مقدمه

جزوه حاضر به منظور دوره کلی و مرور جامع مطالب اصلی درس ریاضی یک آماده شده است.

از آنجاکه هدف این مجموعه ایجاد توانایی برای پاسخگویی به بیش از ۸۰٪ سوالات مطرح شده در آزمون این درس می‌باشد، پیشنهاد می‌شود:

در درس ریاضی یک به مباحث زیر کاملاً مسلط باشید.

1. **در بحث اعداد مختلط (به طور متوسط ۵٪ از کل سوالات)**

الف ـ تشخیص منحنی‌هایی که در فرم مختلط بیان شده‌اند بخصوص فرم‌هایی مانند: $|z-z_1|\pm|z-z_2|=R$

ب ـ محاسبه توان، ریشه n ام و لگاریتم اعداد مختلط

2. **در بحث جبر خطی و هندسه تحلیلی (به طور متوسط ۵٪ از کل سوالات)**

الف- مباحث مربوط به مقادیر ویژه و بردارهای ویژه و ماتریس معکوس

ب- مسائل ترکیبی خط و صفحه

3. **در بحث حد (به طور متوسط ۱۵٪ از کل سوالات)**

الف ـ استفاده از قاعده هوپیتال

ب ـ استفاده از قواعد هم ارزی در صفر و بی‌نهایت

ج ـ استفاده از مقایسه مرتبه بی نهایت بزرگ‌ها و بی‌نهایت کوچک‌ها

د ـ ابهام‌های نمایی

4. **در بحث مشتق (به طور متوسط ۲۰٪ از کل سوالات)**

الف ـ استفاده از تعریف مشتق و معنای هندسی مشتق در یک نقطه

ب ـ قواعد مشتق‌گیری ضمنی، پارامتری، تابع مرکب، تابع به توان تابع، مشتق انتگرال، مشتق تابع معکوس

ج ـ روابط مربوط به خط مماس بر منحنی‌های قطبی

د ـ مساله نسبت‌های وابسته

هـ ـ مساله بهینه‌سازی

و ـ قضیه لاگرانژ و دو نتیجه حاصله از آن

۵. در بحث انتگرال (به طور متوسط ۳۰٪ از کل سوالات)

الف ـ محاسبه انتگرال توابع شامل جزء صحیح ـ قدر مطلق

ب ـ تکنیک‌های انتگرال‌گیری تغییر متغیر ـ جزء به جزء ـ تجزیه کسرها

ج ـ محاسبه حجم حاصل از دوران با روش‌های پوسته استوانه‌ای و استوانه دوار

د – محاسبه طول یک منحنی و سطح حاصل از دوران آن حول محورهای مختصات

هـ ـ محاسبه حد مجموع‌های ریمانی

و ـ قضیه مقدار میانگین در انتگرال و نتایج حاصل از آن

ز ـ قضایای گلدن برای محاسبه سطح حاصل از دوران یک منحنی و حجم حاصل از دوران یک سطح

ح ـ انتگرال‌های ناسره و تعیین وضعیت آن‌ها

ط ـ تابع گاما و بتا

۶. در بحث دنباله‌ها (به طور متوسط ۵٪ از کل سوالات)

الف ـ تعیین همگرائی و واگرایی با تأکید بر قوانین محاسبه حد توابع در بی‌نهایت

ب ـ تعیین یکنوایی و روش‌های مربوط به آن

۷. در بحث سری‌ها (به طور متوسط ۲۰٪ از کل سوالات)

الف ـ توجه به شرط لازم برای همگرائی

ب ـ آزمون سری‌ها با جملات مثبت با تأکید بر آزمون‌های کوشی ـ انتگرال ـ هم ارزی جمله عمومی سری و مقایسه با سری‌های مرجع

ج ـ سری‌های متناوب و آزمون لایپ نیتس

د ـ تعیین بازه همگرایی سری‌های تابعی با تأکید بر روش کوشی

و ـ بسط‌های تیلور و مک لوران با تأکید بر سری‌های مک لوران توابع معروف و استفاده از آن‌ها

ز ـ روش‌هایی در تعیین حاصل یک سری همگرا مانند:

سری‌های هندسی ـ قاعده ادغام ـ استفاده از روش تجزیه کسرها ـ استفاده از مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری از بسط های مک لوران معروف

ارادتمند شما

محمدصادق معتقدی

اعداد مختلط

مبناء تعریف اعداد مختلط

عنصر تعریف نشده در مجموعه اعداد حقیقی یعنی $i=\sqrt{-1}$

بیان اعداد مختلط در فرم دکارتی $(z=x+iy)$:

z قسمت حقیقی : $\operatorname{Re} z = x$

z قسمت موهومی : $\operatorname{Im} z = y$

z قدر مطلق یا اندازه : $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$

z مزدوج : $\overline{z}=x-iy$

توجه مهم: ضرب یک مختلط در مزدوجش حاصلی حقیقی دارد.

$$z\,\overline{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2=|z|^2$$

توصیف هندسی: هر عدد مختلط نظیر یک نقطه در صفحه است:

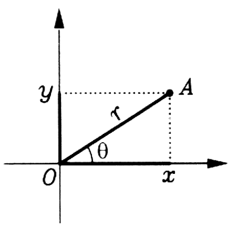
نقطه‌ای با مختصات $(x\,,\,y)$ در صفحه دکارتی $\equiv z=x+iy$

دستگاه مختصات قطبی

OA: شعاع حامل نقطه A

r: طول شعاع حامل نقطه A

θ: زاویه‌ای که شعاع حامل نقطه A با جهت مثبت محور x می‌سازد.



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \operatorname{Arc\,tan}\left(\dfrac{y}{x}\right) \end{cases}$$

توجه: θ باتوجه به محل قرار گرفتن نقطه در صفحه و این که در کدام ربع دستگاه مختصات واقع است، انتخاب می‌شود.

بیان اعداد مختلط در فرم قطبی:

$$z=r\,e^{i\theta} \quad ; \quad e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

بدیهی است:

$$\overline{z}=r\,e^{-i\theta}$$

$$z^n=\left(r\,e^{i\theta}\right)^n=r^n\,e^{in\theta}=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta) \qquad , \quad (n\in N)$$

$$\frac{z_1\,z_2}{z_3}=\frac{r_1\,e^{i\theta_1}\,r_2\,e^{i\theta_2}}{r_3\,e^{i\theta_3}}=\frac{r_1\,r_2}{r_3}\,e^{i(\theta_1+\theta_2-\theta_3)}$$

معرفی چند منحنی خاص در صفحه مختلط

به سادگی می‌توان نشان داد اگر z_1 , z_2 دو عدد مختلط معلوم باشند (که دو نقطه را مشخص می‌کنند)، حاصل $\left| z_1 - z_2 \right|$ مبین فاصله بین این دو نقطه خواهد بود. بنابراین اگر $z = x + iy$ فرض شود و R عددی حقیقی و مثبت باشد:

❋ $\left| \mathbf{z - z_1} \right| = \mathbf{R}$ مبین دایره‌ای است به مرکز z_1 و شعاع R

❋ $\left| \mathbf{z - z_1} \right| + \left| \mathbf{z - z_2} \right| = \mathbf{R}$

با فرض $\left| z_1 - z_2 \right| < R$ مبین بیضی با کانون‌های z_1 , z_2 است.

با فرض $\left| z_1 - z_2 \right| = R$ مبین پاره‌خط واصل z_1 , z_2 است.

با فرض $\left| z_1 - z_2 \right| > R$ مبین هیچ شکلی نیست. (تهی)

❋ $\left| \mathbf{z - z_1} \right| - \left| \mathbf{z - z_2} \right| = \mathbf{R}$

با فرض $\left| z_1 - z_2 \right| > R$ مبین هذلولی با کانون‌های z_1 , z_2 است.

با فرض $\left| z_1 - z_2 \right| = R$ مبین نیم‌خطی در امتداد واصل z_1 , z_2 و در سمت z_2 است.

با فرض $\left| z_1 - z_2 \right| < R$ مبین هیچ شکلی نیست. (تهی)

❋ $\left| \mathbf{z - z_1} \right| = \left| \mathbf{z - z_2} \right|$ مبین عمودمنصف پاره‌خطی است با دو سر z_1 , z_2

❋ $\left| \mathbf{z - z_1} \right| = \mathbf{R} \left| \mathbf{z - z_2} \right|$ مبین یک دایره است. $(R \neq 1)$

مثال : رابطه زیر بیانگر چه شکلی است؟

$$\mathbf{Re}\left(\frac{\mathbf{z}}{\mathbf{z+i}} \right) = 1$$

حل :

$$\frac{z}{z+i} = \frac{x+iy}{x+i(y+1)} \times \frac{x-i(y+1)}{x-i(y+1)} = \frac{x^2+y(y+1)}{x^2+(y+1)^2} + i(\dots)$$

ما می خواهیم $\mathrm{Re}\left(\frac{z}{z+i} \right) = 1$. پس:

$$\frac{x^2+y(y+1)}{x^2+(y+1)^2} = 1 \quad \to \quad x^2+y^2+y = x^2+y^2+2y+1 \quad \to \quad y+1 = 0$$

که مبین یک خط است.

محاسبه ریشه‌های nام و لگاریتم نپرین یک عدد مختلط

می‌دانیم اگر k عددی صحیح باشد:

$$e^{i\theta} = e^{i(\theta + 2k\pi)}$$

لذا با فرض $z = r\,e^{i\theta}$ می‌توان نوشت:

الف)

$$\sqrt[n]{z}=z^{\frac{1}{n}}=\left(re^{i\theta}\right)^{\frac{1}{n}}=\left\{re^{i(\theta+2k\pi)}\right\}^{\frac{1}{n}}=r^{\frac{1}{n}}e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}=\sqrt[n]{r}\left\{\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right\}$$

می‌توان دید به ازاء n مقدار متوالی برای k (مثلاً $k=0,1,\dots,n-1$)، n جواب متمایز از رابطه فوق به‌دست می‌آید.

پس هر عدد مختلط دارای n ریشه nاُم متمایز بوده که همگی در فاصله $\sqrt[n]{r}$ از مبداء مختصات قرار گرفته و رئوس یک n ضلعی منتظم را تشکیل می‌دهند.

ب)

$$\ln z=\ln\left(re^{i\theta}\right)=\ln\left(re^{i(\theta+2k\pi)}\right)=\ln r+i(\theta+2k\pi)$$

لگاریتم نپرین یک عدد مختلط دارای بیشمار مقدار است که قسمت حقیقی همگی $\ln r$ است و در فاصله $\dots,2\pi,2\pi,2\pi$ در امتداد موهومی از هم قرار دارند.

مثال : حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید.

۱) $A=\sqrt[3]{-8i}$

$$-8i\equiv\begin{cases}r=8\\ \theta=\frac{-\pi}{2}\end{cases}$$

$$A=\sqrt[3]{-8i}=\sqrt[3]{8}\left\{\cos\frac{\frac{-\pi}{2}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{-\pi}{2}+2k\pi}{3}\right\}\rightarrow\begin{cases}k=0\rightarrow\sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{-\pi}{6}+i\sin\frac{-\pi}{6}\right)\\ k=1\rightarrow\sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)\\ k=2\rightarrow\sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)\end{cases}$$

۲) $B=\ln(-1)$

$$-1\equiv\begin{cases}r=1\\ \theta=\pi\end{cases}$$

$$B=\mathrm{Ln}(-1)=\mathrm{Ln}(1)+i(\pi+2k\pi)\,;\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

مثال : فرض کنید a,b دو عدد مختلط معلوم باشد، رابطه $z\bar{z}-a\bar{z}-\bar{a}z+a\bar{a}=b\bar{b}$ بیانگر چیست؟

حل : می توان نوشت:

$$\bar{z}(z-a)+\bar{a}(a-z)=b\bar{b}\rightarrow(z-a)(\bar{z}-\bar{a})=b\bar{b}$$

$$\rightarrow(z-a)(\overline{z-a})=b\bar{b}\rightarrow|z-a|^2=|b|^2\rightarrow|z-a|=|b|$$

که مبین دایره‌ای به مرکز a و شعاع $|b|$است.

مثال : فرض کنید داشته باشیم $z_m=\cos\frac{\pi}{4^m}+i\sin\frac{\pi}{4^m}$ مطلوبست محاسبه $A=\prod\limits_{m=0}^{\infty} z_m$.

حل :

$$z_m=\cos\frac{\pi}{4^m}+i\sin\frac{\pi}{4^m}=1e^{\frac{i\pi}{4^m}}$$

$$A=z_0\,z_1\,z_2\ldots=e^{\frac{i\pi}{4^0}}\,e^{\frac{i\pi}{4^1}}\,e^{\frac{i\pi}{4^2}}\ldots\qquad=e^{i\pi\left(\frac{1}{4^0}+\frac{1}{4^1}+\frac{1}{4^2}+\ldots\right)}$$

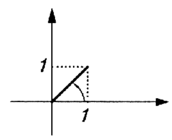
عبارت $\cdots+\frac{1}{4^0}+\frac{1}{4^1}+\frac{1}{4^2}$ حد مجموع یک تصاعد هندسی است که در آن $q=\frac{1}{4}$ و $t=1$ می‌باشد که حاصلش از رابطه $S_\infty=\frac{t_1}{1-q}$ قابل حصول است و داریم:

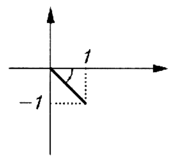
$$A=e^{i\pi\left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}}\right)}=e^{\frac{4i\pi}{3}}=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

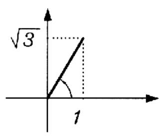
مثال : مطلوبست محاسبه $A=\left(\frac{\left(1+\sqrt{3}\,i\right)^6\left(1-i\right)^8}{\left(1+i\right)^4}\right)$

حل :

$$1+i\equiv\begin{cases}r=\sqrt{2}\\ \theta=\frac{\pi}{4}\end{cases}\qquad 1-i\equiv\begin{cases}r=\sqrt{2}\\ \theta=-\frac{\pi}{4}\end{cases}\qquad 1+\sqrt{3}\,i\equiv\begin{cases}r=2\\ \theta=\frac{\pi}{3}\end{cases}$$





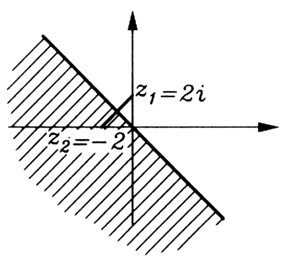


حال می‌توان نوشت:

$$A=\frac{\left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^6\left(\sqrt{2}\;e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^8}{\left(\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^4}=\frac{\left(2^6\;e^{2i\pi}\right)\left(2^4\;e^{-2i\pi}\right)}{2^2\;e^{i\pi}}=2^8\;e^{-i\pi}=2^8\left(\cos\pi-i\sin\left(\pi\right)\right)=-2^8$$

مثال : ناحیه تعریف شده با رابطه $|z+2|\geq|z-2i|$ را مشخص کنید.

حل : مرز ناحیه مذکور $|z+2|=|z-2i|$ می‌باشد که مبین نقاطی است که فاصله‌شان تا دو نقطه $z_2=-2$ و $z_1=2i$ به یک اندازه است و طبعاً عمود منصف پاره‌خط z_1z_2 است و چون مثلاً $z=2i$ رابطه اصلی را ارضا نمی‌کند ، ناحیه خواسته شده نباید شامل $z=2i$ باشد . پس ناحیه خواسته شده چنین است : $\quad |2i-2i|\ngeq|2i+2|\quad\rightarrow\quad 0\ngeq\sqrt{8}$



مثال : رابطه $|z-1+3i|+|z+1+4i|=7$ مبین چه شکلی است؟

۱) بیضی ۲) پاره‌خط ۳) تهی ۴) دو دایره

حل : ما دنبال نقاطی هستیم که مجموع فواصل آن‌ها تا دو نقطه $z_2=-1-4i$ و $z_1=1-3i$ عدد ثابت 7 باشد.

از آنجا که : $|z_1-z_2|=|1-3i+1+4i|=|2+i|=\sqrt{5}<7$

لذا شکل موردنظر یک بیضی است.

مثال : مقدار $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r^n\cos(n\theta)$ ، $0<r<1$، برابر کدام است؟

۱) $\dfrac{-r^2+r\cos\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}$ ۲) $\dfrac{-1+r\cos\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}$ ۳) $\dfrac{r^2-r\cos\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}$ ۴) $\dfrac{1-r\cos\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}$

حل : برای $\theta=0$ سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r^n\cos n\theta$ به $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r^n$ تبدیل می‌شود و چون $0<r<1$ ، سری هندسی حاصل همگراست به $\dfrac{r}{1-r}$

گزینه درست نیز باید به ازای $\theta=0$ چنین حاصلی داشته باشد، بررسی گزینه‌ها به ازای $\theta=0$ چنین حاصلی را در پی دارد.

گزینه اول $=\dfrac{-r^2+r}{1-2r+r^2}=\dfrac{r(1-r)}{(1-r)^2}=\dfrac{r}{1-r}$

گزینه دوم $=\dfrac{-1+r}{1-2r+r^2}=\dfrac{r-1}{(r-1)^2}=\dfrac{1}{r-1}$

گزینه سوم $=\dfrac{r^2-r}{1-2r+r^2}=\dfrac{r(r-1)}{(r-1)^2}=\dfrac{r}{r-1}$

گزینه چهارم $=\dfrac{1-r}{1-2r+r^2}=\dfrac{1-r}{(1-r)^2}=\dfrac{1}{1-r}$

پس باید گزینه ۱ درست باشد.

راه کامل مسئله

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{in\theta}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(re^{i\theta}\right)^n=\frac{re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}=\frac{(r\cos\theta+ir\sin\theta)}{(1-r\cos\theta)-ir\sin\theta}=\frac{(r\cos\theta+ir\sin\theta)((1-r\cos\theta)+ir\sin\theta)}{(1-r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2}$$

البته سری مورد نظر مسأله قسمت حقیقی عبارت بالا خواهد بود که برابر است با:

$$\frac{(r\cos\theta)(1-r\cos\theta)-(r\sin\theta)(r\sin\theta)}{(1-r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2}=\frac{-r^2+r\cos\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}$$

جبرخطی

۱) مقادیر ویژه و بردارهای ویژه یک ماتریس مربعی

اگر برای یک ماتریس مربعی $A_{n \times n}$ بتوان عددی مانند λ و برداری مانند $X_{n \times 1}$ به گونه‌ای یافت که:

$$\underset{\sim}{A}\ \underset{\sim}{X} = \lambda\ \underset{\sim}{X}$$

در این صورت λ را یک مقدار ویژه ماتریس A و X را بردار ویژه نظیر مقدار ویژه λ می‌گویند.

الف) برای محاسبه مقادیر ویژه کافی است، از عناصر روی قطر اصلی ماتریس A، λ کم کنیم و سپس دترمینان ماتریس حاصله را صفر قرار دهیم معادله‌ای که از بسط این دترمینان به‌دست می‌آید، معادله مشخصه ماتریس نام داشته و از حل آن λها به‌دست می‌آیند.

$$|A - \lambda I| = 0$$

ب) برای یافتن بردار ویژه نظیر λ_1 کافی است دستگاه همگن زیر حل شود:

$$\left(\underset{\sim}{A} - \lambda_1 \underset{\sim}{I}\right)\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{0}$$

($\underset{\sim}{X}$ بردار ویژه نظیر مقدار ویژه λ_1)

ج) برای هر ماتریس مربعی $A_{n \times n}$، معادله مشخصه یک معادله درجهٔ n می‌باشد و از حل آن باید n تا مقدار ویژه به‌دست آید .

همواره داریم:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = \operatorname{Tr} A \\ \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n = \det A \end{cases}$$

د) اگر A یک ماتریس مربعی 3×3 باشد ،داریم:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \operatorname{Tr} A$$

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \det A$$

$$\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3 = \frac{1}{2}\left\{(\operatorname{Tr} A)^2 - \left(\operatorname{Tr} A^2\right)\right\}$$

مثال : بزرگترین مقدار ویژه ماتریس $A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ را بیابید.

حل :

معادله مشخصه : $\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 2 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ 2 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$

با بسط نسبت به سطر دوم داریم:

$$(4-\lambda)\{(3-\lambda)(4-\lambda) - 4\} = 0 \rightarrow (4-\lambda)\left(\lambda^2 - 7\lambda + 8\right) = 0 \rightarrow \begin{cases} 4 - \lambda = 0 \rightarrow \lambda = 4 \\ \lambda^2 - 7\lambda + 8 = 0 \rightarrow \lambda = \dfrac{7 \pm \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

پس بزرگترین مقدار ویژه $\frac{7+\sqrt{17}}{2}$ است.

مثال : ماتریس $A = \begin{vmatrix} 3 & \alpha & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ مفروض است.اولاً مقدار α را طوری تعیین کنید که $\lambda = 1$ یکی از مقدار ویژه‌های این ماتریس باشد .ثانیاً بردار ویژه نظیر آن را تعیین کنید.

حل :

اولاً) اگر قرار است $\lambda = 1$ مقدار ویژه‌ای از این ماتریس باشد باید وقتی عدد 1 را از روی قطر اصلی کم می‌کنیم ،دترمینان حاصل کار صفر شود. یعنی باید:

$$\begin{vmatrix} 2 & \alpha & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \to \quad 2(0-2) - \alpha(-1-2) = 0 \quad \to \quad -4 + 3\alpha = 0 \quad \to \quad \alpha = \frac{4}{3}$$

ثانیاً) برای یافتن بردار ویژه نظیر $\lambda = 1$ می‌نویسیم:

$$\begin{vmatrix} 2 & \frac{4}{3} & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \to \quad (\underset{\sim}{A} - 1\underset{\sim}{I}) . \underset{\sim}{X} = 0 \quad \to$$

$$\begin{cases} 2x + \frac{4}{3}y = 0 \quad \to \quad x = -\frac{2}{3}y \quad \to \quad y = -\frac{3}{2}x \\ -x + 2z = 0 \quad \to \quad x = 2z \quad \to \quad z = \frac{x}{2} \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

پس بردار ویژه نظیر $\lambda = 1$ می‌تواند چنین باشد:

$$\begin{vmatrix} x \\ -\frac{3}{2}x \\ \frac{x}{2} \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{vmatrix}$$

مثال : ماتریس $A = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ a & 4 & 5 \\ 1 & b & 7 \end{vmatrix}$ مفروض است . چنانچه یکی از مقادیر ویژه‌های این ماتریس 3 و دترمینان این ماتریس 42 باشد دو مقدار ویژه دیگر چیست؟

حل :

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \text{Tr } A \quad \to \quad 3 + \lambda_2 + \lambda_3 = 12 \quad \to \quad \lambda_2 + \lambda_3 = 9$$

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \det A \quad \to \quad 3 \times \lambda_2 \times \lambda_3 = 42 \quad \to \quad \lambda_2 . \lambda_3 = 14$$

از اینجا به‌دست می‌آید:

$$\lambda_2 = 2 \qquad , \qquad \lambda_3 = 7$$

۲) معکوس یک ماتریس مربعی

اگر A یک ماتریس مربعی غیر منفرد باشد $(|A| \neq 0)$ ،معکوس‌پذیر است و داریم:

N: ماتریس همسازه‌های ماتریس A

N': ماتریس الحاقی A (ترانهاده (ترنسپوز) ماتریس N)

$$A^{-1} = \frac{N'}{|A|} \qquad , \qquad A^{-1}_{ij} = \frac{N'_{ij}}{|A|} = \frac{N_{ji}}{|A|}$$

$A_{\alpha\beta}$ همسازه عنصر : $\quad N_{\alpha\beta} = (-1)^{\alpha+\beta} . \Delta_{\alpha\beta}$

$\Delta_{\alpha\beta}$ (دترمینان کهاد عنصر $A_{\alpha\beta}$): دترمینان حاصل از حذف سطر α و ستون β در ماتریس A می باشد .

مثال : مقدار α را طوری تعیین کنید که درایه واقع بر سطر دوم و ستون اول از معکوس ماتریس $A = \begin{vmatrix} \alpha & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ برابر با 3 باشد.

حل :

$$A^{-1}_{21} = 3 \quad \rightarrow \quad \frac{N'_{21}}{|A|} = 3$$

حال می‌گوییم:

$$|A| = \alpha(0-1) + 1(0-1) = -\alpha - 1$$

$$N'_{21} = N_{12} = (-1)^{1+2}\,\Delta_{12} = -1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

پس ما می‌خواهیم:

$$\frac{1}{-\alpha-1} = 3 \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{-4}{3}$$

قضیه کیلی هامیلتون: هر ماتریس مربعی در معادله مشخصه‌اش صدق می‌کند.

مثال : معادلهٔ مشخصه یک ماتریس 2×2 مانند A به صورت $\lambda^2 - 3\lambda + 5 = 0$ می‌باشد. معکوس ماتریس A کدام است؟

حل : طبق قضیه کیلی هامیلتون :

$$A^2 - 3A + 5I = 0$$

طرفین را از سمت راست در A^{-1} ضرب می‌کنیم:

$$A\,AA^{-1} - 3AA^{-1} + 5IA^{-1} = 0 \quad \rightarrow \quad A - 3I + 5A^{-1} = 0 \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{5}(3I - A)$$

چند خاصیت دترمینان:

$$|B| = |B'| \quad |B^{-1}| = \frac{1}{|B|} \qquad , \qquad |\alpha\, B_{n\times n}| = \alpha^n\, |B| \qquad ,$$

مثال : می‌دانیم A یک ماتریس مربعی 3×3 است که دترمینان برابر 2 دارد:

الف) دترمینان ماتریس N را بیابید. (N ماتریس همسازه A)

ب) $\mathrm{Tr}(AN')$ را بیابید.

حل : از فرض مسأله داریم :

$$\begin{cases} A_{3\times 3} \\ |A| = 2 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} |N| = ? \\ \mathrm{Tr}(AN') = ? \end{cases}$$

الف)

$$A^{-1} = \frac{N'}{|A|} \quad \rightarrow \quad A^{-1} = \frac{N'}{2} \quad \rightarrow \quad N' = 2A^{-1}$$

$$|N'| = \left|2A^{-1}\right| \quad \rightarrow \quad |N| = 2^3 \left|A^{-1}\right| = 2^3 \frac{1}{|A|} = 2^2$$

ب)

$$A^{-1} = \frac{N'}{|A|} \quad \rightarrow \quad A^{-1} = \frac{N'}{2} \quad \rightarrow \quad N' = 2A^{-1}$$

با ضرب رابطه فوق از سمت چپ در A داریم :

$$AN' = A\,.2A^{-1} \quad \rightarrow \quad AN' = 2I_{3\times 3} \quad \rightarrow \quad \mathrm{Tr}(AN') = \mathrm{Tr}\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6$$

۳) رتبه یا رنک یک ماتریس

الف) رتبه یک ماتریس برابر است با درجه بزرگترین دترمینان مربعی غیر صفر که می‌توان از داخل آن ماتریس استخراج کرد.

ب) رتبه یک ماتریس برابر است با: Min (تعداد ستون‌های مستقل خطی و تعداد سطرهای مستقل خطی)

مثال : رتبه ماتریس $A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 2 & 4 \end{vmatrix}$ چیست؟

حل :

سطر سوم = سطر اول + سطر دوم

سطر چهارم = 2 (سطر اول)

پس به نظر می‌رسد تعداد سطرهای مستقل خطی 2 تا است، پس انتظار داریم رتبه ماتریس یا 2 باشد یا کمتر از 2 .

حال از خود می‌پرسیم آیا لااقل یک دترمینان 2×2 مخالف صفر از داخل A قابل استخراج است یا نه؟

مثلاً : $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \rightarrow \quad \mathrm{Rank}\ A = 2$

یادآوری از ضرب بردارها

مثال : سه بردار زیر را در نظر بگیرید:

$\vec{u} = a i + b j + c k$

$\vec{v} = m i + n j + p k$

$\vec{w} = \alpha i + \beta j + \gamma k$

۱) ضرب داخلی دو بردار $\vec{v}$ و $\vec{u}$ به صورت‌های زیر قابل محاسبه است:

$\vec{u} \,.\, \vec{u} = a m + b n + c p$

$\vec{u} \,.\, \vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}| \cos\theta = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\ \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}\ \cos\theta$

شرط عمود بودن دو بردار آن است که ضرب داخلی آن‌ها صفر باشد.

۲) ضرب خارجی دو بردار $\vec{v}$ و $\vec{u}$ به صورت زیر قابل حصول است:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a & b & c \\ m & n & p \end{vmatrix}$$

شرط موازی بودن دو بردار آن است که ضرب خارجی آن‌ها صفر باشد. می‌توان نشان داد بردار حاصله از $\vec{u} \times \vec{v}$ بر هر دو بردار $\vec{v}$ و $\vec{u}$ عمود است و اندازه آن برابر مساحت متوازی‌الاضلاع قابل ساخت روی این دو بردار است که دارای مقدار $|\vec{u}|\,|\vec{v}| \sin\theta$ می‌باشد.

۳) ضرب مخلوط سه بردار $\vec{w}$ و $\vec{v}$ و $\vec{u}$ به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$\vec{u} \,.\, (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}$$

قدر مطلق عدد به‌دست آمده از ضرب مخلوط، حجم متوازی السطوح قابل ساخت روی این سه بردار را نشان می‌دهد و اگر حاصل ضرب مخلوط سه بردار صفر باشد،یعنی سه بردار مذکور در یک صفحه واقعند (و یا به عبارتی وابستگی خطی دارند).

یادآوری از معادلات صفحه و خط در فضا

۱) معادله صفحه‌ای که از نقطه (x_0 , y_0 , z_0) می‌گذرد و بردار نرمال آن $\vec{N} = (a , b , c)$ می‌باشد، چنین است:

$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

۲) معادله خطی که از نقطه (x_0 , y_0 , z_0) می‌گذرد و بردار هادی آن $\vec{u} = (p , q , r)$ می‌باشد چنین است:

فرم استاندارد:

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r}$$

فرم پارامتری:

$$\begin{cases} x = p t + x_0 \\ y = q t + y_0 \\ z = r t + z_0 \end{cases}$$

معلومات زیر را در نظر بگیرید.

صفحات :

$P_1 : x + 2y - z = 3$

$P_2 : 2x - y + z = 1$

$P_3 : x - y + 2z = 2$

$P_4 : 2x + 4y - 2z = 4$

خط :

$$\Delta : x = y - 1 = \frac{z}{3}$$

نقاط :

$A(4, 2, 1) \quad , \quad B(1, 2, 2)$

به موارد زیر پاسخ دهید.

مثال : اگر دو وجه مکعبی روی صفحات P_4 و P_1 واقع باشند، حجم مکعب کدام است؟

حل : می‌دانیم فاصله دو صفحه موازی $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ ax + by + cz + d' = 0 \end{cases}$ از رابطه $\dfrac{|d - d'|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ به‌دست می‌آید.

در این مسأله دو صفحه P_4 و P_1 با هم موازیند و داریم:

$P_1 : x + 2y - z - 3 = 0$

$P_4 : x + 2y - z - 2 = 0$

و فاصله این دو صفحه طول ضلع مکعب خواهد بود که چنین است:

$$L = \frac{|(-3) - (-2)|}{\sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \quad \rightarrow \quad \text{حجم مکعب} : V = L^3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^3$$

مثال : اگر نقطه A مرکز یک مکعب و صفحه P_1 یکی از وجوه مکعب باشد، سطح مکعب کدام است؟

حل : می‌دانیم فاصله نقطه $A(x_0, y_0, z_0)$ تا صفحه $ax + by + cz + d = 0$ از رابطه $\dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ به‌دست می‌آید.

در این مسأله فاصله نقطه A تا صفحه P_1 نصف طول ضلع مکعب را می‌دهد که چنین است:

$$\frac{L}{2} = \frac{|(1)(4) + (2)(2) + (-1)(1) - 3|}{\sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{6}} \quad \rightarrow \quad \text{سطح مکعب } S = 6L^2 = 6\left(\frac{8}{\sqrt{6}}\right)^2$$

مثال : فاصله نقطه B تا خط Δ کدام است؟

حل : معادله خط Δ در فرم پارامتری : $\begin{cases} x = t \\ y = t + 1 \\ z = 3t \end{cases}$

فاصله نقطه‌ای از خط Δ تا نقطه $B(1, 2, 2)$ عبارتست از :

$$d = \sqrt{(t-1)^2 + (t+1-2)^2 + (3t-2)^2} = \sqrt{11t^2 - 16t + 6}$$

و برای min بودن این فاصله باید :

$$d' = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{22t - 16}{2\sqrt{11t^2 - 16t + 6}} = 0 \quad \rightarrow \quad t = \frac{16}{22} = \frac{8}{11}$$

لذا فاصله نقطه تا خط چنین است:

$$d = \sqrt{11\left(\frac{8}{11}\right)^2 - 16 \times \frac{8}{11} + 6}$$

مثال : معادله صفحه گذرنده از فصل مشترک دو صفحه P_2 و P_1 گذرنده از نقطه A کدام است؟

حل : معادله کلیه صفحات گذرنده از فصل مشترک دو صفحه $P_2 = 0$ و $P_1 = 0$ به صورت $P_1 + kP_2 = 0$ نوشته می‌شود که k عددی ثابت است. در این مسأله معادله کلیه صفحات گذرنده از دو صفحه P_2 و P_1 چنین می‌باشد.

$$(x + 2y - z - 3) + k(2x - y + z - 1) = 0 \quad \rightarrow \quad (1 + 2k)x + (2 - k)y + (k - 1)z - 3 - k = 0$$

شرط گذاشتن این صفحه از نقطه $A(4, 2, 1)$ می‌طلبد که:

$$(1 + 2k)(4) + (2 - k)(2) + (k - 1)(1) - 3 - k = 0 \quad \rightarrow \quad 6k + 4 = 0 \quad \rightarrow \quad k = -\frac{2}{3}$$

پس معادله صفحه مورد نظر چنین است:

$$\left(1 + 2\left(\frac{-2}{3}\right)\right)x + \left(2 - \left(-\frac{2}{3}\right)\right)y + \left(\left(\frac{-2}{3}\right) - 1\right)z - 3 - \left(\frac{-2}{3}\right) = 0$$

مثال : معادله خط گذرنده از نقطه B و موازی صفحات P_3 و P_2 کدام است؟

حل : P_3 نرمال صفحهٔ : $\vec{N}_3 = (1, -1, 2)$ و P_2 نرمال صفحه : $\vec{N}_2 = (2, -1, 1)$

از ضرب خارجی $\vec{N}_3$ و $\vec{N}_2$ برداری عمود بر این دو بردار حاصل می‌شود که بردار هادی خط مورد نظر ما را نشان می‌دهد و چنین به‌دست می‌آید:

$$\vec{N}_2 \times \vec{N}_3 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = i(-2 + 1) - j(4 - 1) + k(-2 + 1) = -i - 3j - k$$

پس معادله خط مورد نظر چنین نوشته می‌شود:

$$\frac{x - 1}{-1} = \frac{y - 2}{-3} = \frac{z - 2}{-1}$$

مثال : قرینه نقطه A نسبت به صفحه P_1 کدام است؟

حل : نرمال صفحه P_1 به صورت $(1, 2, -1)$ است که بردار هادی خط AH نیز می‌باشد، پس معادله خط AH که برصفحه P_1 عمود است به فرم زیر خواهد بود :

$$\frac{x - 4}{1} = \frac{y - 2}{2} = \frac{z - 1}{-1} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = t + 4 \\ y = 2t + 2 \\ z = -t + 1 \end{cases}$$

برای یافتن مختصات نقطه H، مختصات فوق را در صفحه P_1 قرار می‌دهیم:

$$(t + 4) + 2(2t + 2) - (-t + 1) = 3 \quad \rightarrow \quad 6t = -4 \quad \rightarrow \quad t = \frac{-2}{3}$$

یعنی:

$$H:\begin{cases} -\frac{2}{3}+4=\frac{10}{3}:x \\ 2\left(\frac{-2}{3}\right)+2=\frac{2}{3}:y \\ -\left(\frac{-2}{3}\right)+1=\frac{5}{3}:z \end{cases}$$

پس می‌توان گفت:

$$\frac{x_A+x_{A'}}{2}=x_H \quad\rightarrow\quad x_{A'}=2x_H-x_A=2\left(\frac{10}{3}\right)-4$$

$$\frac{y_A+y'_A}{2}=y_H \quad\rightarrow\quad y_{A'}=2y_H-y_A=2\left(\frac{2}{3}\right)-2$$

$$\frac{z_A+z'_A}{2}=z_H \quad\rightarrow\quad z_{A'}=2z_H-z_A=2\left(\frac{5}{3}\right)-1$$

مثال : نیمساز داخلی زاویه ساخته شده روی نرمال‌های دو صفحه P_2 و P_1 کدام است؟

حل : P_2 نرمال صفحه : $\vec{N}_2=(2,-1,1)$ و P_1 نرمال صفحه : $\vec{N}_1=(1,2,-1)$

و نیسماز زاویه ساخته شده روی این دو بردار به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{\vec{N}_1}{\left|\vec{N}_1\right|}+\frac{\vec{N}_2}{\left|\vec{N}_2\right|}=\frac{i+2j-k}{\sqrt{1+4+1}}+\frac{2i-j+k}{\sqrt{4+1+1}}=\frac{3i+j}{\sqrt{6}}$$

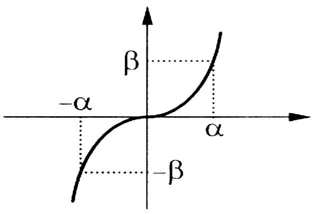
حد و پیوستگی در یک نقطه

می‌گوئیم تابع $f(x)$ در نقطه $x=a$ دارای حد است هرگاه حد چپ و حد راست تابع در این نقطه موجود و با هم برابر باشند.

می‌گوئیم تابع $f(x)$ در نقطه $x=a$ پیوسته است هرگاه در این نقطه دارای حد بوده و مقدار تابع در این نقطه موجود و با حد مذکور مساوی باشد.

مثال : می‌دانیم f تابعی فرد است که برای xهای مثبت ضابطه‌اش $f(x)=\dfrac{[x]-4}{x-4}$ می‌باشد. حدهای چپ و راست این تابع در نقطه $x=-4$ را پیدا کنید.

حل :



تابع فرد

حد راست:

$$\lim_{x\to(-4)^+} f(x)=-\lim_{x\to(4)^-} f(x)=-\lim_{x\to(4)^-}\frac{[x]-4}{x-4}=-\frac{3-4}{4^- -4}=-\frac{-1}{0^-}=-\infty$$

حد چپ:

$$\lim_{x\to(-4)^-} f(x)=-\lim_{x\to(4)^+} f(x)=-\lim_{x\to 4^+}\frac{[x]-4}{x-4}=-\frac{4-4}{4^+ -4}=-\frac{0\ \text{صفر قطعی}}{0^+\ \text{صفر حدی}}=0$$

مثال : نمودار تابع با ضابطه $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$، خط مجانب خود را در نقطه A قطع می‌کند، فاصله نقطه A از خط مجانب دیگر کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{2}$

حل :

$$\begin{array}{l|l}
x^3 & x^2-2x+1 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3-2x^2+x} & x+2 \\
2x^2-x & \\
\underline{2x^2-4x+2} & \\
3x-2 &
\end{array}$$

$$f(x)=x+2+\frac{3x-2}{x^2-2x+1}$$

از آنجا که حد $\dfrac{3x-2}{x^2-2x+1}$ در بینهایت ، صفر می باشد ، لذا $y=x+2$ مجانب مایل تابع بوده و طول محل تلاقی منحنی تابع و این خط مجانب چنین به دست می‌آید:

$$x+2+\frac{3x-2}{x^2-2x+1}=x+2 \ \rightarrow\ \frac{3x-2}{x^2-2x+1}=0 \ \rightarrow\ x=\frac{2}{3}$$

عرض این نقطه تقاطع چنین است:

$$f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3}{\left(\frac{2}{3}-1\right)^2}=\frac{8}{3}$$

و فاصله نقطه تقاطع مذکور یعنی $\left(\frac{2}{3},\frac{8}{3}\right)$ تا مجانب دیگر که همان مجانب قائم $x=1$ است برابر $1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$ است.

یادآوری سه قاعده مشتق‌گیری

$$y(x)=f(g(x)) \;\rightarrow\; y'(x)=g'(x).f'(g(x))$$

$$y(x)=f(x)^{g(x)} \;\rightarrow\; y'(x)=\left\{g'(x)\cdot\ln(f(x))+g(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}\right\}\cdot f(x)^{g(x)}$$

$$y(x)=\int_{f(x)}^{g(x)} h(t)\,dt \;\rightarrow\; y'(x)=g'(x).h(g(x))-f'(x).h(f(x))$$

قاعده هوپیتال

در رفع ابهام حد $I=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ که یکی از حالات مبهم $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ را داراست، چنانچه $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ موجود باشد (متناهی یا نامتناهی) ،حاصل آن حاصل I را نشان می‌دهد.

مثال : حاصل حدهای زیر را پیدا کنید.

۱) $\mathbf{I=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+3h)-f(x-2h)}{h}}$

$$I=\frac{f(x)-f(x)}{0}=\frac{0}{0}\ (\text{مبهم}) \xrightarrow{H} I=\lim_{h\to 0}\frac{(3)\cdot f'(x+3h)-(-2)f'(x-2h)}{1}=3f'(x)+2f'(x)=5f'(x)$$

۲) $\mathbf{I=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\tan x)^{\sin x}-1}{\tan x-1}=\frac{(1)^{\frac{\sqrt{2}}{2}}-1}{1-1}=\frac{0}{0}}$ (مبهم)

$$\xrightarrow{H} I=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\left(\cos x\,.\ln(\tan x)+\sin x\cdot\frac{1+\tan^2 x}{\tan x}\right)(\tan x)^{\sin x}}{(1+\tan^2 x)}=\frac{(0+\sqrt{2})(1)^{\frac{\sqrt{2}}{2}}}{1+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۳) $\mathbf{I=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\int_3^{2x+1}\sqrt{1+t^2}\,dt}{\int_{x^2}^{x^3}\sqrt{1+t^3}\,dt}}$

$$I=\frac{\int_3^3\dots}{\int_1^1\dots}=\frac{0}{0}\ (\text{مبهم}) \xrightarrow{H} I=\lim_{x\to 1}\frac{(2)\sqrt{1+(2x+1)^2}-0}{(3x^2)\sqrt{1+x^9}-(2x)\sqrt{1+x^6}}=\frac{2\sqrt{10}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{2}}=2\sqrt{5}$$

مواردی که نباید با ابهام $\infty \times 0$ اشتباه گرفت

می‌دانیم وضعیت مبهم $\infty \times 0$ وقتی رخ می‌دهد که داشته باشیم:

بی‌نهایت بزرگ × صفر حدی (بی‌نهایت کوچک)

در حالیکه بدون هیچ ابهامی داریم:

(کراندار و محدود حتی نامعلوم) × (صفر حدی) $\rightarrow 0$

(بی‌نهایت بزرگ) × (صفر واقعی) $= 0$

مثال : حاصل حدود زیر را بدست آورید .

$$B = \lim_{x \to -\infty} x\left[\frac{1}{x}\right]$$

حل : وقتی $x \to -\infty$ داریم: $\frac{1}{x} \to 0^-$ پس:

$$\left[\frac{1}{x}\right] = \left[0^-\right] = -1$$

پس: $B = (-\infty)(-1) = +\infty$

$$A = \lim_{x \to +\infty} x\left[\frac{1}{x}\right]$$

حل : وقتی $x \to +\infty$ داریم: $\frac{1}{x} \to 0^+$

پس:

صفر واقعی $\left[\frac{1}{x}\right] = \left[0^+\right] = 0$

پس: $A = (+\infty) \times$ (صفر واقعی) $= 0$

$$D = \lim_{x \to 0} x \sin\frac{1}{x}$$

حل : $D = \underbrace{0}_{\text{صفر حدی}} \times \underbrace{\sin\infty}_{\text{کراندار اگرچه نامعلوم}} = 0$:پس

$$C = \lim_{x \to 0} x\left[\frac{1}{x}\right]$$

حل : وقتی $x \to 0$ داریم : $\frac{1}{x} \to \infty$ و

لذا:

$$\left[\frac{1}{x}\right] \sim \frac{1}{x}$$

پس: $C = \lim_{x \to 0} x\,\frac{1}{x} = 1$

$$E = \lim_{x \to \infty} x \sin\frac{1}{x}$$

حل : وقتی $x \to \infty$ داریم:

$$\frac{1}{x} = 0 \quad \rightarrow \quad \sin\frac{1}{x} \sim \frac{1}{x}$$

پس: $E = \lim_{x \to \infty} x\,\frac{1}{x} = 1$

قواعد هم ارزی

مجازیم در ابتدا و یا در اواسط حل یک حد مبهم، هم ارز و معادل برخی جملات موجود در مسأله را قرار داده و سپس عمل رفع ابهام را ادامه دهیم.

در استفاده از هر نوع قاعده هم ارزی چنانچه هم ارز یکی از جملات را قرار داده و دقیقاً قرینه همان عبارت در حال جمع شدن با آن بود، لازم است از فرم تعمیم یافته آن قاعده هم ارزی استفاده کنیم.

چند قاعده هم ارزی:

وقتی $x \to \pm\infty$ داریم:

$$\sqrt[n]{a x^n + b x^{n-1} + c x^{n-2} + \dots} \sim \begin{cases} \sqrt[n]{a}\left|x + \dfrac{b}{na}\right| & \text{(اگر } n \text{ زوج باشد)} \\ \sqrt[n]{a}\left(x + \dfrac{b}{na}\right) & \text{(اگر } n \text{ فرد باشد)} \end{cases}$$

وقتی $n \to \infty$ داریم:

$$\left(1^P + 2^P + \dots + n^P\right) \sim \frac{n^{P+1}}{P+1} + \frac{n^P}{2}$$

وقتی $A(x) \to 0$ داریم:

$$\sqrt[n]{1 + A(x)} \sim 1 + \frac{A(x)}{n}$$

وقتی $A(x) \to \pm\infty$ داریم:

$$\left[A(x)\right] \sim A(x)$$

وقتی $n \to \infty$ داریم:

$$\sqrt[n]{(kn)!} \sim \left(\frac{kn}{e}\right)^k$$

وقتی $A \to 0$ داریم:

$$e^A \sim 1 + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \frac{A^4}{4!} + \dots$$

$$\cos A \sim 1 - \frac{A^2}{2!} + \frac{A^4}{4!} - + \dots$$

$$\sin A \sim A - \frac{A^3}{3!} + \frac{A^5}{5!} - + \dots$$

$$\tan A \sim A + \frac{A^3}{3} + \frac{2A^5}{15} + \dots$$

$$\operatorname{Arcsin} A \sim A + \frac{1}{2}\,\frac{A^3}{3} + \frac{1\times 3}{2\times 4}\,\frac{A^5}{5} + \dots$$

$$\operatorname{Arccos} A = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin} A$$

$$\operatorname{Arctan} A \sim A - \frac{A^3}{3} + \frac{A^5}{5} - + \dots$$

$$\cosh A \sim 1 + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^4}{4!} + \dots$$

$$\sinh A \sim A+\frac{A^3}{3!}+\frac{A^5}{5!}+\ldots$$

$$\frac{1}{1-A}\sim 1+A+A^2+\ldots \quad , \quad \frac{1}{1+A}\sim 1-A+A^2-+\ldots$$

$$\ln(1-A)\sim -\left(A+\frac{A^2}{2}+\frac{A^3}{3}+\ldots\right) \quad , \quad \ln(1+A)\sim A-\frac{A^2}{2}+\frac{A^3}{3}-+\ldots$$

$$(1+A)^m \sim 1+\frac{m}{1!}A+\frac{m(m-1)}{2!}A^2+\ldots$$

مثال : حاصل حدهای زیر را بیابید:

۱) $$\mathbf{I=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^7}\sum_{i=1}^{n} i^6}$$

حل :

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^7}\left(1^6+2^6+3^6+\ldots+n^6\right)\sim\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^7}\left(\frac{n^7}{7}+\frac{n^6}{2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{7}+\frac{1}{2n}=\frac{1}{7}+0=\frac{1}{7}$$

۲) $$I=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{\arctan^2 x}=\infty-\infty$$

حل :

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{\arctan^2 x-\sin^2 x}{\sin^2 x\arctan^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\tan^{-1}x+\sin x\right)\left(\tan^{-1}x-\sin x\right)}{\sin^2 x\arctan^2 x}\sim$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+x)\left(\left(x-\frac{x^3}{3}\right)-\left(x-\frac{x^3}{6}\right)\right)}{x^2\,x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(2x)\left(-\frac{x^3}{6}\right)}{x^4}=-\frac{1}{3}$$

مثال : مقدار حد $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[n]{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_n)}-x\right)$ را بیابید .

حل :

$$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)\cdots(x+a_n)=\left(x^2+(a_1+a_2)x+a_1a_2\right)(x+a_3)\cdots(x+a_n)$$

$$=\left(x^3+(a_1+a_2+a_3)x^2+(a_1a_3+a_2a_3+a_1a_2)x+a_1a_2a_3\right)\cdots(x+a_n)=\left(x^n+(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)x^{n-1}+\cdots\right)$$

بنابراین می‌توان گفت:

$$\text{حاصل حد}=\lim_{x\to\infty}\sqrt[n]{x^n+(a_1+a_2+\cdots+a_n)x^{n-1}+\cdots}-x=\lim_{x\to\infty}\left|x+\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right|-x$$

با فرض $x\to+\infty$ داریم:

$$\text{حاصل حد}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

و البته با فرض $x\to-\infty$ حاصل حد $+\infty$ خواهد شد.

مثال : $A=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{m=1}^{n}[mx]}{n^2}$ باشد،آنگاه مقدار A چقدر است؟

حل :

$$A=\lim_{n\to\infty}\frac{[x]+[2x]+\ldots+[nx]}{n^2}$$

اما می‌دانیم برای هر عدد حقیقی A داریم:

$$A-1<[A]\le A$$

لذا می‌توان گفت:

$$(x-1)+(2x-1)+\ldots+(nx-1)<[x]+[2x]+\ldots+[nx]\le(x)+(2x)+\ldots+(nx)$$

$$\to\quad \frac{(1+2+\ldots+n)x-n}{n^2}<\frac{[x]+[2x]+\ldots+[nx]}{n^2}\le\frac{(1+2+\ldots+n)x}{n^2}$$

و چون $\frac{n^2}{2}\ \underset{n\to\infty}{\sim}\ 1+2+\cdots+n$ لذا داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(1+2+\ldots+n)x-n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+2+\ldots+n)x}{n^2}=\frac{x}{2}$$

بنابراین:

$$A=\frac{x}{2}$$

مثال : در هر کدام از موارد زیر ثابت‌ها a , b را پیدا کنید:

۱) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{1}{ax+\sin x}\int_0^x\frac{t^2}{\sqrt{t+b}}\,dt=-3$

حل :

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\frac{t^2}{\sqrt{t+b}}\,dt}{ax+\sin x}=\frac{0}{0}\ \xrightarrow{H}\ I=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{\sqrt{x+b}}}{a+\cos x}=\frac{0}{a+1}$$

اگر قرار باشد حاصل حد 3 − باشد ، باید :

$$a+1=0\quad\to\quad a=-1$$

حال در شرایط $a=-1$ حد فوق مبهم $\frac{0}{0}$ می‌شود.

پس داریم:

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{\sqrt{b+x}}}{-1+\cos x}=\frac{0}{0}\sim I=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{\sqrt{b+x}}}{-1+\left(1-\frac{x^2}{2}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{b+x}}}{-\frac{1}{2}}=\frac{-2}{\sqrt{b}}\ \to\ \frac{-2}{\sqrt{b}}=-3\ \to\ b=\frac{4}{9}$$

۲) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x^3}+\dfrac{a}{x^2}+b\right)=3$

$$I=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x^3}+\frac{a}{x^2}+b\right)\sim\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{5!}}{x^3}+\frac{a}{x^2}+b\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{6}+\frac{x^2}{5!}+\frac{a}{x^2}+b\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+a}{x^2}\right)+\left(-\frac{1}{6}+b\right)+\frac{x^2}{5!}$$

اگر قرار باشد حاصل حد 3 شود باتوجه به آن‌که $\dfrac{1}{x^2}=\infty$ باید:

اولاً:

$$1+a=0 \quad\to\quad a=-1$$

دوماً:

$$-\frac{1}{6}+b=3 \quad\to\quad b=\frac{19}{6}$$

و البته:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{5!}=0$$

مقایسه بین بی‌نهایت بزرگ‌ها و مقایسه بین بی‌نهایت کوچک‌ها

هرگاه $x\to+\infty$ و $a>b>0$ و $m>n>1$ باشد، همگی عبارات زیر از جنس بی‌نهایت بزرگند و از حیث جمله پراهمیت‌تر داریم:

$$\log_m^x \ll \log_n^x \ll x^b \ll x^a \ll n^x \ll m^x \ll x! \ll x^x$$

هرگاه $x\to 0^+$ و $a>b>0$ و $m>n>1$ باشد، همگی عبارات زیر از جنس بی‌نهایت کوچکند و از حیث جمله پراهمیت‌تر داریم:

$$x^b \gg x^a \gg n^{-\frac{1}{x}} \gg m^{-\frac{1}{x}}$$

به تعبیری:

بی‌نهایت بزرگ نمایی با سرعت بیشتری نسبت به بی‌نهایت بزرگ توانی، بزرگ می‌شود.

بی‌نهایت کوچک نمایی با سرعت بیشتری نسبت به بی‌نهایت کوچک توانی، کوچک می‌شود.

توجه مهم : دقت کنید وقتی می‌گوئیم $A\gg B$ می‌باشد به ازاء هر دو عدد دلخواه α,β داریم:

$$\alpha A+\beta B\sim\alpha A$$

$$\frac{A}{B}\to\infty \qquad , \qquad \frac{B}{A}\to 0$$

مثال : حاصل حدهای زیر را بیابید.

۱) $I=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+5^n+3^{2n}}$

حل : وقتی $n\to\infty$ داریم:

$$2^n \ll 5^n \ll 9^n$$

پس:

$$I\sim\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{9^n}=9$$

۲) $I = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{2^{n+7} + 3^{n-1}}{2^{n-1} + 3^{n+4}}$

حل : $I = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{2^n \times 2^7 + 3^n \times 3^{-1}}{2^n \times 2^{-1} + 3^n \times 3^4} \sim \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{3^n 3^{-1}}{3^n 3^4} = \dfrac{1}{3^5}$

۳) $I = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x\, e^{5x}}{x^4 + e^{6x}}$

حل : وقتی $x \to +\infty$ هر دو عبارت x^4, e^{6x} از جنس بی‌نهایت بزرگ هستند و چون $e^{6x} >> x^4$ داریم:

$$I \sim \lim_{x \to +\infty} \frac{x\, e^{5x}}{e^{6x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = \frac{\text{بی‌نهایت بزرگ توانی}}{\text{بی‌نهایت بزرگ نمایی}} = 0$$

وقتی $x \to -\infty$ داریم:

$$\begin{cases} e^{6x} \to 0 \\ x^4 \to \text{بی‌نهایت بزرگ} \end{cases}$$

پس:

$$I = \lim_{x \to -\infty} \frac{x\, e^{5x}}{x^4} = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{5x}}{x^3} = \frac{e^{-\infty}}{(-\infty)^3} = 0$$

۴) $I = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4^{\frac{1}{x}} + 7x}{5^{\frac{1}{x}} + 6x}$

حل : وقتی $x \to 0^+$ داریم: $\dfrac{1}{x} \to +\infty$، لذا:

$$4^{\frac{1}{x}} \to +\infty \quad , \quad 5^{\frac{1}{x}} \to +\infty$$

پس حد راست چنین است :

$$I \sim \lim_{x \to 0^+} \frac{4^{\frac{1}{x}}}{5^{\frac{1}{x}}} = \left(\frac{4}{5}\right)^{+\infty} = 0$$

وقتی $x \to 0^-$ داریم: $\dfrac{1}{x} \to -\infty$، لذا:

$$4^{\frac{1}{x}} \to 0 \quad , \quad 5^{\frac{1}{x}} \to 0$$

از آنجائی‌که بی‌نهایت کوچک توانی اهمیتش از بی‌نهایت کوچک نمایی بیشتر است، پس حد چپ چنین است :

$$I \sim \lim_{x \to 0^-} \frac{7x}{6x} = \frac{7}{6}$$

پس در کل حد مذکور موجود نمی‌باشد.

دقت داریم وقتی $x \to \pm\infty$ داریم: $\dfrac{1}{x} \to 0$ ، پس:

$$I = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{4^{\frac{1}{x}} + 7x}{5^{\frac{1}{x}} + 6x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1 + 7x}{1 + 6x} = \frac{7}{6}$$

حالات ابهام نمایی

چنانچه در محاسبه حد $I=\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ به یکی از حالات مبهم نمایی یعنی 0^{∞} , ∞^0 , 0^0 , 1^{∞} برخورد کردیم، از دو طرف رابطه فوق ln گرفته و می‌نویسیم $\ln I=\lim\limits_{x\to a} g(x).\ln\left(f(x)\right)$، سپس حد ایجاد شده در سمت راست را که دیگر ابهام مقدماتی دارد، رفع ابهام نموده و با محاسبه $\ln I$ حاصل I را به‌دست می‌آوریم.

توجه ۱ : اگر a , b , c , d اعداد ثابتی باشند، حاصل $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x+b}\right)^{cx+d}$ که ابهام 1^{∞} دارد، e^{ac} خواهد شد.

توجه ۲ :اگر a , b , ... و نیز m اعداد ثابتی باشند، حاصل $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[x]{ax^m+bx^{m-1}+\dots}$ که ابهام ∞^0 دارد، 1 خواهد شد.

مثال : حاصل حدهای زیر را پیدا کنید.

$$\text{۱) } \mathbf{I=\lim_{x\to 0^+}\left(\cos\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{x}} \qquad \to \qquad I=1^{\infty}} \text{ (مبهم)}$$

حل : با تغییر متغیر $\sqrt{x}=t$ داریم:

$$I=\lim_{t\to 0^+}(\cos t)^{\frac{1}{t^2}}=1^{\infty}$$

حالا می‌نویسیم:

$$\ln I=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^2}\ln(\cos t)=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(\cos t)}{t^2}=\frac{0}{0}\ \xrightarrow{H}\ \ln I=\lim_{t\to 0}\frac{-\tan t}{2t}=-\frac{1}{2}\quad\to\quad I=e^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{۲) } \mathbf{I=\lim_{x\to+\infty}\left(x+4x^2\right)^{\frac{1}{\ln x}} \qquad \to \qquad I=\infty^{0}} \text{ (مبهم)}$$

حل :

$$\ln I=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln x}\ln\left(x+4x^2\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x+4x^2\right)}{\ln x}=\frac{\infty}{\infty}\ \xrightarrow{H}$$

$$\ln I=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1+8x}{x+4x^2}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+8x^2}{x+4x^2}=2\quad\to\quad I=e^2$$

مثال : ثابت α را طوری پیدا کنید که $\mathbf{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3\alpha}{2x+7\alpha}\right)^{x}=3}$ باشد .

حل : داریم:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3\alpha}{2x+7\alpha}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(2x+7\alpha)-4\alpha}{2x+7\alpha}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-4\alpha}{2x+7\alpha}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2\alpha}{1x+\frac{7\alpha}{2}}\right)^x=e^{-2\alpha}$$

پس:

$$e^{-2\alpha}=3\ \to\ -2\alpha=\ln 3\ \to\ \alpha=-\frac{1}{2}\ln 3$$

مثال : حاصل حد زیر را به‌دست آورید.

$$I = \lim_{x \to 0} \left(\cos h\,x - \frac{x^2}{2} \right)^{\frac{1}{x^4}} \quad \to \quad I = 1^{\infty}\ (\text{مبهم})$$

حل : با استفاده از هم ارزی داریم:

$$I \sim \lim_{x \to 0} \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^2}{2} \right)^{\frac{1}{x^4}} = \lim_{x \to 0} \left(1 + \frac{x^4}{24} \right)^{\frac{1}{x^4}} \xrightarrow{x^4 = \frac{1}{t}} I = \lim_{t \to \infty} \left(1 + \frac{1}{24t} \right)^{t} = e^{\frac{1}{24}}$$

یادآوری :

$$\boxed{\lim_{x \to 0} (1 + \alpha x)^{\frac{\beta}{x}} = e^{\alpha\beta}}$$

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x} \right)^{\beta x} = e^{\alpha\beta}}$$

مشتق و بحث‌های مربوطه

تعریف مشتق تابع در یک نقطه

می‌گوئیم تابع $f(x)$ در نقطه x_0 مشتق‌پذیر است هرگاه اولاً در این نقطه پیوسته باشد و ثانیاً مشتق چپ و راست تابع در این نقطه موجود و با هم برابر باشند. به تعبیری:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0) \qquad , \qquad f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$$

توجه ۱ : $f'(x_0)$ را در صورت وجود می‌توان از طریق حد $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ به‌دست آورد.

توجه ۲ : $f'(x_0)$ در صورت وجود مبین شیب خط مماس برمنحنی $y = f(x)$ در نقطه‌ی $x = x_0$ می‌باشد.

توجه ۳ : زاویه بین دو منحنی $y = f(x)$ و $y = g(x)$ در نقطه تقاطع $x = x_0$ همان زاویه بین خطوط مماس برآن دو منحنی در نقطه مذکور بوده و داریم:

$$\tan\alpha = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$$

که در آن $m_2 = g'(x_0)$ و $m_1 = f'(x_0)$ و α زاویه بین دو منحنی در نقطه $x = x_0$ می‌باشد.

مثال : اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ باشد ،

الف) آیا این تابع در $x = 0$ پیوسته است؟ **ب)** آیا این تابع در $x = 0$ مشتق پذیر است؟

ج) آیا مشتق تابع در $x = 0$ حد دارد؟

حل : الف)

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0 \times \sin\infty = 0$$

و چون $f(x) = 0$ ، پس تابع در $x = 0$ پیوسته است.

ب) چون $\lim x^2 \sin\frac{1}{x}$ به خودی خود در $x = 0$ معین نمی باشد و مجاز نیستیم از این عبارت مشتق بگیریم و حاصل کار و یا حتی حد حاصل کار را در $x = 0$ به عنوان $f'(0)$ گزارش دهیم. اما طبق تعریف داریم:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0 \times \sin\infty = 0$$

پس $f'(x)$ در نقطه $x = 0$ موجود است و البته ضابطه $f'(x)$ چنین است :

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\frac{1}{x} + x^2 \left(\frac{-1}{x^2}\right) \cos\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

ج) مشاهده می شود:

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} = 2(0)\sin\infty - \cos\infty \quad (\text{نا مشخص})$$

پس $\lim_{x \to 0} f'(x)$ موجود نمی باشد.

مثال : زاویه بین نیم مماسهای چپ و راست بر منحنی $f(x) = \frac{|x|}{|x|+2}$ در نقطه $x = 0$ چیست؟

حل : اگر $x > 0$ باشد، داریم:

$$f(x) = \frac{x}{x+2} \quad \to \quad f'(x) = \frac{2}{(x+2)^2} \quad \to \quad f'(0^+) = \frac{1}{2} = m_1 \quad (\text{شیب نیم مماس راست در } x = 0)$$

اگر $x < 0$ باشد، داریم:

$$f(x) = \frac{-x}{-x+2} \quad \to \quad f'(x) = \frac{-2}{(-x+2)^2} \quad \to \quad f'(0^-) = \frac{-1}{2} = m_2 \quad (\text{شیب نیم مماس چپ در } x = 0)$$

پس زاویه بین دو نیم مماس مذکور چنین است:

$$\tan\alpha = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right| = \left|\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}\right| = \frac{4}{3} \quad \to \quad \alpha = \operatorname{Arc}\tan\left(\frac{4}{3}\right)$$

استفاده از مشتق در تعیین مقدار تقریبی یک تابع در یک نقطه

اگر Δx به اندازه کافی کوچک باشد، داریم:

$$f(x_0 + \Delta x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)\,\Delta x$$

یعنی اگر مقدار یک تابع و مشتق آن را در نقطه‌ای مانند x_0 بدانیم، قادریم مقدار تقریبی آن تابع را در نزدیکی نقطه $x = x_0$ یعنی $(x_0 + \Delta x)$ تخمین بزنیم.

مثال : با استفاده از مشتق، یک مقدار تقریبی برای $\sin^3 29^\circ$ پیدا کنید.

حل :

$$f(x) = \sin^3 x \quad \to \quad f'(x) = 3\sin^2 x\,\cos x$$

$$x_0 = 30^\circ \quad \to \quad \Delta x = -1^\circ = \frac{-\pi}{180}\ \text{rad}$$

لذا:

$$\sin^3 29^\circ \simeq \sin^3 30^\circ + 3\sin^2 30^\circ\,\cos 30^\circ\left(\frac{-\pi}{180}\right) \quad \to \quad \sin^3 29^\circ \simeq \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{-\pi}{180}\right) = \frac{1}{8}\left(1 - \frac{3\sqrt{3}\,\pi}{180}\right)$$

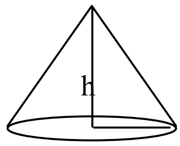
استفاده از مشتق در بحث نسبت‌های وابسته

از آنجا که مشتق به معنای سرعت تغییرات می‌باشد ،چنانچه کمیتی به چند متغیر وابسته باشد و تمامی آن متغیرها خود با زمان در حال تغییر باشند (تابعی از زمان باشند)، برای مشخص کردن سرعت تغییرات آن کمیت کافی است رابطه آن را با متغیرهای مذکور نوشته و از طرفین این رابطه نسبت به زمان مشتق بگیریم.

مثال : مخروطی را در نظر بگیرید که دارای شعاع قاعده ۲ متر و ارتفاع ۵ متر است. چنانچه در شرایط موجود شعاع قاعده آن با سرعت $4\,{}^{m}\!/_{s}$ در حال بزرگ شدن و ارتفاع آن با سرعت $1\,{}^{m}\!/_{s}$ در حال کوچک شدن باشد، سرعت تغییرات حجم مخروط چیست؟

حل :

$$\frac{dv}{dt} = \ ? \quad \text{(حکم)}$$



$$\begin{cases} r = 2m & \dfrac{dr}{dt} = +4\,{}^{m}\!/_{s} \\ h = 5 & \dfrac{dh}{dt} = -1\,{}^{m}\!/_{s} \end{cases} \quad \text{(فرضیات)}$$

$$\text{حجم مخروط}: v = \frac{1}{3}\pi r^2 h \quad \to \quad \frac{dv}{dt} = \frac{\pi}{3}\left(2r\frac{dr}{dt}h + r^2\frac{dh}{dt}\right)$$

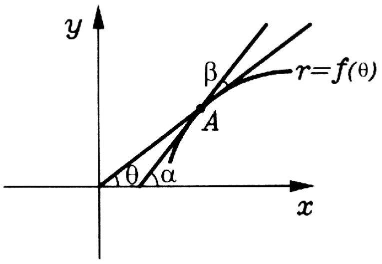
در شرایط گفته شده داریم:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\pi}{3}\left(2(2)(4)(5) + \left(2^2\right)(-1)\right) = \frac{76\pi}{3}\,{}^{m}\!/_{s}$$

دو رابطه در ارتباط با خط مماس بر منحنی‌های قطبی

β: زاویه بین خط مماس و شعاع حامل در نقطه A

α: زاویه بین خط مماس در A و محور xها



$$r' = \frac{dr}{d\theta}$$

$$\tan\beta = \left.\frac{r}{r'}\right|_{A} \quad , \quad \tan\alpha = \left.\frac{r + r'\tan\theta}{-r\tan\theta + r'}\right|_{A}$$

می‌توان نشان داد اگر دو منحنی قطبی در نقطه‌ای مانند A همدیگر را قطع کنند، برای محاسبه زاویه بین این دو منحنی کافی است زاویه β مربوط به هر کدام را در نقطه A پیدا کرده و از طریق $|\beta_1 - \beta_2|$ زاویه بین آن دو منحنی را در نقطه A به‌دست آوریم.

مثال : زاویه بین خط مماس و شعاع حامل بر منحنی $r = \ln\theta + \theta$ در نقطه نظیر $\theta = 1$ را بیابید.

حل:

$$r = \ln\theta + \theta \quad \to \quad r' = \frac{1}{\theta} + 1$$

$$\theta = 1 \quad \to \quad r = 0 + 1 \quad , \quad r' = 1 + 1$$

$$\to \quad \tan\beta = \frac{r}{r'} = \frac{1}{2} \quad \to \quad \beta = \operatorname{Arc}\tan\left(\frac{1}{2}\right)$$

مثال : زاویه بین خطوط مماس بر منحنی‌های قطبی $r=2(1+\sin\theta)$, $r=3(1-\sin\theta)$ در نقطه تقاطع کدام است؟

حل :

$$r=2(1+\sin\theta) \;\rightarrow\; \frac{dr}{d\theta}=2\cos\theta$$

$$\tan\psi_1=\frac{r}{\frac{dr}{d\theta}}=\frac{2(1+\sin\theta)}{2\cos\theta}=\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$r=3(1-\sin\theta) \;\rightarrow\; \frac{dr}{d\theta}=-3\cos\theta$$

$$\tan\psi_2=\frac{r}{\frac{dr}{d\theta}}=\frac{3(1-\sin\theta)}{-3\cos\theta}=\frac{1-\sin\theta}{-\cos\theta}$$

زاویه بین دو منحنی در نقطه تقاطعشان (جایی که θ یکسان است) از رابطه $\alpha=\psi_1-\psi_2$ به دست می‌آید و داریم:

$$\tan\alpha=\frac{\tan\psi_1-\tan\psi_2}{1+\tan\psi_1\tan\psi_2}=\frac{\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}-\frac{1-\sin\theta}{-\cos\theta}}{1+\left(\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right)\left(\frac{1-\sin\theta}{-\cos\theta}\right)}=\frac{\frac{2}{\cos\theta}}{1+\frac{1-\sin^2\theta}{-\cos^2\theta}}=\frac{\frac{2}{\cos\theta}}{1+\frac{\cos^2\theta}{-\cos^2\theta}}=\infty \;\rightarrow\; \alpha=\frac{\pi}{2}$$

چند قاعده مشتق‌گیری

۱) مشتق‌گیری ضمنی:

هرگاه داشته باشیم $F(x,y)=0$ طبیعی است در این رابطه یکی از دو متغیر x یا y می‌تواند به عنوان متغیر مستقل و دیگری باید متغیر وابسته (تابع) مدنظر قرار گیرد.

اگر بخواهیم مشتقات تا هر مرتبه y را نسبت به x پیدا کنیم، کافی است متوالیاً از رابطه $F(x,y)=0$ نسبت به متغیر x و با عنایت به آن‌که y تابع فرض شده است، مشتق بگیریم.

به عنوان رابطه‌ای آشنا به خاطر داریم:

$$\frac{dy}{dx}=y'_x=-\frac{F'_x}{F'_y}$$

مثال : فرض کنید داشته باشیم $\ln y+xy+x^3=2$، مطلوبست محاسبه y''_{xx} در $x=y=1$

حل : با مشتق‌گیری متوالی نسبت به متغیر x از رابطه داده شده داریم:

$$\frac{y'}{y}+y+xy'+3x^2=0 \qquad *$$

$$\frac{yy''-y'^2}{y^2}+y'+y'+xy''+6x=0 \qquad **$$

با قرار دادن $x=y=1$ در * حاصل y' پیدا می‌شود و قرار دادن این مقادیر در ** حاصل y'' را در نقطه موردنظر به‌دست می‌آوریم.

۲) مشتق‌گیری از تابع مرکب:

هرگاه داشته باشیم $y(x) = f\left(g(x)\right)$ داریم:

$$\frac{dy}{dx} = g'(x) . f'\left(g(x)\right)$$

۳) مشتق‌گیری زنجیره‌ای:

هرگاه داشته باشیم $y = f(t)\ ,\ t = g(w)\ ,\ w = h(x)$ داریم:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df}{dt} \cdot \frac{dg}{dw} \cdot \frac{dh}{dx}$$

مثال : معادله سرعت متحرکی که بر روی محور xها حرکت می‌کند $\sqrt{x}$ است، شتاب این متحرک چقدر است؟

حل : $v = \dfrac{dx}{dt} \quad \rightarrow \quad$ (شتاب) $a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{dv}{dx}.\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}.\sqrt{x} = \dfrac{1}{2}$

۴) مشتق‌گیری پارامتری:

هرگاه داشته‌باشم $\begin{cases} x = p(t) \\ y = q(t) \end{cases}$ داریم:

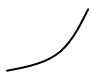
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{q'(t)}{p'(t)}$$

همچنین می‌توان نوشت:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{q'(t)}{p'(t)}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{q'(t)}{p'(t)}\right) . \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}\left(\frac{q'(t)}{p'(t)}\right) . \frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$

$$= \frac{q''(t)\,p'(t) - p''(t)\,q'(t)}{p'(t)^2}\ \frac{1}{p'(t)} = \frac{q''(t)\,p'(t) - p''(t)\,q'(t)}{p'(t)^3}$$

مثال : منحنی $\begin{cases} x = t - t^2 \\ y = t + t^3 \end{cases}$ در اطراف نقطه $t = 1$ چگونه رفتاری دارد؟

الف) 
ب) 
ج) 
د) 

حل : در واقع علامت مشتق اول و دوم برای صعودی و نزولی بودن و جهت تقعر را می‌خواهد:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 + 3t^2}{1 - 2t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(6t)(1 - 2t) - (-2)\left(1 + 3t^2\right)}{(1 - 2t)^3}$$

در $t = 1$ داریم:

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4}{-1} < 0$ (نزولی است)

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(6)(-1)-(-2)(4)}{(-1)^3}=\frac{2}{-1}<0$$ (تقعر به سمت پائین)

لذا گزینه ج صحیح است.

۵) مشتق‌گیری از تابع به توان تابع

هرگاه داشته باشیم $y(x)=f(x)^{g(x)}$ می‌توان نوشت:

$$\ln y=g.\ln f \quad\rightarrow\quad \frac{y'}{y}=g'\ln f+g\frac{f'}{f} \quad\rightarrow\quad y'(x)=\left(g'(x)\ln f(x)+g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right).f(x)^{g(x)}$$

۶) مشتق‌گیری از انتگرال (قضیه لایپ نیتس)

هرگاه داشته باشیم $y(x)=\int_{f(x)}^{g(x)}h(x,t)\,dt$ داریم:

$$y'(x)=g'(x).h(x,g(x))-f'(x).h(x,f(x))+\int_{f(x)}^{g(x)}\frac{\partial h(x,t)}{\partial x}dt$$

مثال : با فرض آن‌که $f(t)=\int_0^{t^2}\frac{\sin tx}{x}dx$، حاصل $\frac{df}{dt}$ چیست؟

حل :
$$\frac{df}{dt}=(2t).\frac{\sin tt^2}{t^2}-0+\int_0^{t^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\sin tx}{x}\right)dx=\int_0^{t^2}\frac{1}{x}.x\cos tx\ dx+\frac{2}{t}\sin t^3=\frac{1}{t}\sin tx\Big|_0^{t^2}+\frac{2}{t}\sin t^3=\frac{3}{t}\sin t^3$$

۷) مشتق‌گیری از معکوس یک تابع

می‌دانیم $f^{-1}(f(x))=x$ لذا خواهیم داشت:

$$f'(x).\left(f^{-1}\right)'_{(f(x))}=1 \quad\rightarrow\quad \left(f^{-1}\right)'_{(f(x))}=\frac{1}{f'(x)}$$

به تعبیری هرگاه نقطه (a,b) به نمودار تابع f تعلق داشته باشد (و طبیعتاً نقطه (b,a) به نمودار تابع f^{-1} متعلق باشد)، داریم:

$$\left(f^{-1}\right)'_{(b)}=\frac{1}{f'(a)}$$

مثال : با این فرض که $f(x)=x^3+3x+\ln x$ باشد حاصل $\left(f^{-1}\right)'_{(4)}$ را بیابید.

حل : با کمی دقت مشاهده می‌شود که با قرار دادن $x=1$ در داخل f عدد 4 به دست می‌آید، بنابراین داریم :

$$\left(f^{-1}\right)_{(4)}=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{3x^2+3+\frac{1}{x}\Big|_{x=1}}=\frac{1}{7}$$

۸) مشتق‌گیری از تابع نسبت به تابع

برای محاسبه مشتق تابع $f(x)$ نسبت به تابع $g(x)$ که مبین نسبت شدت تغییرات تابع f به شدت تغییرات تابع g می‌باشد، داریم:

$$\frac{df}{dg}=\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

✓ استفاده از علامت مشتق اول در تعیین وضعیت صعودی و نزولی بودن یک تابع و تعیین نقاط اکسترمم نسبی

اگر تابع $f(x)$ در فاصله‌ای پیوسته باشد؛

جاهایی که $f'(x)$ مثبت و یا احتمالاً در تعداد نقاط شمارش‌پذیری صفر باشد، تابع f اکیداً صعودی و جاهایی که $f'(x)$ منفی و یا احتمالاً در تعداد نقاط شمارش‌پذیری صفر باشد، تابع f اکیداً نزولی است.

و با توجه به این موضوع می‌توان نقاط اکسترمم نسبی تابع را یافت، بدین‌ترتیب که اگر تابع f در $x = a$ پیوسته بوده و علامت f' در اطراف $x = a$ عوض شود تابع f در $x = a$ دارای اکسترمم نسبی است. به طوری‌که:

x	a	
f'	$+$	$-$
f	$\nearrow$	$\searrow$

Max

x	a	
f'	$-$	$+$
f	$\searrow$	$\nearrow$

Min

✓ استفاده از علامت مشتق دوم در تعیین وضعیت تقعر و تحدب یک تابع و تعیین نقاط عطف

اگر تابع $f(x)$ در فاصله‌ای پیوسته باشد؛

جاهایی که $f''(x)$ مثبت باشد، انحناء (تقعر) منحنی به سمت بالا و تابع f مقعر است.

جاهایی که $f''(x)$ منفی باشد، انحناء (تقعر) منحنی به سمت پایین و تابع f محدب است.

و باتوجه به این موضوع می‌توان نقاط عطف تابع را یافت. بدین‌ترتیب که اگر تابع f در $x = a$ پیوسته بوده و نمودار f در این نقطه دارای خط مماس باشد (نقطه نوک تیز نداشته باشد) و علامت f'' در اطراف $x = a$ عوض شود، تابع f در $x = a$ دارای عطف است.

ویژگی منحصر به فرد نقطه عطف آن است که خط مماس برمنحنی در آن نقطه از داخل منحنی عبور می‌کند.

x	a	
f''	$+$	$-$
f	$\cup$	$\cap$

عطف

x	a	
f''	$-$	$+$
f	$\cap$	$\cup$

عطف

✓ سه قضیه

۱) هرگاه $f'(a) = 0$ بوده ولی $f'(x)$ در اطراف $x = a$ تغییر علامت ندهد طبیعتاً تابع f در $x = a$ دارای اکسترمم نسبی نمی‌باشد. ولی ثابت می‌شود در این شرایط تابع f در $x = a$ دارای عطف است.

۲) هرگاه تابع f در $x = a$ دارای اکسترمم نسبی باشد و بدانیم $f'(a)$ موجود است، الزاماً باید $f'(a) = 0$ باشد.

۳) آزمون مشتق دوم:

هرگاه $f'(a) = 0$ و $f''(a) > 0$ باشد، تابع f در $x = a$ دارای Min نسبی است.

هرگاه $f'(a) = 0$ و $f''(a) < 0$ باشد، تابع f در $x = a$ دارای Max نسبی است.

هرگاه $f'(a) = 0$ و $f''(a) = 0$ باشد، تابع در f در $x = a$ ممکن است دارای اکسترمم نسبی و یا عطف باشد.

✓ دو نکته

۱) اگر تابع $y = f(x)$ در نقطه (a , b) دارای اکسترمم نسبی باشد، باید اولاً $f(a) = b$ باشد، ثانیاً $f'(a)$ در صورت وجود برابر صفر شود.

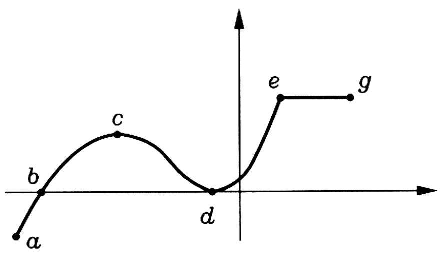
۲) اگر تابع $y = f(x)$ در نقطه (a , b) دارای عطف باشد باید اولاً $f(a) = b$ باشد، ثانیاً $f''(a)$ در صورت وجود برابر صفر شود.

✓ دو تعریف

۱) جاهایی که $f'(x)$ برابر صفر است و یا اصولاً $f'(x)$ موجود نمی‌باشد را نقاط بحرانی تابع $f(x)$ می‌گویند.

۲) اگر $f''(a) = 0$ و $f'(a) \neq 0$ باشد ولی علامت $f''(x)$ در اطراف $x = a$ تغییر علامت ندهد، طبیعتاً تابع f در $x = a$ دارای عطف نمی‌باشد و اصطلاحاً در این شرایط می‌گویند تابع در $x = a$ دارای نقطه مپلا است.

مثال : نمودار مشتق تابع f (یعنی f') در شکل مقابل ترسیم شده است، روی علامت f' , f'' در قسمت‌های مختلف اظهار نظر کرده و نوع نقاط d , c , b را برای منحنی f تعیین کنید.



حل : در فواصلی که نمودار f' بالای محور xها است، f' مثبت است.

در فواصلی که نمودار f' پایین محور xها است، f' منفی است.

در فواصلی که نمودار f' نزولی است ، مشتق f' یعنی f'' منفی است.

در فواصلی که نمودار f' صعودی است ، مشتق f' یعنی f'' مثبت است.

پس ملاحظه می‌شود:

در فاصله a تا b، $f' < 0$ و $f'' > 0$

در فاصله b تا c، $f' > 0$ و $f'' > 0$

در فاصله c تا d، $f' > 0$ و $f'' < 0$

در فاصله d تا e، $f' > 0$ و $f'' > 0$

در فاصله e تا g، $f' > 0$ و چون f' ثابت مانده $f'' = 0$

از آنجا که $f'(b) = 0$ بوده و $f'(b^+) > 0$ و $f'(b^-) < 0$ لذا تابع f در نقطه b دارای Min نسبی است. البته چون $f'(b) = 0$ و $f''(b) > 0$ می‌باشد، قضیه آزمون مشتق دوم نیز همین نتیجه را می‌دهد.

از آنجا که $f''(c^-) > 0$ و $f''(c^+) < 0$ و البته $f''(c) = 0$ (زیرا شیب نمودار f' در اینجا صفر است) لذا تابع f در نقطه c دارای عطف است.

از آنجا که $f'(d) = 0$ بوده و $f'(x)$ در اطراف نقطه d تغییر علامت نداده ($f'(d^-)$ و $f'(d^+)$ هر دو مثبتند)، لذا تابع f در نقطه d نیز دارای عطف است، البته چون $f''(d) = 0$ بوده و $f''(d^-) < 0$ و $f''(d^+) > 0$ است، از اینجا نیز می‌توان دریافت نمودار f در نقطه d دارای عطف است .

مثال : تابع $f(x,y)=\left(x^2+y^2\right)e^{-\left(x^2+y^2\right)}$ مفروض است، ماکزیمم مطلق این تابع را پیدا کنید؟

حل : مشاهده می کنیم با توجه به وضعیت خاصی که تابع دو متغیره داده شده دارد، این امکان وجود دارد که با فرض $x^2+y^2=t$ رفتار این تابع دو متغیره را از طریق تابع تک متغیره زیر ارزیابی کنیم، یعنی :

$$f(t)=te^{-t} \quad ; \quad t\geq 0$$

حال برای یافتن اکسترممهای مطلق $f(t)$ می نویسیم:

$$f'(t)=e^{-t}-te^{-t}=(1-t)e^{-t}$$

لذا تنها نقطه بحرانی $t=1$ است و داریم:

$$f(1)=1e^{-1}=\frac{1}{e} \qquad , \qquad f(0)=0e^{-0}=0 \qquad , \qquad \lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^t}=0$$

پس max مطلق f برابر با $\frac{1}{e}$ است و min مطلق f برابر با 0 است.

البته

$\max f(t)$ در $t=1$ و طبیعتاً $\max f(x,y)$ در $x^2+y^2=1$ رخ می دهد.

$\mathrm{mix}\, f(t)$ در $t=0$ و طبیعتاً $\min f(x,y)$ در $x=y=0$ رخ می دهد.

مثال : زاویه خط مماس بر منحنی $y=(\ln x)^2$ در نقطه ای از منحنی که خط مماس از داخل منحنی عبور می کند، با محور x ها چقدر است؟

حل : جائی که خط مماس بر منحنی از داخل منحنی عبور می کند، نقطه عطف منحنی است. داریم:

$$y'=2\ln x\,\frac{1}{x}=\frac{2\ln x}{x} \quad\rightarrow\quad y''=\frac{2-2\mathrm{Ln}x}{x^2}=2\frac{1-\ln x}{x^2}$$

طبیعی است طول نقطه عطف چنین است:

$$y''=0 \quad\rightarrow\quad 1-\ln x=0 \quad\rightarrow\quad x=e$$

حال مشاهده می شود:

(شیب خط مماس در $x=e$): $y'(e)=\dfrac{2\ln e}{e}=\dfrac{2}{e}$

پس زاویه خط مماس با محور x ها در نقطه عطف ها در نقطه عطف $\tan^{-1}\left(\frac{2}{e}\right)$ است.

✓ قضیه مقدار میانی:

هرگاه تابع $f(x)$ در فاصله $[a,b]$ پیوسته باشد، آنگاه $f(x)$ همه مقادیر بین $f(a)$ و $f(b)$ را به ازاء $x\in[a,b]$ اختیار می‌کند.

قضیه بولتزانو:

هرگاه $f(x)$ در فاصله $[a,b]$ پیوسته بوده و $f(a).f(b)<0$ باشد، آنگاه :

$$\exists c\in(a,b) \mid f(c)=0$$

یعنی نمودار تابع f در فاصله (a,b) لااقل یکجا محور xها را قطع می‌کند.

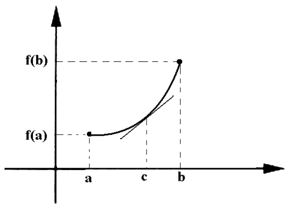
✓ قضیه رول:

هرگاه $f(x)$ در فاصله $[a,b]$ پیوسته باشد و در فاصله (a,b) مشتق‌پذیر باشد و البته $f(a)=f(b)$ باشد ، آنگاه :

$$\exists c\in(a,b) \mid f'(c)=0$$

یعنی شیب خط مماس برنمودار در فاصله (a,b) لااقل یکجا صفر می‌شود.

✓ قضیه لاگرانژ (قضیه مقدار میانگین در مشتق):



هرگاه $f(x)$ در فاصله $[a , b]$ پیوسته باشد و در فاصله (a , b) مشتق‌پذیر باشد،آنگاه:

$$\exists\, c \in (a , b) \;\Big|\; \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

یعنی خط مماس در فاصله (a , b) لااقل در یکجا موازی پاره‌خط واصل بین نقاط $x = b$ و $x = a$ می‌شود.

دو نتیجه زیر از قضیه لاگرانژ قابل حصول است:

۱) هرگاه معادله $f'(x) = 0$ در بازه $[a , b]$ دارای m ریشه حقیقی باشد، معادله $f(x) = 0$ در بازه $[a , b]$ حداکثر ممکن است دارای $m + 1$ ریشه حقیقی باشد.

۲) هرگاه m و M به ترتیب مقادیر $\min$ مطلق و $\max$ مطلق تابع $f'(x)$ در بازهٔ $a \le x \le b$ باشد، آنگاه:

$$m < \frac{f(b)-f(a)}{b-a} < M$$

مثال : معادله $x^2 - x\sin x - \cos x = 0$ دارای چند ریشه حقیقی است؟

۱) حداکثر دو ریشه حقیقی
۲) فقط یک ریشه حقیقی
۳) فقط و فقط دو ریشه حقیقی
۴) فاقد ریشه حقیقی

حل : با فرض $f(x) = x^2 - x\sin x - \cos x$ که البته هم پیوسته و هم مشتق‌پذیر است، داریم:

$$f'(x) = 2x - \sin x - x\cos x + \sin x = x(2 - \cos x)$$

بنابراین معادله $f'(x) = 0$ فقط دارای یک ریشه حقیقی است. لذا طبق نتیجه قضیه لاگرانژ معادله $f(x) = 0$ حداکثر ممکن است دارای دو ریشه حقیقی باشد.

ملاحظه می‌شود:

$$\left\{\begin{array}{l} f(0) = -1 < 0 \\ f(100) > 0 \end{array}\right\} \;\rightarrow\; \exists\, c_1 \in (0 , 100) \mid f(c_1) = 0$$

$$\left\{\begin{array}{l} f(0) = -1 < 0 \\ f(-100) > 0 \end{array}\right\} \;\rightarrow\; \exists\, c_2 \in (-100 , 0) \mid f(c_2) = 0$$

پس در کل گزینه سوم صحیح است.

مثال : با توجه به تابع $f(x) = \mathrm{Arc}\sin x$ حاصل $\dfrac{\mathrm{Arc}\sin x}{x}$ در فاصله $0 \le x \le \dfrac{1}{2}$ در چه محدوده‌ای قرار می‌گیرد؟

حل : با استفاده از نتیجه قضیه لاگرانژ برای تابع $f(x)$ در فاصله $[0 , x]$ داریم:

$$\min f' \le \frac{\mathrm{Arc}\sin x - \mathrm{Arc}\sin 0}{x - 0} \le \max f'$$

و چون $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ می باشد ، بدیهی است برای $0 \le x \le \dfrac{1}{2}$ داریم:

$$\min f' = \frac{1}{\sqrt{1-0}} = 1 \quad , \quad \max f' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

پس:

$$1 \le \frac{\mathrm{Arc}\sin x}{x} \le \frac{2}{\sqrt{3}}$$

مسایل بهینه‌سازی

گاهی می‌خواهیم یک کمیت را که به دو متغیر وابسته بوده و البته رابطه‌ای خاص بین آن دو متغیر برقرار می‌باشد، اکسترمم کنیم.
برای این منظور رابطه بین آن دو متغیر و نیز رابطه بین آن کمیت با دو متغیر مذکور را یافته و از اینجا کمیت مورد بحث را برحسب تنها یک متغیر بازنویسی می‌کنیم. اینک باتوجه به محدوده مجاز برای این متغیر و با استفاده از مشتق، مقادیر اکسترمم کمیت مورد نظر را محاسبه می‌کنیم.

مثال : میله ای به طول یک متر در دست است، می خواهیم با دو قسمت کردن آن از یک قسمت دایره و از قسمت دیگر مربع بسازیم، این تقسیم بندی چگونه انجام شود که:

الف) مجموع مساحت ها max باشد؟

ب) مجموع مساحت ها min باشد؟

حل : با فرض انتخاب x متر از میله برای ایجاد دایره و 1-x متر از میله برای ایجاد مربع داریم:

محیط دایره: $x = 2\pi r \quad \rightarrow \quad r = \dfrac{x}{2\pi}$

محیط مربع: $1-x = 4a \quad \rightarrow \quad a = \dfrac{1-x}{4}$

حال در حقیقت هدف اکسترمم کردن تابع زیر است :

$$s = s_1 + s_2 = \pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 + \left(\frac{1-x}{4}\right)^2 \quad \rightarrow \quad s = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{(1-x)^2}{16}$$

برای اکسترمم کردن S می نویسیم:

$$s'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{2x}{4\pi} - \frac{2(1-x)}{16} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{x}{2\pi} - \frac{1-x}{8} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{4x - \pi(1-x)}{8\pi} = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{\pi}{4+\pi}$$

مشاهده می‌شود:

$$s''(x) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{8} \quad \rightarrow \quad s''\left(\frac{\pi}{4+\pi}\right) > 0$$

یعنی نوع اکسترمم نسبی موجود در $\dfrac{\pi}{4+\pi}$ از نوع min است. مشاهده می‌شود برای حالت‌های حدی برای x داریم:

$$x = 0 \quad \rightarrow \quad s_{\text{کل}} = \frac{1}{16}$$

$$x = 1 \quad \rightarrow \quad s_{\text{کل}} = \frac{1}{4\pi}$$

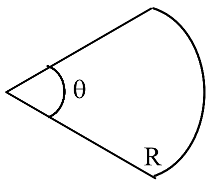
$$x = \frac{\pi}{4+\pi} \quad \rightarrow \quad s_{\text{کل}} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\pi}{4+\pi}\right)^2 + \frac{\left(1-\frac{\pi}{4+\pi}\right)}{16} = *$$

پس می‌گوئیم:

$$s_{min} = * \quad , \quad s_{max} = \frac{1}{4\pi}$$

مثال : قطاعی از یک دایره با شعاع R و زاویه مرکزی θ (برحسب رادیان) مفروض است. چنانچه محیط این قطاع ثابت باشد، مساحت این قطاع به ازای چه θای اکسترمم می شود؟ و این اکسترمم از چه نوعی است؟

حل : $\text{محیط قطاع} = 2R + R\theta = k \longrightarrow R = \dfrac{k}{2+\theta}$



مساحت	زاویه مرکزی
$s = \pi R^2$	2π
$s = \dfrac{\pi R^2 \theta}{2\pi} = \dfrac{R^2\theta}{2}$	θ

با توجه به اینکه در قسمت اول $R = \dfrac{k}{2+\theta}$ به‌دست آمد، داریم:

بجای R مقدار $R = \dfrac{k}{2+\theta}$ را قرار می‌دهیم:

$$s = \frac{R^2\theta}{2} = \left(\frac{k}{2+\theta}\right)^2 \frac{\theta}{2}$$

$$\frac{ds}{d\theta} = 0 \Rightarrow \frac{k^2}{2}\,\frac{(2+\theta)^2 - 2(2+\theta)\theta}{(2+\theta)^4} = 0 \Rightarrow 2 + \theta - 2\theta = 0 \Rightarrow \theta = 2\,\text{rad}$$

لذا در $\theta = 2\,\text{rad}$ مساحت قطاع مذکور اکسترمم شده و این اکسترمم از جنس ماکزیمم است.

انتگرال و بحث‌های مربوطه

✓ تعریف انتگرال نامعین

هرگاه $F(x)$ یک تابع اولیه $f(x)$ باشد، یعنی $F'(x)=f(x)$ داریم:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

تعریف انتگرال معین (قضیه اساسی حساب)

هرگاه $f(x)$ در بازه $[a\,,\,b]$ پیوسته و $F(x)$ یک تابع اولیه $f(x)$ باشد، داریم:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

✓ انتگرال‌گیری معین از توابعی که در بازه انتگرال‌گیری، ضابطه یکتائی ندارد و یا توابع شامل قدر مطلق و جزء صحیح

روال کلی در این نوع مسایل آن است که به طریقی مناسب بازه انتگرال‌گیری را به زیر بازه‌های کوچکتر به گونه‌ای بشکنیم که در هر قسمت بتوانیم تکلیف تابع زیر علامت انتگرال را معلوم کنیم، سپس حل را ادامه می‌دهیم.

مثال : مطلوبست محاسبه انتگرال‌های زیر:

۱) $I = \int_{-1}^{1} \left[x + \frac{1}{3} \right] dx$

حل : می‌دانیم:

$$-1 < x < -\frac{1}{3} \quad \to \quad -\frac{2}{3} < x + \frac{1}{3} < 0 \quad \to \quad \left[x + \frac{1}{3} \right] = -1$$

$$-\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3} \quad \to \quad 0 < x + \frac{1}{3} < 1 \quad \to \quad \left[x + \frac{1}{3} \right] = 0$$

$$\frac{2}{3} < x < 1 \quad \to \quad 1 < x + \frac{1}{3} < \frac{4}{3} \quad \to \quad \left[x + \frac{1}{3} \right] = +1$$

$$I = \int_{-1}^{-\frac{1}{3}} (-1)\,dx + \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} (0)\,dx + \int_{\frac{2}{3}}^{1} (1)\,dx$$

۲) $I = \int_{-2}^{\frac{3}{2}} f(x)\,dx \quad , \quad f(x) = \min\left\{ 1\,,\, x^2 \right\}$

حل : می‌دانیم:

$$\begin{cases} x < -1 \to x^2 > 1 \\ -1 < x < 1 \to x^2 < 1 \\ x > 1 \to x^2 > 1 \end{cases}$$

پس می‌توان دید:

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & -1<x<1 \\ 1 & x<-1\,,\,x>1 \end{cases}$$

لذا:

$$I=\int_{-2}^{-1}(1)\,dx+\int_{-1}^{1}\left(x^2\right)dx+\int_{1}^{\frac{3}{2}}(1)\,dx$$

۳) $I(x)=\int_0^x t^2\,u_5(t)\,dt$

(u تابع پله واحد است)

حل : بدیهی است اگر $x<5$ باشد ، داریم:

$$I(x)=\int_0^x t^2\,u_5(t)\,dt=0$$

اگر $x>5$ باشد، داریم:

$$I(x)=\int_0^x t^2\,u_5(t)\,dt=\int_0^5 t^2\,\cancelto{0}{u_5}(t)\,dt+\int_5^x t^2\,\cancelto{1}{u_5}(t)\,dt=\frac{1}{3}t^3\Big|_5^x=\frac{1}{3}\left(x^3-125\right)$$

در نهایت داریم:

$$I(x)=\begin{cases} 0 & x<5 \\ \frac{1}{3}\left(x^3-125\right) & x>5 \end{cases} \qquad =\frac{1}{3}\left(x^3-125\right).\,u_5(x)$$

✓ انتگرال‌گیری معین از توابع زوج ـ فرد ـ متناوب

الف) اگر $f(x)$ در بازه $[-a\,,a]$ پیوسته باشد:

چنانچه $f(-x)=f(x)$ (تابع زوج باشد)، داریم :

$$\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=2\int_0^a f(x)\,dx$$

چنانچه $f(-x)=-f(x)$ (تابع فرد باشد)، داریم :

$$\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=0$$

ب) اگر $f(x)$ تابعی متناوب با دوره تناوب T باشد و n عددی صحیح باشد، داریم:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_{a+nT}^{b+nT}f(x)\,dx \qquad , \qquad \int_0^{nT}f(x)\,dx=n\int_0^T f(x)\,dx$$

مثال : مطلوبست محاسبه انتگرال $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x^2 \tan x \, dx$.

حل : بدیهی است $f(x) = x^2 \tan x$ تابعی فرد است و انتگرال آن در بازه متقارن $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ صفر خواهد شد.

✓ قضیه مقدار میانگین در انتگرال

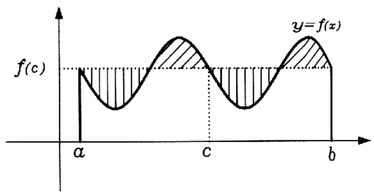
هرگاه تابع $f(x)$ در بازه $[a, b]$ پیوسته باشد، آنگاه :

$$\exists c \in [a, b] \;\Big|\; \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} = f(c)$$

(از نظر هندسی $(b-a).f(c)$ برابر مساحت مستطیلی با ابعاد $(b-a)$ و $f(c)$ است)

$\int_a^b f(x)\,dx$ برابر مساحت محدود به منحنی $y = f(x)$ و محور xها در بازه $[a, b]$ است.

لذا قضیه مقدار میانگین برابر بودن دو سطح مذکور را نشان می‌دهد.



مجموع مساحت‌های ///// هاشور خورده = مجموع مساحت‌های ||||| هاشورخورده

از قضیه فوق دو نتیجه به عمل می‌آید:

الف) مقدار متوسط تابع $f(x)$ در بازه $[a, b]$ از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\overline{f} = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$

ب) اگر M, m به ترتیب مقادیر Min مطلق و Max مطلق تابع $f(x)$ در بازه $[a, b]$ باشند، داریم:

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \le M$$

مثال : مقدار متوسط تابع $f(x) = \tan^4 x$ را در بازه $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ پیدا کنید.

حل :

$$\overline{f} = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^4 x\,dx}{\frac{\pi}{4} - 0} = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\tan^4 x + \tan^2 x - \tan^2 x + 1 - 1\right) dx$$

$$= \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\tan^2 x\left(\tan^2 x + 1\right) - \left(\tan^2 x + 1\right) + 1\right) dx = \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{3} - 1 + \frac{\pi}{4}\right)$$

مثال : یک کران بالا و پایین برای $I = \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}$ پیدا کنید.

حل : برای یافتن اکسترم مقادیر تابع $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}$ در بازه $[0,3]$ تابع $g(x) = x^2 - 4x + 5$ را در نظر بگیریم:

$$g'(x) = 2x - 4$$

نقط بحرانی عبارت است از :

$$2x - 4 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 2 \in [0,3]$$

حال از آنجا که:

$$g(0) = 5 \quad , \quad g(2) = 1 \quad , \quad g(3) = 2$$

پس :

$$\begin{cases} \max g = 5 \\ \min g = 1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \min f = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \max f = \dfrac{1}{\sqrt{1}} \end{cases}$$

لذا طبق نتیجه قضیه مقدار میانگین در انتگرال داریم:

$$\frac{1}{\sqrt{5}} < \frac{\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}}{3 - 0} < \frac{1}{\sqrt{1}} \quad \rightarrow \quad \frac{3}{\sqrt{5}} < I < 3$$

✓ تکنیک‌های انتگرال گیری

۱) روش تغییر متغیر:

اساس روش تغییر متغیر آن است که با معرفی یک متغیر جدید مناسب مانند u که خود تابعی از متغیر اصلی مسأله است، کل انتگرال مورد نظر (و احتمالاً حدود آن ـ در صورت معین بودن انتگرال ـ) را برحسب u نوشته و سپس حل مساله را ادامه دهیم.

چند تغییر متغیر روتین:

الف) در انتگرال‌های شامل $\sqrt{a^2 - u^2}$ تغییر متغیر $u = a \sin\theta$ می‌تواند مفید باشد.

ب) در انتگرال‌های شامل $\sqrt{a^2 + u^2}$ تغییر متغیر $u = a \tan\theta$ می‌تواند مفید باشد.

ج) در انتگرال‌های شامل $\sqrt{u^2 - a^2}$ تغییر متغیر $u = a \sec\theta$ می‌تواند مفید باشد.

الف) در انتگرال‌های شامل توابع گویا از $\cos x$ و $\sin x$ باتوجه به روابط:

$$\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}} \quad , \quad \cos x = \frac{1 - \tan^2\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}}$$

استفاده از تغییر متغیر $u = \tan\frac{x}{2}$ که نتیجه می‌دهد $du = \frac{1}{2}\left(1 + u^2\right) dx$ می‌تواند مفید باشد.

ب) در انتگرال‌های شامل توابع گویا از $\cos^2 x$ و $\sin^2 x$ باتوجه به روابط :

$$\sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x} \qquad \cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x}$$

استفاده از تغییر متغیر $u = \tan x$ که نتیجه می‌دهد $du = \left(1+u^2\right) dx$ می‌تواند مفید باشد.

نکته : با استفاده از روش تغییر متغیر می‌توان نشان داد:

$$\int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)} dx = \int_0^a \frac{f(a-x)}{f(x)+f(a-x)} dx = \frac{a}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^m x}{\sin^m x + \cos^m x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^m x}{\sin^m x + \cos^m x} dx = \frac{\pi}{4}$$

مثال : مطلوبست محاسبه انتگرال‌های زیر:

$$\text{۱)} \quad \mathbf{I = \int \frac{dx}{x+\sqrt{x}}}$$

حل : با تغییر متغیر:

$$x = u^2 \quad \to \quad dx = 2u\,du \quad \sqrt{x} = u \quad \to$$

داریم:

$$I = \int \frac{2u\,du}{u^2+u} = 2\int \frac{du}{u+1} = 2\ln|u+1| + C = 2\ln\left(\sqrt{x}+1\right) + C$$

$$\text{۲)} \quad \mathbf{I = \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\, dx}$$

حل : با تغییر متغیر $\sqrt{e^x - 1} = u$ داریم:

$$e^x - 1 = u^2 \quad \to \quad e^x\,dx = 2u\,du \quad \to \quad dx = \frac{2u\,du}{u^2+1}$$

$$x = 0 \quad \to \quad u = \sqrt{e^0 - 1} = 0$$

$$x = \ln 2 \quad \to \quad u = \sqrt{e^{\ln 2} - 1} = 1$$

پس به‌دست می‌آید:

$$I = \int_0^1 u\frac{2u\,du}{u^2+1} = 2\int_0^1 \frac{u^2+1-1}{u^2+1} du = 2\left(u - \tan^{-1} u\right)_0^1 = 2\left[\left(1-\frac{\pi}{4}\right) - (0-0)\right]$$

$$\text{۳)} \quad \mathbf{I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{4-\cos^4 x}} dx}$$

حل : با تغییر متغیر: $\cos^2 x = u$ داریم:

$$2\cos x(-\sin x)\,dx = du \quad \to \quad \sin 2x\,dx = -du$$

$$x = 0 \quad \to \quad u = \cos^2 0 = 1$$

$$x = \frac{\pi}{2} \quad \to \quad u = \cos^2 \frac{\pi}{2} = 0$$

پس به‌دست می‌آید:

$$I = \int_1^0 \frac{-du}{\sqrt{4-u^2}} = -\arc\sin \frac{u}{2}\Big|_1^0 = -\left(0 - \frac{\pi}{6}\right)$$

۴) $I = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

حل : با تغییر متغیر $\sqrt{x^2+1} = u$ داریم:

$$x^2 + 1 = u^2 \quad \to \quad 2x\,dx = 2u\,du$$

$$x = 0 \quad \to \quad u = 1$$

$$x = \sqrt{3} \quad \to \quad u = 2$$

و به‌دست می‌آید:

$$I = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2\,x\,dx}{\sqrt{x^2+1}} = \int_1^2 \frac{\left(u^2-1\right)\left(u\,du\right)}{u} = \left(\frac{u^3}{3} - u\right)\Big|_1^2 = \frac{4}{3}$$

۵) $I = \int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$

حل : با تغییر متغیر $x = \sin\theta$ داریم:

$$dx = \cos\theta\,d\theta$$

$$x = 0 \quad \to \quad \sin\theta = 0 \quad \to \quad \theta = 0$$

$$x = 1 \quad \to \quad \sin\theta = 1 \quad \to \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

$|\cos\theta| = \cos\theta$ در نتیجه:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta \overbrace{\left(\sqrt{1-\sin^2\theta}\right)}^{|\cos\theta|} \left(\cos\theta\,d\theta\right) \quad \to \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\cos^2\theta\,d\theta$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)^2 d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\theta\,d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 4\theta}{2}d\theta = \frac{1}{8}\left(\theta - \frac{1}{4}\sin 4\theta\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{16}$$

۲) روش جزء به جزء

اساس روش جزء به جزء آن است که برای دو تابع u , v داریم:

$$\int u\,.\,dv = uv - \int v\,du$$

مثال : مطلوبست محاسبه انتگرال‌های زیر:

$$\text{۱) } I = \int x \sec^2 x \, dx$$

حل : با روش جزء به جزء داریم:

$$\begin{cases} x = u \\ \sec^2 x \, dx = dv \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} dx = du \\ \tan x = v \end{cases}$$

$$I = x \tan x - \int \tan x \, dx = x \tan x + \ln \left| \cos x \right| + C$$

$$\text{۲) } I = \int x^3 \left(\ln x \right)^2 dx$$

حل : با تغییر متغیر $\ln x = u$ داریم:

$$\frac{1}{x} dx = du \quad \rightarrow \quad dx = x \, du \quad \rightarrow \quad dx = e^u \, du$$

به‌دست می‌آید:

$$I = \int \left(e^u \right)^3 . \left(u \right)^2 \left(e^u \, du \right) = \int u^2 e^{4u} \, du$$

مشتق		انتگرال
u^2		e^{4u}
	$+$	
$2u$		$\frac{1}{4} e^{4u}$
	$-$	
2		$\frac{1}{16} e^{4u}$
	$+$	
0		$\frac{1}{64} e^{4u}$

پس:

$$I = \left(\frac{u^2}{4} - \frac{2u}{16} + \frac{2}{64} \right) e^{4u} \xrightarrow{u = \ln x} I = \left(\frac{\left(\ln x \right)^2}{4} - \frac{\ln x}{8} + \frac{1}{32} \right) . x^4$$

$$\text{۳) } I = \int \sin \left(2 \ln x \right) dx$$

حل : با تغییر متغیر $\ln x = t$ داریم:

$$\frac{dx}{x} = dt \quad \rightarrow \quad dx = e^t \, dt$$

به‌دست می‌آید:

$$I = \int \sin(2t) \, e^t \, dt$$

مشتق		انتگرال
$\sin 2t$		e^{t}
	$+$	
$2\cos 2t$		e^{t}
	$-$	
$-4\sin 2t$	$\int +$	e^{t}

پس:

$$I = e^{t}.\sin 2t - e^{t}.2\cos 2t - \overbrace{\int 4e^{t}\sin 2t\,dt}^{4I}$$

$$I = \frac{1}{5}\left(e^{t}\sin 2t - 2e^{t}\cos 2t\right) \xrightarrow{t=\ln x} I = \frac{1}{5}\left(x\sin(2\ln x) - 2x\cos(2\ln x)\right)$$

۴) $I = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{6}{x^{4}}\right)e^{-x}\,dx$

حل : اگر برای محاسبه $A = \int \frac{1}{x}e^{-x}\,dx$ از روش جزء به جزء استفاده کنیم، داریم:

مشتق		انتگرال
$\frac{1}{x}$		e^{-x}
	$+$	
$-\frac{1}{x^{2}}$		$-e^{-x}$
	$-$	
$\frac{2}{x^{3}}$		e^{-x}
	$+$	
$-\frac{6}{x^{4}}$	$\int -$	$-e^{-x}$

پس داریم:

$$\int \frac{1}{x}e^{x}\,dx = -\frac{e^{-x}}{x} + \frac{e^{-x}}{x^{2}} - \frac{2e^{-x}}{x^{3}} - \int \frac{6}{x^{4}}e^{-x}\,dx$$

بنابراین:

$$\int \left(\frac{1}{x} + \frac{6}{x^{4}}\right)e^{-x}\,dx = -\frac{e^{-x}}{x} + \frac{e^{-x}}{x^{2}} - \frac{2e^{-x}}{x^{3}}$$

۳) روش تجزیه کسرها

اساس روش تجزیه کسرها آن است که عبارتی به فرم $\frac{P(x)}{Q(x)}$ که در آن $P(x)$ و $Q(x)$ دو چندجمله‌ای از x هستند و درجه صورت از درجه مخرج کمتر است، را به صورت مجموع چند کسر با مخرج‌های ساده‌تر بنویسیم.

در ابتدا لازم است $Q(x)$ را به صورت حاصلضرب عبارت‌های درجه اول و درجه دوم (غیر قابل تجزیه) بیان کنیم.

متناظر هر عبارت $(x-\alpha)^k$ که در مخرج ظاهر می‌شود، k تا کسر به صورت زیر بیان می‌گردد.

$$\frac{A_1}{x-\alpha}+\frac{A_2}{(x-\alpha)^2}+\dots+\frac{A_k}{(x-\alpha)^k}$$

متناظر هر عبارت $\left(x^2+\alpha x+\beta\right)^k$ که در مخرج ظاهر می‌شود، k تا کسر به صورت زیر بیان می‌گردد.

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+\alpha x+\beta}+\frac{B_2x+C_2}{\left(x^2+\alpha x+\beta\right)^2}+\dots+\frac{B_kx+C_k}{\left(x^2+\alpha x+\beta\right)^k}$$

($\left(x^2+\alpha x+\beta\right)$ غیرقابل تجزیه می‌باشد.)

مثلاً برای کسری به صورت $\frac{3x-1}{(x-3)(x-1)^3\left(x^2+4\right)^2}$ می‌نویسیم:

$$\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{(x-1)^3}+\frac{Ex+F}{x^2+4}+\frac{Gx+H}{\left(x^2+4\right)^2}$$

توجه کنید که:

- ✓ تعداد ثابت‌های استفاده شده همواره برابر درجه مخرج کسر اصلی است.
- ✓ اگر در مخرج عبارت درجه اول و یا توانی از آن بود، در صورت عبارت درجه صفر می‌نویسیم.
- ✓ اگر در مخرج عبارت درجه دوم غیرقابل تجزیه و یا توانی از آن بود، در صورت کسر ، عبارت درجه یک می‌نویسیم.
- ✓ در انتها با متحد قرار دادن مجموع نوشته شده با کسر اصلی، ثابت‌ها را می یابیم.

مثال : مطلوبست محاسبه انتگرال‌های زیر:

۱) $$\mathbf{I=\int \frac{x^2-4x+8}{x\left(x^2+4\right)}dx}$$

حل : با روش تجزیه کسرها داریم:

$$\frac{x^2-4x+8}{x\left(x^2+4\right)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+4}=\frac{A\left(x^2+4\right)+(Bx+C)x}{x\left(x^2+4\right)}$$

با متحد قراردادن صورت‌ها داریم:

$$\begin{cases}A+B=1\\ C=-4\\ 4A=B\end{cases}\rightarrow\quad A=2\quad,\quad B=-1\quad,\quad C=-4$$

حال داریم:

$$I=\int\left(\frac{2}{x}+\frac{-1x}{x^2+4}+\frac{-4}{x^2+4}\right)dx=2\ln x-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right)-4\times\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$$

۲) $I = \int \frac{dx}{(x-1)^2(x+3)}$

حل : با روش تجزیه کسرها داریم:

$$\frac{1}{(x-1)^2(x+3)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

اگر طرفین عبارت بالا را در $x+3$ ضرب کنیم ، بدست می آید:

$$\frac{1}{(x-1)^2} = A + \frac{B(x+3)}{x-1} + \frac{C(x+3)}{(x-1)^2} \xrightarrow{x=-3} A = \frac{1}{16}$$

و اگر طرفین را در $(x-1)^2$ ضرب کنیم، بدست می آید:

$$\frac{1}{(x+3)} = \frac{A(x-1)^2}{x+3} + B(x-1) + C \xrightarrow{x=1} C = \frac{1}{4}$$

$$\frac{-1}{(x+3)^2} = \left(\frac{2(x-1)(x+3)-(x-1)^2}{(x+3)^2}\right)A + B + 0 \xrightarrow{x=1} B = -\frac{1}{16}$$

$$I = \int \left(\frac{\frac{1}{16}}{x+3} + \frac{-\frac{1}{16}}{x-1} + \frac{\frac{1}{4}}{(x-1)^2}\right)dx = \frac{1}{16}\ln(x+3) - \frac{1}{16}\ln(x-1) - \frac{1}{4}\frac{1}{x-1}$$

✓ انتگرال‌های ناسره

انتگرال‌های معین در دو حالت زیر (یا ترکیب این دو حالت) طبیعت غیرعادی (ناسره) دارد و این موضوع ممکن است به واگرا شدن حاصل انتگرال بیانجامد.

الف) وقتی تابع زیر علامت انتگرال در یکی از نقاط مربوط به بازه انتگرال‌گیری بیکران شود.

ب) وقتی یک یا هر دو حد بالایی و پایینی انتگرال‌گیری بیکران باشد.

به چند بحث زیر در این زمینه دقت کنید:

۱) فرض کنید $f(x)$ در تمام بازه $[a, +\infty)$ پیوسته باشد، برای تعیین تکلیف انتگرال ناسره $I = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ می‌نویسیم:

$$I = F(x)\Big|_a^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(a)$$

چنانچه حاصل فوق عددی مشخص و محدود شود، I را همگرا و در غیر این صورت آن را واگرا می‌گوئیم.

۲) فرض کنید $f(x)$ در تمام بازه $(a, b]$ پیوسته باشد و $\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$ باشد، برای تعیین تکلیف انتگرال ناسره $\int_a^b f(x)\,dx$ می‌نویسیم:

$$I = F(x)\Big|_{a^+}^{b} = F(b) - \lim_{x\to a^+} F(x)$$

چنانچه حاصل فوق عددی مشخص و محدود باشد، I را همگرا و در غیراین‌صورت آن را واگرا می‌گوئیم.

۳) فرض کنید $f(x)$ در تمام بازه $[a,b]$ به جز در $a<x=c<b$ پیوسته باشد و $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\infty$ باشد، برای تعیین تکلیف انتگرال ناسره‌ای به صورت $\int_a^b f(x)\,dx$ می‌نویسیم:

$$I=\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^{c^-} f(x)\,dx+\int_{c^+}^b f(x)\,dx$$

چنانچه دو انتگرال فوق تک به تک همگرا باشند، I نیز همگرا است و در صورت واگرا بودن یک یا هر دو انتگرال فوق، I نیز واگرا است.

✓چند نکته در انتگرال‌های ناسره

۱) در انتگرال ناسره $\int_{a>0}^{+\infty}\frac{dx}{x^P}$ شرط لازم و کافی برای همگرائی آن است که $P>1$

۲) در انتگرال ناسره $\int_0^{a>0}\frac{dx}{x^P}$ شرط لازم و کافی برای همگرائی آن است که $P<1$

۳) فرض کنید تابع $f(x)$ در کل بازه $[a,+\infty)$ پیوسته باشد، چنانچه در $x\to+\infty$ بدانیم $f(x)\sim g(x)$ آنگاه وضعیت انتگرال‌های ناسره $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ و $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ از حیث همگرائی و واگرائی مشابه همدیگر است.

۴) فرض کنید تابع $f(x)$ در کل بازه $(0,a]$ پیوسته باشد $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\infty$ ، چنانچه در $x\to 0^+$ بدانیم $f(x)\sim g(x)$ آنگاه وضعیت انتگرال‌های ناسره $\int_0^a g(x)\,dx$ و $\int_0^a f(x)\,dx$ از حیث همگرائی و واگرائی مشابه همدیگر است.

مثال : حاصل انتگرال‌های زیر را در صورت وجود پیدا کنید.

۱) $\mathbf{I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\cosh x}}$

حل :

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\,dx}{e^x+e^{-x}}$$

$e^x+e^{-x}>0$ لذا انتگرال ناسره از نوع ① است.

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty} 2\frac{e^x\,dx}{\big(\underbrace{e^x}_{u}\big)^2+1}=2\tan^{-1}\left(e^x\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=2\left\{\tan^{-1}\left(e^{+\infty}\right)-\tan^{-1}\left(e^{-\infty}\right)\right\}$$

$$=2\left\{\tan^{-1}(+\infty)-\tan^{-1}(0)\right\}=2\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=\pi \quad \text{(همگرا است)}$$

۲) $I = \int_{0}^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{x^6 + 2x^3 + 2}$

حل : ناسره نوع ①

با تغییر متغیر $x^3 = u$ داریم:

$$3x^2\,dx = du$$

$$x = 0 \;\rightarrow\; u = 0 \qquad , \qquad x = \infty \;\rightarrow\; u = \infty$$

پس به‌دست می‌آید:

$$I = \int_{0}^{\infty} \frac{\frac{du}{3}}{u^2 + 2u + 2} = \frac{1}{3}\int_{0}^{\infty} \frac{du}{(u+1)^2 + 1} \;\rightarrow\; \frac{1}{3}\arctan(u+1)\Big|_{0}^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$$ (همگراست)

۳) $I = \int_{0}^{1} \ln x\,dx$

حل : ناسره نوع ②

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$$

با روش جزء به جزء بدست می آید :

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - x$$

و چون:

$$\lim_{x \to 0^+} x\ln x = 0$$

داریم:

$$I = (x\ln x - x)\Big|_{0}^{1} = (\ln 1 - 1) - (0 - 0) = -1$$ (همگراست)

۴) $I = \int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x - x^2}}$

حل : تابع زیر علامت انتگرال در هر دو حد انتگرال‌گیری بی‌نهایت می‌شود لذا ناسره نوع ② می باشد و داریم :

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}} = \arcsin\left(\frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right)\Bigg|_{0}^{1} = \arcsin(1) - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$ (همگراست)

۵) $I = \int_{2}^{7} \frac{dx}{x - 3}$

حل : $\frac{1}{x-3}$ در $x = 3$ نامعین است پس ناسره نوع ③ می باشد و داریم:

$$I = \underbrace{\int_{2}^{3^-} \frac{dx}{x-3}}_{A} + \underbrace{\int_{3^+}^{7} \frac{dx}{x-3}}_{B}$$

ملاحظه می‌شود:

$$A = \ln|x-3|\Big|_{2}^{3^-} = \ln 0^+ - \ln 1 = -\infty \quad (\text{واگراست})$$

پس در کل نیز واگراست.

دقت کنیم اگر به ناسره بودن توجه نمی‌کردیم می‌گفتیم:

$$I = \ln|x-3|\Big|_{2}^{7} = \ln 4 - \ln 1 = \ln 4$$

که غلط بود .زیرا دیدیم انتگرال واگراست.

مثال : در موارد زیر ثابت c را طوری پیدا کنید که انتگرال داده شده همگرا باشد.

$$\mathbf{1)}\ I = \int \left(\frac{3x}{x^2+7} + \frac{4}{5x+1} - \frac{c}{4x+3}\right)dx$$

حل:

$$I = \left\{\frac{3}{2}\ln\left(x^2+7\right) + \frac{4}{5}\ln(5x+1) - \frac{c}{4}\ln(4x+3)\right\}\Big|_{1}^{+\infty} = \left\{\ln\left(\frac{\left(x^2+7\right)^{\frac{3}{2}}(5x+1)^{\frac{4}{5}}}{(4x+3)^{\frac{c}{4}}}\right)\right\}\Bigg|_{1}^{+\infty}$$

اگر بخواهیم I همگرا باشد، باید $\lim\limits_{x\to+\infty} A(x)$ حاصلش $0\,,\infty$ نباشد و برای این منظور چون $x\to+\infty$ باید:

درجه مخرج = درجه صورت

لذا :

$$2\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{4}{5} = \frac{c}{4} \quad\rightarrow\quad c = \frac{76}{5}$$

$$\mathbf{2)}\ I = \int_1^2 \frac{dx}{x(\ln x)^c}$$

حل :

$$\left.\begin{aligned}&\ln x = u\\&\frac{1}{x}dx = du\end{aligned}\right\}\qquad \begin{aligned}&x=1 \rightarrow u = \ln 1 = 0\\&x=2 \rightarrow u = \ln 2\end{aligned}$$

به‌دست می‌آید:

$$I = \int_0^{\ln 2}\frac{du}{u^c}$$

که برای همگرایی کافی است C<1 باشد.

$$\mathbf{3)}\ I = \int_0^{\infty}\frac{dx}{\sqrt[c]{x^4+1}}$$

حل : راه اول:

در $x\to+\infty$ داریم:

$$\frac{1}{\sqrt[c]{x^4+1}} \sim \frac{1}{\sqrt[c]{x^4}} = \frac{1}{x^{\frac{4}{c}}}$$

و می‌دانیم $\int \frac{dx}{x^{\frac{4}{c}}}$ همگراست، اگر:

$$\frac{4}{c} > 1 \quad \rightarrow \quad c < 4$$

راه دوم:

سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[c]{n^4+1}}$

سری مذکور همگراست، اگر:

(طبق آزمون مقایسه درجه صورت و مخرج)

$$\frac{4}{c} > 1 \quad \rightarrow \quad c < 4$$

۴) $\mathbf{I = \int_0^1 \frac{1-\cos x}{x^c}\,dx}$

حل : ناسره بودن مساله به واسطه آن است که در $x = 0$ مخرج تابع زیر علامت انتگرال صفر می‌شود. ملاحظه می‌شود وقتی $x \rightarrow 0$ داریم:

$$\frac{1-\cos x}{x^c} \sim \frac{\frac{x^2}{2}}{x^c} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{x^{c-2}}$$

و شرط همگرایی $\int_0^1 \frac{1}{2}\,\frac{1}{x^{c-2}}\,dx$ می‌طلبد که:

$$c - 2 < 1 \quad \rightarrow \quad c < 3$$

مثال : به ازای کدام مقدار n انتگرال $\int_1^{\infty} \left(\frac{n}{x+1} - \frac{3x}{2x^2+n}\right)dx$ همگرا است؟

حل :

$$I = \int_1^{\infty} \frac{n\left(2x^2+n\right) - 3x\left(x+1\right)}{\left(x+1\right)\left(2x^2+n\right)}dx = \int_1^{\infty} \frac{(2n-3)x^2 - 3x + n^2}{\left(2x^2+n\right)\left(x+1\right)}dx$$

شرط همگرایی می‌طلبد اختلاف درجه مخرج و درجه صورت بزرگ‌تر از یک باشد و این می‌طلبد صورت فاقد جمله x^2 باشد و به تعبیری:

$$2n - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad n = \frac{3}{2}$$

راه دیگر:

$$I = \int_1^{\infty} \left(\frac{n}{x+1} - \frac{3x}{2x^2+n}\right)dx = \left(n\ln\left(x+1\right) - \frac{3}{4}\ln\left(2x^2+n\right)\right)\Bigg|_1^{\infty} = \ln\left(\frac{\left(x+1\right)^n}{\left(2x^2+n\right)^{\frac{3}{4}}}\right)\Bigg|_1^{\infty}$$

برای همگرایی انتگرال باید حد $\frac{\left(x+1\right)^n}{\left(2x^2+n\right)^{\frac{3}{4}}}$ وقتی $x \rightarrow \infty$، صفر یا بی‌نهایت نباشد و این می‌طلبد درجه صورت و مخرج این کسر یکسان باشد؛ یعنی $n = 2\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{2}$

✓ دو تابع خاص ـ توابع گاما و بتا

تابع گاما به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty} e^{-x}\, x^{\alpha-1}\, dx \qquad (\alpha>0)$$

می‌توان نشان داد:

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$$

$$\Gamma(n+1)=n! \quad ; \quad (n\in N)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi} \qquad , \qquad \Gamma(1)=1$$

تابع بتا به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$B(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\, dx \qquad ; \quad (\alpha>0,\beta>0)$$

می‌توان نشان داد:

$$B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1}x.\cos^{2n-1}x\, dx=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{2\Gamma(m+n)} \qquad ; \quad (m,n>0)$$

مثال : حاصل انتگرال‌های زیر را پیدا کنید.

۱) $\mathbf{I=\int_0^{\infty}\sqrt{x}\, e^{-x^3}\, dx}$

حل : تغییر متغیر:

$$x^3=u \quad\rightarrow\quad 3x^2\,dx=du \quad\rightarrow\quad dx=\frac{du}{3x^2} \quad\rightarrow\quad dx=\frac{du}{3u^{\frac{2}{3}}}$$

حال می‌توان نوشت:

$$I=\int_0^{\infty} u^{\frac{1}{6}}\, e^{-u}\,\frac{du}{3u^{+\frac{2}{3}}}=\frac{1}{3}\int_0^{\infty} e^{-u}\,.\,u^{\frac{-1}{2}}\,du=\frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}\sqrt{\pi}$$

۲) $\mathbf{I=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\ln x}}}$

حل : با تغییر متغیر $(-\ln x=u \quad\rightarrow\quad x=e^{-u})$ داریم:

$$-\frac{1}{x}\,dx=du \quad\rightarrow\quad dx=-x\,du \quad\rightarrow\quad dx=-e^{-u}\,du$$

$$x=0^{+} \quad\rightarrow\quad u=-\ln 0^{+}=-(-\infty)=+\infty$$

$$x=1 \quad\rightarrow\quad u=-\ln 1=0$$

به‌دست می‌آید:

$$I=\int_{+\infty}^{0}\frac{-e^{-u}\,du}{\sqrt{u}}=\int_0^{+\infty} e^{-u}\,u^{-\frac{1}{2}}\,du=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

چند کاربرد انتگرال معین

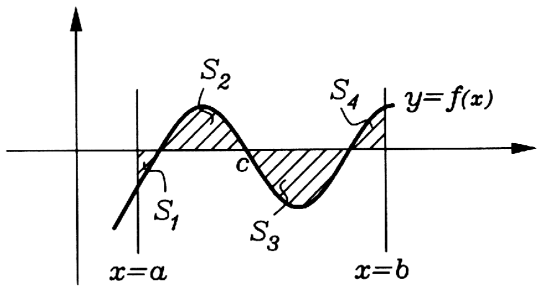
✓ محاسبه سطح محصور به دو منحنی

مساحت محصور به دو منحنی $y=g(x)$ و $y=f(x)$، $x=b$ و $x=a$ از رابطه $\int_a^b \left|f(x)-g(x)\right| dx$ به‌دست می‌آید.

یک اصطلاح: سطح خالص بین دو منحنی

$\int_a^b \left(f(x)-g(x)\right) dx$ مساحت خالص بین دو منحنی $y=g(x)$ و $y=f(x)$ و دو خط $x=b$ و $x=a$ را نشان می‌دهد، بدین معنا که در بازه‌هایی که نمودار f بالای g است مساحت مثبت به احتساب می‌آید و در بازه‌هایی که نمودار g بالای f است مساحت منفی به احتساب می‌آید و جمع جبری این مساحت‌ها محاسبه می‌گردد.

به خصوص $\int_a^b f(x)\, dx$ سطح خالص محدود شده به منحنی $y=f(x)$ و محور xها را در فاصله $a \le x \le b$ نشان می‌دهد به‌طوریکه در شکل مقابل خواهیم داشت:



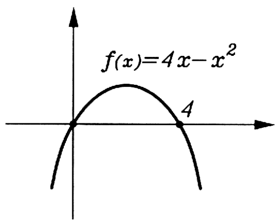
$$\int_a^b f(x)\, dx = -S_1 + S_2 - S_3 + S_4$$

$$\int_a^b \left|f(x)\right| dx = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$$

مثال : حداکثر I به ازاء b , aهای مختلف چقدر است؟ $(a<b)$

$$I = \int_a^b \left(4x - x^2\right) dx$$

حل : حاصل انتگرال فوق مبین سطح خالص محدود شده به منحنی $f(x)=4x-x^2$ و محور xها در فاصله $[a\ ,\ b]$ است.



بنابراین مطابق شکل فوق بدیهی است حداکثر I به ازاء $a=0$ و $b=4$ رخ می‌دهد.

✓ طول قوس یک منحنی

طول منحنی $y = f(x)$ در بازه $a \le x \le b$ از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^{\,2}(x)}\ dx$$

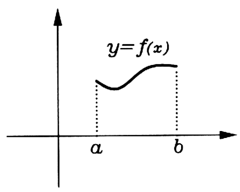
مثال : طول قوس منحنی $f(x) = \int_0^x \sqrt{\cos t}\ dt$ را در فاصله $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ را پیدا کنید.

حل :

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + f'(x)^2}\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \left(\sqrt{\cos x}\right)^2}\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos x}\ dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2}\left|\cos\frac{x}{2}\right| dx = \sqrt{2}\ .\ 2\ .\ \sin\frac{x}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2}\ .\ 2\ .\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2$$

✓ مساحت حاصل از دوران یک منحنی حول محورهای مختصات



مساحت رویه حاصل از دوران منحنی حول محور x ها: $S_x = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^{\,2}(x)}\ dx$

مساحت رویه حاصل از دوران منحنی حول محور y ها : $S_y = 2\pi\int_a^b x\sqrt{1 + f'^{\,2}(x)}\ dx$

مثال : منحنی با معادله $y = f(x) = \sin x$ ، $0 \le x \le \pi$ حول محور x دوران کرده است. مساحت A رویه دوّار حاصل را بیابید .

حل :

$$S_x = 2\pi\int_a^b y\,ds = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1 + y'^2}\,dx = 2\pi\int_0^{\pi} \sin x\sqrt{1 + \cos^2 x}\,dx$$

با تغییر متغیر $\cos x = t$ داریم $-\sin x\,dx = dt$ ؛ بنابراین:

$$S_x = 2\pi\int_1^{-1} \sqrt{1 + t^2}\,(-dt) = 4\pi\int_0^1 \sqrt{1 + t^2}\,dt$$

اینک با تغییر متغیر $t = \tan\theta$ داریم:

$$dt = \left(1 + \tan^2\theta\right)d\theta$$

$$S_x = 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + \tan^2\theta}\left(1 + \tan^2\theta\right)d\theta = 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3\theta\,d\theta$$

$$= 4\pi\left\{\frac{1}{2}\left(\sec\theta\tan\theta + \ln\left(\sec\theta + \tan\theta\right)\right)\right\}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2\pi\left\{\sqrt{2} + \ln\left(\sqrt{2} + 1\right)\right\}$$

توجه : طبق قضیه گلدن پاپیوس مساحت سطح حاصل از دوران یک منحنی حول محوری که آن را قطع نمی‌کند، برابر است با طول آن منحنی ضربدر محیط دایره‌ای که مرکز طول در اثر دوران طی می‌کند.

لذا اگر طول منحنی L و فاصله مرکز طول آن تا محور دوران R باشد داریم:

$$S = L \, . \, 2\pi R$$

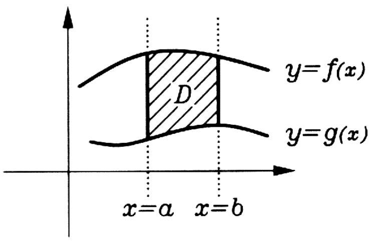
مثال : دایره‌ای به شعاع R را حول محوری که تا مرکز دایره $2R$ فاصله دارد دوران می‌دهیم مساحت سطح حاصله چقدر است؟ (مرکز طول دایره همان مرکز دایره است)

حل : طبق قضیه گلدن داریم:

(محیط دایره‌ای که مرکز طول در اثر دوران طی می‌کند) × (طول منحنی‌ای که دوران می‌کند) = مساحت سطح حاصل از دوران

$$= (2\pi R)\cdot(2\pi(2R)) = 8\pi^2 R^2$$

✓ حجم حاصل از دوران یک سطح حول محورهای مختصات.

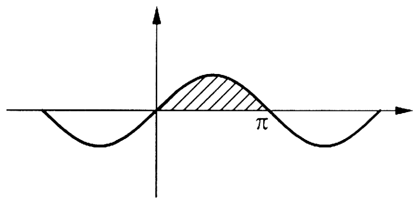


حجم حاصل از دوران سطح هاشور خورده حول محور x ها : $V_x = \pi \int_a^b \left(f^2(x) - g^2(x) \right) dx$

حجم حاصل از دوران سطح هاشور خورده حول محور y ها : $V_y = 2\pi \int_a^b x\left(f(x) - g(x) \right) dx$

مثال : حجم حادث از دوران سطح محدود شده به یک طاق از منحنی $y = \sin x$ و محور x ها را حول محور x و محور y پیدا کنید

حل :

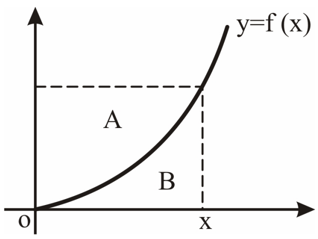


$y = \sin x$ و $y = 0$ (محور x ها)

$$V_x = \pi \int_0^\pi \sin^2 x \, dx = \frac{\pi}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x \right)\Big|_0^\pi$$

$$V_y = 2\pi \int_0^\pi x \sin x \, dx = 2\pi\left(-x\cos x + \sin x \right)\Big|_0^\pi$$

مثال : منحنی به معادله $y = f(x)$ که از مبدأ مختصات می‌گذرد در ربع اول مفروض است. خطوط موازی محورهای مختصات که از هر نقطه دلخواه منحنی رسم شوند دو ناحیه A و B، به ترتیب بالا و زیر منحنی ایجاد می‌کنند. اگر حجم ایجادشده از دوران ناحیه A حول محور x، n برابر حجم ایجادشده از دوران ناحیه B حول همین محور باشد، تابع f کدام است؟



حل :

$\pi\int_0^x f(x)^2\,dx$: حجم حاصل از دوران ناحیه B حول محور xها

$\pi y^2 x = \pi f(x)^2 x$: حجم حاصل از دوران کل دو ناحیه A و B حول محور xها

البته حجم حاصل از دوران ناحیه A حول محور xها، اختلاف دو عبارت بالا است.

حال از فرض مسئله داریم:

$$\pi x f(x)^2 - \pi\int_0^x f(x)^2\,dx = n.\pi\int_0^x f(x)^2\,dx$$

با مشتق گیری از طرفین بدست می آید :

$$f(x)^2 + 2x f(x) f'(x) - f(x)^2 = nf(x)^2 \;\rightarrow\; 2x f'(x) = n f(x) \;\rightarrow\; \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{n}{2x} \;\xrightarrow{\int}$$

$$\ln f(x) = \frac{n}{2}\ln x + \ln c \;\rightarrow\; f(x) = cx^{\frac{n}{2}}$$

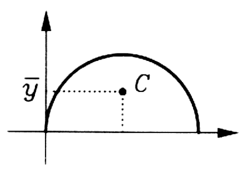
توجه : طبق قضیه گلدن پاپیوس حجم حاصل از دوران یک سطح حول محوری که آن را قطع نمی‌کند، برابر است با مساحت آن سطح ضربدر محیط دایره‌ای که مرکز سطح در اثر دوران طی می‌کند.

لذا اگر اندازه سطح S و فاصله مرکز سطح تا محور دوران R باشد، داریم: $V = S\,.\,2\pi R$

مثال : مرکز سطح نیم‌دایره‌ای با شعاع R چه فاصله‌ای تا محور گذرنده از قطر نیم‌دایره دارد؟

حل : طبق قضیه گلدن داریم:

(محیط دایره‌ای که مرکز سطح در اثر دوران طی می‌کند) × (مساحت سطحی که دوران می‌کند) = حجم حاصل از دوران که یک کره است



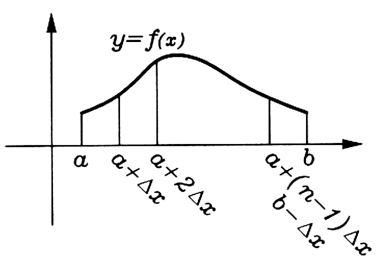
$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \left(\frac{1}{2}\pi R^2\right).\left(2\pi\bar{y}\right)$$

$\bar{y} = \dfrac{4R}{3\pi}$:(مرکز سطح کره)

✓ حد مجموع‌های ریمانی

به شکل مقابل دقت کنید:

فرض کنید بازهٔ $[a\,,b]$ را به n قسمت مساوی تقسیم کرده‌ایم که طول هر قسمت $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ می‌باشد.

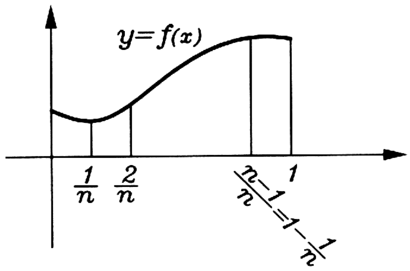


طبیعی است سطح زیر نمودار منحنی $y=f(x)$ که محدود به محور xها و خطوط $x=b$ و $x=a$ است، از طریق $\int_a^b f(x)$ قابل حصول می باشد و به صورت زیر قابل تخمین می‌باشد.

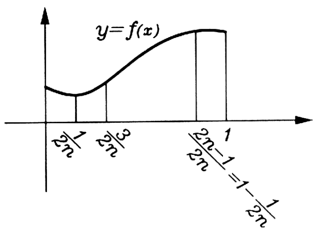
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x\to\infty} \frac{b-a}{n}\left(f(a)+f(a+\Delta x)+f(a+2\Delta x)+\ldots+f(b-\Delta x)\right)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x\to\infty} \frac{b-a}{n}\left(f(a+\Delta x)+f(a+2\Delta x)+\ldots+f(b)\right)$$

به عنوان مثال دقت کنید:



$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{n}\left(f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\ldots+f\left(\frac{n}{n}\right)\right)$$



$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{n}\left(f\left(\frac{1}{2n}\right)+f\left(\frac{3}{2n}\right)+\ldots+f\left(\frac{2n-1}{2n}\right)\right)$$

مثال : حاصل حدهای زیر را بیابید:

۱) $\mathbf{I = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^8}\sum_{i=1}^{n} i^7}$

$$I = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^8}\left(1^7+2^7+3^7+\ldots+n^7\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^7+\left(\frac{2}{n}\right)^7+\ldots+\left(\frac{n}{n}\right)^7\right) = \int_0^1 x^7\,dx = \frac{x^8}{8}\Big|_0^1 = \frac{1}{8}$$

۲) $\mathbf{I = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}}$

حل : داریم:

$$I = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}}\right)$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\Big|_0^1 = \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$$

۳) $\mathbf{I = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \tan^{-1}\left(\frac{2i-1}{2n}\right)}$

حل :

$$I = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}\left\{\tan^{-1}\left(\frac{1}{2n}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{3}{2n}\right) + \ldots + \tan^{-1}\left(\frac{2n-1}{2n}\right)\right\} = \int_0^1 \tan^{-1} x \, dx$$

با استفاده از روش جزء به جزء بدست می آوریم :

$$\begin{cases} u = \tan^{-1} x \\ dv = dx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{1+x^2}\,dx \\ v = x \end{cases}$$

$$\int \tan^{-1} x \, dx = x \tan^{-1} x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = x \tan^{-1} x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$$

پس:

$$I = \left(x \tan^{-1} x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\right)\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$$

دنباله‌ها

یک دنباله مانند $\{a_n\}$ رشته‌ای از اعداد است که با قرار دادن مقادیر طبیعی به جای n در جمله عمومی a_n حاصل می‌گردد.

✓ دنباله $\{a_n\}$ را همگرا به L می‌گویند، هرگاه $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ و چنانچه $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ موجود نباشد (نامعلوم باشد، بیکران باشد، یکتا نباشد و ...)، دنباله مورد نظر را واگرا می‌گویند.

✓ دنباله $\{a_n\}$ را کراندار می‌گویند ،هرگاه بتوان اعداد حقیقی m و M را به گونه‌ای یافت به طوری که:

$$\forall n \in N \quad ; \quad m \le a_n \le M$$

✓ دنباله $\{a_n\}$ را صعودی می‌گویند، هرگاه:

$$\forall n \in N \quad ; \quad a_{n+1} \ge a_n$$

دنباله $\{a_n\}$ را نزولی می‌گویند، هرگاه :

$$\forall n \in N \quad ; \quad a_{n+1} \le a_n$$

(در هر کدام از موارد فوق اگر علامت مساوی را کنار بگذاریم وضعیت اکید پیش می‌آید)

چند نکته:

✓ برای محاسبه حد دنباله‌ها، تمام قضایا، قواعد هم ارزی و روش‌های گفته شده در محاسبه حد توابع قابل استفاده می‌باشد.

✓ در محاسبه $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ اگر لازم باشد باید وضعیت زوج یا فرد بودن n مورد توجه قرار گیرد، این موضوع به‌خصوص در دنباله‌هایی که جمله عمومی آن‌ها شامل $(-1)^n$ می‌باشد، مهم است.

✓ برای اثبات یکنوائی دنباله‌ها روش‌های زیر قابل استفاده است.

۱) چنانچه:

$a_{n+1} - a_n \ge 0 \quad ; \quad \forall n$ دنباله $\{a_n\}$ صعودی است.

$a_{n+1} - a_n \le 0 \quad ; \quad \forall n$ دنباله $\{a_n\}$ نزولی است.

(و البته با حذف علامت مساوی طبیعت اکید حاصل می‌گردد.)

۲) اگر برای هر nای $a_n > 0$ باشد:

چنانچه $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1 \quad ; \quad \forall n$ دنباله $\{a_n\}$ صعودی است.

چنانچه $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \le 1 \quad ; \quad \forall n$ دنباله $\{a_n\}$ نزولی است.

(با حذف علامت مساوی طبیعت اکید حاصل می‌گردد)

و چنانچه برای هر nای $a_n < 0$ باشد وضعیت برعکس نتیجه می‌شود.

۳) چنانچه تابع $a(x)$ برای $x \geq 1$ مشتق‌پذیر باشد.

اگر $a'(x) > 0$ آنگاه دنباله $\{a_n\}$ اکیداً صعودی است.

اگر $a'(x) < 0$ آنگاه دنباله $\{a_n\}$ اکیداً نزولی است.

✓ برای تعیین کران‌های بالا و پایین یک دنباله مانند $\{a_n\}$ می‌توان از روش‌های زیر استفاده کرد:

۱) با استفاده از نامساوی‌های قابل برقرار برای a_n

۲) مشابه یافتن مقادیر اکسترمم تابع $a(x)$ با این توجه که x عددی طبیعی می‌باشد.

✓ چند قضیه

- هر دنباله همگرا، کراندار است.
- هر دنباله یکنوا و کراندار، همگرا است.
- هر دنباله صعودی، یا همگرا است یا به $+\infty$ می‌گراید و به تعبیری هر دنباله صعودی و از بالا کرندار همگرا است.
- هر دنباله نزولی، یا همگرا است یا به $-\infty$ می‌گراید و به تعبیری هر دنباله نزولی و از پایین کراندار همگرا است.

مثال : وضعیت همگرایی یا واگرایی دنباله‌های زیر را تعیین کنید.

۱) $\left\{\left(2-\cos\frac{1}{n}\right)^{n^2}\right\}$

حل :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(2-\cos\frac{1}{n}\right)^{n^2} = 1^{\infty} \quad (\text{مبهم})$$

برای $n\to\infty$ داریم: $\frac{1}{n}\to 0$ و مطابق قواعده هم ارزی داریم:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(2-\left(1-\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{2!}\right)\right)^{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n^2}\right)^{n^2} \xrightarrow{n^2=t} \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{\frac{1}{2}}{t}\right)^{t} = e^{\frac{1}{2}}$$

دنباله مذکور همگراست به $e^{\frac{1}{2}}$.

۲) $\left\{\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^{n^2}\right\}$

حل :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^{n^2} = 1^{\infty} \quad (\text{مبهم})$$

می‌توان دید:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n-1)+2}{2n-1}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{2n-1}\right)^{n} = e^{1}$$

حالا می‌گوییم:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^{n}\right\}^{n} = \left(e^1\right)^{\infty} = e^{\infty} = \infty \quad (\text{دنباله مذکور واگراست})$$

۳) $\left\{5\log\left(n^3+1\right)-n\log 2\right\}$

حل : $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} 5\log\left(n^3+1\right)-n\log 2=\infty-\infty$ (مبهم)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\log\left(\frac{\left(n^3+1\right)^5}{2^n}\right)=\log\left(\frac{\text{بی نهایت توانی}}{\text{بی نهایت نمایی}}\right)=\log\left(0^+\right)=-\infty$$

دنباله واگراست.

۴) $\left\{\left[\frac{n^2+(-1)^n}{n^2+\frac{1}{2}}\right]\right\}$

حل : می‌دانیم:

$$(-1)^n=\begin{cases}+1 & n \text{ زوج}\\ -1 & n \text{ فرد}\end{cases}$$

حال داریم:

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{n^2+1}{n^2+\frac{1}{2}}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\frac{\frac{1}{2}}{n^2+\frac{1}{2}}\right]=\left[1^+\right]=1 & ;\quad \text{اگر } n \text{ زوج باشد}\\ \lim\limits_{n\to 0}\left[\frac{n^2-1}{n^2+\frac{1}{2}}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\left[1-\frac{\frac{3}{2}}{n^2+\frac{1}{2}}\right]=\left[1^-\right]=0 & ;\quad \text{اگر } n \text{ فرد باشد}\end{cases}$$

پس دنباله واگراست.

مثال : وضعیت اکیداً یکنوایی دنباله $\left\{\arctan\frac{2n+1}{2n-3}\right\}$ را تعیین کنید.

حل :

$$a'_n=\frac{\frac{-8}{(2n-3)^2}}{1+\left(\frac{2n+1}{2n-3}\right)^2}<0$$

پس دنباله مذکور اکیداً نزولی است.

مثال : دنباله با جمله عمومی $a_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{n+n}$ مفروض است. به ترتیب به موارد زیر پاسخ دهید.

الف) کراندار بودن   ب) یکنوایی   ج) همگرایی

حل :

الف) $\forall\, n\in N;\quad \frac{1}{n+n}+\frac{1}{n+n}+\dots+\frac{1}{n+n}<\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{n+n}<\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\dots+\frac{1}{n}$

$$\to\quad n\frac{1}{2n}<a_n<n\frac{1}{n}\quad\to\quad\frac{1}{2}<a_n<1$$

لذا دنباله مذکور کراندار است.

ب) می‌نویسیم:

$$a_{n+1}-a_n=\left(\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}\right)-\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)$$
$$=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}>0$$

دنباله مذکور اکیداً صعودی است.

ج) چون دنباله مذکور کراندار و اکیداً یکنواست، طبق قضیه مذکور دنباله همگراست.

توضیح بیشتر: از آن‌جا که:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{n}\right)\right)=\int_0^1 f(x)\,dx$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\ldots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right\}$$
$$=\int_0^1\left\{\frac{1}{1+x}\,dx=\ln(1+x)\right|_0^1=\ln 2$$

لذا دنباله مذکور همگراست به $\ln 2$

مثال : دنبالهٔ همگرای $z_1 , z_2 , \ldots$ را که در آن $z_n=\frac{1}{4}\left(1-\frac{5}{n}\right)+3i\left(1+\frac{1}{n}\right)$، در نظر می‌گیریم. اگر c حد دنباله باشد، تعداد جملات دنباله که خارج ناحیه $|z_n-c|<0.01$ می‌باشند، چندتاست؟

حل :

$$c=\lim_{n\to\infty}z_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(1-\frac{5}{n}\right)+3i\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{4}+3i$$

برای آنکه جملات خارج ناحیه $|z_n-c|<0.01$ را مشخص کنیم، می‌نویسیم:

$$|z_n-c|\ge 0.01\ \rightarrow\ \left|\frac{-5}{4n}+\frac{3i}{n}\right|\ge 0.01$$

$$\sqrt{\frac{25}{16n^2}+\frac{9}{n^2}}\ge 0.01\ \rightarrow\ \sqrt{\frac{169}{16n^2}}\ge 0.01\ \rightarrow\ \frac{13}{4n}\ge\frac{1}{100}\ \rightarrow\ n\le 325$$

پس 325 جمله خارج ناحیه مذکور است .

✓ چند دنباله خاص

الف) دنباله تصاعد حسابی

یک دنباله تصاعد حسابی با رابطه بازگشتی $a_n=a_{n-1}+d$ بیان می‌شود که در آن d قدر نسبت تصاعد حسابی گفته می‌شود.

به بیان دیگر جمله عمومی یک دنباله تصاعد حسابی به صورت $a_n=a_1+(n-1)d$ نوشته می‌شود.

می‌توان نشان داد مجموع n جمله اول دنباله فوق از رابطه $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$ قابل محاسبه است.

ب) دنباله تصاعد هندسی

یک دنباله تصاعد هندسی با رابطه بازگشتی $a_{n+1} = q\, a_n$ بیان می‌شود که در آن q قدر نسبت تصاعد هندسی گفته می‌شود.

به بیان دیگر جمله عمومی یک دنباله تصاعد هندسی به صورت $a_n = a_1 q^{n-1}$ نوشته می‌شود می‌توان نشان داد مجموع n جمله اول دنباله فوق از رابطه $S_n = \dfrac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q}$ قابل محاسبه است.

بدیهی است اگر $|q| < 1$ باشد، $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ و به تعبیری حد مجموع بی‌نهایت جمله اول دنباله مذکور از رابطه $S_\infty = \dfrac{a_1}{1-q}$ قابل حصول است.

مثال : تمامی جواب‌های معادله زیر را پیدا کنید.

$$1 + 2z + 4z^2 + 8z^3 + 16z^4 = 0$$

حل : سمت چپ معادله مجموع پنج جمله اول یک تصاعد هندسی است. که در آن:

$$q = 2z \quad , \quad t_1 = 1$$

می‌باشد و حاصل آن از طریق:

$$S_n = \frac{t_1\left(1-q^n\right)}{1-q}$$

قابل محاسبه است. یعنی معادله مذکور چنین بیان می‌شود:

$$\frac{1\left(1-(2z)^5\right)}{1-(2z)} = 0 \quad \to \quad 1-(2z)^5 = 0 \quad \to \quad z^5 = \frac{1}{32} \quad \to \quad z = \sqrt[5]{\frac{1}{32}}$$

بنابراین محاسبه پنج ریشه پنجم عدد مختلط $\frac{1}{32}$ مدنظر است که البته یکی از این‌ها $\frac{1}{2}$ می‌باشد و بدیهی است ریشه قابل قبول معادله نیست (در آن صدق نمی‌کند).

طبق فرمول:

$$\sqrt[n]{A} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right)$$

در اینجا داریم:

$$A = \frac{1}{32} \quad \to \quad \begin{cases} r = \dfrac{1}{32} \\ \theta = 0 \end{cases}$$

پس طبق فرمول :

$$z = \sqrt[5]{\frac{1}{32}}\left\{\cos\frac{0 + 2k\pi}{5} + i\sin\frac{0 + 2k\pi}{5}\right\}$$

$$k = 0 \quad \to \quad \frac{1}{2}(\cos 0 + i\sin 0) = \frac{1}{2}$$

که مدنظر نمی‌باشد:

و جواب‌های معادله اصلی به‌صورت زیر می‌باشد:

$$k=1 \quad \to \quad \frac{1}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}\right)$$
$$k=2 \quad \to \quad \frac{1}{2}\left(\cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5}\right)$$
$$k=3 \quad \to \quad \frac{1}{2}\left(\cos\frac{6\pi}{5}+i\sin\frac{6\pi}{5}\right)$$
$$k=4 \quad \to \quad \frac{1}{2}\left(\cos\frac{8\pi}{5}+i\sin\frac{8\pi}{5}\right)$$

سری‌های نامتناهی

یک سری نامتناهی به صورت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ نوشته می‌شود و آن را همگرا می‌گویند هرگاه مجموع بی‌نهایت جمله فوق در حد به سمت عددی مشخص و محدود نزدیک شود و در غیر این صورت این سری نامتناهی را واگرا می‌گویند.

✓ قضیه شرط لازم برای همگرائی سری‌های نامتناهی

شرط لازم ولی غیرکافی برای آن که سری $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ همگرا باشد این است که $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ بنابراین:

همگرا باشد $\sum^{\infty} a_n$ اگر سری $\quad \to \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ اگر $\quad \to \quad$ $\sum^{\infty} a_n$ واگرا است.

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ اگر $\quad \to \quad$ $\sum^{\infty} a_n$ شرط لازم برای همگرائی را دارد و نیاز به ارزیابی بیشتر دارد.

مثال : آیا سری $I=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}$ شرط لازم برای همگرایی را دارد؟

حل :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{\infty\times 0} \ (\text{مبهم})$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\ln\left(e^{-1}\right)} = -1 \neq 0$$

پس سری مذکور شرط لازم برای همگرایی را ندارد (واگراست).

مثال : می‌دانیم حاصل سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3a_n}{a_{3n+1}+7} - 1$ برابر 2 می‌باشد مطلوبست حاصل حد : $\lim_{n \to \infty} a_n = ?$

حل : چون حاصل آن 2 است پس همگراست و باید شرط لازم برای همگرایی را ارضا کند. یعنی :

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3a_n}{a_{3n+1}+7} - 1\right) = 0 \quad \to \quad \frac{3a_\infty}{a_\infty + 7} - 1 = 0 \quad \to \quad a_\infty = \frac{7}{2}$$

✓ آزمون‌هایی در تعیین همگرایی یا واگرائی سری‌های با جملات مثبت

۱) آزمون مقایسه

هرگاه $0 < a_n \le b_n \quad ; \quad \forall n$

همگرائی سری $\sum^{\infty} b_n$، همگرائی سری $\sum^{\infty} a_n$ را نتیجه می‌دهد.

واگرائی سری $\sum^{\infty} a_n$، واگرائی سری $\sum^{\infty} b_n$ را نتیجه می‌دهد.

۲) آزمون مقایسه درجه صورت و مخرج

در سری $\sum^{\infty} \frac{P_n}{Q_n}$ که در آن Q_n و P_n فقط از عبارت‌های توانی و رادیکالی تشکیل شده‌اند، شرط لازم و کافی برای همگرائی سری آن است که:

$$(\text{درجه مخرج یعنی } Q_n) \xrightarrow{\ -\ } (\text{درجه صورت یعنی } P_n) > 1$$

۳) آزمون دالامبر (آزمون نسبت)

در سری $\sum^{\infty} a_n$ با محاسبه حد $L = \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

چنانچه $L > 1$ باشد سری مورد نظر واگرا و چنانچه $L < 1$ باشد سری مورد نظر همگرا است و اگر $L = 1$ باشد، این آزمون کمکی نمی‌کند.

۴) آزمون کوشی (آزمون ریشه nام)

در سری $\sum^{\infty} a_n$ با محاسبه حد $L = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n}$

چنانچه $L > 1$ باشد سری مورد نظر واگرا و چنانچه $L < 1$ باشد سری مورد نظر همگرا است و اگر $L = 1$ باشد، این آزمون کمکی نمی‌کند.

توجه مهم :

(در صورت موجود بودن حدهای مذکور) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$

توجه: به‌خاطر داریم وقتی $n\to\infty$

$$\sqrt[n]{(kn)!}\sim\left(\frac{kn}{e}\right)^k$$

$\log_a^n << n^b << c^n$ (اعداد ثابتند $c>1\,,\,b>0\,,\,a>1$)

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\text{هر چند جمله‌ای با درجه دلخواه از } n}=1$ و $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{n+b}\right)^{cn+d}=e^{ac}$

مثال : وضعیت همگرایی و واگرایی سری‌های زیر را تعیین کنید.

۱) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[5]{n^4+3n^2+1}}{n\sqrt{n}+1}$

حل : $\text{درجه صورت} - \text{درجه مخرج} = \dfrac{3}{2}-\dfrac{4}{5}=\dfrac{7}{10}\not>1$

پس طبق آزمون مقایسه درجه صورت و مخرج سری مذکور واگراست.

۲) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\log n}$

حل : $\forall\, n\geq 2$ می‌دانیم : $n>\log n \quad\to\quad \dfrac{1}{n}<\dfrac{1}{\log n}$

چون $\displaystyle\sum^{\infty}\frac{1}{n}$ واگراست پس طبق آزمون مقایسه سری $\displaystyle\sum^{\infty}\frac{1}{\log n}$ نیز واگراست.

۳) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$

حل:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-1}{n+1}\right)^n=e^{-1}=\frac{1}{e}<1$$

پس طبق آزمون دالامبر سری مذکور همگراست.

و یا:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n]{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\dfrac{1n}{e}\right)^1}{n}=\frac{1}{e}<1$$

پس طبق آزمون کوشی سری مذکور همگراست.

۴) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$

حل : $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 < 1$

با استفاده از آزمون کوشی مشخص می‌شود، سری مذکور همگراست.

۵) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$

حل : $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e > 1$

طبق آزمون کوشی سری مذکور واگراست.

۶) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

حل : $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{2}{n}}}{2} = \frac{1}{2}$

مقدار حد $A = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{2}{n}}$ به طریق زیر مشخص می‌شود :

$A = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{2}{n}} \quad \to \quad \ln A = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\ln n = \frac{\infty}{\infty}$ (مبهم) $\quad \to \quad \ln A = \lim_{n\to\infty} \frac{2\times\frac{1}{n}}{1} = 0 \quad \to \quad A = 1$

۷) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3-4i)^n}{n!}$

حل : $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(3-4i)^n}{n!}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|3-4i|}{\frac{n}{e}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{\frac{n}{e}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5e}{n} = 0$

پس سری مذکور طبق آزمون کوشی همگراست.

۸) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

حل : $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^2}{\left(\frac{2n}{e}\right)^2} = \frac{1}{4} < 1$

پس سری مذکور طبق آزمون کوشی همگراست.

۵) آزمون انتگرال

در سری $\sum^{\infty} a_n$ اگر a_nها لااقل از یک n خاص به بعد نزولی شوند، آنگاه وضعیت این سری و وضعیت انتگرال ناسره $\int^{\infty} a(x)\, dx$ از حیث همگرا یا واگرائی مشابه همدیگر است (دلیلی ندارد مقدار همگرائی آن‌ها یکسان باشد).

مثال : وضعیت همگرایی و واگرایی سری روبرو را تعیین کنید. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$

حل : بدیهی است $\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$ با افزایش n نزولی بوده و مجازیم از آزمون انتگرال استفاده کنیم.

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx = \left\{\left(-2e^{-\sqrt{x}}\right)\right\}\Big|_1^{+\infty} = -2\left\{e^{-\infty} - e^{-1}\right\} = \frac{2}{e} \quad \text{(همگراست)}$$

پس طبق آزمون انتگرال سری همگراست.

سری‌هایی که در جمله عمومی آن‌ها فقط عبارت توانی و یا رادیکالی و یا لگاریتمی باشد، حتماً آزمون‌های دالامبر و یا کوشی به ما کمکی نمی‌کند.

۶) آزمون مقایسه حد

دو سری $J = \sum^{\infty} b_n$ و $I = \sum^{\infty} a_n$ را در نظر بگیرید. چنانچه $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ فرض شود، می‌توان گفت:

الف) اگر L صفر و بی‌نهایت نباشد، وضعیت دو سری J و I مشابه همدیگر است.

ب) اگر $L = 0$ باشد و J نیز همگرا باشد آنگاه I نیز همگرا است.

ج) اگر $L = \infty$ باشد و J نیز واگرا باشد آنگاه I نیز واگرا است.

۷) آزمون ارجاع به سری‌های مرجع (من درآوردی!)

می توان نشان داد تمام سری‌های زیر به ازاء $P > 1$ همگرا و به ازاء $P \le 1$ واگرایند.

$$\sum^{\infty} \frac{1}{n^P} \qquad \sum^{\infty} \frac{\log_a^n}{n^P} \qquad \sum^{\infty} \frac{1}{n\left(\log_a^n\right)^P}$$

از طرفی در دو سری $\sum^{\infty} b_n$, $\sum^{\infty} a_n$ چنانچه برای $n \to \infty$، b_n و a_n هم‌ارز باشند $(a_n \sim b_n)$، وضعیت دو سری گفته شده از حیث همگرا یا واگرایی مشابه همدیگر است.

بنابراین برای یک سری مورد نظر مانند $\sum^{\infty} a_n$ اگر برای $n \to \infty$ بتوان a_n را هم ارز جمله عمومی یکی از سری‌های چهارگانه اول بحث دید، می‌توان با نکات گفته شده وضعیت سری مورد بحث را تعیین نمود.

مثال : وضعیت همگرایی و واگرایی سری زیر را تعیین کنید.

۱) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n^3+1}\,\sin^4\left(\frac{1}{n}\right).\log\left(n^3+4n+1\right)$

حل : توجه داریم وقتی $n \to \infty$:

$$\sqrt{n^3+1}\,\sin^4\left(\frac{1}{n}\right).\log\left(n^3+4n+1\right) \quad \sim \quad \left(n^{\frac{3}{2}}\right).\left(\frac{1}{n}\right)^4.\log\left(n^3\right)=\frac{3\log n}{n^{\frac{5}{2}}}$$

حال از آن‌جا که $\displaystyle\sum^{\infty} \frac{\log n}{n^{\frac{5}{2}}}$ همگراست (طبق سری‌های مرجع به ازاء $P=\frac{5}{2}>1$)، پس سری مذکور همگراست.

✓ آزمون لایپ نیتس در تعیین همگرایی یا واگرائی سری‌های متناوب

در سری متناوب $\displaystyle\sum^{\infty} (-1)^n a_n$ که در آن a_nها برای همه مقادیر n مثبت فرض شده‌اند، شرط کافی برای همگرائی آن است که دو شرط زیر تواماً ارضاء شوند:

$$* \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

** a'_n لااقل از یک n خاص به بعد منفی باشد و یا از یک n خاص به بعد a_n نزولی باشد.

✓ یک تعریف و یک قضیه:

دو سری زیر را در نظر بگیرید:

$$I=\sum^{\infty} a_n$$

(با شرط $a_n>0$)

$$J=\sum^{\infty} (-1)^n a_n$$

الف) چنانچه I همگرا باشد ثابت می‌شود J نیز همگرا است و در این وضعیت اصطلاحاً می‌گویند سری متناوب J همگرائی مطلق دارد.

ب) چنانچه J همگرا ولی I واگرا باشد، در این وضعیت اصطلاحاً می‌گویند سری متناوب J همگرائی مشروط دارد.

مثال : وضعیت همگرایی مشروط ـ همگرایی مطلق ـ واگرایی سری‌های زیر را تعیین کنید.

۱) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$

حل : اولاً به بررسی $\displaystyle\sum^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ می‌پردازیم که البته طبق سری‌های مرجع واگراست $(P=1)$. پس فعلاً مطمئن هستیم سری متناوب اصلی همگرایی مطلق ندارد.

حال توجه داریم:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{\ln n}{n} = 0$$

$$a_n = \frac{\ln n}{n} \quad \to \quad a'_n = \frac{1 - \ln n}{n^2}$$

a'_n لااقل از n خاص به بعد منفی می‌شود. یعنی a_n از n خاص به بعد نزولی می‌شود.

پس طبق قضیه لایپ نیتس سری متناوب ما همگراست و همگرایی مشروط دارد.

۲) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln^2\left(n + \sqrt{n}\right)}$

به بررسی $\displaystyle\sum^{\infty} \frac{1}{n \ln^2\left(n + \sqrt{n}\right)}$ می‌پردازیم:

چون وقتی $n \to \infty$

$$\frac{1}{n \ln^2\left(n + \sqrt{n}\right)} \sim \frac{1}{n \ln^2 (n)}$$

و چون طبق سری‌های مرجع سری $\displaystyle\sum^{\infty} \frac{1}{n(Lnn)^2}$ همگرا است، پس $\displaystyle\sum^{\infty} \frac{1}{n\ln^2\left(n + \sqrt{n}\right)}$ نیز همگراست.

و به تبع آن‌ها سری متناوب اصلی نیز همگراست و البته همگرایی مطلق دارد.

۳) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+3}{3n+1}\right)$

حل:

$$\lim_{n \to \infty} (-1)^n \left(\frac{2n+3}{3n+1}\right) = \begin{cases} \frac{2}{3} & n \text{ زوج} \\ -\frac{2}{3} & n \text{ فرد} \end{cases} \neq 0$$

سری مذکور شرط لازم برای همگرایی نداشته و واگراست.

✓ تعیین بازه همگرائی سری‌های تابعی

در سری تابعی $\sum^{\infty} a(n, x)$ محدودهٔ xهایی که سری به ازاء آن‌ها همگرا می‌شود را می‌توان از طریق حل یکی از نامعادلات زیر به‌دست آورد.

$$\lim_{n \to \infty} \left|\frac{a(n+1, x)}{a(n, x)}\right| < 1 \qquad \text{و یا} \qquad \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a(n, x)|} < 1$$

و اگر لازم باشد وضعیت سری در نقاط مرزی ارزیابی شود، xهای مرزی را در داخل سری اصلی قرار داده و به بررسی سری عددی حاصله می‌پردازیم.

مثال : فاصله همگرایی و شعاع همگرایی سری‌های زیر را تعیین کنید.

$$۱)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1-\frac{1}{3n}\right)^{n^2} (n!)^2}{\left(n^3+4n+1\right).(n)^{2n}} x^n$$

حل : شرط همگرایی کوشی:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{\left(1-\frac{1}{3n}\right)^{n^2} (n!)^2}{\left(n^3+4n+1\right).(n)^{2n}} x^n\right|} < 1 \quad \rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{\left(1-\frac{1}{3n}\right)^{n^2}} \ , \ \sqrt[n]{(n!)^2}}{\sqrt[n]{\left(n^3+4n+1\right)}\ \sqrt[n]{n^{2n}}} . |x| \le 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(1-\frac{1}{3n}\right)^{n} . \left(\frac{n}{e}\right)^2}{1.n^2} |x| < 1 \quad \rightarrow \quad e^{-\frac{1}{3}} \frac{1}{e^2} |x| < 1 \quad \rightarrow \quad |x| < e^{\frac{7}{3}}$$

پس فاصله همگرایی $|x| < e^{\frac{7}{3}}$ و شعاع همگرایی $R = e^{\frac{7}{3}}$ می‌باشد.

$$۲)\ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2n+4}{2n-4}\right)^{n^2} . x^n$$

حل : شرط همگرایی کوشی:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \sqrt[n]{\left(\frac{2n+4}{2n-4}\right)^{n^2} . x^n} \right| < 1 \quad \rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \left(\frac{2n+4}{2n-4}\right)^n \ . \ x \right| < 1 \quad \rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+4}{2n-4}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n-4+8}{2n-4}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{8}{2n-4}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{4}{n-2}\right)^n = e^4$$

لذا فاصله همگرایی $e^4 |x| < 1 \quad \rightarrow \quad |x| < \frac{1}{e^4}$ و شعاع همگرایی $R = \frac{1}{e^4}$ می‌باشد.

$$۳)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3-4i)^n\ (2x-1)^n}{n^2+1}$$

حل:

شرط همگرایی : $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(3-4i)^n\ (2x-1)^n}{n^2+1}\right|} < 1 \quad \rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{|3-4i||2x-1|}{\sqrt[n]{n^2+1}} < 1 \quad \rightarrow$

$$\frac{\sqrt{9+16} \times |2x-1|}{1} < 1 \quad \rightarrow \quad |2x-1| < \frac{1}{5} \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{5} < 2x-1 < \frac{1}{5} \quad \rightarrow \quad \frac{4}{5} < 2x < \frac{6}{5} \quad \rightarrow \quad \frac{2}{5} < x < \frac{3}{5}$$

فاصله همگرایی : $\frac{2}{5} < x < \frac{3}{5}$

و چون $\left|x-\frac{1}{2}\right| < \frac{1}{10} \quad \rightarrow \quad \frac{-1}{10} < x - \frac{1}{2} < \frac{1}{10}$ پس:

شعاع همگرایی : $R = \frac{1}{10}$

مثال : ناحیه همگرایی سری‌های زیر را تعیین کنید و وضعیت سری را در نقاط مرزی نیز مشخص کنید.

۱) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln x)^n}{2n+1}$

حل : شرط همگرایی کوشی:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(\ln x)^n}{2n+1}\right|} < 1 \quad \to \quad \lim_{n\to\infty} \frac{|\ln x|}{\sqrt[n]{2n+1}} < 1 \quad \to \quad -1 < \ln x < 1 \quad \to \quad e^{-1} < x < e^{+1}$$

در خود نقاط مرزی داریم:

$x = e^{-1} \quad \to \quad \sum^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ سری از نوع متناوب و مطابق آزمون لایپ‌نیتس همگراست.

$x = e^{+1} \quad \to \quad \sum^{\infty} \frac{1}{2n+1}$ سری از نوع با جملات مثبت و با آزمون مقایسه درجه صورت و مخرج واگراست.

پس در کل بازه همگرایی $e^{-1} \le x < e^{1}$ می باشد .

۲) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n}$

حل : شرط همگرایی :

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{x^n}{\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n}\right|} < 1 \quad \sim \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|(2x)^n\right|} < 1 \quad \to \quad |2x| < 1 \quad \to \quad \frac{-1}{2} < x < \frac{1}{2}$$

توجه داریم:

$$x = \frac{1}{2} \quad \to \quad \sum^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n} \quad \to \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n} \quad \sim \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)^n} = 1 \neq 0$$

$$x = -\frac{1}{2} \quad \to \quad \sum^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n} \quad \to \quad \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n} = \begin{cases} -1 & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \\ +1 & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \end{cases}$$

که هر دو واگراست. زیرا شرط لازم برای همگرایی را ندارد. پس فاصله دقیق همگرایی چنین است:

$-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$

مثال : اگر $z = x + iy$ باشد ناحیه همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nz^2}$ را در شکل نشان دهید.

حل : شرط همگرایی:

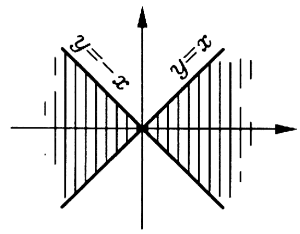
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left| e^{-nz^2} \right|} < 1 \quad \to \quad \left| e^{-z^2} \right| < 1 \quad \to \quad \left| e^{-(x+iy)^2} \right| < 1$$

می دانیم اگر α حقیقی باشد:

$$\left| e^{\alpha} \right| = e^{\alpha}$$

$$\left| e^{i\alpha} \right| = \left| \cos\alpha + i\ \sin\alpha \right| = \sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = 1$$

پس



$$\left| e^{-\left(x^2 - y^2 + 2ixy\right)} \right| < 1 \quad \to \quad \left| e^{y^2 - x^2} \right| \left| e^{-2ixy} \right| < 1$$

$$\left(e^{y^2 - x^2} \right)(1) < 1 \quad \to \quad e^{y^2 - x^2} < 1 \quad \to \quad y^2 - x^2 < 0 \quad \to \quad |y| < |x|$$

✓ بسط تیلور و مک لوران یک تابع

بسط تیلور تابع $f(z)$ حول نقطه z_0 به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(z - z_0\right)^n = a_0 + a_1\left(z - z_0\right) + a_2\left(z - z_0\right)^2 + \ldots$$

که در آن ضرایب بسط تیلور از رابطه $a_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ به‌دست می‌آیند. و شعاع همگرائی این بسط برابر است با min فاصله z_0 تا همه نقاط تکین تابع $f(z)$ اعم از تکین‌های حقیقی و مختلط.

مطابق تعریف بسط تیلور یک تابع حول نقطه $z_0 = 0$ را بسط مک لوران آن تابع می‌گویند.

مثال : در بسط تیلور تابع $f(x) = \dfrac{\left(x^2 + 3x + 1\right)^2 \left(x^2 + 1\right)}{\left(x^2 + x + 3\right)^3}$ حول نقطه $x_0 = 1$ ضریب جمله $(x - 1)$ را پیدا کنید.

حل :

$$(x-1) \text{ ضریب جمله } = \frac{f'(1)}{1!} = f'(1)$$

برای سهولت در امر مشتق‌گیری از طرفین ضابطه داده شده لگاریتم نپرین می‌گیریم:

$$\ln f(x) = 2\ln\left(x^2 + 3x + 1\right) + \ln\left(x^2 + 1\right) - 3\ln\left(x^2 + x + 3\right)$$

پس از مشتق‌گیری داریم:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 2\,\frac{2x+3}{x^2 + 3x + 1} + \frac{2x}{x^2 + 1} - 3\,\frac{2x+1}{x^2 + x + 3} \xrightarrow{x=1} \frac{f'(1)}{f(1)} = 2\left(\frac{5}{5}\right) + \left(\frac{2}{2}\right) - 3\left(\frac{3}{5}\right)$$

از آنجاکه:

$$f(1)=\frac{(5)^2(2)}{(5)^3}=\frac{2}{5}$$

لذا $f'(1)$ محاسبه می‌شود که همان ضریب جمله $(x-1)$ در بسط تیلور تابع، حول نقطه $x_0=1$ است.

معرفی چند بسط مک لوران:

$$\text{معتبر برای همه مقادیر } z \quad \begin{cases} e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} \\ \sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ \cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \\ \sinh z=z+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ \cosh z=1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!} \end{cases}$$

$$|z|<1 \text{ معتبر برای } \begin{cases} \frac{1}{1-z}=\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n=1+z+z^2+z^3+\ldots \\ \frac{1}{1+z}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n=1-z+z^2-z^3+-\ldots \end{cases}$$

با اعمال جبری روی سری‌های فوق به سری توابع جدیدی خواهیم رسید، مثلاً:

$$\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n \xrightarrow{\int} \qquad \ln(1+z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{n+1}}{n+1}=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+-\ldots$$

و یا مثلاً:

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{1}{(1-z)^2}=\sum_{n=1}^{\infty} n\,z^{n-1}=1+2z+3z^2+\ldots$$

و یا مثلاً:

$$\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n \xrightarrow{z\to z^2} \frac{1}{1+z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n} \xrightarrow{\int}$$

$$\operatorname{Arc}\tan z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{2n+1}=z-\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}-+\ldots$$

مثال : ضریب x^3 در بسط مک لوران تابع $f(x)=(x^2+3x-1)e^{-x}$ بیابید.

حل : با توجه به بسط تابع نمایی داریم:

$$f(x)=(x^2+3x-1)\left(1-x+\frac{(-x)^2}{2!}+\frac{(-x)^3}{3!}+....\right)$$

$$x^3 \text{ ضریب}=-1+\frac{3}{2!}-1\times\frac{(-1)^3}{3!}=\frac{2}{3}$$

مثال : ضریب x^5 و x^7, x^6 را در بسط مک لوران تابع $f(x)=(x^3+1)\ln(x^2+1)$ را پیدا کنید (با شرط $|x|<1$)

حل :

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \xrightarrow{\int} \ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\xrightarrow{x\to x^2}\ln(1+x^2)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x^2)^{n+1}}{n+1}$$

بنابراین داریم:

$$f(x)=(x^3+1)\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x^2)^{n+1}}{n+1}\right)$$

$$x^5 \text{ ضریب}= 1\times(-1)^0=1$$

$$x^6 \text{ ضریب} =1\times\frac{(-1)^2}{3}=\frac{1}{3}$$

$$x^7 \text{ ضریب} =1\times(-1)^1\frac{1}{1+1}=\frac{-1}{2}$$

مثال : ضریب z^6 در بسط مک لوران تابع $f(z)=\frac{\cos z^2}{1-z^3}$ را بیابید.

حل :

$$f(z)=\left(1+z^3+z^6+...\right)\left(1-\frac{z^4}{2!}+\frac{z^8}{4!}-+...\right) \quad\to\quad a_6=1$$

مثال : ضریب z^5 را در بسط مک لوران تابع $f(z)=\frac{z^4}{\sin z}$ بیابید.

حل :

$$f(z)=\frac{z^4}{z-\frac{z^3}{6}+\frac{z^5}{120}-+....}$$

$$\begin{array}{l|l}
z^4 & z-\frac{z^3}{6}+\frac{z^5}{120} \\ \cline{2-2}
\underline{z^4-\frac{z^6}{6}+\frac{z^8}{120}} & z^3+\frac{z^5}{6} \\
\frac{z^6}{6}-\frac{z^8}{120} & \\
\underline{\frac{z^6}{6}\text{...........}} & \\
\text{...........} &
\end{array}$$

پس:

$$a_5=\frac{1}{6}$$

مثال : در بسط مک لوران تابع $f(x)=\sqrt{1+x}\ \sin x$ ضریب جمله x^3 را پیدا کنید.

حل : باتوجه به فرمول:

$$(a+b)^m = a^m + \frac{m\,a^{m-1}\,b^1}{1!} + \frac{m(m-1)\,a^{m-2}\,b^2}{2!} + \dots$$

می‌نویسیم: (که باید برحسب قوای صعودی مرتب شود)

$$f(x)=(1+x)^{\frac{1}{2}}\sin x$$
$$=\left(1^{\frac{1}{2}}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)1^{-\frac{1}{2}}x^1}{1!}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{-1}{2}\right)1^{-\frac{3}{2}}x^2}{2!}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-3}{2}\right)1^{-\frac{5}{2}}x^3}{3!}+\cdots\right)\cdot\left(x-\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)$$

در نتیجه:

$$x^3 \text{ ضریب جمله } : (1)\left(-\frac{1}{3!}\right)+\left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}\right)(1)$$

مثال : در بسط مک لوران تابع $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ ضریب جمله x کدام است؟

حل : راه بد: طبیعی است که تابع تعریف شده در $x=0$ نامعین است (تعریف نشده است)، اما اگر مقدار این تابع را در نقطه صفر، برابر حد این تابع در نقطه (0) (که برابر e می‌باشد) تعریف کنیم، می‌توان گفت: $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ و چون:

$$x \text{ ضریب } x \text{ در بسط مک لوران} : \frac{f'(0)}{1!}=f'(0)$$

با استفاده از تعریف مشتق در نقطه $x=0$ داریم:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x-0}=\frac{0}{0}\ \text{مبهم}\quad\xrightarrow{H}\quad f'(0)=\lim_{x\to 0}\left(\underbrace{-\frac{1}{x^2}\ln(1+x)+\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+x}}_{k}\right)\cdot(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

می‌توان نوشت:

$$k=\lim_{x\to 0}\frac{-(x+1)\ln(x+1)+x}{x^2(1+x)}=\frac{0}{0}\quad\xrightarrow{H}\quad k=\lim_{x\to 0}\frac{-\ln(x+1)-1+1}{2x+3x^2}=\frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{H}\quad k=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-1}{x+1}}{2+6x}=-\frac{1}{2}$$

و در نهایت:

$$f'(0)=\left(-\frac{1}{2}\right)(e)=-\frac{e}{2}$$

راه خوب حل مسئله:

$$f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}} \quad \to \quad \ln f(x)=\frac{1}{x}\ln(1+x)=\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-....\right) \quad \to \quad \ln f(x)=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-...$$

پس از مشتق‌گیری داریم:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=-\frac{1}{2}+\frac{2x}{3}+... \xrightarrow{x=0} \frac{f'(0)}{\underbrace{f(0)}_{e}}=-\frac{1}{2} \quad \to \quad f'(0)=-\frac{e}{2}$$

مسائلی در محاسبه حاصل یک سری

اصولاً هیچ راه حل کلی برای یافتن حاصل یک سری همگرا وجود ندارد، اما در مواردی خاص ممکن است بتوانیم حاصل یک سری را پیدا کنیم.

مثال : مطلوبست محاسبه حاصل سری‌های زیر:

$$\text{۱)}\ I=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5+3\cos n\pi)^n}$$

حل: می دانیم $\cos n\pi=(-1)^n$ لذا سری مذکور چنین است :

$$I=\frac{1}{2^1}+\frac{1}{8^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{8^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{8^6}+...$$

$$=\left(\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+...\right)+\left(\frac{1}{8^2}+\frac{1}{8^4}+\frac{1}{8^6}+...\right)=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}+\frac{\frac{1}{64}}{1-\frac{1}{64}}$$

دقت داریم حد مجموع بی‌نهایت جمله یک تصاعد هندسی با جمله اول t_1 و قدرنسبت q با شرط $|q|<1$ برابر $\frac{t_1}{1-q}$ است.

$$\text{۲)}\ I=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+4}{n!}$$

حل :

$$I=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{n!}+\frac{4}{n!}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{(n-1)!}+\frac{4}{n!}\right)$$

$$=3\left(\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...\right)+4\left(\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...\right)=3(e)+4(e-1)=7e-4$$

دقت داریم:

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=\frac{x^0}{0!}+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+... \quad \to \quad e^1=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...$$

نکته : قاعده ادغام

$$\sum_{n=p}^{q}(a_n-a_{n+1})=a_n\Big|_{n=p}-a_{n+1}\Big|_{n=q}$$

۳) $\mathbf{I = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}}$

حل :

با روش تجزیه کسرها داریم:

$$I = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

طبق قاعده ادغام داریم:

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2n-1}\Bigg|_{n=2} - \frac{1}{2n+1}\Bigg|_{n=\infty}\right\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{\infty}\right) = \frac{1}{6}$$

۴) $\mathbf{I = \sum_{n=3}^{\infty} n\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}}$

حل: داریم:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

پس از مشتق‌گیری داریم:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n\, x^{n-1}$$

در $x = \frac{1}{4}$ داریم:

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{4}\right)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \quad \to \quad \frac{16}{9} = 1\left(\frac{1}{4}\right)^{1-1} + 2\left(\frac{1}{4}\right)^{2-1} + \overbrace{\sum_{n=3}^{\infty} n\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}}^{I} \to I = \frac{16}{9} - 1 - \frac{2}{4} = \frac{5}{18}$$