱ : همگرایی و واگرائی سریهای زیر را بررسی کنید.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3}{5^n} \quad ، \quad \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{3}{5})^n \quad ، \quad \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{e}{\pi})^{-n}$$

حل : a) سری هندسی با قدر نسبت $\frac{1}{5}$ است بنابراین همگراست.

b) سری هندسی با قدر نسبت $\frac{3}{5}$ است بنابراین همگراست.

c) $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{e}{\pi})^{-n}$ را می توان بفرم $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{\pi}{e})^{n}$ نوشت که قدر نسبت از ۱ بزرگتر است لذا سری واگراست.

سری هندسی برای بیان یک عدد اعشاری نامختوم به صورت یک عدد گویا (کسر متعارف) بکار می رود.

مثال ۱۲ : عدد اعشاری ...0.3131313131 را به صورت یک عدد گویا بیان کنید.

حل:

$$0.3131313131\ldots=\frac{31}{100}+\frac{31}{10000}+\frac{31}{1000000}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{31}{(100)^n}=\frac{\frac{31}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{31}{99}$$

قضیه ۷. ۲. ۲ : سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ واگراست.

اثبات :

$$S_1=1$$

$$S_2=1+\frac{1}{2}$$

$$S_4=S_{2^2}=1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})>1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{4}+\frac{1}{4})=1+2\times\frac{1}{2}$$

$$S_{2^3}=1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8})>1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{4}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8})$$
$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1+3\times\frac{1}{2}$$

$$S_{2^4}=S_{16}=1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8})+(\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16})>$$
$$1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{4}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8})+(\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16})>$$
$$=1+\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{4}+2^2\times\frac{1}{2^3}+2^3\times\frac{1}{2^4}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1+4\times\frac{1}{2}$$

به همین ترتیب داریم

$$S_{32}=S_{2^5}>1+5\times\frac{1}{2}$$
$$S_{64}=S_{2^6}>1+6\times\frac{1}{2}$$

و در حالت کلی $S_{2^n}>1+n\times\frac{1}{2}$ و از آنجا $\lim_{n\to\infty} S_{2^n}=\infty$ یعنی سری فوق واگراست.

سری $\sum\frac{1}{n}$ به سری هارمونیک (سری همساز یا توافقی) موسوم است.

قضیه ۷. ۲. ۳ : هر گاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ دو سری نامتناهی باشند که تنها در تعداد متناهی جمله اولشان متفاوت باشند، آنگاه هر دو سری رفتاری یکسان دارند (یا همگرا هستند یا هر دو واگرا).

مثال۱۳ : سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+4}$ با سری هارمونیک تنها در ۴ جمله اول متفاوت است، بنابراین واگراست.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+4}=\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\cdots$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\cdots$$

قضیه ۷. ۲. ۴ : هر گاه $\sum u_n$, $\sum v_n$ دو سری همگراباشد آنگاه

الف- $\sum cu_n = c\sum u_n$

ب- $\sum(u_n \pm v_n)=\sum u_n \pm \sum v_n$

مثال ۱۴ : مقدار سری $\sum(\frac{5}{n(n+1)}+\frac{1}{2^n})$ را بیابید.

حل:
$$\sum(\frac{5}{n(n+1)}+\frac{1}{2^n})=5\sum\frac{1}{n(n+1)}+\sum\frac{1}{2^n}=5+1=6$$

سال ٦٧) سری $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\sqrt{1+\frac{1}{n+1}}\right)$ به چه عددی همگراست؟

۱) $\sqrt{2}-1$ ۲) $\sqrt{2}+1$ ۳) $\sqrt{2}$ ٤) 1

حل:

$$s_n=\sqrt{1+1}-\sqrt{1+\frac{1}{2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2}}-\sqrt{1+\frac{1}{3}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\sqrt{1+\frac{1}{n+1}}=\sqrt{2}-\sqrt{1+\frac{1}{n+1}}$$

$$\to \lim_{n\to\infty} s_n=\sqrt{2}-1$$

سال ٦٧)سری $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{3}{2^n}-\frac{2}{3^n})$ از چه نوع است؟

الف) واگراست. ب) همگرا به 3 است. ج) همگرا به 6 است. د) همگرا به 9 است.

حل :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3}{2^n}\to \text{سری هندسی} \to s=\frac{3}{1-\frac{1}{2}}=6$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}\to \text{سری هندسی} \to s=\frac{2}{1-\frac{1}{3}}=\frac{2}{\frac{2}{3}}=3$$

بنابراین

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{3}{2^n}-\frac{2}{3^n})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3}{2^n}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{3^n}=6-3=3$$

سال ٦٦) حد سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) 0 ۳) 1 ٤) 2

حل : به مثال ۸ مراجعه شود.

سال ٦٤) حد سری $\sum_{n=2}^{\infty}(\frac{2}{n-1}-\frac{2}{n})$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) 0 ۳) 1 ٤) 2

حل :

$$s_n=(\frac{2}{1}-\frac{2}{2})+(\frac{2}{2}-\frac{2}{3})+\ldots+(\frac{2}{n-2}-\frac{2}{n-1})+(\frac{2}{n-1}-\frac{2}{n})$$

$$s_n=2-\frac{2}{n}\Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n=\lim_{n\to\infty}(2-\frac{2}{n})=2$$

بنابراین سری به ۲ همگراست.

۷. ۲. ۲. آزمونهای همگرایی سری ها

برای تشخیص همگرائی و واگرائی سری ها آزمونهای گوناگونی وجود دارد که به معرفی آنها می پردازیم. نخست بحث خود را با سریهایی با جملات نامنفی آغاز می کنیم.

۱-آزمون مقایسه:

فرض کنید $\sum u_n$ یک سری با جملات مثبت باشد، در این صورت

الف- هرگاه $\sum v_n$ یک سری با جملات مثبت همگرا باشد و به ازای هر n، $u_n \le v_n$ آنگاه $\sum u_n$ همگراست.

ب- هرگاه $\sum w_n$ یک سری با جملات مثبت واگرا باشد و به ازای هر n، $u_n \ge w_n$ آنگاه $\sum u_n$ واگراست.

مثال ۱۵ : همگرایی سری های زیر را بررسی کنید.

$$\sum_{n=4}^{+\infty}\frac{1}{\ln n} \quad , \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{3^n+1} \quad , \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sin n+5^n}$$

حل:

$$a)\ \sum_{n=4}^{+\infty}\frac{1}{\ln n} \Rightarrow \quad \forall n\ge 2 \quad 0<\ln n<n \Rightarrow \quad \frac{1}{\ln n}>\frac{1}{n}$$

چون $\sum \frac{1}{n}$ واگراست پس سری فوق نیز واگراست.

$$b)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{3^n+1} \Rightarrow \quad \frac{4}{3^n+1}<\frac{4}{3^n} \quad , \quad \sum\frac{4}{3^n}=\sum\frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{\frac{4}{3}}{1-\frac{1}{3}}=2$$

بنابراین سری همگراست.

$$c)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sin n+5^n} \Rightarrow \quad \frac{1}{\sin n+5^n}<\frac{1}{5^{n-1}} \quad , \quad \sum\frac{1}{5^{n-1}}=\frac{1}{1-\frac{1}{5}}=\frac{5}{4}$$

این سری نیز همگراست.

P-سری: سری $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^P}$ را یک P-سری گویند. این سری برای $P>1$ همگرا و برای $P\le 1$ واگراست. (در بخش های بعد ثابت می کنیم)

مثال ۱۶ : همگرایی سری زیر را بررسی کنید.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{7n^2+1} \Rightarrow \frac{1}{7n^2+1}<\frac{1}{7n^2}<\frac{1}{n^2}$$

و بنا به همگرا بودن $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$، سری همگراست.

۲-آزمون مقایسه حد:

فرض کنید $\sum u_n$ و $\sum v_n$ دو سری با جملات مثبت باشند و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n}=c$ در این صورت

الف- هرگاه $c>0$ آنگاه هر دو سری یا همگرا هستند یا هر دو واگرا.

ب- هرگاه $c=0$ و سری $\sum v_n$ همگرا باشد آنگاه $\sum u_n$ نیز همگراست.

ج- هرگاه $c=+\infty$ و سری $\sum v_n$ واگرا باشد آنگاه $\sum u_n$ نیز واگراست.

مثال ۱۷ : همگرایی سری های زیر را بررسی کنید.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{7n+3}{(5n+1)3^n}\quad,\quad\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln n}{n^4}\quad,\quad\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{5n^2+3}$$

حل:

$$a)\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{7n+3}{(5n+1)3^n}\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{7n+3}{(5n+1)3^n}}{\frac{1}{3^n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{7n+3}{5n+1}=\frac{7}{5}$$

بنا به همگرا بودن $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{3^n}$، سری همگراست.

$$b)\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln n}{n^4}\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{\ln n}{n^4}}{\frac{1}{n^3}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{n}=\lim\frac{\frac{1}{n}}{1}=0$$

بنا به همگرا بودن $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}$، سری همگراست.

$$c)\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{5n^2+3}\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n}{5n^2+3}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{5n+3}=\frac{1}{5}$$

چون $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ واگراست لذا سری واگراست.

۳-آزمون نسبت:

فرض کنید $\sum u_n$ یک سری با جملات مثبت باشد و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=L$ در این صورت

الف- اگر $L<1$ آنگاه سری همگراست.

ب- اگر $L>1$ یا $L=+\infty$ آنگاه سری واگراست.

ج- اگر $L=1$ آنگاه آزمون جواب نمی دهد.

مثال ۱۸ : همگرایی سری های زیر را بررسی کنید.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^3}{n!}\quad,\quad\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n!}{4^n}$$

حل:

$$a)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^3}{n!}\Rightarrow\ \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^3n!}{n^3(n+1)!}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^2}{n^3}=0<1$$

سری همگراست.

$$b)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n)!}{4^n}\Rightarrow\ \lim_{n\to+\infty}\frac{(2n+2)!4^n}{(2n)!4^{n+1}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(2n+1)(2n+2)}{4}=+\infty$$

پس سری واگراست.

۴-آزمون ریشه(کوشی):

فرض کنید $\sum u_n$ یک سری با جملات مثبت باشد و $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n}=L$ در این صورت

الف- اگر $L<1$ آنگاه سری همگراست.

ب- اگر $L>1$ یا $L=+\infty$ آنگاه سری واگراست.

ج- اگر $L=1$ آنگاه آزمون جواب نمی دهد.

مثال ۱۹ : همگرایی سری های زیر را بررسی کنید.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{4n-5}{2n+1}\right)^n \quad , \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\ln(n+1)}\right)^n$$

حل:

$$a)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{4n-5}{2n+1}\right)^n \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{4n-5}{2n+1}\right)^n}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4n-5}{2n+1}\right)=2$$

$$b)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\ln(n+1)}\right)^n \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{\ln(n+1)}\right)^n}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln(n+1)}\right)=0$$

بنابراین سری اول واگرا و سری دوم همگراست.

۵-آزمون انتگرال:

هر گاه $\sum u_n$ یک سری مفروض با جملات نامنفی باشد و $f(x)$ تابعی پیوسته نامنفی و نزولی بر فاصله $[a,\infty)$ بوده و داشته باشیم $f(n)=u_n$ آنگاه از همگرایی یا واگرایی انتگرال $\int_1^\infty f(x)\,dx$ به ترتیب همگرایی یا واگرایی سری $\sum u_n$ حاصل می شود.

مثال ۲۰ : در همگرایی و یا واگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$ بحث کنید.

حل : تابع $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ در بازه $[1,\infty)$ پیوسته، نامنفی و نزولی است. بنابراین

$$\int_1^\infty \frac{xd}{1+x^2}=\lim_{a\to\infty}\int_1^a\frac{xd}{1+x^2}=\lim_{a\to+\infty}\tan^{-1}(x)\Big|_1^a=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$$

پس سری همگراست.

مثال ۲۱ : در همگرایی و واگرایی سری $\sum\frac{1}{n^p}$ به ازای مقادیر مختلف بحث کنید.

حل : هر گاه $f(x)=\frac{1}{x^p}$ آنگاه

$$\int_1^\infty\frac{1}{x^p}\,dx=\lim_{a\to\infty}\int_1^a x^{-p}\,dx=\frac{1}{1-p}\lim_{a\to+\infty}(x^{1-p})\Big|_1^a=\frac{1}{1-p}\lim_{a\to+\infty}\left(\frac{1}{a^{p-1}}-1\right)$$

مقدار این انتگرال به ازای $p \leq 1$ واگرا و به ازای $p > 1$ همگرا است. بنابراین سری $\sum \frac{1}{n^p}$ به ازای $p \leq 1$ واگرا و به ازای $p > 1$ همگراست. مثلا هر یک از سریهای $\sum \frac{1}{n}$ و $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ واگرا و سریهای $\sum \frac{1}{n^2}$, $\sum \frac{1}{\sqrt{n^3}}$ همگرا هستند.

سال ٦٨) کدامیک از سریهای زیر همگراست؟

۱) $\sum \frac{n}{n+1}$ ۲) $\sum \frac{1}{n}$ ۳) $\sum \frac{1}{2^n}$ ٤) $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$

حل : سری (۳) سری هندسی است با قدر نسبت که $\frac{1}{2}$ همگراست.

سری $\sum \frac{1}{n}$ و $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ واگرا می باشند و $\sum \frac{n}{n+1}$ چون $\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ واگرا می باشد.

سال ٦٥) سری $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ به ازای چه مقادیری از α همگراست؟

۱) $\alpha \geq 1$ ۲) $\alpha < 1$ ۳) $\alpha \leq 1$ ٤) $\alpha > 1$

حل : با توجه به مثال فوق گزینه ٤ درست است.

مثال۲۲ : نوع سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n}$ را مشخص کنید.

حل: تابع $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ را در نظر می گیریم. این تابع به ازای $x > 1$ تابعی نامنفی و پیوسته است. برای تشخیص نزولی بودن آن از مشتق استفاده می کنیم. $f'(x)$ به ازای $x > e$ منفی است:

$$x > e \to \ln x > 1 \to f'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2} < 0$$

بنابراین برای تشخیص نوع سری می توان از آزمون انتگرال استفاده کرد. اگرچه در آزمون انتگرال متذکر شدیم که تابع $f(x)$ باید بر بازه $[1,\infty)$ نزولی باشد ولی قضیه مربوط به آزمون انتگرال به ازای $f(x)$ هایی که نهایتا نزولی باشند، یعنی به ازای عددی مثل $\alpha > 1$ بر $[\alpha,+\infty)$ نزولی بوده و در سایر شرایط قضیه بر $[1,\infty)$ صدق کنند برقرار است.

از این رو داریم

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln(x)}{x}\,dx = \lim_{a \to +\infty} \int_1^{a} \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{a \to +\infty} \left.\frac{(\ln(x))^2}{2}\right|_1^a = \lim_{a \to +\infty} \frac{(\ln(a))^2}{2} = +\infty$$

بنابراین سری $\sum \frac{\ln(n)}{n}$ واگراست.

سال ٦٥) کدام سری همگراست؟

الف) $\sum \frac{1}{n+2}$ ب) $\sum \frac{2}{n}$ ج) $\sum \frac{1}{2n}$ د) $\sum \frac{1}{n^2}$

حل : با توجه به آزمون انتگرال $\sum \frac{1}{n^2}$ همگراست.

۷. ۲. ۳. سریهای متناوب:

تعریف ۱: هر سری که جملات آن متوالیاً تغییر علامت دهد به یک سری متناوب موسوم است. هر سری متناوب را می توان به صورت $u_1 - u_2 + u_3 - \cdots + (-1)^{n+1} u_n + \cdots$ نوشت که در آن $u_1 , u_2 ,\ldots, u_n$ اعداد مثبتی هستند.

۱- آزمون سری های متناوب: هر گاه در سری متناوب $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ دنباله $\{u_n\}$ دنباله ای نزولی باشد و $\lim_{n \to \infty} u_n = 0$ آنگاه سری متناوب فوق همگراست.

مثال ۲۳ : نوع سریهای زیر را تعیین کنید.

$$a)\ \sum \frac{(-1)^{n-1}}{n} \qquad b)\ \sum (-1)^n \frac{3n+1}{4n^2-1}$$

حل :

a) $u_n = \frac{1}{n}$ و داریم $u_{n+1} < u_n$ بنابراین سری متناوب همگراست.

b) $u_n = \frac{3n+1}{4n^2+1}$ نتیجه می شود $\lim_{n \to \infty} u_n = 0$ و $u_{n+1} < u_n$, زیرا

$$\frac{3(n+1)}{4(n+1)^2+1} < \frac{3n+1}{4n^2+1} \Rightarrow \frac{3n+4}{4(n+1)^2+1} < \frac{3n+1}{4n^2+1}$$
$$\Rightarrow (4n^2+1)(3n+4) < (3n+1)(4n^2+4+8n+1)$$
$$\Rightarrow 12n^2+20n+1>0$$

که همواره درست است. بنابراین بنا به آزمون فوق سری همگراست.

تعریف۲ (همگرایی مطلق) : سری $\sum u_n$ را یک سری مطلقاً همگرا نامند هر گاه $\sum |u_n|$ همگرا باشد.

تعریف۳ (همگرایی مشروط) : سری $\sum u_n$ را همگرای مشروط نامند هر گاه همگرا باشد ولی مطلقاً همگرا نباشد.

قضیه ۷. ۲. ۴ : هر گاه $\sum u_n$ مطلقا همگرا باشد ، آنگاه سری همگرا نیز هست.

مثال ۲۴ : سری $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ بطور مطلق همگراست. زیرا سری $\sum \frac{1}{n^2} = \sum \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \right|$ همگراست. بنابراین سری $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ همگراست.

مثال ۲۵ :سری $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ همگرا ی مشروط است زیرا همگراست ولی مطلقاً همگرا نیست.

مثال ۲۶ : $\sum \frac{\cos n}{n^2}$ را مورد بررسی قرار دهید.

حل: این سری گرچه هم دارای جملات مثبت و هم دارای جملات منفی است ولی متناوب است.

برای تشخیص همگرایی این سری نشان می دهیم که این سری مطلقاً همگراست یعنی سری $\sum \frac{|\cos(n)|}{n^2}$ همگراست. داریم

$$\frac{|\cos(n)|}{n^2} \le \frac{1}{n^2}$$

و به علت همگرا بودن سری $\sum \frac{1}{n^2}$، سری $\sum \frac{|\cos(n)|}{n^2}$ نیز همگرا و از آنجا سری $\sum \frac{\cos(n)}{n^2}$ همگراست.

۲- آزمون دالامبر(آزمون نسبت برای سری های متناوب):

سری $\sum u_n$ را درنظر می گیریم هر گاه $\lim\limits_{n \to +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = L$ آنگاه

الف- به ازای $L < 1$ سری $\sum u_n$ بطور مطلق همگراست.

ب- به ازای $L > 1$ سری $\sum u_n$ واگرا ست.

ج- برای حالت $L = 1$ نمی توان اظهار نظر کرد.

مثال ۲۷ : در همگرائی یا واگرائی هر یک از سریهای زیر بحث کنید .

1) $\sum (-1)^n \frac{n^3}{3^n}$ 2) $\sum (-1)^n \frac{n^n}{n!}$ 3) $\sum (-1)^n \frac{n-1}{n^2+1}$

حل :

$$1)\quad u_n = (-1)^n \frac{n^3}{3^n} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \left[\frac{(-1)^{n+1}(n+1)^3}{3^{n+1}} \times \frac{3^n}{(-1)^n \times n^3} \right]$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3=\frac{1}{3}<1$$

پس سری همگراست.

2) $u_n=(-1)^n\frac{n^n}{n!}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_u}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^{n+1}}{n+1}\times\frac{n!}{n^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

پس سری واگراست.

3) $u_n=(-1)^n\frac{n-1}{n^2+1}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+2}{(n+1)^2+1}\times\frac{n^2+1}{n+1}\right|=1$$

با توجه به $L=1$ نمی توان اظهار نظر کرد.

۳- آزمون کشی (آزمون ریشه برای سری های متناوب):

سری $\sum u_n$ را در نظر می گیریم. هر گاه $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=L$ آنگاه

الف- به ازای $L<1$ سری $\sum u_n$ بطور مطلق همگراست.

ب- به ازای $L>1$ سری $\sum u_n$ واگرا ست.

ج- برای حالت $L=1$ نمی توان اظهار نظر کرد.

مثال ۲۸ : در همگرایی یا واگرائی هر یک از سریهای زیر بحث کنید.

$a)\sum(-1)^n\left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n$ $\qquad$ $b)\sum(-1)^n\left(\frac{2n+1}{n!}\right)^n$

حل :

با فرض $u_n=(-1)^n\left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n$ داریم

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=L \quad\Rightarrow\quad \lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{3n+2}=\frac{2}{3}$$

پس سری همگراست.

هر گاه $u_n=(-1)^n(\frac{2n+1}{n})^n$ آنگاه

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|U_n|}=L \quad\Rightarrow\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(-1)^n(\frac{2n+1}{n})^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n}=2$$

و سری واگراست.

۳.۷. سریهای توانی

هر سری بصورت $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n=a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\cdots$ که درآن a_2, a_1 ضرایب ثابت هستند، به یک سری توانی موسوم است. در حقیقت یک سری توانی سری است که در آن $u_n=a_n(x-a)^n$.

فاصله همگرایی یک سری توانی فاصله ای است از $a-R$ تا $a+R$ بطوریکه به ازای هر xاز این فاصله سری مطلقاً همگرا و به ازای هر x واقع در خارج این بازه واگرا باشد. Rرا شعاع همگرایی سری می نامند. شعاع همگرایی سری توانی از قضیه زیر بدست می آید.

قضیه ۷. ۳. ۱ : شعاع همگرایی سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n$ بوسیله یکی از دو فرمول زیر بدست می آید:

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \qquad \text{یا} \qquad \frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}$$

قضیه فوق با استفاده از آزمونهای کشی و دالامبر اثبات می شود.

تذکر: برای بدست آوردن بازه همگرائی آزمون های کشی و یا دالامبر را اعمال می کنیم. شرط همگرایی را تحمیل می کنیم تا حدود x بدست آید. نقاط ابتدا و انتها ی بازه را جداگانه بررسی می کنیم.

مثال ۲۹ : بازه همگرایی هر یک از سری های زیر را بیابید.

$$a)\ \sum_{n=0}^{\infty}x^n \quad\Rightarrow\quad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}|x|=|x|<1 \quad\Rightarrow -1<x<1$$

$x=1$ و $x=-1$ را جداگانه بررسی می کنیم:

$$x=1\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}1^n=\sum_{n=0}^{\infty}1 \quad\Rightarrow\quad \lim_{n\to\infty}u_n\neq 0$$

پس سری واگراست.

$$x=-1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$$

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ وجود ندارد. بنابراین سری در این حالت نیز واگراست.

$$b)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n)!x^{n+1}}{(n+1)!x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{n+1}\right| = 0<1$$

یعنی به ازای هر x سری همگراست لذا بازه همگرائی $(-\infty,+\infty)$ است.

$$c)\ \sum_{n=0}^{\infty} n!\,x^n \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n}\right| = 0$$

فقط به ازای $x=0$ همگراست.

قضیه۷. ۳. ۲ (مشتق گیری و انتگرالگیری از سری توانی): اگر سری توانی $U(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n$ با فاصله همگرایی $(a-R,a+R)$ باشد و $V(x)=\sum_{n=0}^{\infty}na_n(x-a)^{n-1}$ از مشتق گیری جمله به جمله سری فوق حاصل شده باشد آنگاه $U'(x)=V(x)$ و بنابراین $U'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-a)^n$. (با همان شعاع همگرائی R)

همچنین $\int_0^t U(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$ یک سری توانی با همان شعاع همگرائی R است.

مثال ۳۰ : نشان دادیم که $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ به ازای هر x همگراست و داریم

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{n!} \Rightarrow f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=f(x)$$

بنابراین $f(x)=e^x$ پس

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

با توجه به سری فوق با تبدیل x به $-x$ خواهیم داشت

$$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$$

با جایگذاری $x=1$ دربسط e^x مقدار عدد نپر بصورت یک سری بدست می آید که با انتخاب تعداد جملات از این سری تقریبی از عدد نپر بدست می آید:

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots$$

مثال ۳۱ : سری $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ یک سری همگراست اگر $x\in(-1,1)$ باشد در این بازه سری هندسی با قدر نسبت x و بنابراین به $\frac{1}{1-x}$ همگراست و لذا خواهیم داشت

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \Rightarrow \frac{1}{1-x}=1+x^2+x^3+\cdots$$

با تبدیل x به $-x$ خواهیم داشت:

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots$$

با انتگرال از این سری خواهیم داشت:

$$\int_0^x\frac{1}{1+t}dt=\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$$

بنابراین بسط تابع $\ln(1+x)$ بدست می آید.

با تبدیل x به x^2 خواهیم داشت $\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots$

و با حل انتگرال بدست می آید

$$\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=\tan^{-1}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{1^7}{7}+\cdots$$

و از آنجا

$$\tan^{-1}(1)=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$

$$\Rightarrow\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\Rightarrow\pi=4-\frac{4}{3}+\frac{4}{5}-\frac{4}{7}+\cdots$$

که مقدار تقریبی π است.

سال ۶۹) در بررسی نوع سری $\sum_{n=0}^{\infty}x^n\tan(\frac{x}{2^n})$ کدام یک از گزاره های زیر درست است؟

۱) همواره واگراست.

۲) همواره همگراست.

۳) در $x\in\left]-1,1\right[$ همگراست.

٤) در $x\in\left]-2,2\right[$ همگراست.

حل:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)\tan(\frac{x}{2^{n+1}})}{n\tan\frac{x}{2^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\times\lim_{n\to\infty}\frac{\tan\frac{x}{2^{n+1}}}{\tan\frac{x}{2^n}} = 1\times\lim_{n\to\infty}\frac{\tan\frac{x}{2^{n+1}}}{\tan\frac{x}{2^n}} = 1\times\frac{0}{0}$$

برای رفع ابهام از هوپیتال استفاده می کنیم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\tan\frac{x}{2^{n+1}}}{\tan\frac{x}{2^n}} = \lim\frac{\frac{1}{2^{n+1}}(1+\tan^2\frac{x}{2^{n+1}})}{\frac{1}{2^n}(1+\frac{1}{2^n}\tan^2\frac{x}{2^n})} = \frac{1}{2}$$

بنا براین همواره همگراست.

۷. ۳. ۱. سری تیلور:

هر سری به شکل $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ را سری تیلور تابع f در نقطه a با بازه همگرایی $(a-R,a+R)$ گوییم و می نویسیم

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots$$

اگر در سری تیلور $a=0$ آنگاه سری را سری مک لورن گوییم. یعنی

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots$$

مثال ۳۲: سری تیلور تابع e^x را حول نقطه $a=1$ بیابید.

حل:

$$f(x)=e^x \Rightarrow f^{(n)}(x)=e^x \Rightarrow f^{(n)}(1)=e$$

بنابراین داریم

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e}{n!}(x-1)^n=e+e(x-1)+\frac{e}{2!}(x-1)^2+\cdots$$

مثال ۳۳: سری مک لورن تابع $\sin x$ را بیابید.

حل:

$$\begin{aligned} f(x)=\sin x &\Rightarrow f'(x)=\cos x \Rightarrow f'(0)=1\\ &\Rightarrow f''(x)=-\sin x \Rightarrow f''(0)=0\\ &\Rightarrow f'''(x)=-\cos x \Rightarrow f'''(0)=-1\\ &\Rightarrow f^{(4)}(x)=\sin x \Rightarrow f^{(4)}(0)=0 \end{aligned}$$

همان طور که می بینید مقدار مشتقات مرتبه های زوج در صفر برابر با صفر است و مقدار مشتقات مرتبه هـای فـرد در صفر یک در میان برابر با ۱ و ۱- است. لذا

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^{n}=0+x+\frac{0}{2!}x^{2}+\frac{-1}{3!}x^{3}+\frac{0}{4!}x^{4}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

$$\Rightarrow\quad \sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

و با مشتق گیری خواهیم داشت:

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(2n)!}x^{2n}$$

۷. ۳. ۲. سری دو جمله ای:

سری زیر را یک سری دو جمله ای گوییم

$$(1+x)^{m}=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^{2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^{3}+\cdots+$$
$$\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{n!}x^{n}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{m}{n}x^{n}\qquad m\in\mathbb{Q}$$

مثال ۳۴: سری دو جمله ای تابع $\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ را بیابید.

حل:

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}}=(1+x)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)}{2!}x^{2}+\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-3)}{3!}x^{3}+\cdots$$
$$=1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{6}x^{2}-\frac{21}{48}x^{3}+\cdots$$

مثال ۳۵: سری دو جمله ای تابع $\sqrt[3]{(x-1)^{2}}$ را بیابید.

حل:

$$\sqrt[3]{(x-1)^{2}}=(1+(-x))^{\frac{2}{3}}=1+\frac{2}{3}(-x)+\frac{\frac{2}{3}(\frac{2}{3}-1)}{2!}(-x)^{2}+\frac{\frac{2}{3}(\frac{2}{3}-1)(\frac{2}{3}-2)}{3!}(-x)^{3}+\cdots$$
$$=1-\frac{2}{3}x-\frac{2}{18}x^{2}-\frac{2}{81}x^{3}+\cdots$$

تمرین

همگرایی دنباله های زیر را بررسی کنید.

1) $\left\{\dfrac{n^2-n}{2n^2+n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$

2) $\left\{\dfrac{2n+1}{1-3n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$

3) $\left\{1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$

4) $\left\{\dfrac{1+(-1)^n}{n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$

5) $\left\{1+(-1)^n\right\}_{n=1}^{+\infty}$

6) $\left\{\dfrac{\ln(n)}{n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$

7) $\left\{e^n\right\}_{n=1}^{+\infty}$

8) $\left\{e^{-n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$

9) $\left\{\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right\}_{n=1}^{+\infty}$

10) $\left\{\tanh(n)\right\}_{n=1}^{+\infty}$

11) $\left\{\dfrac{n!}{n^n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$

12) $\left\{\dfrac{(n+3)!}{3!n!3^n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$

13) $\left\{\dfrac{\ln(n)}{\sqrt{n}}\right\}_{n=1}^{+\infty}$

14) $\left\{\sqrt[n]{3^{2n+1}}\right\}_{n=1}^{+\infty}$

15) $\left\{n(1-\cos\dfrac{1}{n})\right\}_{n=1}^{+\infty}$

16) $\left\{n\sin\dfrac{\pi}{n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$

17) $\left\{\dfrac{1\times3\times5\times\cdots(2n-1)}{1\times5\times8\times\cdots(3n-1)}\right\}_{n=1}^{+\infty}$

18) $\left\{(-1)^n n\right\}_{n=1}^{+\infty}$

19) $\left\{n^2+(-1)^n n\right\}_{n=1}^{+\infty}$

20) $\left\{\left(\dfrac{5n+2}{5n}\right)^n\right\}_{n=1}^{+\infty}$

21) $\left\{\dfrac{1}{n+\sin(n^2)}\right\}_{n=1}^{+\infty}$

22) $\left\{(-1)^n\dfrac{n+1}{n^2}\cos(n!)\right\}_{n=1}^{+\infty}$

23) $\left\{n^2+\cos\dfrac{\pi}{n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$

24) $\left\{\dfrac{(-1)^n+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right\}_{n=1}^{+\infty}$

25) $\left\{\dfrac{2^n+2^{2n}}{3^n+4^n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$

26) $\left\{\dfrac{2^n+n^4}{n^2+3^{n-2}}\right\}_{n=1}^{+\infty}$

27) $\left\{\left(2-\dfrac{1}{2^n}\right)^2\right\}_{n=1}^{+\infty}$

28) $\left\{\dfrac{n^2+1}{1+2^{-n}}\right\}_{n=1}^{+\infty}$

29) $\left\{\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{n\pi}{2}\right\}_{n=1}^{+\infty}$

30) $\left\{(-1)^n\sin\dfrac{\pi}{n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$

31) $\left\{n\sin\dfrac{n\pi}{2}\right\}_{n=1}^{+\infty}$

32) $\left\{\dfrac{2n+(-1)^n n}{n+1}\right\}_{n=1}^{+\infty}$

33) $\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{2-3n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$

34) $\left\{\sqrt[n]{2^n+3^n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$

۳۵) حد دنباله زیر را بیابید:

$$a_n=\begin{cases} n^4 & 1\le n\le 10^{1000} \\ \dfrac{\sin(n)}{n} & n>10^{1000}\end{cases}$$

۳۶) حد دنباله زیر را بیابید:

$$a_1=1 \quad , \quad a_{n+1}=\frac{2(2a_n+1)}{a_n+3} \quad n\ge 1$$

۳۷) حد دنباله زیر را بیابید:

$$a_1=3 \quad , \quad a_{n+1}=\frac{{a_n}^2+3}{4} \quad n\ge 1$$

۳۸) اگر دنباله $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ به عدد ۲ همگرا باشد مطلوب است:

$$\lim_{n\to+\infty}(a_{n+1}+a_{2n}-{a_n}^2)$$

۳۹) اگر $a_n=\dfrac{\cos(n^2)-2n^2}{(n+1)^2}$ مطلوب است:

$$\lim_{n\to+\infty}(a_{2n+2}-a_{2n+1}+a_{2n})$$

۴۰) اگر

$$a_n=\begin{cases} \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n} & n=2k \\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{n} & n=2k+1\end{cases} \qquad k\in\mathbb{Z}$$

مطلوب است: $\lim_{n\to+\infty}(a_{n+1}+a_{n+2})$.

همگرایی سری های زیر را بررسی کنید.

41) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+1}{2n-1}$

42) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{5n}-\frac{3}{7n}\right)$

43) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^n}$

44) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n$

45) $\sum_{n=1}^{+\infty}\cos^n\frac{\pi}{3}$

46) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{n}\right)^n$

47) $\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)$

48) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+4n}}$

49) $\sum_{n=1}^{+\infty}\cos\left(\frac{\pi}{2n^2-1}\right)$

50) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+1}{n^2(n+2)}$

51) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

52) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n}(5n+2)}$

53) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left[1+(-\frac{1}{2})^n\right]$

54) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n+1)(2^n+1)}{3^n+1}$

55) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{2n+1}{n}\right)$

56) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{10n+1}{n(n+1)(n+2)}$

57) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n2^n}$

58) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{6n^3-1}{3n^3+2}$

59) $\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

60) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{(2n+1)(2n-1)}$

61) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{3^n+4}$

62) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+\sqrt{n}}$

63) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$

64) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$

65) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!}{(2n)!}$

66) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|\sin n|}{n^2}$

67) $\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)$

68) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n}{(n+1)!}$

69) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!}{3^n}$

70) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^{2n}}{3^n}$

71) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\tan^{-1}(n+1)-\tan^{-1}(n)\right]$

72) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4^{n+1}-3^{n+1}}{5^n}$

73) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1+2^n}{e^n}$

74) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^{2n+1}-3^{n-1}}{2^{3n}}$

75) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

76) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(\sqrt{2}+1)^{n+1}}{3^{n+4}}$

77) $\sum_{n=1}^{+\infty}(1+\sqrt{2})^{1-n}$

78) $\sum_{n=2}^{+\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

79) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}$

80) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}$

همگرایی مشروط یا مطلق سری های متناوب زیر را بررسی کنید.

81) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2^n-1)^n}$

82) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n2^n}$

83) $\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{\ln n}$

84) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{n^3}$

85) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{e^n}{n}$

86) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{\pi}{n}$

87) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n(n+2)}$

88) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{3}{n!}$

89) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-3)^{n}\frac{(1+n^2)}{n!}$

90) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n}\frac{n+5}{n^2}$

91) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n}\cos\frac{\pi}{n^2}$

92) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n}\frac{n+2}{(n+1)!}$

93) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(n\pi)}{n\sqrt{n}}$

94) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n}(\sqrt{3}-\sqrt{2})^n$

95) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1+2^n}{3^n}$

96) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4^n+(-1)^n}{3^n}$

۹۷) ثابت کنید که اگر $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ بطور مطلق همگرا باشد و به ازای هر n، $u_n \neq 0$ آنگاه سری $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{|u_n|}$ واگراست.

۹۸) ثابت کنید که اگر $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ بطور مطلق همگرا باشد، آنگاه سری $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n^2$ همگراست.

۹۹) به ازای چه مقادیری از a سری $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{a^2-1}\right)^n$ همگرا می شود؟

۱۰۰) اگر دنباله $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ به صفر همگرا باشد، سری های $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n-a_{n+1})$ و $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n-a_{n+2})$ چه وضعیتی دارند؟

۱۰۱) اگر $a_n=\frac{1+(-1)^n}{n!}$، سری $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}(a_n+a_{n+1})$ چه وضعیتی دارد؟

۱۰۲) اگر $a_n=(-1)^n\frac{\cos(n\pi)}{n+2}$، سری $\sum_{n=2}^{+\infty}(a_{n+1}-a_n)$ چه وضعیتی دارد؟

۱۰۳) اگر به ازای هر n، $0<a_n<\frac{1}{n}$ ، سری $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n-a_{n+1})$ چه وضعیتی دارد؟

بازه همگرایی سری های توانی زیر را بدست آورید.

104) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{2^n}$

105) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n^2}$

106) $\sum_{n=1}^{+\infty}n^2x^n$

107) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$

108) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}$

109) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$

110) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2(x+2)^n}{2^n}$

111) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{n(n+1)}(x-3)^{2n-1}$

بسط سری توانی توابع زیر را بدست آورید.

112) $f(x) = xe^{x^2}$

113) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

114) $f(x) = \frac{x}{(x+1)(x^2+1)}$

115) $f(x) = \frac{x - \sin x}{x}$

116) $f(x) = \frac{(x+1)\cos x}{x}$

117) $f(x) = \tan^{-1}(2x+1)$

سری مکلورن توابع زیر را بیابید.

118) $f(x) = \sinh x$

119) $f(x) = \cosh x$

120) $f(x) = \frac{1}{1-x}$

به کمک سری توانی حاصل انتگرالهای زیر را بدست آورید.

121) $\int_0^1 e^{x^2} dx$

122) $\int_0^1 \sin(x^2) dx$

123) $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$

فصل هشتم

آشنایی با اعداد مختلط

۸ . ۱. اعداد مختلط

اولین مجموعه ای از اعداد که بوجود آمد، مجموعه اعداد طبیعی بود. روند توسعه مجموعه اعداد از طبیعی، $\mathbb{N}$، به حسابی، W، صحیح ، $\mathbb{Z}$، گویا، $\mathbb{Q}$ و حقیقی، $\mathbb{R}$، به گونه ای که هر یک مجموعه های قبلی را در بر بگیرد، بر اساس نیازهای جبری و هندسی بوده است.

$$\mathbb{N} \subseteq W \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

منظور از نیاز جبری حل معادلات متفاوت و نیاز هندسی برقراری تناظر یک به یک بین نقاط یک خط و اعداد آن مجموعه است.

از دیدگاه جبری اگر چه پاسخ همه معادلات $ax+b=c$ به شرط $c>b$ و نیز بخشپذیری $c-b$ بر a، در مجموعه اعداد طبیعی واقع است، اما شرطهای $c=b$ ، $c<b$ و اینکه $c-b$ بر a بخشپذیر نباشد، به ترتیب منجر به تولید W، Z و Q شدند. معادله ای چون $x^2=5$ هم منجر به ایجاد اعداد گنگ گردید.

از دید هندسی اگر خطی را در نظر بگیریم که روی آن نقطه ای بعنوان مبدا و اندازه ای به عنوان واحد تعریف شده باشد ، تناظر یک به یکی بین نقاط واقع در سمت راست مبدا آن خط، که فاصله آنها از مبدا مضربی از واحد است و مجموعه اعداد طبیعی وجود دارد. اما برای تخصیص عدد به مبدا مختصات، نقاط واقع در سمت چپ مبدا و نیز

نقاطی که فاصله آنها از مبدا مضربی از واحد نیست، نیاز به مجموعه های W ، Z و Q احساس می شد. سپس اعداد گنگ نیز برای تخصیص عدد به مثلا نقطه ای با فاصله برابر با وتر مثلث قائم الزاویه ای با اضلاع ۳ و ٤ به وجود آمدند.

بزرگترین مجموعه ای که تاکنون با آن کار کرده اید، مجموعه اعداد حقیقی است. قصد داریم در اینجا شما را با مجموعه بزرگتری از اعداد آشنا کنیم. بنا به روند بالا، گرچه مجموعه اعداد حقیقی برای حل معادلات درجه دوم با دلتای مثبت جوابگو است، اما وجود معادلات با دلتای منفی ما را به گسترش این مجموعه رهنمون می سازد، مجموعه ای که در آن $\sqrt{-1}$ هم وجود داشته باشد، این مجموعه را اعداد مختلط می نامیم. اگر به مجموعه اعداد مختلط از دید هندسی بنگریم، وجود آنها معادل برقرار کردن تناظر یک به یک بین نقاط صفحه (معادل خط در مجموعه اعداد حقیقی) با اعداد است. این موضوع مفهوم زوجهای مرتب را در ذهن ما تداعی می کند.

بدینسان با انتخاب دو محور عمود بر هم y, x، مجموعه اعداد مختلط، مجموعه ای از زوجهای مرتب است که مولفه اول آنها به مختصات افقی و مولفه دوم آنها به مختصات عمودی نقاط صفحه اشاره دارند. اگر محور افقی را محور اعداد حقیقی و محور عمودی را محور اعداد موهومی بنامیم، هر عدد مختلط دارای دو بخش حقیقی و مختلط است.

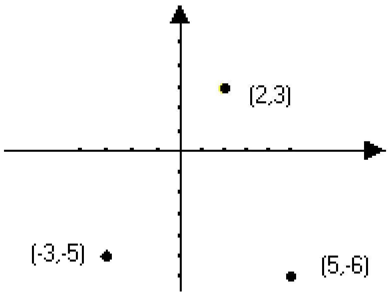
با انتخاب نماد $i=\sqrt{-1}$، عدد مختلط مربوط به نقطه ای با مختصات (a,b) را به صورت $a+bi$ که در آن a را بخش حقیقی و b را بخش موهومی عدد مختلط می گوییم، نشان می دهیم. این طرز نمایش نامگذاری محورها به شیوه بالا را تایید می کند. اگر نقطه ای بر محور افقی واقع باشد، بخش موهومی عدد صفر است و عدد حقیقی محض است، به طور مشابه اگر نقطه ای بر محور عمودی واقع باشد، بخش حقیقی عدد صفر است و عدد، موهومی محض است. واضح است که نقطه با مختصات $(0,1)$، نشانگر i است. معمولا اعداد مختلط را با z بیان می کنند.

$$i=\sqrt{-1}\equiv(0,1)\Rightarrow a+bi\equiv(a,b)$$

بخش حقیقی z را با نماد $\mathrm{Re}(z)$ و بخش موهومی آن را با $\mathrm{Im}(z)$ نشان می دهیم.

مثال ۱ : عدد مختلط $5+4i$، در صفحه به نقطه ای با مختصات $(5,4)$ نسبت داده شده است.

مثال ۲ : اعداد متناظر با این نقاط را بنویسید :



شکل(۱) نمایش اعداد مختلط در صفحه

$$(2,3) \equiv 2+3i$$
$$(-3,-5) \equiv -3-5i$$
$$(5,-6) \equiv 5-6i$$

مثال ۳ : بخش های حقیقی و موهومی هر یک از اعداد مختلط زیر را بیابید $(\mathrm{Re}, \mathrm{Im})$.

$$\mathrm{Re}(90+60i)=90 \qquad \mathrm{Im}(90+60i)=60$$
$$\mathrm{Re}(\sqrt{2}+3i)=\sqrt{2} \qquad \mathrm{Im}(\sqrt{2}+3i)=3$$

۸ . ۱. ۱. اعمال اصلی در اعداد مختلط :

چهار عمل اصلی جمع، تفریق، ضرب و تقسیم را در اینجا برای اعداد مختلط بیان می کنیم.

الف) جمع و تفریق دو عدد مختلط :

فرض کنیم که z_2, z_1 **دو عدد مختلط باشند :**

$$z_1 = a_1 + b_1 i$$
$$z_2 = a_2 + b_2 i$$

در اینصورت رابطه $Z_+ = z_1 + z_2, Z_- = z_1 - z_2$ **به صورت زیر است.**

$$Z_+ = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i \qquad (۱)$$
$$Z_- = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i \qquad (۲)$$

مثال ۴: با توجه به اعداد داده شده ، عبارات زیر را به دست آورید.

$$z_1 = 9-8i \qquad z_2 = -23-6i \qquad z_3 = 59i \qquad z_4 = 13$$
$$\text{a) } z_2 + z_3 \quad \text{b) } z_1 - z_4 \quad \text{c) } z_1 + z_4 \quad \text{d) } z_3 - z_2$$

حل:

$$\text{a) } z_2 + z_3 = -23+53i$$
$$\text{b) } z_1 - z_4 = -4-8i$$
$$\text{c) } z_1 + z_4 = 22-8i$$
$$\text{d) } z_3 - z_2 = 23+65i$$

ب) ضرب و تقسیم دو عدد مختلط :

فرض کنیم که z_2, z_1 **دو عدد مختلط باشند:**

$$z_1 = a_1 + b_1 i$$
$$z_2 = a_2 + b_2 i$$

در اینصورت رابطه $Z_* = z_1 * z_2$ **به صورت زیر است.**

$$Z_* = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i \qquad (۳)$$

مثال ۵ : نشان دهید: $i^2 = -1$

حل:

$$z_1 = z_2 = i$$

$$\left.\begin{array}{l} z_1 = a_1 + b_1 i \Rightarrow a_1 = 0, b_1 = 1 \\ \\ z_2 = a_2 + b_2 i \Rightarrow a_2 = 0, b_2 = 1 \end{array}\right\} \longrightarrow z_1 z_2 = -1 \rightarrow i^2 = -1$$

اگر به i به عنوان یک ضریب عددی توجه کنیم، می توان گفت که عملیات ضرب اعداد مختلط کاملاً شبیه به ضرب چند جمله ای ها است، به طوری که در انتها به جای i^n معادل آن قرار داده شود، یعنی:

$i \rightarrow i$

$i^2 \rightarrow -1$

$i^3 \rightarrow -i$

$i^4 \rightarrow 1$

ضرب یک عدد حقیقی a در یک عدد مختلط $z = x + iy$:

$z_1 = a$

$z_2 = x + iy \rightarrow a.z = z_1.z_2 = ax + ayi$

در واقع با ضرب یک عدد حقیقی a در یک عدد مختلط، آن عدد به طور جداگانه در هر یک از مولفه هایش ضرب می شود.

از بحث اعداد حقیقی به یاد داریم که صفر عنصر خنثای جمع و تفریق و یک عنصر خنثای ضرب است و از آن طریق به معرفی مفهوم قرینه و معکوس یک عدد پرداختیم. در مجموعه اعداد مختلط هم صفر عنصر خنثای جمع است :

$z + 0 = z$

پس برای به دست آوردن قرینه یک عدد مختلط باید به دنبال عدد دیگری باشیم که حاصل جمع آن دو با هم صفر باشد. نماد $z_1 = -z_2$ را برای نشان دادن قرینه انتخاب کرده ایم. برای اینکه z_2 قرینه z_1، باشد، باید روابط زیر در مورد آنها برقرار باشد:

$$z_1 = -z_2 \Leftrightarrow x_1 = -x_2 \quad , \quad y_1 = -y_2$$

اثبات:

$$z_1 + z_2 = 0$$

$$z_1 = x_1 + y_1 i \quad , \quad z_2 = x_2 + y_2 i$$

$$z_1 + z_2 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = 0 \quad , \quad y_1 + y_2 = 0$$

$$x_1 = -x_2 \quad , \quad y_1 = -y_2$$

به کمک مفاهیم بالا می توان گفت که تفریق در حقیقت جمع با قرینه عدد است.

$z=1$ **نیز عنصر خنثای ضرب است.**

$z.1=z$

پس برای به دست آوردن معکوس یک عدد مختلط باید به دنبال عدد دیگری باشیم که حاصل ضرب آن دو در هم برابر با یک باشد. نماد $z_1=\frac{1}{z_2}$ **را برای نشان دادن معکوس انتخاب کرده ایم. برای اینکه** z_2 **معکوس** z_1 **باشد، باید روابط زیر در مورد آنها برقرار باشد:**

$$z_1=\frac{1}{z_2}\Rightarrow\begin{cases} x_2=\dfrac{x_1}{x_1^2+y_1^2} \\ y_2=-\dfrac{y_1}{x_1^2+y_1^2}\end{cases}$$

اثبات:

$$z_1.z_2=1$$

$$z_1=x_1+y_1i \quad , \quad z_2=x_2+y_2i$$

$$z_1.z_2=1\Rightarrow x_1x_2-y_1y_2=1 \quad , \quad x_2y_1+x_1y_2=0$$

$$\begin{cases} x_1x_2-y_1y_2=1 \\ x_2y_1+x_1y_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} y_1x_1x_2-y_1^2y_2=y_1 \\ -x_1x_2y_1-x_1^2y_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x_2=\dfrac{x_1}{x_1^2+y_1^2} \\ y_2=-\dfrac{y_1}{x_1^2+y_1^2}\end{cases}$$

برای نشان دادن معکوس از نماد z^{-1} **نیز استفاده می کنند. بنابراین اگر** $z=x+iy$ **آنگاه**

$$z^{-1}=\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y}{x^2+y^2}i$$

مثال ۶ : معکوس و قرینه اعداد زیر را به دست آورید.

a) $z_1=1+3i$ b) $z_2=4i$ c) $z_3=5$ d) $z_4=-2-7i$

حل:

a) $z_1=1+3i\Rightarrow -z_1=-1-3i \quad , \quad z_1^{-1}=\frac{1}{10}-\frac{3}{10}i$

b) $z_2=4i\Rightarrow -z_2=-4i \quad , \quad z_2^{-1}=-\frac{i}{4}$

c) $z_3=5\Rightarrow -z_3=-5 \quad , \quad z_3^{-1}=\frac{1}{5}$

d) $z_4=-2-7i\Rightarrow -z_4=+2+7i \quad , \quad z_4^{-1}=\frac{-2}{53}+\frac{7}{53}i$

پ) تقسیم اعداد مختلط :

می توان گفت که حاصل تقسیم z_1 بر z_2 برابر با حاصلضرب z_1 در معکوس z_2 است.

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1.z_2^{-1} = (x_1 + y_1 i).(\frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2} - \frac{y_1}{x_1^2 + y_1^2} i)$$

مثال ۷ : فرض کنید:

$$z_1 = 1 + 3i \qquad z_2 = 4i \qquad z_3 = 5 \qquad z_4 = -2 - 7i$$

عملیات تقسیم زیر را انجام دهید.

$$\text{a)}\ \frac{z_1}{z_2} \qquad \text{b)}\frac{z_3}{z_4} \qquad \text{c)}\frac{z_2.z_3}{z_1}$$

حل:

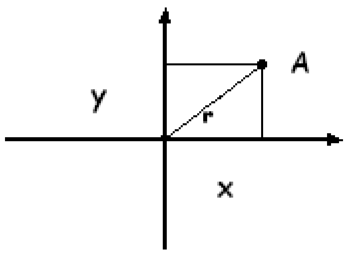
$$\text{a)}\ \frac{z_1}{z_2} = (1+3i).(-\frac{i}{4}) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}i$$

$$\text{b)}\ \frac{z_3}{z_4} = 5 \times (-\frac{i}{4}) = -\frac{5}{4}i$$

$$\text{c)}\ \frac{z_2.z_3}{z_1} = \frac{20i}{1+3i} = (20i).(\frac{1}{10} - \frac{3}{10}i) = 6 + 2i$$

۸ . ۱. ۲. چند تعریف

الف) اندازه عدد مختلط z که با نماد $|z|$ نشان داده می شود، بیانگر فاصله نقطه متناظر با آن عدد در صفحه تا مبدا مختصات است.



شکل(۲) اندازه یک عدد مختلط همان فاصله تا مبدا مختصات است.

$$\begin{aligned} &z = x + yi \\ &|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow \\ &|z| = \sqrt{(\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2} \end{aligned} \qquad (۴)$$

فاصله دو نقطه در صفحه را می توان بر اساس مفهوم قدر مطلق به صورت $|z_1 - z_2|$ بیان کرد.

$|z-i|=a$، مشخص کننده تمام نقاطی است که فاصله تمام آنها از نقطه $(0,1)$ برابر a باشد، یعنی دایره ای به مرکز $(0,1)$ و شعاع a.

ب) مزدوج عدد مختلط z را با نماد $\bar{z}$ نشان می دهند و چنین تعریف می شود

$$z=x+yi \Rightarrow \bar{z}=x-yi \qquad (۵)$$

۸ . ۱. ۳. خواص جبری

اکنون که اعمال اصلی را می توان در دو عمل ضرب و جمع خلاصه کرد، به خواص آنها می پردازیم.

الف) جابجایی: خاصیت جابجایی، هم در ضرب و هم جمع برقرار است.

$$\begin{aligned} z_1+z_2 &= z_2+z_1 \\ z_1.z_2 &= z_2.z_1 \end{aligned} \qquad (۶)$$

ب) شرکت پذیری : خاصیت شرکت پذیری نیز، هم در ضرب و هم جمع برقرار است.

$$\begin{aligned} (z_1+z_2)+z_3 &= z_1+(z_2+z_3) \\ (z_1.z_2).z_3 &= z_1.(z_2.z_3) \end{aligned} \qquad (۷)$$

پ) توزیعپذیری جمع نسبت به ضرب :

$$z_1.(z_2+z_3)=(z_1.z_2)+(z_1.z_3) \qquad (۸)$$

ت)

$$\begin{aligned} \frac{1}{z_1 z_2} &= \frac{1}{z_1}.\frac{1}{z_2} \\ \frac{z_1+z_2}{z_3} &= \frac{z_1}{z_3}+\frac{z_2}{z_3} \end{aligned} \qquad (۹)$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2} \qquad (۱۰)$$

نکته: در اعداد مختلط عبارت $z_1<z_2$ هیچ مفهومی ندارد، مگر اینکه هر دو حقیقی محض باشند.

مثال ۸ : اگر $z_1=1+3i$ ، $z_2=4i$ ، $z_3=5$ و $z_4=-2-7i$ حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

a) $z_1.(z_2+(z_3.z_4))$ b) $\dfrac{1}{z_1 z_4}$ c) $\dfrac{z_2.(z_3+z_4)}{z_1}$

حل:

a) $(1+3i).((4i+(-10-35i))=(1+3i).(-10-31i)=103-61i$

b) $\dfrac{1}{z_1 z_4} = \dfrac{1}{z_1}.\dfrac{1}{z_4} = (\dfrac{1}{10} - \dfrac{3}{10}i).(-\dfrac{1}{4}i) = -\dfrac{3}{40} - \dfrac{1}{40}i$

c) $\dfrac{z_2.(z_3 + z_4)}{z_1} = \dfrac{(4i).(3-7i)}{1+3i} = \dfrac{28+12i}{1+3i} = (28+12i).(\dfrac{1}{10} - \dfrac{3}{10}i) = \dfrac{64}{10} - \dfrac{72}{10}i$

ث) خواص اندازه و مزدوج (۱۱)

$|z| = |\bar{z}|$ (11-1)

$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ (11-2)

$\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$ (11-3)

$\overline{z_1.z_2} = \overline{z_1}.\overline{z_2}$ (11-4)

$\overline{\dfrac{z_1}{z_2}} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ (11-5)

$z.\bar{z} = |z|^2$ (11-6)

$\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z+\bar{z}}{2} \quad , \quad \mathrm{Im}(z) = \dfrac{z-\bar{z}}{2j}$ (11-7)

$|z_1 z_2| = |z_1|.|z_2|$ (11-8)

$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ (11-9)

$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$ (11-10)

$\big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 - z_2|$ (11-11)

نکته: رابطه (۶-11) روش ساده ای را برای تقسیم دو عدد ارائه می دهد: می توانیم صورت و مخرج کسر را در مزدوج مخرج ضرب کرده و جواب نهایی را به دست آوریم.

مثال ۹: اگر $z_1 = 1+3i$ ، $z_2 = 4i$ ، $z_3 = 5$ و $z_4 = -2-7i$ حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

a) $\overline{z_1}.z_2$ b) $|z_1 z_4|$ c) $\mathrm{Re}(z_2)$ d) $\overline{z_3.z_4}$

حل:

a) $(1-3i).(4i) = 12+4i$

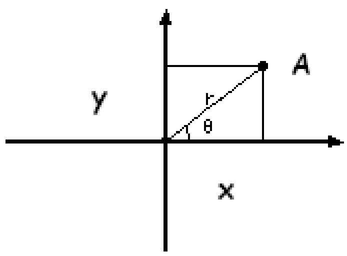
b) $|(1+3i).(-2-7i)| = |(19-13i)| = 23.021$

c) $\mathrm{Re}(z_2) = 0$

d) $\overline{(-10-35i)} = -10+35i \equiv 5.(-2+7i)$

۸ . ۲. مختصات قطبی

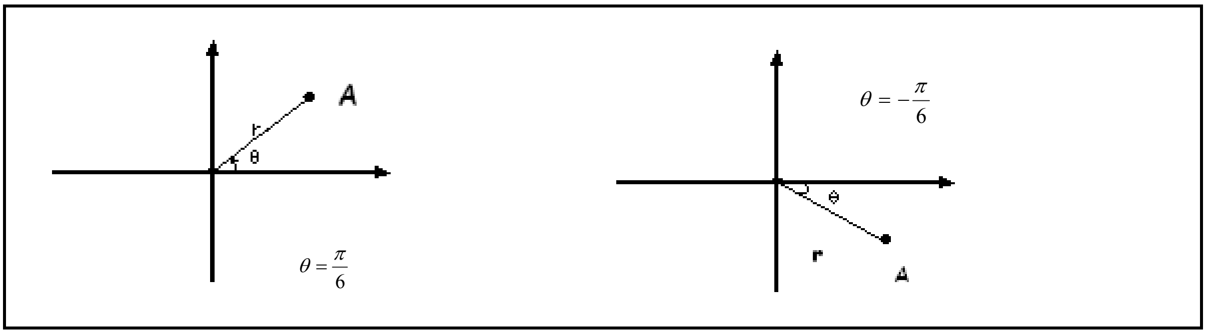
اگر r فاصله نقطه ای با مختصات دکارتی (x,y) در صفحه متناظر با عدد مختلط $z = x + iy$ از مبدا مختصات باشد یعنی $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ و همچنین θ زاویه خط متصل کننده این نقطه به مبدا با محور افقی باشد، $\theta = \arg(z)$، آنگاه (r,θ) را مختصات قطبی نقطه (x,y) می نامیم. با توجه به شکل و به کمک تعاریف سینوس و کسینوس روابط زیر را خواهیم داشت:



شکل (۳) نمایش عدد مختلط در مختصات قطبی

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta \Rightarrow z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad \textbf{(12)}$$

$\arg(z)$ هر مقداری می تواند داشته باشد اما مقدار اصلی آن را $Arg(z)$ نامیده که همواره $-\pi < Arg(z) < \pi$ است.



شکل ۳- حتما باید در محدوده باشد.

به کمک روابط بالا تبدیل بین مختصات دکارتی و قطبی را به صورت زیر فرمول بندی می کنیم:

$$z = (r,\theta) \Rightarrow z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$z = x + iy \Rightarrow r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \tan^{-1}(\frac{y}{x})$$

مثال ۱۰ : مختصات قطبی هر یک از اعداد را بنویسید.

$z_1 = 1+3i \qquad z_2 = 4i \qquad z_3 = 5 \qquad z_4 = -2-2i$

حل:

$$\text{a)}\quad r=\sqrt{10}, \theta = \tan^{-1}(3) = 1.24 \quad rad \Rightarrow z_1 = \sqrt{10}e^{1.24i}$$
$$\text{b)}\quad r=4, \theta = \frac{\pi}{2} \quad rad \Rightarrow z_2 = 4e^{\frac{\pi}{2}i}$$
$$\text{c)}\quad r=5, \theta = 0 \quad rad \Rightarrow z_3 = 5$$
$$\text{d)}\quad r=\sqrt{8}, \theta = -\frac{3\pi}{4} \quad rad \Rightarrow z_4 = \sqrt{8}e^{-\frac{3\pi}{4}i}$$

قضیه ۸ . ۲. ۱: اگر $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ آنگاه

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

اثبات: به عهده خواننده.

نتیجه: با توجه به قضیه فوق می توان نتیجه گرفت:

$$z_1 z_2 \cdots z_n = r_1 r_2 \cdots r_n (\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n) + i\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n))$$

قضیه ۸ . ۲. ۲ (قانون دموآور):

اگر $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ **آنگاه به ازای هر عدد طبیعی** n**،**

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

اثبات: با توجه به نتیجه فوق داریم،

$$z^n = r^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

اگر $r=1$ **آنگاه رابطه زیر را قانون دموآور گویند:**

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (\cos n\theta + i\sin n\theta) \qquad \textbf{(13)}$$

مثال ۱۱ : حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید.

$$(3-\sqrt{3}i)^{20}, \quad (1+i)^6, \quad (-4+4\sqrt{3}i)^8$$

حل:

$$a)\quad (3-\sqrt{3}i)^{20} = (\sqrt{12})^{20}(\cos\frac{20\pi}{6} - i\,\sin\frac{20\pi}{6}) = (\sqrt{12})^{20}(\cos(\pi+\frac{\pi}{3}) - i\,\sin(\pi+\frac{\pi}{3}))$$
$$= (\sqrt{12})^{20}(-\cos\frac{\pi}{3} + i\,\sin\frac{\pi}{3}) = (12)^{10}(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)$$
$$b)\quad (1+i)^6 = (\sqrt{2})^6(\cos\frac{6\pi}{4} - i\,\sin\frac{6\pi}{4}) = (\sqrt{2})^6(\cos\frac{3\pi}{2} + i\,\sin\frac{3\pi}{2}) = (2)^3(-i) = -8i$$

$$c)\quad (-4+4\sqrt{3}i)^8 = (8)^8(\cos\frac{16\pi}{3} - i\ \sin\frac{16\pi}{3}) = (8)^8(-\cos\frac{\pi}{3} - i\ \sin\frac{\pi}{3})$$
$$= (2)^{24}(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) = (12)^{23}(-1+\sqrt{3}i)$$

مثال۱۲ : ثابت کنید: $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$

حل:

$$\overline{(z^n)} = \overline{r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)} = r^n(\cos n\theta - i\sin n\theta) = (\bar{z})^n$$

رابطه اویلر: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

به کمک رابطه اویلر و رابطه (۱۴) می توانیم نمایش دیگری برای اعداد مختلط به صورت قطبی به شکل $z = re^{i\theta}$ **بیان کنیم.**

می توانیم ضرب و تقسیم اعداد مختلط را در فضای قطبی به روش بسیار ساده ای بیان کنیم:

$$z_1 = r_1e^{i\theta_1}, z_2 = r_2e^{i\theta_2} \Rightarrow z_1z_2 = r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$
$$z_1 = r_1e^{i\theta_1}, z_2 = r_2e^{i\theta_2} \Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

مثال ۱۳ : اگر $z_1 = \sqrt{10}e^{1.24i}$ ، $z_2 = 4e^{\frac{\pi}{2}i}$ ، $z_3 = 5$ **و** $z_4 = \sqrt{8}e^{-\frac{3\pi}{4}i}$ **حاصل عبارات زیر را به دست آورید.**

$$a)\quad z_1z_2 \qquad b)\frac{z_2}{z_4} \qquad c)\frac{z_1z_3}{z_2}$$

حل:

$$a)\quad z_1z_2 = 4\sqrt{10}e^{2.81i}$$
$$b)\quad \frac{z_2}{z_4} = \frac{\sqrt{8}}{4}e^{\frac{5\pi}{4}i}$$
$$c)\quad \frac{z_1z_3}{z_2} = \frac{5\sqrt{10}}{4}e^{-.33i}$$

۸ . ۳. ریشه های اعداد مختلط

فرض کنید z **یک عدد مختلط و** n **یک عدد صحیح باشند. معادله** $\omega^n = z$ **دارای** n **ریشه** $\omega_0,\ldots,\omega_{n-1}$ **می باشد که آنها را ریشه های** n **ام عدد مختلط** z **گویند و با** $\sqrt[n]{z}$ **نشان می دهند.**

اگر $z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$ آنگاه

$$\omega_k=|z|^{\frac{1}{n}}(\cos\frac{2k\pi+\theta}{n}+i\sin\frac{2k\pi+\theta}{n}) \quad , \quad k=0,1,\ldots,n-1 \qquad \textbf{(14)}$$

اثبات: فرض کنید

$$\omega_k=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$
$$\to \omega_k{}^n=\rho^n(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\rho^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)=z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$$
$$\to \rho=|z|^{\frac{1}{n}} \quad , \quad \varphi=\frac{2k\pi+\theta}{n} \quad , \quad k=0,1,\ldots,n-1$$

به راحتی مشاهده می شود که

$$|\omega_0|=|\omega_1|=\cdots=|\omega_{n-1}|=|z|^{\frac{1}{n}} \quad , \quad \omega_0+\omega_1+\cdots+\omega_{n-1}=0$$

مثال ۱۴ : ریشه های چهارم عدد مختلط ۱- را بیابید.

حل: عدد ۱- را به صورت قطبی می نویسیم:

$$r=1,\theta=\tan^{-1}(\frac{0}{-1})=\pi \Rightarrow -1=e^{i\pi}=\cos\pi+i\sin\pi$$

بنابراین

$$\omega_k=1^{\frac{1}{4}}(\cos\frac{2k\pi+\pi}{4}+i\sin\frac{2k\pi+\pi}{4}) \quad , \quad k=0,1,2,3$$
$$k=0\to\omega_0=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\to\omega_0=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$$
$$k=1\to\omega_1=\cos\frac{2\pi+\pi}{4}+i\sin\frac{2\pi+\pi}{4}\to\omega_1=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$$
$$k=2\to\omega_2=\cos\frac{4\pi+\pi}{4}+i\sin\frac{4\pi+\pi}{4}\to\omega_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$$
$$k=0\to\omega_0=\cos\frac{6\pi+\pi}{4}+i\sin\frac{6\pi+\pi}{4}\to\omega_3=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

مثال ۱۵ : $(-1+i)^{\frac{1}{3}}$ را بدست آورید.

حل:

$$r=\sqrt{2},\theta=\tan^{-1}(\frac{1}{-1})=-\frac{\pi}{4}\Rightarrow -1+i=e^{i\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4})$$

$$\omega_k = (\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}(\cos\frac{2k\pi - \frac{\pi}{4}}{3} + i\sin\frac{2k\pi - \frac{\pi}{4}}{3}) \quad , \quad k = 0,1,2$$

$$k = 0 \rightarrow \omega_0 = \cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12}$$

$$k = 1 \rightarrow \omega_1 = \cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}$$

$$k = 2 \rightarrow \omega_2 = \cos\frac{15\pi}{12} + i\sin\frac{15\pi}{12} = -\cos\frac{3\pi}{12} - i\sin\frac{3\pi}{12}$$

مثال ۱۶ : چهار ریشه معادله زیر را بدست آورید:

$$z^4 + 4z^2 + 16 = 0$$

حل: با **حل معادله درجه دو بر حسب** $x = z^2$ **بدست می آوریم:**

$$x = z^2 = -2 \pm 2\sqrt{3}i$$

بنابراین کافیست ریشه های زیر را حساب کنیم:

$$(-2 + 2\sqrt{3}i)^{\frac{1}{2}} \quad , \quad (-2 - 2\sqrt{3}i)^{\frac{1}{2}}$$

$$r_1 = 4, \theta_1 = \tan^{-1}(\frac{2\sqrt{3}}{-2}) = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow z_1 = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = 1 + \sqrt{3}i$$

$$z_2 = 2(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}) = -1 - \sqrt{3}i$$

$$r_2 = 4, \theta_1 = \tan^{-1}(\frac{-2\sqrt{3}}{-2}) = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow z_3 = 2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}) = -1 + \sqrt{3}i$$

$$z_4 = 2(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}) = 1 - \sqrt{3}i$$

مثال ۱۷ : معادله زیر را حل کنید.

$$z^2 - 2iz - 2 = 0$$

حل: با حل معادله درجه دو بدست می آوریم:

$$z = \frac{2i \pm \sqrt{4+8}}{2} = i \pm \sqrt{3} \rightarrow z_1 = -\sqrt{3} + i \quad , \quad z_2 = \sqrt{3} + i$$

تمرین

مقادیر زیر را بدست آورید.

1) $\dfrac{5}{(1-i)(2-i)(3-i)}$

2) $\dfrac{3i^{30}-i^{19}}{2i-1}$

3) $(1+2i)(3+4i)$

4) $\dfrac{1-i}{1+i}$

5) $(2+i)^4$

6) $\dfrac{5+5i}{2-4i}+\dfrac{20}{4+3i}$

7) $\dfrac{1}{(4+2i)(2-3i)}$

8) $\dfrac{1}{3+2i}$

9) $\left[3(\cos 40^\circ + i\sin 40^\circ)\right].\left[4(\cos 80^\circ + i\sin 80^\circ)\right]$

10) $\dfrac{\left[3(\cos 20^\circ + i\sin 20^\circ)\right]^6}{4(\cos 40^\circ + i\sin 40^\circ)}$

11) اگر $z_1=(2,3)$ ، $z_2=(-1,2)$ و $z_3=(1,-1)$ مطلوب است:

$$z_3^4 \quad , \quad \frac{z_1z_2}{z_2-z_3} \quad , \quad z_1z_3-5z_2$$

۱۲) جوابهای دستگاه زیر را بدست آورید:

$$\begin{cases}(1+i)z_1-2z_2=2+i\\(2+i)z_1+(2-i)z_2=2i\end{cases}$$

۱۳) مقادیر زیر را بدست آورید.

$(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)^{20}$ **(سال ۷۱)** $\qquad$ $(1+\sqrt{3}i)^8$ **(سال ۷۰)**

۱۴) ریشه های زیر را حساب کنید.

$$(2+2i)^{\frac{1}{3}}\ ,\ (3+4i)^{\frac{1}{2}}\ ,\ 8^{\frac{1}{6}}\ ,\ (-\sqrt{3}-i)^{\frac{1}{4}}\ ,\ (1+\sqrt{3}i)^{\frac{1}{3}},\ \left(\frac{1+i}{i-1}\right)^{\frac{1}{4}}$$

۱۵) ثابت کنید که اگر $z_1z_2z_3=0$ آنگاه حداقل یکی از سه عامل صفر است.

معادلات زیر را حل کنید.

16) $\quad iz^2+(4+i)z+2-3i=0$

17) $z^2+(2i-3)z+5-i=0$

18) $z^4+1=0$

19) $z^5+z^4+\cdots+z+1=0$

20) $z^4+2z^2+4=0$

21) $z^2(1-z^2)=16$

22) $z^4=\dfrac{1-i}{1+i\sqrt{3}}$

23) $z^4=\sqrt{i}$

24) $z^2=\dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}$

25) $z^2+2iz-1=0$

۲۶) نشان دهید که ریشه های معادله $(z-1)^6+(z+1)^6=0$ عبارتند از

$$\pm i,\quad \pm i\cot\frac{5\pi}{12},\quad \pm i\cot\frac{\pi}{12}$$

۲۷) معادله درجه دومی با ضرایب حقیقی پیدا کنید که $(2+i)$ یکی از ریشه های آن باشد. ریشه دیگر را نیز بدست آورید.

۲۸) اعداد a و b را طوری بیابید که عدد $z=1+i$ یک جواب از معادله زیر باشد:

$$z^5+az^3+b=0$$

۲۹) نشان دهید نقاط $(1+2i)$، $(2+3i)$، $(3+2i)$ و $(2+i)$ راسهای یک مربع هستند.

۳۰) اگر $p+qi$ یک جواب از معادله زیر باشد نشان دهید $p-qi$ نیز یک جواب از آن است:

$$a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+....+a_1z+a_0=0 \qquad a_i\in R, a_n\neq 0, p,q\in R, q\neq 0$$

۳۱) فرض کنید $z_1=2+i$، $z_2=3+2i$ و $z_3=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ هر یک از مقادیر زیر را حساب کنید:

$$|3z_1-4z_2| \quad , \quad \left|\frac{2z_2+z_1-5-i}{2z_1+z_2+3-i}\right|^2 \quad , \quad (2\overline{z_3}-4z_1+3\overline{z_2})^4 \quad , \quad {z_1}^3-3{z_1}^2+4z_1-8$$

۳۲) نشان دهید

الف- $\overline{iz}=-i\overline{z}$

ب- $\overline{(z_1+z_2)}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$

ج- $\overline{\dfrac{(2+i)^2}{3-4i}}=1$

د- با استفاده از صورت قطبی نشان دهید: $(-1+i)^7 = -8(1+i)$

ه- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ **(نامساوی مثلث)**

و- $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$

۳۳) اگر α و β ریشه های معادله $z^2 - 2z + 4 = 0$ باشند نشان دهید $\alpha^n + \beta^n = 2^{n+1}\cos(\frac{n\pi}{3})$.

۳۴) با استفاده از قانون دموآور ثابت کنید:

$a)\quad \sin(3\theta) = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

$b)\quad \cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

$c)\quad \cos(5\theta) = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$

۳۵) اگر $n = 2,3,4,\ldots$ ثابت کنید:

$$a)\quad \cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{4\pi}{n} + \cdots + \cos\frac{2(n-1)\pi}{n} = -1$$

$$b)\quad \sin\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{4\pi}{n} + \cdots + \sin\frac{2(n-1)\pi}{n} = 0$$

۳۶) عبارت $z = (1+\cos 2\theta + i\sin 2\theta)^n$ را به صورت $a+bi$ بنویسید.

۳۷) معادله زیر را حل کنید (x و y مقادیری حقیقی هستند).

$$2x - 3iy + 4ix - 2y - 5 - 10i = (x + y + 2) - (y - x + 3)i$$

۳۸) نشان دهید معادلات زیر فاقد جوابند.

الف) $\sin x + \cos x + 2i(\cos x - \sin x) = 1 + i$

ب) $e^{x+iy} = 0$

۳۹) شکل دکارتی اعداد زیر را بنویسید.

$$e^{2+i\pi} \quad , \quad 8e^{\frac{7\pi i}{3}} \quad , \quad e^{\frac{\pi i}{4}} e^{-i\pi} \quad , \quad 2ie^{\frac{-3\pi i}{4}}$$

۴۰) نشان دهید اگر Z و W اعداد مختلطی باشند که $|Z| = 1$ و $ZW \neq 1$ آنگاه $\left|\frac{Z - W}{1 - W\overline{Z}}\right| = 1$.