مشروح کلاس ریاضی

ریاضی عمومی ۱ و ۲

(۱)

ریاضی ۹۰٫۷٫۲۴ جلسه دوم

$$f(x)=\begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

استفاده از تعریف مشتق

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$$

استفاده از فرمولهای مشتق

$$f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$$

$f'(0)\neq\lim_{x\to 0} f'(x)$ = وجود ندارد

تذکر ۷

تذکر ۷:

نکته: رابطه‌ی $f'(a)=\lim_{x\to a} f'(x)$ وقتی برقرار است که

۱) تابع f در $x=a$ پیوسته باشد

۲) $\lim f'(x)$ باید وجود داشته باشد (عدد یا بی‌نهایت)

در مثال بالا شرط اول برقرار است (پیوسته است)

شرط دوم برقرار نیست چون حد وجود ندارد پس نمی‌توان از فرمولهای مشتق استفاده کرد

هرگاه در یک نقطه ضابطه عوض شود یا تقسیم بر صفر داشته باشیم بهتر است از تعریف مشتق استفاده کنیم.

نکته: اگر $f(a)=0$ آنگاه

$f'(a)=$ (مشتق صفرشونده) $\times\lim$ (عبارت باقیمانده)

مثال:

$$f(x)=\overbrace{(x^2-4)}^{\text{عامل صفرشونده}}\overbrace{\sin\frac{\pi}{2x}}^{g(x)\ \text{عامل باقی‌مانده}}$$

$f'(2)=?$

$$f(2)=0\Rightarrow f'(2)=(2x)\lim_{x\to 2}\sin\frac{\pi}{2x}=2x\sin\frac{\pi}{4}=4\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$$

مشتق لگاریتمی: در موارد زیر برای محاسبه $f'(x)$ ابتدا $\ln f(x)$ را تشکیل داده و سپس مشتق می‌گیریم

۱) $f(x)=u(x)^{v(x)}$

۲) اگر f از ضرب و تقسیم چند عبارت بدست آمده باشد

$y = x^x$ $\qquad$ $y'(x) = ?$ $\qquad$ $\frac{۱۴}{۱۴۴}$

$y = x^x \Rightarrow \ln y = \ln x^x = x \ln x$

$\Rightarrow \ln y = x \ln x \Rightarrow \frac{y'}{y} = \ln x + x \times \frac{1}{x} \Rightarrow y' = y(1+\ln x) \Rightarrow$

$$\boxed{y' = x^x (1+\ln x)}$$

$f'(0) = ?$ $\quad f(x) = \frac{(x+1)^2 (x+2)^3}{(x+4)^{\frac{1}{2}} (x+8)^{\frac{1}{3}}}$ $\qquad$ $\frac{۱۵}{۱۴۴}$

$$\ln f(x) = \ln \frac{(x+1)^2 (x+2)^3}{(x+4)^{\frac{1}{2}} (x+8)^{\frac{1}{3}}}$$

$$\ln f = 2\ln(x+1) + 3\ln(x+2) - \frac{1}{2}\ln(x+4) - \frac{1}{3}\ln(x+8)$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x+2} - \frac{1}{2(x+4)} - \frac{1}{3(x+8)} \xrightarrow{x=0} \frac{f'(0)}{f(0)} = 2 + \frac{3}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{24}$$

$$\frac{f'(0)}{2} = \frac{10}{3} \Rightarrow y'(0) = 20/3$$

★ مشتق معکوس یک تابع $\qquad$ $f^{-1\,\prime}(y) = \frac{1}{f'(x)}$

اگر $f(a) = b$

$(a,b) \in f \Rightarrow (b,a) \in f^{-1}$

$$\boxed{(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}}$$

$f^{-1\,\prime}(-1)$ $\qquad$ $f(x) = \begin{cases} -x^2 & x \geq 0 \\ 1-x^3 & x < 0 \end{cases}$ $\qquad$ $\frac{۱۷}{۱۴۴}$ تست

$-x^2 = -1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow x = 1$ قابل قبول

$1 - x^3 = -1 \Rightarrow x^3 = 2 \Rightarrow x = \sqrt[3]{2}$ غ ق ق

$$f^{-1\,\prime}(-1) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{-2x} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

* مشتق تابع ضمنی $\qquad$ $f(x,y) = 0 \Rightarrow$

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x}{f'_y}$$

$\frac{۱۸}{۱۴۵}$ اگر $x^n y^m = (x+y)^{n+m}$ محاسبه $\frac{dy}{dx}$

$$x^n y^m = (x+y)^{n+m} \xrightarrow{\ln} \ln x^n y^m = \ln (x+y)^{n+m}$$

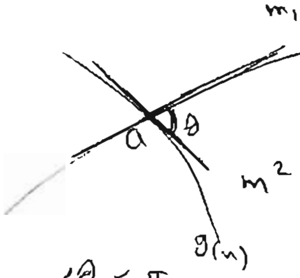
$$n\ln x + m\ln y = (n+m)\ln(x+y) \Rightarrow n\ln x + m\ln y - (m+n)\ln(x+y) = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{n}{x} + \frac{-(m+n)}{x+y}}{\frac{m}{y} - \frac{(m+n)}{(x+y)}} \xrightarrow{\text{ساده کردن}} = \frac{y}{x}$$

(۳)

$\frac{۱۲}{۲۲}$

زاویه تلاقی دو نمودار $y=1-x^2$ و $y=e^x$ در $x=0$ را بیابید



$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

$m_1 = f'(a)$

$m_2 = g'(a)$

$tg\,\theta = \left|\frac{m_2 - m_1}{1+m_1 m_2}\right|$

$y = 1-x^2 \Rightarrow y'(0) = 0 = m_1$

$y = e^x \Rightarrow y'(0) = e^0 = 1 = m_2$

$tg\,\theta = \left|\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}\right| = 1 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

مشتق دوم و بالاتر

$\frac{۳۹}{۱۴۵}$

$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ مطلوبست $f'(0)\,,\, f''(0) = ?$

تغییر راه

$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}-0}{x} = \frac{e^{-t^2}}{\frac{1}{t}} = \lim_{t\to\pm\infty} \frac{t}{e^{t^2}} = 0$

$t = \frac{1}{x} \Rightarrow t \to \pm\infty$

$f''(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} \Rightarrow \lim_{t\to\pm\infty} \frac{2t^3 e^{-t^2}}{\frac{1}{t}} = \frac{2t^4}{e^{t^2}} = 0$

$t = \frac{1}{x}$, $t \to \pm\infty$

$t \to \pm\infty \longrightarrow t^2 \to +\infty \longrightarrow$ پس می‌توان از قوانین هوپیتال استفاده کرد

$\frac{۳۱}{۱۴۰}$

$\begin{cases} x = t^2 - t \\ y = t^2 + t \end{cases}$ در $t=0$ $\frac{d^2y}{dx^2}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t+1}{2t-1} = z$

$y'' = \frac{-4}{(2t-1)^3} \overset{t=0}{\Rightarrow} 4$

$y'' = \frac{dz}{dx} = \frac{\frac{dz}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

$\frac{۳۰}{۱۴۹}$

اگر $\underbrace{x^2 - y^2 = 1}_{\text{ضمنی}}$ مطلوبست $\frac{d^2y}{dx^2}$

$2x - 2yy' = 0 \quad \Rightarrow y' = \frac{x}{y}$

$2 - (2y'y' + 2y''y) = 0 \quad 2 - 2y'^2 + 2yy'' = 0 \quad 2 - \frac{2x^2}{y^2} + 2yy'' = 0$

$\Rightarrow y'' = \frac{1}{y^3}$

$x^2 - y^2 = 1$

نکته : برای محاسبه ی $f^{(k)}(0)$ کافی است بسط f را تا x^k در رشته تیلور $g(x)$ بنامیم آنگاه

$$f^{(k)}(0) = g^{(k)}(0)$$

مثال، مشتق چهارم $f(x)=x\ln(1+x)$ در $x=0$ را بیابید

$$f(x) = x\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots\right) = \underbrace{x^2-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{3}x^4}_{g(x)}-\cdots$$

$$f^{(4)}(0) = g^{(4)}(0) = \frac{1}{3}(4!) = 8$$

نکته، اگر $f(a)=0$ برای تعیین مرتبه تکرار a کافی است از $f(x)$ در $x=a$ آنقدر مشتق بگیریم تا مخالف صفر شود آنگاه

$$\boxed{\text{اولین مرتبه ای از مشتق که در } a \text{ صفر نباشد} = \text{مرتبه تکرار } a}$$

مثال، عدد $x=\pi$ ریشه با چه تکراری برای $f(x)=1+\cos x$ می باشد؟

$f(\pi)=1+\cos\pi=0$

$f'(x)=-\sin x \;,\; f'(\pi)=0$

$f''(x)=-\cos x \;,\; f''(\pi)=1\neq 0$

$x=\pi$ ریشه با تکرار دو است

کاربرد مشتق :

- تعیین
  - $f'(x)>0 \Rightarrow$ f صعودی اکید
  - $f'(x)<0 \Rightarrow$ f نزولی اکید
  - $f'(x)=0 \rightarrow$ f تابع ثابت است

اکسترمم نسبی

کاندیدهای اکسترمم نسبی:
- مشتق در آنجا صفر شود
- مشتق در آنجا موجود نباشد

↓

جزئی از نقطه بحرانی

آزمون مشتق اول، اگر f در نقطه a دارای نقطه بحرانی بوده و f در a پیوسته باشد آنگاه

x		a	
f'	$-$		$+$
		Min	

x		a	
f'	$+$		$-$
		Max	

$\frac{1}{108}$ نقاط بحرانی و نوع آنها $f(x)=x^2 e^{-x^2}$

$$f'(x) = 2xe^{-x^2} - 2x^3 e^{-x^2}$$

$$= 2xe^{-x^2}(1-x)(1+x) = 0 \Rightarrow x = 0, 1, -1$$

x		-1		0		1	
f'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
		max		min		max	

وقتی یکی از بازه‌ها تغییر علامت شد برای بازه‌ی بعدی

می‌توان گفت که مثلاً عدد ۱ ریشه با صفر مرتبه تکراری است

در این حالت فقط $(x-1)$ را در نظر می‌گیریم. ۱ ریشه با مرتبه ۱ است

(فرد) پس علامت عوض می‌شود

$\frac{۲۳}{۲۱۳\ ج۲}$ تابع $f(x)=(x-2)^2(x+4)$ در $[a,b]$ وارون‌پذیر و $1\in[a,b]$

بزرگترین مقدار $b-a$ را بیابید

یک‌به‌یک بودن

ح: باید بازه‌هایی را بیابیم که علامت f' در آن ثابت باشد

$$f'(x) = 3(x-2)(x+2) = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

		-2		2	
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
	یک‌به‌یک		یک‌به‌یک		یک‌به‌یک

چون $1\in[a,b] \Rightarrow [-2,2]$

$$\max(b-a) = 2-(-2) = 4$$

$\frac{۳۹}{۱۵۰}$ معادله $3\operatorname{tg}x + x^3 = 2$ در $[0, \frac{\pi}{4}]$ چند جواب دارد؟ (عمران ۸۶)

$f(x) = 3\operatorname{tg}x + x^3 - 2$

$$f'(x) = 3(1+\operatorname{tg}^2 x) + 3x^2 > 0$$

f حداکثر یک ریشه دارد $\Longleftrightarrow$ صعودی اکید

$f(0) = -2 < 0$ و $f(\frac{\pi}{4}) = 3 + (\frac{\pi}{4})^3 - 2 > 0$

پس f حداقل یک ریشه دارد و لذا f بر بازه داده شده دقیقاً یک ریشه دارد.

تعداد جواب (نقد ۸۵ عمران ۸۸)

$$x^2 - x\sin x - \cos x = 0$$

$$f'(x) = \underbrace{x(2 - \cos x)}_{\text{مثبت}} = 0 \Rightarrow x = 0$$

x		0	
f'	$-$	0	$+$

برای هر یک از بازه هایی که علامت مشتق ثابت است، تعداد ریشه ها را می یابیم

حالت اول $x \in [0, +\infty) \Rightarrow f'(x) > 0$ صعودی اکید $\Rightarrow$ حداکثر یک ریشه یا بدون ریشه

$f(0) = -1 < 0$
$f(+\infty) > 0$ $\Rightarrow f(a)f(b) < 0 \Rightarrow$ حداقل یک ریشه $\Rightarrow$ پس دقیقاً یک ریشه وجود دارد

حالت دوم $x \in (-\infty, 0] \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow$ حداکثر یک ریشه

$f(0) = -1 < 0$
$f(-\infty) > 0$ $\Rightarrow f(a)f(b) < 0 \Rightarrow$ حداقل یک ریشه $\Rightarrow$ دقیقاً یک ریشه

پس در مجموع ۲ ریشه دارد

تعریف: نقطه ای که تقعر تابع حول آن عوض شود و خط مماس موجود باشد نقطه ی عطف نامیده می شود

f' موجود

کاندیدای عطف: f'' صفر شود / f'' موجود نباشد

آزمون مشتق دوم: فرض کنید $f'(a) = 0$ باشد آنگاه

الف) $f''(a) > 0$ آنگاه a می نیمم نسبی است

ب) $f''(a) < 0$ آنگاه a ماکزیمم نسبی است

تعمیم آزمون مشتق دوم، اگر $f'(a) = 0, \ldots, f^{(n-1)}(a) = 0, f^{(n)}(a) \neq 0$

n اولین مرتبه ای است که مشتق در a صفر نمی شود آنگاه

الف) اگر n زوج باشد $f^{(n)}(a) > 0$، a مینیمم است

ب) اگر n زوج باشد $f^{(n)}(a) < 0$، a ماکزیمم نسبی است

ج) اگر n فرد باشد a نقطه ی عطف است.

مثال: تابع $f(x)=x-\sin x$ مفروض است در $x=0$

الف) مرتبه صفر f را بیابید   ب) نوع نقطه را تعیین کنید.

$$f'(x)=1-\cos x \Rightarrow f'(0)=0$$

$$f''(x)=+\sin x \Rightarrow f''(0)=0$$

$$f'''(x)=+\cos x \Rightarrow f'''(0)=1 \qquad n=3$$

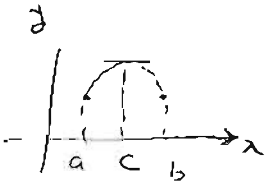
$\Rightarrow$ $x=0$ نقطه ی عطف

؟) $x=0$ با مرتبه ی تکرار $=3$

$$f(x)\sim f(0)+\frac{f'''(0)}{3!}(x-0)^3,\ x\to 0$$

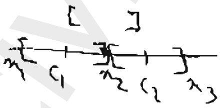
$$\Rightarrow x-\sin x \sim \frac{1}{6}x^3,\quad x\to 0$$

قضیه رول: اگر $f(x)$ بر $[a,b]$ پیوسته در (a,b) مشتق پذیر باشد $f(a)=f(b)$ آنگاه $a<c<b$ موجود است به طوریکه $f'(c)=0$



مثال: اگر $f(x)$ دو بار مشتق پذیر و دارای سه ریشه متمایز باشد تعداد جوابهای $f''(x)=0$ را بیابید

$$f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$$



$$\left.\begin{array}{l} f(x_1)=0=f(x_2) \Rightarrow f'(c_1)=0 \\ f(x_2)=0=f(x_3) \Rightarrow f'(c_2)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(c_1)=0=f'(c_2) \Rightarrow \underset{c_1<z<c_2}{f''(z)=0}$$

پس $f''(x)=0$ حداقل یک جواب دارد.

قضیه مقدار میانگین

f بر $[a,b]$ پیوسته و بر (a,b) مشتق پذیر باشد آنگاه $a<c<b$ موجود است که

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad f(b) \quad f(a)$$

مثال: $\frac{۳۰}{۳۶.۴۶۷}$ واحد که از قضیه مقدار میانگین کمک کنید مقدار $tg^{-1}7-tg^{-1}3$ در کدام بازه قرار دارد. (MBA 89)

گزینه ها (m, n)

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

$$f(x)=tg^{-1}x,\ \begin{cases} b=7 \\ a=3 \end{cases}$$

ابتدا بر بازه $[3,7]$ قضیه ی مقدار میانگین را بنویسیم

(1)

$$f'(c) = \frac{f(7)-f(3)}{7-3} = \frac{tg^{-1}7 - tg^{-1}3}{4} \Leftarrow 3 < c < 7$$ بین

$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$f'(c) = \frac{1}{1+c^2}$

$$tg^{-1}7 - tg^{-1}3 = \boxed{\frac{4}{1+c^2}}$$

باید برای $\frac{4}{1+c^2}$ ماکزیمم و مینیمم مطلق را بیابیم

$$0.08 < \frac{4}{1+c^2} < 0.4 \Rightarrow \boxed{0.08 < tg^{-1}7 - tg^{-1}3 < 0.4}$$

قاعده هوپیتال : $\frac{0}{0}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

به شرطی که حاصل حد برابر عدد شود یا بینهایت

مثال $\frac{29}{149}$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^x - x}{1-x+\ln x} \overset{H}{=} \lim_{x \to 1} \frac{x^x(\ln x+1) - 1}{-1+\frac{1}{x}} \overset{H}{=} \lim_{x \to 1} \frac{x^x(\ln x+1)^2 + x^x \cdot \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -2$$

$\frac{111}{209}$

$$y = \lim_{x \to 1} (2-x)^{\tan \frac{\pi x}{2}} \qquad \ln y = \lim_{x \to 1} \tan \frac{\pi}{2}x \ln(2-x)$$

$$\ln y = \lim_{x \to 1} \frac{\ln (2-x)}{\cot \frac{\pi}{2}x} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{-1}{2-x}}{-\frac{\pi}{2}(1+\cot g^2 \frac{\pi}{2}x)} = \frac{-1}{-\frac{\pi}{2}} = +\frac{2}{\pi} \qquad \ln y = \frac{2}{\pi} \Rightarrow$$

$$\boxed{y = e^{\frac{2}{\pi}}}$$

اکسترمم مطلق:

قضیه : اگر $f(x)$ بر $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه f دارای اکسترمم مطلق می باشد.

روش محاسبه :

۱) نقاط بحرانی داخل بازه

۲) نقاط ابتدا و انتهای بازه

مثال $\frac{۳۱}{۱۷۱}$ برد $f(x)=x+\sqrt{4-x^2}$ را بیابید

$$f'(x)=1+\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}=1-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}=0 \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}=1 \Rightarrow x^2=4-x^2 \quad x^2=2$$

$$x=\pm\sqrt{2}$$

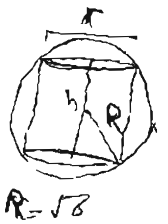
$$\text{و} \quad 4-x^2=0 \Rightarrow x=\pm 2$$

چون x همواره مثبت است
$-\sqrt{2}$ قابل قبول نیست

$$f(2)=2$$
$$f(-2)=-2$$
$$f(\sqrt{2})=2\sqrt{2} \Rightarrow R\in[-2,2\sqrt{2}]$$

جلسه سوم ۸۹/۸/۱

$\frac{۱۸}{۲۶۱۶}$ کره به شعاع $\sqrt{6}$ استوانه‌ای با حجم ماکزیمم محاط می‌کنیم. شعاع قاعده‌ی استوانه را محاسبه کنید. (مشتق ۸۴ و ۸۹)



$$V_{\text{استوانه}}=\pi r^2 h$$

$R=\sqrt{6}$

$$R^2=\left(\frac{h}{2}\right)^2+r^2 \Rightarrow 6=\frac{h^2}{4}+r^2 \Rightarrow h=2\sqrt{6-r^2}$$

$$V=2\pi r^2\sqrt{6-r^2}$$

روش اول: مشتق گیری $V'=0 \Rightarrow r$ بدست می‌آید.

روش دوم:

نکته ۳۸: اگر x و y دو متغیر مثبت باشند بطوریکه $x+y$ ثابت باشد آنگاه $x^\alpha y^\beta$ وقتی max می‌شود که

$$\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}$$

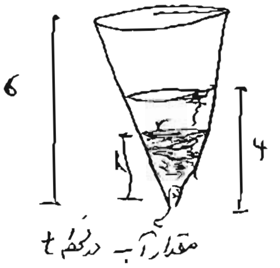
روش دوم: $2\pi(r^2)^1(6-r^2)^{\frac12} \Rightarrow$ $r^2+6-r^2=6$ ثابت $\Rightarrow$ نکته $\frac{r^2}{1}=\frac{6-r^2}{\frac12} \Rightarrow \frac{3}{2}r^2=6 \Rightarrow r^2=4 \Rightarrow r=\pm 2$

-2 که معنی ندارد پس $r=2$ درست است

$\frac{۸۳}{۱۸۰}$

$$\frac{dV}{dt}=0.5\ \frac{m^3}{min} = \text{سرعت ورود آب}$$

ارتفاع آب وقتی به ۴ متری برسد با چه سرعتی افزایش می‌یابد؟ $\frac{dh}{dt}$؟

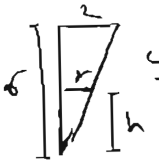


مقدار آب در لحظه t

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h \Rightarrow V=\frac{\pi}{27}h^3 \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \frac{dV}{dt}=\frac{\pi}{9}h^2\frac{dh}{dt} \Rightarrow$$

جایگذاری

$$0.5=\frac{\pi}{9}\times 16\times\frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt}=\frac{9}{32\pi}\ \left(\frac{m}{min}\right)$$



$$\xrightarrow{\text{تالس}} \frac{r}{2}=\frac{h}{6} \Rightarrow r=\frac{h}{3}$$

فرایندهای نمایی :

فرض کنید $x = x(t)$ یک کمیت است که برحسب زمان تغییر می‌کند به طوری که آهنگ تغییر آن در هر لحظه متناسب با مقدار آن در هر لحظه است یعنی $\frac{dx}{dt} = kx$ در نتیجه $x(t) = x_0 e^{kt}$

ضریب ثابت $k \neq 0$

نکته : در فرایندهای نمایی نسبت مقدار x در دو زمان مختلف فقط به ΔT وابسته است و نه به x_0 ← $\Delta t = t_2 - t_1 \Rightarrow \frac{x(t_2)}{x(t_1)} = e^{k\Delta T}$

$\frac{۸۴}{۱۸۱}$. نسبت درگذشتگان یک جمعیت ۹ در هزار و نسبت متولدین ۲۱ در هزار این جمعیت است. اگر این نسبت دائماً برقرار بماند تا چند سال جمعیت دو برابر می‌شود؟ $(\ln 2 \simeq 0.69)$ (MBA 83 ، سیستم آزاد - ۸۵)

جمعیت $x = x(t)$ سال و نرخ افزایش جمعیت $= \frac{21-9}{1000} = \underbrace{\frac{12}{1000}}_{k}$

$$\frac{dx}{dt} = \underbrace{\frac{12}{1000}}_{k} x \Rightarrow \frac{x(t_2)}{x(t_1)} = e^{k\Delta t} \Rightarrow 2 = e^{\frac{12}{1000}\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{1000}{12}\times \ln 2 \simeq 57.5$$

دیفرانسیل و تقریب خطی :

تعریف . اگر $y = f(x)$ دیفرانسیل f عبارت است از $dy = f'(x)dx$

و تقریب خطی عبارت است از $f(x_0+\Delta x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$

$$\underbrace{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}_{\Delta y} \simeq \underbrace{f'(x_0)\Delta x}_{dy} \Rightarrow \Delta y \simeq dy$$

$\frac{۹۰}{۱۸۳}$ اضلاع یک مکعب به ضلع 10m در اثر حرارت 2cm بزرگ شده‌اند، مقدار تقریبی سطح مکعب حاصل را بیابید.

سطح مکعب $= 6x^2$

$S(10.02) = ?$ $\Rightarrow S(10.02) \simeq S(10) + S'(10)(0.02) = 600 + 2.4 = 602.4$

فصل چهارم : انتگرال

انتگرال نامعین:
- حل با فرمول
- روش های انتگرال گیری (۵ روش)

۱) روش تغییر متغیر :

مثال: $\int \frac{x^2 dx}{x^6+64} \xrightarrow[du=3x^2dx]{u=x^3} \int \frac{\frac{1}{3}du}{u^2+8^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}\tan^{-1}\left(\frac{u}{8}\right)+C = \frac{1}{24}\tan^{-1}\left(\frac{x^3}{8}\right)+C$

مثال: $\int \sqrt[3]{2x^3+x^5}\,dx \overset{\text{فاکتورگیری}}{=} \int x\sqrt[3]{2+x^2}\,dx \xrightarrow[du=2xdx]{u=2+x^2} \int \frac{1}{2}u^{\frac{1}{3}}du = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}u^{\frac{4}{3}}+C$

$= \frac{3}{8}(2+x^2)^{\frac{4}{3}}+C$

$\int \frac{dx}{1+e^x}$ — ۳ عمران ۸۷ / ۲۴۸ عمران آزاد ۸۸

روش اول: $\int \frac{dx}{1+e^x} = \int \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}dx = \int\left(1-\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx = x-\ln(1+e^x)+C$

روش دوم: $\int \frac{dx}{1+e^x} \xrightarrow{\times e^{-x}} \int \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}dx = -\ln(e^{-x}+1)+C = -\ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right)+C$

$= \ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)+C = \ln e^x - \ln(1+e^x)+C = x-\ln(1+e^x)+C$

۲) انتگرال توابع مثلثاتی $\int \sin^m x\cos^n x\,dx$

مثال: $\int \sin^3 x\cos^4 x\,dx = \int \sin x(1-\cos^2 x)\cos^4 x$

در حالتی که حداقل یکی از توانها فرد است یک توان را خارج می کنیم و بقیه را به عامل دیگری تبدیل می کنیم.

یعنی در این مثال یک $\sin x$ خارج و $\sin^2 x$ را به $\cos^2 x$ تبدیل می کنیم

$\int \sin x(\cos^4 x-\cos^6 x)\,dx \xrightarrow[du=-\sin x\,dx]{u=\cos x} \int u^4-u^6(-du) = \int(u^6-u^4)\,du = \frac{1}{7}u^7-\frac{u^5}{5}$

$= \frac{\cos^7 x}{7}-\frac{1}{5}\cos^5 x$

نکته: برای محاسبه‌ی انتگرال توابع گویا برحسب $\sin x$ و $\cos x$ قرار دهید $z = \tan\frac{x}{2}$ ،

$$dz = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)dx \Rightarrow dx = \frac{2\,dz}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2\,dz}{1+z^2}$$

$$z = \tan\frac{x}{2},\quad dx = \frac{2\,dz}{1+z^2},\quad \sin x = \frac{2z}{1+z^2},\quad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}$$

$$\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2z}{1+z^2}\ ,\quad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}$$

از اتحادهای مثلثاتی فصل اول

مثال: $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$ $\xrightarrow[z=\tan\frac{x}{2}\ \text{حل}]{\text{کسر گویا برحسب Sinx و Cosx است}}$ $\displaystyle\int \frac{\frac{2\,dz}{1+z^2}}{1+\frac{2z}{1+z^2}+\frac{1-z^2}{1+z^2}} = \int \frac{dz}{1+z} = \ln|1+z|+c$

$$= \ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right| + c$$

۳) انتگرال از توابع رادیکالی

مثال: عمران ۸۶

$$\int \frac{dx}{x-\sqrt{x}} \xrightarrow[t\geq 0]{x=t^2} \int \frac{2t\,dt}{t^2-t} = \int \frac{2\,dt}{t-1} = 2\ln|t-1|+c$$
$$= 2\ln|\sqrt{x}-1|+c$$

نکته: تغییر متغیرهای معروف $(a>0)$

1) $\sqrt{a^2-x^2} \Rightarrow x = a\sin t \qquad -\frac{\pi}{2}\leq t\leq\frac{\pi}{2}$

2) $\sqrt{a^2+x^2} \Rightarrow x = a\tan t \qquad -\frac{\pi}{2}< t<\frac{\pi}{2}$

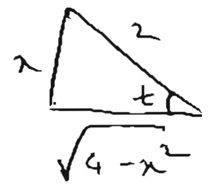
3) $\sqrt{x^2-a^2} \rightarrow x = a\sec t \qquad 0\leq t\leq\pi-\left\{\frac{\pi}{2}\right\} \Rightarrow t\in[0,\pi]-\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

مثال. $\displaystyle\int \sqrt{4-x^2}\,dx \xrightarrow[dx=2\cos t\,dt]{x=2\sin t} \int \sqrt{4(1-\sin^2 t)}\ 2\cos t\,dt = \int 2\cos t\cdot 2\cos t\,dt$

چون علامت t در ربع اول و چهارم مثبت است نیازی به قدر مطلق نیست

$$\int 4\cos^2 t\,dt = \int (2+2\cos 2t)\,dt = 2t+\sin 2t + c = 2\sin^{-1}\frac{x}{2}+2\sin t\cos t$$
$$= 2\sin^{-1}\frac{x}{2} + \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + c$$

نکته: در صورت فراموش کردن نسبتهای مثلثاتی در این گونه مثالها که نسبت مثلثی رسم نمود و روی آن sin یا cos یا tan را مشخص کرد. تغییر متغیر را به درستی می کنید



$\sin t = \frac{x}{2}$

۴) روش تجزیه به کسرهای جزئی : $f(x) = \frac{P(x)}{q(x)}$

این روش برای محاسبه‌ی انتگرال توابعی به شکل $f(x) = \frac{P(x)}{q(x)}$ که P و q دو چند جمله‌ای هستند و درجه‌ی صورت از مخرج کمتر است استفاده می شوند.

ابتدا $q(x)$ را به صورت ضرب عوامل می نویسیم که به دو فرم درخواهند آمد:

الف) $(x-a)^m$

ب) $(x^2+ax+b)^k$ که $\Delta = a^2-4b<0$

حالت اول) $(x-a)^m$

مثال $f(x) = \frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$

نکته: در محاسبه‌ی ضرایب مخرج هر کسر را در $f(x)$ ضرب می کنیم و به جای x ریشه‌ی آن را قرار می دهیم

مثلا $A = \lim_{x\to 0} x f(x) = \frac{1}{(x-1)^2} = 1 \Rightarrow \boxed{A=1}$

$C = \lim_{x\to 1} (x-1)^2 f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x} = 1 \Rightarrow \boxed{C=1}$

با این روش B را نمی توان محاسبه کرد. این نکته فقط برای توان های بزرگ موجود که کسرها رو دارد

نکته: کل عبارت را در x (همه‌ی دو طرف) ضرب کرده و x را به سمت بی نهایت میل می دهیم

در مثال قبل : $\frac{x}{x(x-1)^2} = A + \frac{Bx}{x-1} + \frac{Cx}{(x-1)^2}$

$\lim_{x\to\infty} \quad 0 = A + B + 0 \Rightarrow A+B=0 \Rightarrow \boxed{B=-1}$

مثال: $\displaystyle\int \frac{1}{x(x-1)^2}\,dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\right) dx = \ln x - \ln(x-1) + \underset{-1\,(x-1)^{-1}}{}$

$$= \ln|x| - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + K$$

<u>حالت دوم)</u> $(x^2+ax+b)^k$ که فاقد ریشه حقیقی باشد

مثال: $$f(x) = \frac{x}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$\rightarrow A = \lim_{x\to 1} (x-1)\,f(x) = \frac{1}{2} \qquad \boxed{A = \frac{1}{2}}$$

کل عبارت را در x ضرب کرده و $x \to \infty$ (نکته مهم)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{(x-1)(x^2+1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{Ax}{x-1} + \frac{(Bx+C)x}{x^2+1}$$

$$0 = A + B \Rightarrow \boxed{B = -\frac{1}{2}}$$

اگر بعد از انجام این مراحل باز هم ضریبی باقی ماند با استفاده از عددگذاری ضریب را پیدا می کنیم.

$$x = 0 \rightarrow \qquad \frac{0}{-1\times 1} = -A + C \rightarrow C = A \Rightarrow \boxed{C = \frac{1}{2}}$$

$$\int \frac{x}{(x-1)(x^2+1)}\,dx = \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}{x^2+1} \right) dx = \frac{1}{2}\left(\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \tan^{-1}x\right) + K$$

$$\frac{-x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}$$

$$\int \rightarrow -\frac{1}{2}\ln(x^2+1) \qquad \int \rightarrow \tan^{-1}x$$

۵) روش جزء به جزء $\displaystyle\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$$\int \underline{f(x)}\; \underline{g(x)\,dx} = ?$$

متغیر توابع از درجه اول (گروه ۱) — متغیر توابع درجه اول (گروه ۳)

گروه ۱	گروه ۲	گروه ۳
لگاریتم - آرک	چند جمله ای	توابع نمایی سینوس و کسینوس

در گروه ۱ و ۳ فرض بر این است که متغیر توابع درجه یک هستند e^x , $\sin 2x$ و ...

درموارد زیر استفاده از جزء به جزء لازم است

۱* انتگرال از گروه (۱) ← u از گروه (۱)

۲* انتگرال ضرب گروه (۱) و (۲) ← u از گروه (۱) انتخاب می‌شود

۳* انتگرال ضرب گروه (۲) در (۳) ← u از گروه (۲) انتخاب می‌شود

۴* انتگرال ضرب گروه (۳) در یکدیگر (تناوب در مشتق) ← u به دلخواه

مثال: $\int \ln x \, dx = uv - \int v\, du = x\ln x - \int x \frac{dx}{x} = x\ln x - x = x(\ln x - 1) + C$

$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$

$dv = dx \Rightarrow v = x$

* در انتگرال از توابع فرد sec نیز حتماً باید از جزء به جزء استفاده کرد *

$$\int \sec^3 x\, dx = \int \underbrace{\sec x}_{u} \cdot \underbrace{\sec^2 x\, dx}_{dv} = \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x\, dx$$

$u = \sec x \Rightarrow du = \sec x \tan x$

$dv = \sec^2 x\, dx \Rightarrow v = \tan x$

$\tan^2 x = \sec^2 x - 1 \Rightarrow$

$$\int \sec^3 x\, dx = \sec x \tan x - \int \sec^3 x\, dx + \int \sec x\, dx$$

$$2\int \sec^3 x\, dx = \sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x| \Rightarrow$$

$$\int \sec^3 x\, dx = \frac{1}{2}\left(\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|\right) + C$$

درمورد توان‌های فرد $\sec x$ همواره با همچنین حالتی مواجه هستیم

مثال: $\int (x^2 - x + 2)\, e^{2x}\, dx$

هنگامیکه با حاصلضرب (۲) در (۳) مواجه هستیم می‌نویسیم:

همیشه اولین علامت مثبت سپس یک درمیان مثبت منفی

	مشتق	انتگرال
+	$x^2 - x + 2$	e^{2x}
−	$2x - 1$	$\frac{1}{2}e^{2x}$
+	2	$\frac{1}{4}e^{2x}$
−	0	$\frac{1}{8}e^{2x}$

$: (x^2 - x + 2)\left(\frac{e^{2x}}{2}\right) - (2x - 1)\left(\frac{1}{4}e^{2x}\right) + 2\left(\frac{1}{8}e^{2x}\right) - \cancel{\int 0 \times \frac{1}{8}e^{2x}}$ C

$=$

در لحظه توقف عبارت‌ها را با حفظ علامت به شکل ضرب می‌کنیم و انتگرال می‌گیریم

توقف در چند جمله‌ای‌ها وقتی است که مشتق به صفر برسد

(۱) در مسائلی که نمی‌دانیم در کجا توقف کنیم برخی روبرو دقت می‌کنیم. اگر بتوان دیگه بدون استفاده از جزء به جزء حاصل انتگرال‌گیری هستند همانجا متوقف می‌شویم.

(۲) اگر در سوالی حاصلضرب اعضای سطری ضریبی از حاصلضرب سطر اول شد باید توقف کنیم

مثال $\int e^x \sin x \, dx = I$

	مشتق	انتگرال
$+$	e^x	$\sin x$
$-$	e^x	$-\cos x$
$+$	e^x	$-\sin x$

ضرب و انتگرال

$$I = -e^x \cos x + e^x \sin x + \int -e^x \sin x$$

$$2I = e^x(\sin x - \cos x)$$

$$I = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C$$

(مکانیک ۸۶) $\int \cos^n x \, dx = ?$ $\frac{18}{243}$

گزینه ۳: $\frac{1}{n}\cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x \, dx$

دستور کاهشی را می‌خواهد یا رابطه بازگشتی

دستور کاهشی: $I_n = \int \underbrace{\cos^{n-1} x}_{u} \, \underbrace{\cos x \, dx}_{dv} = \cos^{n-1} x \cdot \sin x - \int -(n-1)\cos^{n-2} x \cdot \sin^2 x \, dx$

$u = \cos^{n-1} x$

$du = (n-1)\cos^{n-2} x(-\sin x)$

$dv = \cos x \, dx \quad , \quad v = \sin x$

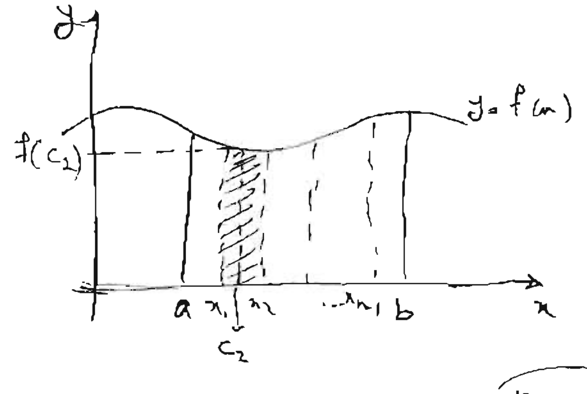
$$= \cos^{n-1} x \sin x + \int (n-1)\cos^{n-2} x (1-\cos^2 x)\, dx$$

$$I_n = \cos^{n-1} x \sin x + \int (n-1)\cos^{n-2} x - \underbrace{\int (n-1)\cos^n x}_{-(n-1) I_n}$$

$$I_n + (n-1) I_n = \cos^{n-1} x \sin x + \int (n-1)\cos^{n-2} x \, dx$$

$$\frac{n-1+1}{n-1} I_n = n I_n = \cos^{n-1} x \sin x + \int (n-1)\cos^{n-2} x \, dx$$

$$I_n = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x \, dx$$



بازه kام $[x_{k-1}, x_k]$

$c_k \in [x_{k-1}, x_k]$

$\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ فاصله هر بازه

$$f(c_1)\Delta x + \cdots + f(c_n)\Delta x = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x \longrightarrow$$ مجموع ریمان تابع $f(x)$

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx$$

قضیه اساسی حساب دیفرانسیل :

$$* \quad \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

$$* \quad \frac{d}{dx}\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)\,dt = u'(x)\,.\,f(u(x)) - v'(x)\,f(v(x))$$

$$* \quad \frac{d}{dx}\int_{v(x)}^{u(x)} f(t,x)\,dt = u'(x)\,f(u(x),x) - v'(x)\,f(v(x),x) + \underbrace{\int_{v(x)}^{u(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\,dt}_{\text{مشتق را به داخل انتگرال منتقل کنیم}}$$

$\dfrac{۲۶}{۲ج۱.۹}$ بیشترین مقدار تابع $f(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2}\,dt$ در نقطه‌ای با کدام x رخ می‌دهد؟

$$f'(x) = 2e^{-4x^2} - 1\,.\,e^{-x^2} = e^{-4x^2}\left(2 - e^{3x^2}\right) = 0 \Rightarrow e^{3x^2} = 2 \Rightarrow 3x^2 = \ln 2 \rightarrow x = \pm\sqrt{\tfrac{1}{3}\ln 2}$$

x		$-\sqrt{\frac{1}{3}\ln 2}$		$+\sqrt{\frac{1}{3}\ln 2}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$

حال باید ببینیم + باید در نظر گرفت یا منفی

پس نقطه $\sqrt{\frac{1}{3}\ln 2}$ درست است

$\dfrac{۳۰}{۲۷.}$ $\dfrac{dF}{dt}$ را حساب کنید (عمران ۸۳)

$$F(t) = \int_0^t \frac{\sin(tx)}{x}\,dx$$

$$\frac{dF}{dt} = (1)\times\frac{\sin t^2}{t} - 0 + \underbrace{\int_0^t \frac{x\cos tx}{x}\,dx}_{\text{مشتق داخل انتگرال نسبت به } t} = \frac{\sin t^2}{t} + \underbrace{\frac{1}{t}\sin tx\Big]_0^t}_{\frac{\sin t^2}{t}} = \frac{2\sin t^2}{t}$$

(۸

$\frac{۳۱}{۲۷۰}$ $f(x)=\int_0^x (1+t^3)^{-\frac{1}{2}}dt$ و g تابع معکوس f باشد. کدام گزینه درست است

3) $g''(x)=\frac{3}{2}g^2(x)$

$g=f^{-1}$ $\qquad f'(x)=1(1+x^3)^{-\frac{1}{2}}-0$

$$g''(y)=-\frac{f''(x)}{f'^3(x)}=-\frac{-\frac{1}{2}(3x^2)(1+x^3)^{-\frac{3}{2}}}{(1+x^3)^{-\frac{3}{2}}}=\frac{3}{2}x^2=\frac{3}{2}g^2(y)$$

$$y=f(x)\Rightarrow x=f^{-1}(y)=g(y)$$

درس امروز تا صفحه ۲۷۱

جلسه آینده: محاسبه معین / ناسره / تا ۶۶

کاربرد انتگرال (مساحت + حجم)

جلسه چهارم ۸۹/۸/۸

محاسبه انتگرال معین

$$F(x)=\int f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$$

$\frac{۴۱}{۲۷۴}$ $$\int_1^e \frac{dx}{x(\ln^2 x+\ln x+1)}\xrightarrow[du=\frac{dx}{x}]{u=\ln x}\int_0^1\frac{du}{u^2+u+1}=\int_0^1\frac{du}{(u+\frac{1}{2})^2+\underbrace{\frac{3}{4}}_{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}}=\frac{1}{(\frac{\sqrt{3}}{2})}\tan^{-1}\left(\frac{u+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)\Big|_0^1$$

برای کران بالا و پایین: $1\leqslant x\leqslant e\Rightarrow 0\leqslant \underbrace{\ln x}_{u}\leqslant 1$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

محدوده تغییر متغیر $\sim 0\leqslant t\leqslant \pi-\{\frac{\pi}{2}\}$

$\frac{۵۱}{۲۷۹}$ $$\int_{-2}^{-1}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx\xrightarrow[dx=\sec t\tan t\,dt]{x=\sec t}\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}\frac{\sqrt{\tan^2 t}}{\sec t}\cdot\sec t\tan t\,dt=\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}\frac{|\tan t|}{\sec t}\cdot\sec t\tan t\,dt=$$

$x=-1\Rightarrow \sec t=-1\Rightarrow \cos t=-1\Rightarrow t=\pi$

$x=-2\Rightarrow \sec t=-2\Rightarrow \cos t=-\frac{1}{2}\Rightarrow t=\frac{2\pi}{3}$

با توجه به حدود $\tan t$ منفی است

پس قدر مطلق را برمی داریم و یک منفی می گذاریم

$$=-\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}\tan^2 t\,dt=-\int(\sec^2 t-1)dt$$

$$=-(\tan t-t)\Big|_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}$$

(۱۹) $\frac{۵۵}{۲۸۰}$ $\int_0^1 \tan^{-1}\sqrt{x}\,dx$

روش اول، $x=t^2$ ، $t\geq 0$

$dx=2t\,dt$

$$=\int_0^1 \underbrace{\tan^{-1}t}_{u}\cdot\underbrace{(2t\,dt)}_{dv}$$

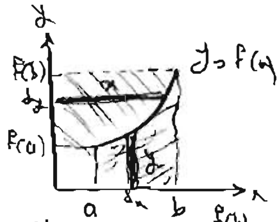
$v=t^2$

$du=\frac{dt}{t^2+1}$

$$=t^2\cdot\tan^{-1}t\Big|_0^1-\int_0^1\frac{t^2}{t^2+1}dt=\frac{\pi}{4}-\int_0^1\frac{t^2+1-1}{t^2+1}=\frac{\pi}{4}-\int 1\,dt+\int\frac{dt}{t^2+1}$$

$$=\frac{\pi}{4}+\left(-t+\tan^{-1}t\right)\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}-1$$

نکته:



$y=f(x)\Rightarrow x=f^{-1}(y)$

$$\int_a^b f(x)\,dx+\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x)\,dx=b\,f(b)-a\,f(a)$$

روش دوم: استفاده از نکته،

$f(x)=\tan^{-1}\sqrt{x}$, $a=0$, $b=1$, $f(a)=0$ $f(b)=\frac{\pi}{4}$

$$\int_0^1\tan^{-1}\sqrt{x}\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2x\,dx=1\times\frac{\pi}{4}-0=\frac{\pi}{4}$$

برای بدست آوردن تابع معکوس $y=\tan^{-1}\sqrt{x}\Rightarrow\tan y=\sqrt{x}\Rightarrow x=\tan^2y$ عوض کردن x و y $y=\tan^2x$

$$\Rightarrow\int_0^1\tan^{-1}\sqrt{x}\,dx=\frac{\pi}{4}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sec^2x-1)\,dx=\frac{\pi}{4}-(\tan x-x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{2}-1$$

$\frac{۳}{ج۲ ص۱۹۹}$ $I_n=\int_0^a\underbrace{(a^2-x^2)^n}_{u}\underbrace{dx}_{dv}$

رابطه I_n ، I_{n-1} را بیابید (عمران ۸۵)

$I_n=\frac{2na^2}{2n+1}I_{n-1}$ گزینه ۴)

$du=n(a^2-x^2)^{n-1}(-2x)dx=-2nx(a^2-x^2)^{n-1}dx$

$dv=dx\Rightarrow v=x$

$$I_n=x(a^2-x^2)^n\Big|_0^a-\int_0^a(-2n)x^2(a^2-x^2)^{n-1}dx$$

$$I_n=0-2n\int_0^a\underbrace{-x^2}_{a^2-x^2-a^2}(a^2-x^2)^{n-1}dx=-2n\left[\int_0^a(a^2-x^2)^n dx-a^2\int(a^2-x^2)^{n-1}dx\right]$$

$$I_n+2nI_n=+2na^2I_{n-1}\Rightarrow I_n=\frac{2na^2}{2n+1}I_{n-1}$$

مثال: میانگین تابع $f(x)=[2x]$ در بازه $[0,1]$ را بدست آورید.

$$f(x) \text{ میانگین } = \frac{\int f(x)}{\text{طول بازه}} = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

تابع در بازه‌های مختلف چندضابطه‌ای است

$$\text{میانگین} = \frac{\int_0^1 [2x]\,dx}{1-0}$$

$$\int_0^1 [2x]\,dx = \int_0^{\frac12}(0)\,dx + \int_{\frac12}^1 (1)\,dx = x\Big|_{\frac12}^1 = 1-\frac12 = \frac12$$ جواب

۴۱/۲۸۲ $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x - \cos x|\,dx$$

تابع قدرمطلق نیز چندضابطه‌ای است

$$\sin x - \cos x = 0 \Rightarrow \sin x = \cos x \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x - \sin x\,dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x - \cos x = (\sin x + \cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + (-\cos x - \sin x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt2}{2}-1\right) + \left(-1+\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt2}{2}\right) = \sqrt2 - 1 - 1 + \sqrt2 = 2\sqrt2 - 2$$

محاسبه مجموع با انتگرال معین — بیش از ۱۰ بار سوال کنکور بوده

۴۳/۲۸۴ $$\lim_{n\to+\infty}\Big(\underbrace{\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+4}+\dots+\frac{n}{n^2+n^2}}_{n \text{ جمله}}\Big)$$

همواره فرض کنید مجموع داده شده برابر مجموع ریمان تابع $f(x)$ روی بازه‌ی $[0,1]$ باشد یعنی $a=0$ و $b=1$

در سوال: $$\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x = \sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}$$

$$\begin{cases}\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac1n \\ x_{k-1}\le c_k \le x_k, \Rightarrow \frac{k-1}{n}\le c_k \le \frac{k}{n} \\ x_k = a + k\Delta x = \frac{k}{n}\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(c_k)\underbrace{\Delta x}_{\frac1n} = \frac{n}{n^2+k^2} \Rightarrow f(c_k) = \frac{n^2}{n^2+k^2}$$

$$\Rightarrow f(c_k) = \frac{1}{1+\underbrace{\left(\frac{k}{n}\right)^2}_{c_k}} \Rightarrow c_k = \frac{k}{n}$$

$$f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\text{جواب ج} = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} = \tan^{-1}x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

در ادامه‌ی راه حل که تابع $\frac{1}{1+x^2}$ به وجود آمد متغیر دیگری به جز x به وجود آمد شکل $\frac{n}{1+x^2}$ نشان می‌دهد که مجموع، مجموع ریمان نبوده و روش حل اشتباه است

(۲۱)

چهار مرحله‌ی زیر برای سرعت بخشیدن به حل چنین مسائلی است

۱) پیدا کردن جمله‌ی عمومی مجموع ریمان

۲) ضرب کردن n در جمله‌ی عمومی ، در این قسمت سعی می‌کنیم حالت $\frac{k}{n}$ ایجاد کنیم

۳) حدس زدن C_k و تبدیل آن

۴) بدست آوردن جواب از طریق انتگرال گیری $\int_0^1 f(x)\,dx$

مثال $\frac{۲۶}{۲۸۳}$ $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\left(\sqrt{n^2-1^2}+\sqrt{n^2-2^2}+\dots+\sqrt{n^2-n^2}\right)$

جمله عمومی : $\frac{1}{n^2}\sqrt{n^2-k^2}$

جمله عمومی $\times n$ $= \frac{1}{n}\sqrt{n^2-k^2} = \sqrt{\frac{n^2}{n^2}-\frac{k^2}{n^2}} = \sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2} \Rightarrow C_k=\frac{k}{n}$

$f(x)=\sqrt{1-x^2}$ $\quad$ جواب $= \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx \xRightarrow{x=\sin t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sqrt{\cos^2 t}}_{|\cos t|}\,\cos t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1+\cos 2t)\,dt = \frac{\pi}{4}$

انتگرال ناسره (مجازی)

مثال : $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{dx}{x^2+1} = \lim (\tan^{-1}x)\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty} \tan^{-1} b = \frac{\pi}{2}$ نوع ۱

انتگرال همگرا

$\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{a\to0^+} \int_a^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{a\to0^+} \frac{-1}{x}\Big|_a^1 = \lim -1+\frac{1}{a} = +\infty$ نوع ۲

انتگرال واگرا

نکته ۱) فرض کنید $P\in\mathbb{R}$ $\int_{\text{عدد مثبت}}^{+\infty} \frac{dx}{x^P}$ همگراست اگر و تنها اگر $P>1$

نکته ۲) $\int_{x_0}^{\text{عدد}} \frac{dx}{(x-x_0)^P}$ همگراست اگر و تنها اگر $P<1$

مثال: بررسی کنید انتگرال زیر واگراست یا همگرا

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{(x-2)^5}$$ = می‌شکنیم تا هر انتگرال فقط یک نقطه ناسره داشته باشد

$$=\underbrace{\int_2^3\frac{dx}{(x-2)^5}}_{\text{واگرا}}+\underbrace{\int_3^{+\infty}\frac{dx}{(x-2)^5}}_{\text{همگرا}} \Rightarrow$$ واگرا

آزمون همگرایی: فرض کنید $\int_a^b f(x)\,dx$ و $\int_a^b g(x)\,dx$ ناسره اند و نقطه‌ی ناسره‌ی آنها a باشد.

۱) آزمون مقایسه: $f(x)\geq g(x)\geq 0$

الف) اگر $\int_a^b f(x)\,dx$ همگرا باشد نتیجه می‌دهد که $\int_a^b g(x)\,dx$ نیز همگراست

ب) اگر $\int_a^b g\,dx$ واگرا باشد نتیجه می‌دهد که $\int_a^b f\,dx$ نیز واگراست

۲) آزمون هم‌ارزی: فرض کنید در x_0 داریم $f(x)\sim g(x)$ آنگاه: $\int_a^b f\,dx$ و $\int_a^b g\,dx$ یا هر دو همگرا یا هر دو واگرا هستند
مهمترین

۳) آزمون همگرایی مطلق: اگر $\int_a^b |f|\,dx$ همگرا باشد آنگاه $\int_a^b f\,dx$ نیز همگراست. (در این شرایط انتگرال $\int_a^b f\,dx$ همگرای مطلق نامیده می‌شود)

مثال: بررسی کنید همگرایی و واگرایی انتگرال‌های زیر:

1) $\int_1^{+\infty}\underbrace{\frac{x^2+1}{x^3+x\sqrt{x}+2}}_{f(x)}\,dx$

$x=+\infty \quad f(x)\sim\frac{x^2}{x^3}=\overbrace{\boxed{\frac{1}{x}}}^{g(x)}\Rightarrow\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^1}$

با توجه به نکته
انتگرال واگرا

بنابه آزمون هم‌ارزی نتیجه می‌دهد انتگرال صورت سوال واگراست

2) $I=\int_{\boxed{0}}^{\pi}\underbrace{\frac{\sin(\frac{1}{x})}{\sqrt{x}}}_{f(x)}\,dx$

نقطه ناسره

$f(x)$ همواره نامنفی نیست $\quad x=0\longrightarrow \sin(+\infty)$

که علامت آن در حال تغییر است پس مشخص نیست و از آزمون مقایسه نمی‌توان استفاده کرد

$J=\int_0^{\pi}\left|\frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}\right|dx$

حال با استفاده از آزمون همگرایی مطلق و مثبت شدن تابع می‌توان از آزمون اول استفاده کرد

$0\leq\left|\frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}\right|=\frac{|\sin\frac{1}{x}|}{\sqrt{x}} \quad , \quad -1\leq\sin\frac{1}{x}\leq 1\Rightarrow|\sin\frac{1}{x}|\leq 1$

$\Rightarrow\frac{|\sin\frac{1}{x}|}{\sqrt{x}}\leq\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\longrightarrow P=\frac{1}{2}$ همگراست

پس بنابه آزمون مقایسه J نیز همگرا می‌شود

پس $\int$ همگراست درنتیجه I نیز همگراست (بنابه همگرایی مطلق)

۸۶/۲۹۹ اگر $\alpha > \beta$ باشد حدود α و β را طوری بیابید که انتگرال زیر همگرا شود. ۲۹۹

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha + x^\beta} = \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha + x^\beta} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha + x^\beta}$$

$$x=0 \Rightarrow \frac{1}{x^\alpha + x^\beta} = \frac{1}{x^\beta} \xrightarrow{\text{بنا به نکته } 2} \beta < 1 \quad \text{همگراست}$$

$$x=+\infty \Rightarrow \frac{1}{x^\alpha + x^\beta} = \frac{1}{x^\alpha} \longrightarrow \alpha > 1 \quad \text{همگراست}$$

محاسبه انتگرال ناسره ← اگر ناسرگی داخل بازه نباشد برای محاسبه مقدار انتگرال ناسره مانند معین رفتار می‌کنیم

* اگر ناسرگی داخل بازه باشد ابتدا با آزمون‌های گفته شده بررسی می‌کنیم که انتگرال همگراست یا واگراست، چنانچه همگرا باشد مانند معین آن را حل می‌کنیم

۷۵/۲۹۳

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{\cosh t}$$

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = ? \quad = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\underbrace{\cosh t}_{\text{هیچ‌وقت صفر نمی‌شود}}} = \int_0^{+\infty} \frac{2dt}{e^t + e^{-t}} = \int_0^{+\infty} \frac{2e^t dt}{e^{2t}+1} \xrightarrow[du = e^t dt]{u = e^t} \int_1^{+\infty} \frac{2du}{u^2+1}$$

$$\left(2\tan^{-1} t\right)_1^{+\infty} = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

۲۷/ ۲ ج ۱۰۹

$$\int_0^{+\infty} e^{-3x} \sin 4x \, dx = I$$

مشتق	انتگرال
$(+)\ e^{-3x}$	$\sin 4x$
$(-)\ -3e^{-3x}$	$-\frac{1}{4}\cos 4x$
$(+)\ 9e^{-3x}$	$-\frac{1}{16}\sin 4x$

$$I = -\frac{1}{4} e^{-3x}\cos 4x - \frac{3}{16} e^{-3x} \sin 4x - \int_0^{+\infty} \frac{9}{16} e^{-3x} \sin 4x \, dx$$

$$\frac{25}{16} I = \left(-\frac{1}{4} e^{-3x} \cos 4x - \frac{3}{16} e^{-3x} \sin 4x\right)_0^{+\infty}$$

$$I = \frac{16}{25}\left(0 + \frac{1}{4}\right) \Rightarrow I = \frac{4}{25}$$

نکته:

$$\int_0^{+\infty} e^{-sx} \sin ax \, dx = \frac{a}{s^2+a^2} \quad , \quad \int_0^{+\infty} e^{-sx} \cos ax \, dx = \frac{s}{s^2+a^2}$$

$s > 0$

(۱۵) $\frac{۸۰}{۲۹۸}$ $\int_0^3 \frac{dx}{x^2-2x+1} = ?$ $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$ واضح است که در داخل بازه $[0,3]$ ناسرگی دارد

پس ابتدا با آزمون ها همگرایی را بررسی می‌کنیم

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2} + \underbrace{\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^2}}_{\text{چون } P=2 \text{ پس انتگرال واگراست}}$$

پس در مجموع واگراست

$\int_0^{+\infty} e^{-t} t^P dt$ برای $P>-1$ همگراست (اثبات دقت) ($\frac{۱۸۵}{۲۹۹}$)

تابع گاما:

$$\underset{\text{تابع گاما}}{\Gamma(P+1)} = \int_0^{\infty} e^{-t} t^P dt$$

مثال: $\Gamma(1) = ? \Rightarrow P=0 \Rightarrow \Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = (-e^{-t})_0^{+\infty} = 1$

ویژگی ها:

حفظ شود

① $\Gamma(P+1) = P\,\Gamma(P)$ رابطه بازگشتی

② $\Gamma(n+1) = n!$ $\quad n \in \mathbb{N}$

③ $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

④ $\frac{1}{2}\Gamma(P+1) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} x^{2P+1} dx$ $\quad t=x^2$

④ $t = x^2 \Rightarrow$ $(x \geq 0)$

$$\Gamma(P+1) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} (x^2)^P (2x\,dx)$$

$$\frac{1}{2}\Gamma(P+1) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} x^{2P+1} dx$$

مثال: $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = ? \xrightarrow[\text{با فرمول شماره ۴}]{\text{مشابه مثال}} 2P+1=0 \Rightarrow P = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

⑤ $t = -\ln x$, $dt = -\frac{dx}{x}$

$$\Gamma(P+1) = \int_0^{+\infty} e^{\ln x} (-\ln x)^P (\frac{-dx}{x}) = -\int_1^0 (-\ln x)^P dx = \int_0^1 (-\ln x)^P dx \Rightarrow$$

⑤ $\Gamma(P+1) = \int_0^1 (-\ln x)^P dx$

⑥ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1}\theta \cos^{2y-1}\theta \, d\theta = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{2\Gamma(x+y)}$

(۱۶) $\frac{۹۱}{۳-٤}$ $\int_0^{+\infty} \sqrt{y}\, e^{-y^3} dy = ?$

تغییر متغیر $y^3 = t$, $y = t^{\frac{1}{3}}$, $dy = \frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}dt$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{6}} e^{-t} (\frac{1}{3} t^{-\frac{2}{3}} dt) = \frac{1}{3}\underbrace{\int e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt}_{\Gamma(P+1),\ P=-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}\sqrt{\pi}$$

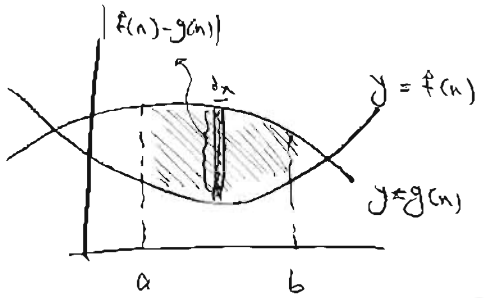
۲۵ $\frac{۹۲}{۳۰۴}$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6\theta \, d\theta$ $\xrightarrow{\text{بتا}}$ $2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$, $2y-1=6 \Rightarrow y=\frac{7}{2}$ $\Rightarrow \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\cdot\Gamma(\frac{7}{2})}{2\Gamma(4)} = \frac{\overset{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{1}{2})}\cdot\Gamma(\frac{7}{2})}{2\times 3!}$

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \underbrace{\Gamma\left(\frac{5}{2}+1\right)}_{\frac{5}{2}\Gamma(\frac{5}{2})} \rightarrow \underbrace{\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)}_{\frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2})} \rightarrow \underbrace{\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)}_{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} = \frac{5}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{15}{8}\sqrt{\pi}$$

$$\frac{\sqrt{\pi}\times\frac{15}{8}\sqrt{\pi}}{12} = \frac{5\pi}{32}$$

کاربرد انتگرال معین:

۱) مساحت



مساحت : $\int_a^b \underbrace{|f(x)-g(x)|}_{\text{ارتفاع}} dx$

$\frac{۴۵}{۳۰۶}$ سطح ناحیه محدود به منحنی تابع $y=\frac{1}{x^2-x}$ و محور x ها و دو خط $x=2$ و $x=4$ کدام است؟

$$\text{مساحت} = \int_2^4 |y|\,dx = \int_2^4 \frac{dx}{x^2-x} = \int_2^4 \left(\frac{1}{x-1}+\frac{-1}{x}\right)dx$$

$\frac{۱۰}{۲۵۷}$ نکته: $\frac{1}{(x-1)(x-5)} = \frac{1}{-4}\left(\frac{1}{\underbrace{x-1}_{\text{اولی}}} - \frac{1}{\underbrace{x-5}_{\text{دومی}}}\right)$ دومی - اولی $\Rightarrow x-5-x+1=-4$

معکوس کرده و پشت کسر می‌گذاریم

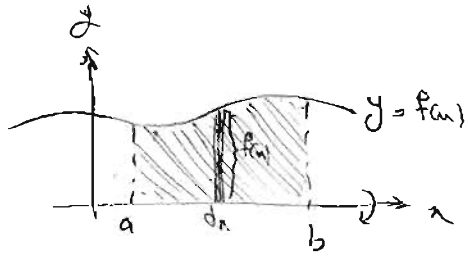
$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+4}\right)$$

$x^2+4-x^2-1=3$

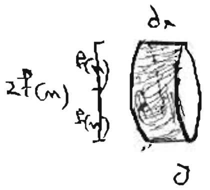
معکوس کرده و پشت کسر قرار می‌دهیم

ادامه سوال : $\left(\ln(x-1) - \ln x\right)_2^4 = \left(\ln\frac{x-1}{x}\right)_2^4 = \ln\frac{3}{4} - \ln\frac{1}{2} = \ln\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} = \ln\frac{3}{2}$

۲) حجم حاصل از دوران



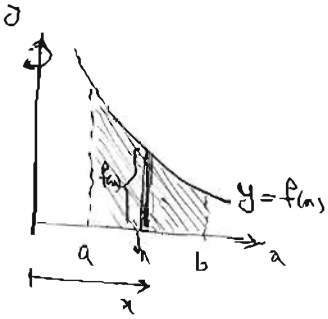
الف) حول محور x (روش دیسک)



$\pi f^2(x)\,dx$ حجم استوانه

$\Rightarrow$ حجم $= \pi \int_a^b \underbrace{f^2(x)}_{R^2}\,dx$ شعاع دوران

شعاع دوران $= |\underbrace{f(x)}_{R}|$



ب) حول محور y ها (روش پوسته استوانه‌ای)

با دوران المان ایجاد کرده یک پوسته استوانه بدست می‌آید

حجم پوسته استوانه $= 2\pi|x|\,|f(x)|\,dx$

حجم کل : $\int_a^b 2\pi \underbrace{|x|}_{\text{شعاع دوران}} \underbrace{|f(x)|}_{\text{ارتفاع دوران}} dx$

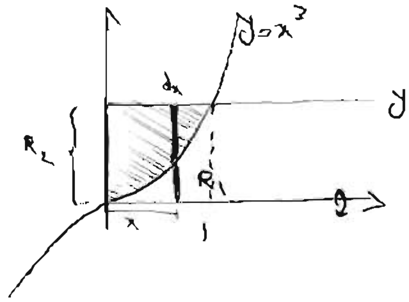
۵ ناحیه‌ی محدود بین $y=x^3$ و $y=1$ و $x=0$ و $x=1$ حول محور x (فرمول دیسک) دوران می‌کند حجم جسم حاصل از دوران را حساب کنید؟ (عمران ۸۹)

۲ج۶۵۵

فرمول حجم در روش ... : $\pi\int \left(\underbrace{R_2^2}_{\text{شعاع دوران بزرگتر}} - \underbrace{R_1^2}_{\text{شعاع دوران کمتر}} \right) dx$

$$= \pi\int_0^1 \underbrace{(1)^2}_{\text{شعاع بزرگ}}-(x^3)^2\,dx = \pi\int_0^1 \left(1^2-(x^3)^2\right)dx = \pi\int_0^1 1-x^6\,dx = \pi\left(x-\frac{x^7}{7}\right)_0^1$$

$$= 6\frac{\pi}{7}$$

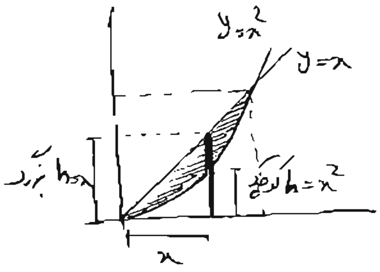


۱۲۹ / ۳٫۸

حجم جسم حاصل از دوران ناحیه محدود به نمودار $y=x$ و $y=x^2$ حول محور y را بیابید. (روش پوسته استوانه‌ای)

$x = x^2 \Rightarrow x = 0, 1$

$$\text{حجم} = 2\pi\int_0^1 x\,|\underbrace{x}_{\text{ارتفاع بزرگ}}-\underbrace{x^2}_{\text{ارتفاع کوچک}}|\,dx = 2\pi\int_0^1 (x^2-x^3)\,dx = 2\pi\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}$$

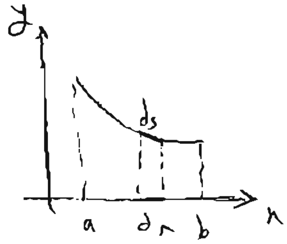


درس تا صفحه ۳۱۲

جلسه آینده: ادامه کاربرد انتگرال
فصل ۵: قطبی فصل ۷: مختلط
فصل ۷: دنباله‌ها

جلسه پنجم ۸۹/۸/۱۵

۳) طول قوس: طول قسمتی از نمودار $y=f(x)$ که $a \le x \le b$ عبارتست از



$$ds = \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$$

$$\text{طول قوس} = \int_{x=a}^{x=b} \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$$

۴) مساحت جانبی سطح حاصل از دوران: چنانچه نمودار $y=f(x)$ در $a \le x \le b$ حول محوری دوران کند

مساحت سطح حاصل برابر است با،

الف) حول محور xها

$$2\pi\int_{x=a}^{x=b} \underbrace{|f(x)|}_{\text{شعاع دوران}}\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$$

ب) حول محور yها

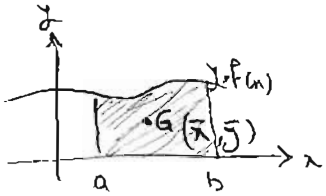
$$2\pi\int_{x=a}^{x=b} |x|\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$$

۱.۹/۲۱۷ مساحت سطح جانبی حاصل از دوران $y=x^2$ و $0\le x\le\sqrt{2}$ چقدر است؟ حول محور y

جواب: $ds=\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx \Rightarrow ds=\sqrt{1+4x^2}\,dx$ المان طول قوس

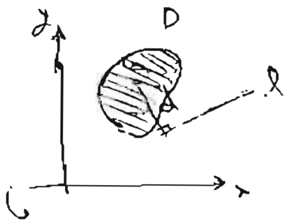
$$\text{سطح جانبی}=2\pi\int |x|\,ds = 2\pi\int_0^{\sqrt{2}} x\sqrt{1+4x^2}\,dx \xrightarrow[du=8x\,dx]{u=1+4x^2} = 2\pi\int_1^9 \frac{1}{8}u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{13\pi}{3}$$

۵) مرکز هندسی (مرکز ثقل)



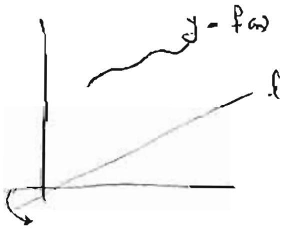
$$\bar{x}=\frac{\int_a^b x f(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}\ ,\quad \bar{y}=\frac{\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}$$

۶) قضایای پاپوس



قضیه اول پاپوس: ناحیه D در صفحه حول خط l دوران می‌کند، حجم جسمی که در اثر دوران حاصل می‌شود برابر است با: حجم = (مساحت ناحیه) $\times (2\pi d)$

فاصله مرکز هندسی ناحیه تا محور دوران



قضیه دوم پاپوس: نموداری حول خط l در صفحه دوران می‌کند، سطح جانبی حاصل از دوران برابر است با:

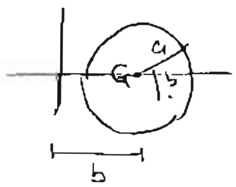
مساحت جانبی = (طول قوس) $\times (2\pi d)$

فاصله مرکز هندسی نمودار تا محور دوران

۱۱۴/۳۲۰ اگر ناحیه‌ی داخل دایره‌ی $(x-b)^2+y^2=a^2$ و $b>a>0$ حول محور y دوران کند حجم جسم حاصل از دوران را بیابید؟

روش اول ← پوسته استوانه‌ای ← وقت‌گیر

روش دوم ← قضیه اول پاپوس



حجم = (مساحت) $\times (2\pi d)$

$d=|b|=b$

$b>0$

$$\text{حجم}=\pi a^2\times 2\pi\cdot b = 2\pi^2 a^2 b$$

$\frac{115}{321}$ دایره $(x-b)^2+y^2=a^2$ را که $b>a>0$ حول محور y دوران می‌دهیم. مساحت جانبی؟

روش اول: از راه اصلی

روش دوم: قضیه دوم پاپوس

چون $f(x)$ بسته است طول منحنی همان محیط است

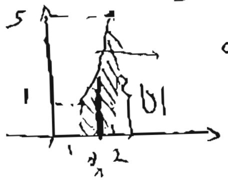
مساحت جانبی = (طول منحنی) $\times (2\pi d)$

طول منحنی = محیط دایره $= 2\pi a$

مساحت جانبی $= 2\pi a \times 2\pi b = 4\pi^2 ab$

۷) نمودارهای پارامتری:

مثال) نمودار $x=t^2+1$ ، $y=t^3+3t+1$ ، $0\leq t \leq 1$ مفروض است. مساحت محدود به محور x و این نمودار را بیابید.



از نقطه پایین

$0\leq t\leq 1 \Rightarrow 1\leq x\leq 2$

مساحت المان $= |y|\, dx$

مساحت $= \int_{x=1}^{x=2} |y||dx|$

$x=t^2+1 \rightarrow dx = 2t\,dt \Rightarrow$ مساحت $= \int_{t=0}^{t=1} t^3+3t+1\ (2t)dt = 2\int_0^1 (t^4+3t^2+t)\,dt$

مساحت $= 2\left(\frac{t^5}{5}+t^3+\frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^1 = 2\left(\frac{1}{5}+1+\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{2+10+5}{10}\right) = \frac{17}{5}$

$$ds = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,|dx| = \sqrt{1+\left(\frac{y'}{x'}\right)^2}\,|x'|dt = \sqrt{x'^2+y'^2}\,dt$$

$$\Rightarrow \boxed{ds = \sqrt{x'^2+y'^2}\,dt}$$

مشتق نسبت به t — مشتق نسبت به t

محاسبه‌ی طول منحنی برای منحنی‌های پارامتری

$\frac{36}{583ج2}$ طول منحنی نمودار $\begin{cases} x=e^t-t \\ y=4e^{t/2}\end{cases}$ ، $0\leq t\leq 2$ را بیابید

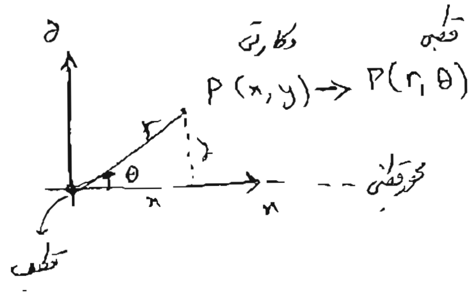
$x'_t = e^t-1$

$y'_t = 2e^{t/2} \Rightarrow ds = \sqrt{(e^t-1)^2+(2e^{t/2})^2}\,dt = \sqrt{e^{2t}+1-2e^t+4e^t}\,dt = \sqrt{(e^t+1)^2}$

$ds = |e^t+1|\,dt = e^t+1\,dt$

طول منحنی $= \int_0^2 e^t+1\,dt = \left(e^t+t\right)\Big|_0^2 = e^2+2-1 = e^2+1$

فصل پنجم، مختصات قطبی



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} , \quad \begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ \tan\theta = y/x \end{cases}$$

مفهوم منفی بودن r

$$r<0 \Rightarrow \begin{cases} x = r\cos\theta = \underbrace{(-r)}_{\text{مثبت}}\cos(\theta+\pi) \\ y = r\sin\theta = \underbrace{(-r)}_{\text{مثبت}}\sin(\theta+\pi) \end{cases} \Rightarrow (r,\theta) \longleftrightarrow (-r, \theta+\pi)$$

با توجه به روابط بالا نقطه‌ی (r,θ) و $(-r,\theta+\pi)$ در صفحه‌ی xy یکسان هستند. پس هر جا که r منفی باشد

کافیست r را قرینه کرده و θ را به $\theta+\pi$ تبدیل کنیم و بنابراین تبدیل $r \longrightarrow -r$ و $\theta \longrightarrow \theta+\pi$

به مفهوم قرینه کردن یک نقطه نسبت به مبدأ مختصات است

$$P\left(1, \frac{\pi}{4}\right), \quad P'\left(-1, \frac{\pi}{4}\right)$$

P و P' نسبت به مبدأ قرینه‌اند

* نمودار قطبی به عنوان منحنی پارامتری

نمودار قطبی $r = f(\theta)$ مفروض است:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = f(\theta)\cos\theta \\ y = f(\theta)\sin\theta \end{cases} \text{ منحنی پارامتری}$$

۱۹۴ / ۲ج۳۳ — معادله‌ی خط مماس بر نمودار قطبی $r = 1-\cos\theta$ در $\theta = \frac{\pi}{2}$ را بیابید؟

$$\begin{cases} x = (1-\cos\theta)\cos\theta = \cos\theta - \cos^2\theta = \cos\theta - \cos^2\theta \\ y = (1-\cos\theta)\sin\theta = \sin\theta - \sin\theta\cos\theta = \sin\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\cos\theta - \cos 2\theta}{-\sin\theta + 2\sin\theta\cos\theta} \overset{\theta=\frac{\pi}{2}}{=} \frac{1}{-1} = -1 \quad \text{شیب خط مماس}$$

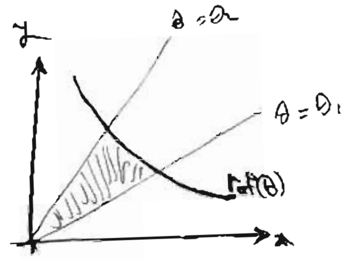
$$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{matrix} x = 0 \\ y = 1 \end{matrix} \Rightarrow y - 1 = -1(x-0) \Rightarrow y = 1-x \Rightarrow$$

گزینه‌ها بر حسب قطبی است پس تبدیل می‌کنیم

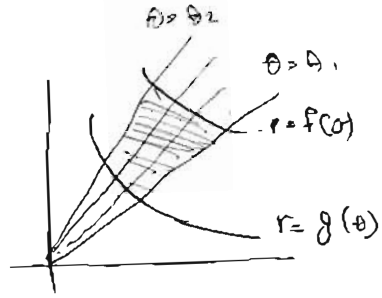
$$r\sin\theta + r\cos\theta = 1$$

$$r = \frac{1}{\sin\theta + \cos\theta}$$

محاسبه ی مساحت در مختصات قطبی



مساحت : $\frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2\, d\theta$



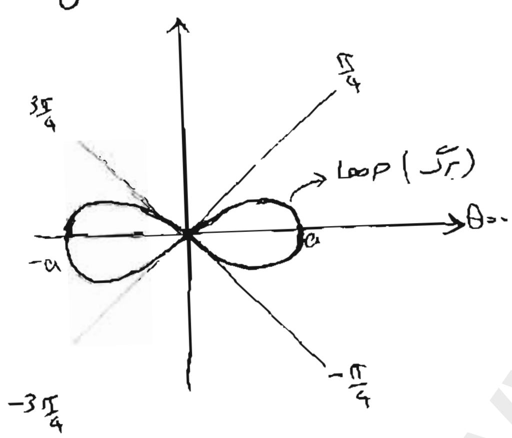
مساحت : $\frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(f^2(\theta)-g^2(\theta)\right)d\theta$

هنگامی می توان از رابطه فوق استفاده کرد که در ناحیه ی مورد استفاده هر نیم خط که از قطب رسم کنیم از نمودار اول وارد و از نمودار دوم خارج شود.

۱۳ / ۴۲۷ مساحت ناحیه محدود به نمودار $r^2=a^2\cos 2\theta$ را بیابید.

رسم نمودار

حل : $r=0 \Rightarrow \cos 2\theta=0 \xrightarrow{[-\pi,\pi]} 2\theta=\pm\frac{\pi}{2},\ \pm\frac{3\pi}{2} \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}$



$0\le\theta\le\frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta=0 \Rightarrow r=a$

$\theta\uparrow \Rightarrow r\downarrow$

$\theta=\frac{\pi}{4} \Rightarrow r=0$

نکته: اگر در نمودار قطبی $\theta \to -\theta$ و ضابطه تغییر نکند آنگاه نتیجه می گیریم محور x محور تقارن برای شکل است

$\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{3\pi}{4} \Rightarrow \frac{\pi}{2}<2\theta<\frac{3\pi}{2} \Rightarrow \cos 2\theta<0$

پس نمودار را در فاصله ی $\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{3\pi}{4}$ نداریم.

نکته: اگر در نمودار قطبی $r\to -r$ و ضابطه تغییر نکند آنگاه نتیجه می گیریم نمودار نسبت به مبدأ مختصات متقارن است

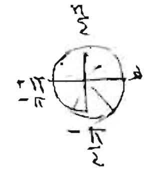
مساحت $= 2\times\underbrace{\frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} r^2\, d\theta}_{\text{مساحت یکی از برگ ها}} = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} a^2\cos 2\theta\, d\theta = a^2\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{a^2}{2}\left(1-(-1)\right)=a^2$

صفحه ۴۱۸ و ۴۱۹ اشکال قطبی حفظ شود

مثال ۷ / ۴۲۴ ، $C_1 : r = 2\cos\theta$ و $C_2 : r=\sqrt{2}$

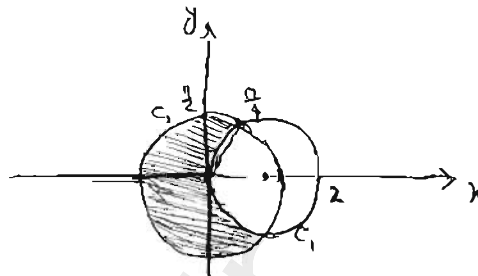
مساحت ناحیه ی خارج C_1 و داخل C_2 را بیابید.

تقاطع دو نمودار ، $C_1 = C_2 \Rightarrow 2\cos\theta = \sqrt{2} \Rightarrow \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \pm\frac{\pi}{4}$ ،



مساحت: $\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left((\sqrt{2})^2 - (2\cos\theta)^2\right) d\theta$

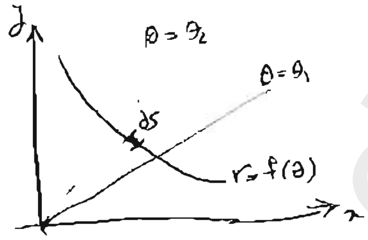
قبل از انجام انتگرال گیری شکل را بکشیم



نمودارها نسبت به محور x متقارن هستند. کافی است ناحیه ی بالای را حساب و در نهایت دو برابر کنیم

مساحت: $2\left(\underbrace{\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left((\sqrt{2})^2 - (2\cos\theta)^2\right) d\theta}_{\text{مساحت بخش اول}} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sqrt{2})^2 d\theta}_{\text{مساحت بخش دوم}} \right) = \pi + 1$

حتماً باید شکل رسم شود وگرنه شاید قسمت ... جواب اشتباه بدست می آید



طول قوس)

طول قوس قسمتی از نمودار $r=f(\theta)$ که $\theta_1 \le \theta \le \theta_2$ عبارتست از:

$$ds = \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\theta$$

طول قوس $\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\theta$ ، $r' = \frac{dr}{d\theta}$

۲۷ / ۴۴۰ طول قوس $r = e^{\frac{\theta}{2}}$ و $0 \le \theta \le 4\pi$

$$r' = \frac{1}{2} e^{\theta/2}$$

$$ds = \sqrt{e^{\theta} + \frac{1}{4}e^{\theta}}\, d\theta = \frac{\sqrt{5}}{2} e^{\frac{\theta}{2}} d\theta$$

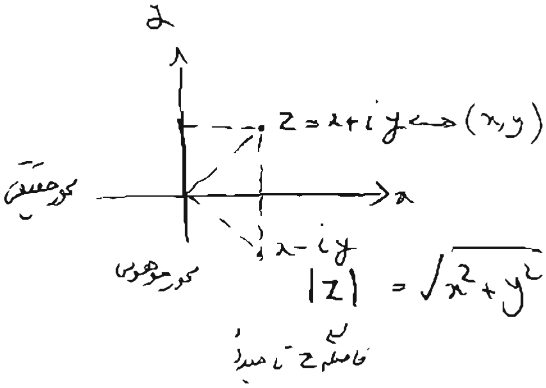
$$\frac{\sqrt{5}}{2}\int_0^{4\pi} e^{\frac{\theta}{2}} d\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}\left(2e^{\frac{\theta}{2}}\right)\Big|_0^{4\pi} = \frac{\sqrt{5}}{2}\left(2e^{2\pi}-2\right) = \sqrt{5}\left(e^{2\pi}-1\right)$$

فصل ۶: اعداد مختلط

$$x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1 \Rightarrow x=\pm\sqrt{-1}$$

$$i=\sqrt{-1} \longleftrightarrow i^2=-1$$

$$\underset{\text{عدد مختلط}}{z}=\underbrace{x}_{Re(z)}+i\underbrace{y}_{Im(z)}\ ,\quad x,y\in\mathbb{R}$$



$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}$$

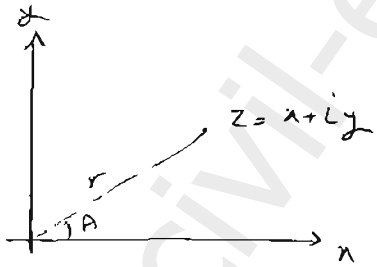
فاصله z تا مبدأ

$$\underset{\text{مزدوج } z}{\bar{z}}=x-iy$$

ضرب: $z\bar{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2-\cancel{ixy}+\cancel{ixy}-\underset{-1}{i^2}y^2=\underbrace{x^2+y^2}_{|z|^2}$

نکته $\Rightarrow$ $z\bar{z}=|z|^2$

نمایش قطبی:



$$r=\sqrt{x^2+y^2}=|z|$$

$$z=x+iy=r\cos\theta+i\,r\sin\theta=r(\underbrace{\cos\theta+i\sin\theta}_{e^{i\theta}}) \Rightarrow$$

اتحاد اویلر: $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$

$z=re^{i\theta}$ $\Leftarrow$ نمایش قطبی عدد مختلط

ویژگی ها:

1) $z=re^{i\theta}=r\,e^{i(\theta+2k\pi)} \qquad k\in\mathbb{Z}$

۲) $(r_1e^{i\theta_1})(r_2e^{i\theta_2})=r_1r_2\,e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

۳) $(\underbrace{\cos\theta+i\sin\theta}_{e^{i\theta}})^n=e^{in\theta}=\underbrace{\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)}_{e^{in\theta}}$

* محاسبه ریشه n ام های یک عدد:

$\sqrt[n]{z} = \underbrace{\omega}_{\text{ریشه n ام}} \iff \omega^n = z$ دقیقاً n عدد مختلط وجود دارد به طوری که

$$z = r e^{i(\theta + 2k\pi)} , k \in \mathbb{Z}$$

$$\sqrt[n]{z} = r^{\frac{1}{n}} e^{\frac{\theta + 2k\pi}{n} i} , k = 0, 1, \dots, n-1$$

$\frac{11}{457}$ مقدار عبارت را حساب کنید

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10}$$

$$\overset{x}{1} + \overset{y}{\sqrt{3}} i = r e^{i\theta}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} = 2 \Rightarrow r = 2 \\ tg\theta = \frac{y}{x} = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

مزدوج $\begin{cases} 1 - \sqrt{3} i \\ 1 + \sqrt{3} i \end{cases} \Rightarrow 1 - \sqrt{3} i = r e^{i(-\theta)} \xrightarrow[\theta = \frac{\pi}{3}]{r=2}$

$$\Rightarrow \frac{r e^{i\theta}}{r e^{i(-\theta)}} = \left(\frac{2 e^{\frac{\pi}{3} i}}{2 e^{-\frac{\pi}{3} i}}\right)^{10} = \left(e^{\frac{2\pi}{3} i}\right)^{10}$$

جواب: $e^{\frac{20\pi}{3} i} \xrightarrow{\text{تبدیل به فرم مثلثاتی}} \cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3} = \boxed{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i}$ گزینه صحیح

$$e^{\left(\frac{20\pi}{3} - 6\pi\right) i} = e^{\left(\frac{2\pi}{3}\right) i}$$

$\frac{15}{458}$ یکی از کعب های عدد زیر را بیابید
ریشه سوم

$$z = \frac{1+i}{4i + (1-i)^2} = \frac{1+i}{1 + i + (1 + \underset{-1}{i^2} - 2i)}$$

$$= \frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1-i} \times \left(\frac{1+i}{1+i}\right) = \frac{(1+i)^2}{1-(i)^2} = \frac{1 + \overset{-1}{i^2} + 2i}{2} = i_{\to \begin{smallmatrix} x=0 \\ y=1 \end{smallmatrix}} \to z = i = r e^{i\theta}$$

صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم

$$r = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$$

$$tg\theta = \infty \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow z = i = e^{\frac{\pi}{2} i} \Rightarrow \sqrt[3]{e^{\frac{\pi}{2} i}} = (1)^{\frac{1}{3}} \times e^{\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} i} \quad k = 0, 1, 2$$

$$= e^{(4k+1)\frac{\pi}{6} i} = \cos(4k+1)\frac{\pi}{6} + i \sin(4k+1)\frac{\pi}{6}$$

جواب $\cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6} \Leftarrow k = 0 \leftarrow$ با چک کردن گزینه‌ها

$i = \sqrt{-1} \Rightarrow i^i = ?$

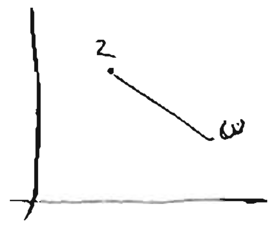
۱۸
۴۵۹

گزینه‌ها 1) $e^{-\frac{\pi}{2}}$ 2) $e^{\frac{\pi}{2}}$ 3) $e^{i\frac{\pi}{2}}$ 4) $e^{-i\frac{\pi}{2}}$

حل: $\underbrace{i}_{= e^{\frac{\pi}{2}i}}{}^{i} = (e^{\frac{\pi}{2}i})^i = \underbrace{(e^{(\frac{\pi}{2}+2k\pi)i})^i}_{\text{فرم کلی}} = e^{-\frac{\pi}{2}-2k\pi} \xrightarrow{k=0} e^{-\frac{\pi}{2}}$

فرم قطبی

مکان هندسی در صفحه مختلط



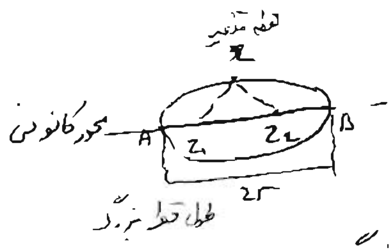
$|z-w| =$ فاصله z از w

1) $|z - z_0| = r$ ⟺ دایره

ثابت، مثبت

2) بیضی $|z-z_1| + |z-z_2| = 2r > 0$

ثابت، عدد ثابت



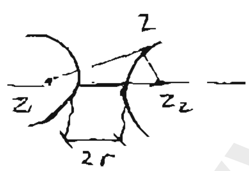
$AB = 2r =$ طول قطر بزرگ

تذکر: $|z-z_1|+|z-z_2| = 2r$ در حالات زیر بررسی می‌شود

الف) اگر $|z_1-z_2| < 2r$ شکل مربوط به بیضی است

ب) اگر $|z_1-z_2| > 2r$ شکل مورد نظر تهی است. بیضی نمودار پدید نمی‌آید

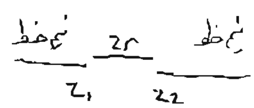
ج) اگر $|z_1-z_2| = 2r$ شکل پاره خط است



3) هذلولی $\left||z-z_1| - |z-z_2|\right| = 2r > 0$ (ثابت)

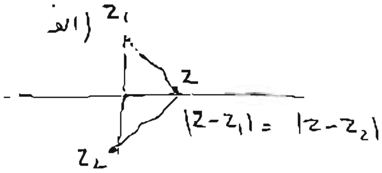
تذکر: $\left||z-z_1| - |z-z_2|\right| = 2r$ در حالات زیر بررسی می‌شود

الف) $|z_1-z_2| > 2r$ شکل مربوط به هذلولی است



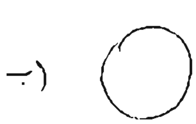
ب) $|z_1-z_2| < 2r$ هیچ شکلی وجود ندارد

ج) $|z_1-z_2| = 2r$ دو نیم خط که از z_1 و z_2 شروع می‌شود



4) $\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right| = k > 0 \Leftarrow |z-z_1| = k|z-z_2|$

الف) اگر $k=1$ باشد ← خط عمود منصف پاره خطی که z_1 و z_2 را به هم وصل می‌کند



ب) اگر $k \neq 1$ باشد ← شکل دایره است

$\frac{۱۷۰}{۲ \text{ ج } ۱۲۵}$ مکان هندسی z در رابطه زیر را بیابید.

$$\left|\frac{z-3}{z+3}\right| = 2$$

با قرار دادن $z=x+iy$ و ساده کردن معادله بر حسب x و y می‌نویسیم

$$\Rightarrow z = x+iy \Rightarrow \frac{x+iy-3}{x+iy+3} = \frac{|(x-3)+iy|}{|(x+3)+iy|} = 2$$

$$\frac{\sqrt{(x-3)^2+y^2}}{\sqrt{(x+3)^2+y^2}} = 2 \Rightarrow (x-3)^2+y^2 = 4(x+3)^2+4y^2 \Rightarrow x^2+9-6x = 4x^2+36+24x+4y^2$$

$$\Rightarrow 3x^2+3y^2+30x+27=0 \Rightarrow x^2+y^2+10x+9=0 \Rightarrow$$

$(x+5)^2+y^2=16 \Rightarrow$ دایره‌ای به مرکز $C(-5,0)$ و شعاع 4 بدست آمد

$\frac{۱۲}{۲ \text{ ج } ۳۱۲}$ مکان هندسی z را شناسایی کنید.

$$|z-(2+i)| - |z+3+4i| = 75$$

راه اول:

$$z = x+iy \Rightarrow |x+iy-2-i| - |x+iy+3+4i| = 75$$

که اگر حساب کنیم تهی بدست می‌آید.

راه هندسی:

$$z_1 = 2+i$$
$$z_2 = -3-4i \rightarrow |z_1-z_2| = |5+5i| = \sqrt{25+25} \Rightarrow |z_1-z_2| = 5\sqrt{2} \quad , \quad 2r = 75 \Rightarrow$$

$|z_1-z_2| < 2r \Rightarrow$ شکل تهی است

فصل ۷ : دنباله و سری

$\mathbb{N}: \{1, 2, \dots\}$

$f(n) = \frac{1}{x} , x \in \mathbb{N} \Longrightarrow$ دنباله

دنباله تابعی است که دامنه‌ی آن برابر $\mathbb{N}$ باشد یا کران از مجموعه‌ی اعداد طبیعی انتخاب شود

$a_n = \frac{1}{n} : \quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$

جمله عمومی

$a'_n = -\frac{1}{n^2} < 0 \Longrightarrow$ نزولی a_n

$\underbrace{0}_{\text{کران پایین}} \leq a_n \leq \underbrace{1}_{\text{کران بالا}} \Longrightarrow$ کراندار است a_n

تعریف: اگر $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = L \in \mathbb{R}$ آنگاه دنباله همگرا است و در سایر شرایط واگرا است

نکاتی در محاسبه حد دنباله $(n \to +\infty)$

۱) تمام قواعد محاسبه‌ی حد توابع در مورد دنباله‌ها قابل استفاده است (مثل رشد، هم‌ارزی و هوپیتال)

۲) $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ و به طور کلی $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\text{چندجمله‌ای بر حسب } n} = 1$ مثلاً $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n^2 + n} = 1$

۳) فرض کنید $P > -1$, $P \in \mathbb{R}$:

$$1^P + 2^P + \dots + n^P \sim \frac{n^{P+1}}{P+1}$$

۴) قوانین رشد ($a > 1$)

$$n^n \gg n! \gg a^n$$

۵) دستور استرلینگ

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2n\pi}$$

مهم $\sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e}$

تعمیم $\sqrt[n]{(kn)!} \sim \left(\frac{kn}{e}\right)^k \quad k = 1, 2, \dots$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$ — $\frac{۸}{۶۹۸}$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}} + \dots + n^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{3}{2}}} \underset{P = \frac{1}{2}}{\overset{\text{قانون سوم}}{\sim}} \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{n^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}}{n^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(2n+1)!}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\,\frac{\sqrt[n]{(2n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{(2n+1)(2n)!}}{n\sqrt[n]{n!}}$$

$\frac{11}{۴۹۸}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{\sqrt[n]{2n+1}}^{1}\,\sqrt[n]{(2n)!}}{n\sqrt[n]{n!}} \sim \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^2}{n\cdot\frac{n}{e}} = \frac{4}{e}$$

درس تا سر سری

جلسه آینده سری‌ها (همگرایی‌ها مطالعه شود)

جمعه ۸۹٫۸٫۲۲

سری

تعریف، فرض کنید a_n دنباله‌ای است. تعریف می‌کنیم

$$S_1 = a_1,\ S_2 = a_1 + a_2,\ \dots\ S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$$

به دنباله S_k یک سری با جمله‌ی عمومی a_n گفته می‌شود

$$\lim_{k\to+\infty} S_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

۱) سری هندسی

$a \neq 0,\ q \in \mathbb{R}$

$$a + aq + aq^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q}$$

همگراست $\Leftrightarrow$ $-1 < q < 1$ اگر

۲) سری تلسکوپی

$$\sum_{n=1}^{k} (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a_{k+1}$$

$(a_1 - \cancel{a_2}) + (\cancel{a_2} - a_3) + \dots$

۳) P سری (سری ریمان)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^P}$$

P سری همگراست $\Longleftrightarrow$ $P>1$

$\frac{۲۰}{۵۰۴}$ $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)(4n+3)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n+3}\right) = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{4n-1}}_{a_n} - \underbrace{\frac{1}{4n+3}}_{a_{n+1}} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4-1}-\frac{1}{\infty}\right) = \frac{1}{12}$$

$a_{n+1} = \frac{1}{4(n+1)-1} = \frac{1}{4n+3}$ ✓ پس سری تلسکوپی است

کنکور ارشد کامپیوتر ۸۷

MBA و ریاضی ۸۸

$\frac{۲۱}{۵۰۴}$ $$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{1+2}+\dots+\frac{1}{1+2+\dots+n}\right)$$

حل $$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\underbrace{1+2+\dots+k}_{\frac{k(k+1)}{2}}} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k(k+1)} = 2\sum_{k=1}^{\infty}\underbrace{\frac{1}{k}}_{a_k} - \underbrace{\frac{1}{k+1}}_{a_{k+1}} = 2\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{\infty}\right) = 2$$

$\frac{۲۶}{۵۰۸}$ $$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)(n+1)} = \frac{1}{2}\sum_{n=2}\underbrace{\frac{1}{n-1}}_{a_n} - \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{a_{n+2}} =$$

پس تلسکوپی نیست. بایستی عبارتی کم و زیاد کنیم تا به دو سری تلسکوپی تبدیل شود. راه دیگر استفاده از نکته است

$$= \frac{1}{2}\left(\underbrace{a_2+a_3}_{\text{دو جمله از اول باقی ماند}} - \underbrace{a_\infty - a_\infty}_{\text{دو جمله از آخر}}\right)$$

چون اختلاف دوتاست

وقتی در سری تلسکوپی اختلاف اندیس بیش از یک باشد مثلاً ۴ باشد

به جای یک جمله‌ی اول و جمله‌ی آخر چهار جمله از اول و چهار جمله از آخر باقی می‌ماند

$$= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-0-0\right) = \frac{3}{4}$$

* آزمونهای همگرایی

۱) اگر $\sum a_n$ همگرا باشد آنگاه $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (شرط لازم)

یعنی اگر $\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0$ آنگاه $\sum a_n$ واگراست.

۲) آزمون سری‌های نامنفی . $a_n , b_n \geq 0$

الف) آزمون مقایسه $a_n \geq b_n \geq 0$

۱) اگر $\sum a_n$ همگرا باشد آنگاه $\sum b_n$ نیز همگراست

۲) اگر $\sum b_n$ واگرا باشد آنگاه $\sum a_n$ واگراست

ب) آزمون مقایسه حدی $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$

۱) اگر $0<L<\infty$ آنگاه $\sum a_n$ و $\sum b_n$ هردو همگرا یا هردو واگرا می‌باشند.

۲) اگر $L=0$ و $\sum b_n$ همگرا باشد آنگاه $\sum a_n$ همگراست.

۳) اگر $L=+\infty$ و $\sum b_n$ واگرا باشد آنگاه $\sum a_n$ واگراست.

مثال) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^3}$ همگرا یا واگرا؟

آزمون مقایسه حدی

فرض $b_n = \frac{1}{n^P}$ $\quad P>0$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{n^P}{(\ln n)^3} \to +\infty = L$$

چنانچه $P=1$ یا $0<P<1$ آنگاه $\sum b_n$ واگرا می‌شود

و $L=+\infty$ آنگاه $\underbrace{\text{}}_{\text{بنابه قسمت ۳ آزمون}}$ $\sum a_n$ واگراست

نکته: سری $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^\alpha}$ به ازای هر مقدار α واگراست

مثال: کلیه‌ی مقادیر P را طوری بیابید که سری زیر همگرا شود

$$\frac{3}{1}+\frac{4}{2^P}+\frac{5}{3^P}+\cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^P} \underset{\text{هم‌ارز}}{\sim} \frac{n}{n^P} = \frac{1}{n^{P-1}} \xRightarrow{\text{شرط همگرایی}} P-1>1 \Rightarrow P>2$$

ج) آزمون نسبت $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$

د) آزمون ریشه $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$

۱) اگر $L<1$ آنگاه $\sum a_n$ همگراست

۲) اگر $L>1$ آنگاه $\sum a_n$ واگراست

مثال $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n+3}\right)^{n^2}$ همگرا یا واگرا؟

حل: $a_n=\left(\frac{n+1}{n+3}\right)^{n^2} \Rightarrow \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n+3}\right)^{n^2}} = \left(\frac{n+1}{n+3}\right)^{n} = \lim_{n\to+\infty}$

$e^{n\left(\frac{n+1}{n+3}-1\right)} = e^{\frac{-2n}{n+3}} = e^{-2} = L \Rightarrow \frac{1}{e^2}<1 \Rightarrow$ سری همگراست

2) آزمون انتگرال: اگر $a_n=f(n)$ و تابع $f(n)$ پیوسته و نزولی و مثبت باشد، آنگاه $\sum a_n$ و $\int^{+\infty} f(x)dx$ هر دو همگرا یا هر دو واگرا هستند

مثال: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}$ همگراست یا واگراست

$f(x)=\frac{1}{x(\ln x)^2}$ در بازه $(2,\infty)$ باید پیوسته و مثبت باشد و نزولی

$\int_2^{\infty} f(x)dx \underset{u=\ln x}{=} \int^{+\infty}\frac{du}{u^2}$ پس انتگرال همگراست لذا سری همگراست

نکته: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$ همگراست $\iff p>1$

3) آزمون سری متناوب

سری متناوب، اگر $a_n>0$ سری زیر متناوب است

$-a_1+a_2-a_3+\cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$

4) آزمون همگرایی مطلق

قضیه: اگر $\sum|a_n|$ همگرا باشد آنگاه $\sum a_n$ همگراست.

مثال: بررسی کنید $\sum_{n=5}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+2}}$ واگرا؟ همگرای مطلق؟ همگرای مشروط

قدر مطلق $\sum\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+2}}\right| = \sum\frac{1}{\sqrt{n+2}} \sim \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ سری قدر مطلق واگراست پس نمی‌توان از قضیه استفاده کرد

سری داده شده متناوب است و $0 < a_n = \frac{1}{\sqrt{n+2}}$ و a_n نزولی و $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \xLeftarrow{\text{آزمون } 2}$ سری همگراست و لذا سری همگرای مشروط است.

مثال: کدام یک از سری های زیر واگراست؟

1) $\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} + \cdots + \frac{1}{\ln n} = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$

$0 < a_n = \frac{1}{\ln n} \to 0 \Rightarrow$ و تابع نزولی $\xLeftarrow{\text{متناوب}}$ همگراست

2) $\frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{3\ln 3} + \cdots = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n} \rightarrow$ واگراست (نکته قبل)

3) $\frac{1}{2(\ln 2)^2} + \frac{1}{3(\ln 3)^2} + \cdots = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ بنا به نکته سری همگراست

4) $1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{16} - \frac{1}{25} + \cdots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{A}{n^2}$, $A = 1, -1$

قدر مطلق $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{A}{n^2}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \rightarrow$ همگراست $\Longrightarrow \sum \frac{A}{n^2} \rightarrow$ همگراست

سری توانی:

تعریف: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \underbrace{\overset{\text{دنباله}}{a_n}}_{\text{ضریب}} (x - \underbrace{\overset{\text{عدد حقیقی}}{x_0}}_{\text{مرکز}})^n$ را سری توانی حول (به مرکز) x_0 می‌نامیم

$\overbrace{x_0 - R \quad\quad x_0}^{R} \overbrace{\quad\quad x_0 + R}^{R}$ شعاع همگرایی $R \in [0, \infty)$

* سری برای x هایی که $|x - x_0| < R$ همگرای مطلق است.

* سری برای x های $|x - x_0| > R$ واگراست

* وضعیت سری در $x = x_0 \pm R$ حکم کلی ندارد

طرز محاسبه R:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

2) $\sum a_n (x-x_0)^{kn+m}$ $m\in \mathbb{Z}$, $k=1,2,\dots$

$$\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{R^k} = \sqrt[n]{|a_n|}$$

مثال: بازه‌ی همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{2^n(n+1)}$ را بیابید.

کلیه‌ی مقادیری از x که سری به ازای آنها همگرا باشد

حل: $x_0=-3$, $a_n=\frac{1}{2^n(n+1)}$

ابتدا شعاع همگرایی را حساب می‌کنیم

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left|\frac{1}{2^n(n+1)}\right|} = \frac{1}{2\sqrt[n]{n+1}} \to \frac{1}{2} = \frac{1}{R}$$

$$\Rightarrow R=2 \to |x+3|<2 \Rightarrow -2<x+3<2 \Rightarrow -5<x<-1$$

باید وضعیت سری را در $x=-1,-5$ (سرحد بازه‌ی پیدا شده) جداگانه بررسی کنیم.

$x=-1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{2^n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n} \Rightarrow$ واگراست

$x=-5 \Rightarrow \sum \frac{(-2)^n}{2^n(n+1)} = \sum\frac{(-1)^n}{(n+1)} \Rightarrow$ تناوب با شرط $\Rightarrow$ همگرا

$\Rightarrow$ بازه همگرایی $-5 \leq x < -1$

$\frac{۵۳}{۵۲۴}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n}(2z+1)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\times 2^n}{n}\left(z+\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow \frac{1}{R} = \sqrt[n]{\left|\frac{3^n\cdot 2^n}{n}\right|} = \frac{3\times 2}{\sqrt[n]{n}} = 6$ ($n\to+\infty$)

$R=\frac{1}{6}$

$$\Rightarrow \left|z+\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{6} \to -\frac{1}{6}<z+\frac{1}{2}<\frac{1}{6} \Rightarrow \quad < z < -\frac{2}{6}$$

$\frac{۵۵}{۵۲۴}$ $\sum_{n=1}^{\infty}(5+(-1)^n)^n(x-2)^{2n}$

$$\frac{1}{R^2} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|(5+(-1)^n)^n|} = |5+(-1)^n|$$

فرد $4 \Rightarrow R=\frac{1}{\sqrt{4}} \Rightarrow$

زوج $6 \Rightarrow R=\frac{1}{\sqrt{6}} \Rightarrow$

$\frac{1}{4}$, $\frac{1}{\sqrt{6}}$, $\frac{1}{\sqrt{4}}$

اشتراک: $\Rightarrow R=\frac{1}{\sqrt{6}}$

۱۳۰۷

نکته: اگر $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ چند عدد مختلف بدست آید در محاسبه‌ی شعاع همگرایی از بزرگترین حد استفاده
$\limsup$
می‌کنیم (کوچکترین R بدست آمده)

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R^k}$$

ادامه تست

$$\limsup \text{مثال یک} = 6 \Rightarrow \frac{1}{R^2} = 6 \Rightarrow R = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

۵۷ / ۶۲۴ اگر شعاع همگرایی $\sum a_n x^n$ برابر R باشد. شعاع همگرایی سری $\sum \frac{n!}{n^n} a_n^2 x^n$ را بیابید (مواد ۸۸ نقشه ۸۷)

$$\frac{1}{R} = \lim \sqrt[n]{|b_n|} = \lim \frac{\overset{\frac{n}{e}}{\cancel{\sqrt[n]{n!}}}}{n} \times \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)^2$$

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{e} \lim_{n\to\infty} \left(\underbrace{\sqrt[n]{a_n}}_{\frac{1}{R}}\right)^2 = \frac{1}{e}\frac{1}{R^2} \Rightarrow R' = eR^2$$

۵۹ / ۶۲۴ $\sum \frac{(x-2)^n}{n(\ln n)^2}$ بازه همگرایی

1) $[-1,3]$ 2) $[1,3]$ 3) $(-1,1]$ 4) $[-1,1]$

C: 2

وسط بازه‌ی همگرایی باید مرکز سری باشد و نقطه وسط گزینه‌ی ۲ برابر $x=2$ است : روش اول

روش دوم : $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{1}\ \underbrace{\sqrt[n]{(\ln n)^2}}_{1}} = 1 \Rightarrow R = 1 \Rightarrow -1 < x-2 < 1$

$1 < x < 3$

$x = 3 \quad \sum \frac{1}{n(\ln n)^2} \xrightarrow{P=2>1}$ بنابه نکته همگراست

$\Rightarrow x \in [1,3]$

$x = 1 \quad \sum \frac{(-1)^n}{n(\ln n)^2} \xrightarrow[\text{نزولی}]{\text{متناوب}}$ همگراست

۶۰ / ۶۲۴ $\sum \frac{n!}{n^n} x^n$

1) $(0,1)$ 2) $(-1,1)$ 3) $(0,e)$ 4) $(-e,e)$

$C=0$ $\quad$ $C=0$

$$\lim \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{\frac{n}{e}}{n} = \frac{1}{e} \Rightarrow R = e$$

$-e < x < e$

(۴۵)

$\frac{\text{۸}}{\text{۵۷۴}}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^x}$

کلیه مقادیر از x که همگرا باشد

این سری توانی نیست!

در سری غیرتوانی کل جمله عمومی را b_n فرض کرده و با آن مانند سری عددی ~~اتفاقی~~ رفتار می‌کنیم. یعنی یکی از آزمونها را (معمولاً ریشه) استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|b_n|} = \lim \frac{|x|}{(\cancel{\sqrt[n]{n}})^x} = |x| = L$$

می‌دانیم برای $L>1$ همگرا و

برای $L<1$ واگراست در نتیجه

$|x| = L < 1$

$|x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$

و برای $L=1$ نیاز به بررسی دارند $\Rightarrow x = \pm 1$

$x = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \Rightarrow$ واگرا

$x = -1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \Rightarrow$ واگرا

$\frac{\text{۴۶}}{\text{۵۲۷}}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{x-1}{x}\right)^n$ بازه همگرایی

سری غیرتوانی

$$\lim \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{n}\left(\frac{x-1}{x}\right)^n} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \times \sqrt[n]{\left(\frac{x-1}{x}\right)^n} = \left|\frac{x-1}{x}\right| = L < 1 \Rightarrow$$

$$-1 < \frac{x-1}{x} < 1 \Rightarrow \frac{x-1}{x} < 1 \Rightarrow x-1 < x \Rightarrow -1 < 0 \checkmark \; x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{x-1}{x} > -1 \Rightarrow x-1 > -x \Rightarrow 2x > 1$$

$$x > \frac{1}{2}$$

$L=1$ نیاز به بررسی

$x \in [\frac{1}{2}, +\infty) \Rightarrow$ چون $x = \frac{1}{2} \to$ سری همگرا

سری تیلور (مک لورن)

تعریف. اگر تابع $f(x)$ در x_0 تا هر مرتبه ای مشتق پذیر باشد، سری تیلور f حول x_0 عبارت است از

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

و چنانچه $x_0=0$ باشد به آن سری مک لورن گفته می شود.

مثال: سری مک لورن $f(x)=\frac{1}{1-x}$ را بیابید

مک لورن تابع، $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$

$$f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}, \quad f''(x)=\frac{2}{(1-x)^3}, \quad f'''(x)=\frac{2\times 3}{(1-x)^4}, \ldots \quad f^{(n)}(x)=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

$$\Rightarrow f^{(n)}(0)=n!$$

سری توانی

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n!} x^n = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}}$$

$R=1$, $-1<x<1$

سعی کنید سری های مک لورن معروف را حفظ کنید

مثال: سری مک لورن $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ را بیابید

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \xrightarrow{x \to -x^2} \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x^{2n})$$

می توان به جای x هر x در سری مک لورن
هر تابعی مانند $g(x)$ را قرار داد.

$f(x)=\ln(1-x)$ سری مک لورن آن را بیابید

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \xrightarrow{\int_0^x} -\ln(1-x)\Big|_0^x = -\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int x^n dx = \sum \frac{1}{n+1} x^{n+1}\Big|_0^x$$

مرکز سری توانی $C=0$ دارد

$\frac{۳۱}{۵۷۱}$

ضریب x^3 در مک لورن $f(x)=\ln(1+x+x^2)$ چقدر است؟

روش اول: استفاده از تعریف سری مک لورن: ضریب x^3 برابر $\frac{f'''(0)}{3!}$

روش دوم:

$\ln(1+t)$

$t=x+x^2 \sim x \Rightarrow x^3 \sim \boxed{t^3}$

$x\to 0$

ابتدا تابع را به شکل یک بسط مک لورن آشنا درمی آوریم (با تغییر متغیر ....)

$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \dots$

مک لورن

سپس نسبت x به متغیر جدید را می نهیم و سپس از آن نسبت x^3 را

$\ln(1+x+x^2) = (x+x^2) - \frac{(x+x^2)^2}{2} + \frac{(x+x^2)^3}{3} + \dots$

و بعد مک لورن تابع معروف به ازای t را تا t^3 که در واقع هم ارز x^3 است ادامه می دهیم

درشکل فعل $-\frac{1}{2}\underbrace{(x+x^2)^2}_{(a+b)^2} \xrightarrow{\text{جمله دارای } x^3} -\frac{1}{2}(2ab) = -x^3 \Rightarrow$ ضریب: -1

$\frac{1}{3}(x+x^2)^3 \xrightarrow{\text{جمله دارای } x^3} \frac{1}{3}x^3 \Rightarrow$ ضریب: $\frac{1}{3}$

ضریب: $-\frac{2}{3}$

$\frac{۷۲}{۵۳۴}$ ضریب x^4 در بسط مک لورن $e^{\sin x}$ را بیابید. (MBA_{86})

e^t

$t=\sin x \sim x \Rightarrow x^4 \sim t^4$

$x\to 0$

بسط مک لورن را تا t^4 ادامه دهیم

$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!}$

$e^{\sin x} = 1 + \sin x + \frac{\sin^2 x}{2} + \frac{1}{6}\sin^3 x + \frac{1}{24}\sin^4 x + \dots$

مک لورن

x^4 ضریب $= 0 + 0 - \frac{1}{6} + 0 + \frac{1}{24}$

نکته: در بسط مک لورن توابع فرد جمله با توان زوج وجود ندارد

$\frac{1}{24}\sin^4 x \sim \frac{1}{24}x^4 \xrightarrow{\text{ضریب}} \frac{1}{24}$

$x\to 0$

$\frac{1}{2}\sin^2 x = \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + \dots\right)^2 \Rightarrow$ جمله x^4 دار: $\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}x^4\right) = -\frac{1}{6}x^4$

$(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab \Rightarrow +2ab = -\frac{1}{3}x^4$

۱۴۸) $\frac{۸۲}{۵۳۷}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x^n = ?$ 1) $(x+1)e^x$ 2) $x^2 e^x$ 3) $(x^2+1)e^x$ 4) $(x^2+x)e^x$

حاصل سری؟

مک‌لورن e^x: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \xrightarrow{d/dx} e^x = \sum \frac{n x^{n-1}}{n!} \xrightarrow{\times x} x e^x = \sum \frac{n}{n!} x^n$

دوبار مشتق $\xrightarrow{d/dx}$ $e^x + x e^x = \sum \frac{n^2}{n!} x^{n-1} \xrightarrow{\times x} x(e^x + x e^x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x^n$

$=$ $\underset{0}{\text{جمله صفرم}}$ $+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x^n \longrightarrow e^x (x + x^2)$

دارای عکس حاصل کل است. یعنی باید تابعی را فرض کنیم (معمولاً از گزینه‌ها) و مک‌لورن آن را بنویسیم. در صورت سوال اگر n در صورت کسر باشد با مشتق‌گیری به آن می‌رسیم و اگر n در مخرج کسر باشد با انتگرال‌گیری

$\rightarrow n^2 \Rightarrow$ ۲ بار مشتق‌گیری

دروس تا پایان ریاضی ۱

جلسه آینده ریاضی ۲، فصل ۱: هندسه تحلیلی و جبر خطی $\leftarrow$ خلاصه نکات مهم

فصل ۲: سطح و خم

اوایل فصل ۳: توابع چند متغیره (تا حد پیوستگی)

جلسه ۸۹/۸/۲۹

ریاضی ۲ : فصل اول (هندسه تحلیلی و جبر خطی)

تعریف ، اگر A یک ماتریس مربعی باشد و ماتریس B موجود باشد که $AB = BA = I$ آنگاه A وارون‌پذیر نامیده می‌شود و

$$B = A^{-1}$$

قضیه ؛ A وارون‌پذیر است $\Longleftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$

$$A^{-1} = \frac{A^{*}}{|A|} \qquad N : [N_{ij}]_{n \times n} \quad \text{همسازه}$$

$$A^{*} = N^{t} \quad \text{ماتریس الحاقی}$$

$$N_{ij} = (-1)^{i+j} \times \left(\text{دترمینان ماتریس حاصل از حذف سطر i ام و ستون j ام A} \right)$$

مثال $\frac{19}{84}$ $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ عنصر سطر اول و ستون دوم A^{-1} ؟

$$A^{-1}_{(1,2)} = \frac{(A^{*})_{1,2}}{|A|} = \frac{N_{2,1}}{|A|} = \frac{(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}}{|A|}$$

ماتریس پایین مثلثی است دترمینان از ضرب عناصر روی قطر اصلی به دست می‌آید

مثال $\frac{10}{\text{۲ ج ۹۸}}$

به ازای چه مقادیر a دستگاه زیر بی‌نهایت جواب دارد؟

$$\begin{cases} x - y + az = 0 \\ 3x - y + 2z = 0 \\ 4x - 2y + 5z = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow Ax = b$$

ماتریس ضرایب : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ ، $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ، $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} =$$

$A_{n \times n} X = b$
- $|A| \neq 0$ دستگاه منحصر به فرد یک جواب دارد
- $|A| = 0$
  - فاقد جواب است
  - بی‌نهایت جواب دارد

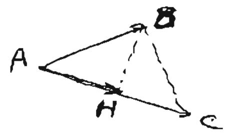
$A_{n \times n} X = 0$
- $|A| \neq 0$ دستگاه منحصراً جواب صفر دارد
- $|A| = 0$ بی‌نهایت جواب دارد (جواب غیر صفر دارد)

$$|A| = 1 \times N_{1,1} + 3 \times N_{2,1} + 4 \times N_{3,1} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} + 3(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & a \\ -2 & 5 \end{vmatrix} + 4(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & a \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 4 - 4a = 0 \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

$\frac{27}{34}$ (الف)

مساحت مثلث به رئوس زیر؟



$A(0,0,0)$

$B(1,0,-2)$

$C(2,-2,0)$

$\overrightarrow{AB} = B - A = (1,0,2)$

$\overrightarrow{AC} = C - A = (2,-2,0)$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (4)i - (-4)j + (-2)k = 4i + 4j - 2k = (4,4,-2)$$

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{4^2 + 4^2 + (-2)^2} = 6$$

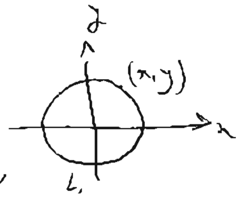
$$\text{مساحت مثلث} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BH}||\overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\underbrace{|AB||AC|\sin\theta}_{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|} = 3$$

$\frac{38}{43}$ معادله صفحه‌ای که از $\frac{x-1}{3} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-4}{-2}$ بگذرد و موازی $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+2}{1}$ باشد را بیابید.

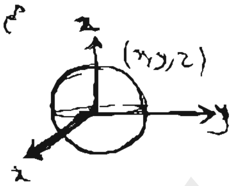
فصل یک کلاً مطالعه شود.

فصل ۲: سطح، خم؛

خم: $x^2+y^2=1$ در R^2



خم (منحنی) یک بعدی است یعنی یک متغیر آزاد دارد



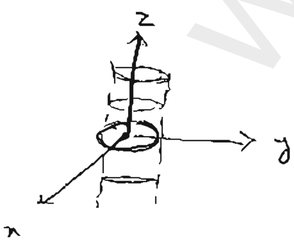
سطح: (رویه) $x^2+y^2+z^2=1$ در R^3

دو متغیر آزاد (دو بعدی)

$f(x,y,z)=0$ در $\mathbb{R}^3$ $\Leftrightarrow$ سطح (رویه)

۱) استوانه

مثال: نمودار $x^2+y^2=1$ را در $\mathbb{R}^3$ رسم کنید.



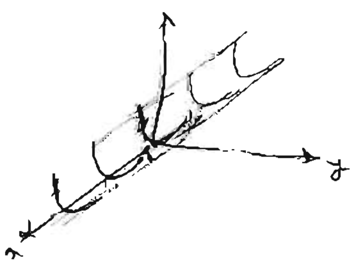
استوانه در راستای محور zها

$z=0 \Rightarrow x^2+y^2=1$

$z=k \rightarrow x^2+y^2=1$

مثال: نمودار $z=y^2$ را در $\mathbb{R}^3$ رسم کنید.

$x=0 \Rightarrow z=y^2$

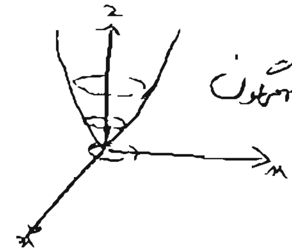


استوانه در راستای محور x؛

مقطع سهمیگون

۱۲) سطوح درجه ۲: هر معادله بر حسب x, y و z در فضا که یک چند جمله‌ای از درجه ۲ باشد

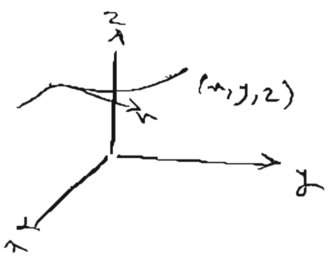
$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dx+Ey+Fz+G=0$$



سهمیون $\quad z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$

اشکال صفحه‌ی ۱۰۸ و ۱۰۹ مطالعه و حفظ شود

منحنی پارامتری:



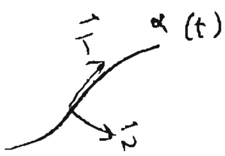
$$\vec{\alpha}(t)=\big(x(t),y(t),z(t)\big) : \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^3$$

معادله حرکت

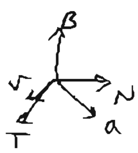
$$\vec{V}(t)=\alpha'(t)=(x',y',z')$$

تندی $\quad |\vec{v}|=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}$

شتاب $\quad \vec{a}(t)=v'(t)=(x'',y'',z'')$



$$\vec{T}(t)=\frac{V(t)}{|V(t)|}$$ بردار یکه مماس



$$\vec{N}(t)=\frac{T'(t)}{|T'(t)|}$$ بردار قائم واحد اول (اصلی)

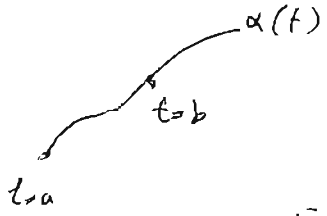
$$B(t)=\vec{T}\times\vec{N}$$ بردار قائم واحد دوم

$$|T\times N|=\underbrace{|T|}_{1}\times\underbrace{|N|}_{1}\underbrace{\sin\tfrac{\pi}{2}}_{1}$$

* صفحه‌ی به موازات T و N را صفحه‌ی بوسان می‌نامیم.

کلی‌تر $\quad B(t)=\frac{\overbrace{\vec{v}\times\vec{a}}^{\text{ضرب خارجی}}}{\underbrace{|v\times a|}_{\text{اندازه}}}$

طول قوس:



$$ds = |v|\,dt = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,dt$$

$$\text{طول قوس} = \int_{t=a}^{t=b} ds$$

$\frac{۱۱}{۱۱۸}$ معادله‌ی صفحه‌ی عمود بر منحنی . $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \sin t \\ z = \cos 2t \end{cases}$ در $t = \frac{\pi}{4}$ را بیابید . (ریاضی ۸۱ ، صنایع ۸۵)

$\alpha(t) = (\sin t, \sin t, \cos 2t)$

$\alpha(\frac{\pi}{4}) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, ۰)$ نقطه

نرمال صفحه عمود $\vec{V} = \alpha'(t) = (\cos t, \cos t, -2\sin 2t)$

$\vec{v}(\frac{\pi}{4}) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -2)$ بردار نرمال صفحه عمود

$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(x - \frac{\sqrt{2}}{2}) + \frac{\sqrt{2}}{2}(y - \frac{\sqrt{2}}{2}) - 2(z - ۰) = ۰$

صفحه‌ی عمود بدست آمد

$\frac{۱۲}{۱۱۸}$ معادله‌ی صفحه‌ی بوسان منحنی $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = t^3 \end{cases}$ در نقطه‌ی $t = ۱$ را بدست آورید.

$\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$

$\alpha(1) = (1, 1, 1)$ نقطه

نرمال صفحه‌ی بوسان $\bar{V} \times \bar{a}$ یا هر ضریبی از آن (مثلاً $B(t)$) است.

$v = (1, 2t, 3t^2)$

$v(1) = (1, 2, 3)$

$a = (۰, 2, 6t)$

$a(1) = (۰, 2, 6)$

$\Rightarrow v \times a = (6, -6, 2)$ نرمال صفحه‌ی بوسان

$6(x-1) - 6(y-1) + 2(z-1) = ۰$ بدست آمد

$\frac{۳۷}{۲ج.۲۸۸}$ بردارهای قائم یکه‌ی اصلی برای خم زیر را بیابید. (مکانیک ۸۷)

$R(t) = (\cos t, \sin t, t)$

$v = (-\sin t, \cos t, 1)$

$|v| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1^2} = \sqrt{2}$

$\vec{T}(t) = \frac{v}{|v|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin t, \cos t, 1)$

$T'(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos t, -\sin t, ۰)$

$|T'(t)| = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \vec{N}(t) = \frac{T'(t)}{|T'(t)|} = (-\cos t, -\sin t, ۰)$

انحنا (خمیدگی):

تعریف: برای خم $\alpha(t)$ انحنا (خمیدگی) عبارتست از

$$k(t)=\frac{|v\times a|}{|v|^3}$$

و برعکس آن شعاع انحنا می‌گویند

$$\rho(t)=\frac{1}{k(t)}$$

حالات خاص

۱) اگر $\alpha(t)=(x(t),y(t))$ آنگاه

$$k(t)=\frac{|x'y''-x''y'|}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

۲) اگر خم به معادله $y=f(x)$ باشد آنگاه

$$k(x)=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

۳) انحنای دایره به شعاع R در همه‌ی نقاط $k(\,)=\frac{1}{R}$ می‌باشد

فرمول شتاب:

$$\vec{v}=\frac{ds}{dt}\vec{T}$$

$$\xrightarrow{d/dt}\ \vec{a}=\frac{d^2s}{dt^2}\vec{T}+\frac{ds}{dt}\,\vec{T}'=\frac{d^2s}{dt^2}\vec{T}+\frac{ds}{dt}\times\vec{N}\,|\vec{T}'|$$

و $|T'|=k\frac{ds}{dt}$ *

اگر $|v|=\frac{ds}{dt}$ آنگاه

$$\vec{a}=\frac{d^2s}{dt^2}\vec{T}+k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\vec{N}$$

$$\vec{a}=\frac{d^2s}{dt^2}\vec{T}+k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\vec{N}$$

مولفه مماسی بردار شتاب $a_T=\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{d}{dt}|v|$

$$a_N=k\,|v|^2$$

تعریف: برای خم $\alpha(t)$ تاب (پیچش) عبارت است از:

$$\tau(t)=\frac{(v\times a)\cdot a'}{|v\times a|^2}$$

$\frac{15}{121}$ انحنا را بیابید. $a,b,\omega>0$

$$R(t)=(a\cos\omega t,\ a\sin\omega t,\ b\omega t)$$

$$\vec{v}=(-a\omega\sin\omega t,\ a\omega\cos\omega t,\ b\omega)=\omega(-a\sin\omega t,\ a\cos\omega t,\ b)$$

$$\vec{a}=\omega(-a\omega\cos\omega t,\ -a\omega\sin\omega t,\ 0)=-a\omega^2(\cos\omega t,\ \sin\omega t,\ 0)$$

$$\vec{v}\times\vec{a}=a\omega^3(b\sin\omega t,\ -b\cos\omega t,\ a)$$

$$|v\times a|=a\omega^3\sqrt{b^2\sin^2\omega t+b^2\cos^2\omega t+a^2}=a\omega^3\sqrt{a^2+b^2}$$

$$|v|=\omega\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\Rightarrow k(t)=\frac{|v\times a|}{|v|^3}=\frac{a\omega^3\sqrt{a^2+b^2}}{\omega^3(\sqrt{a^2+b^2})^3}=\boxed{\frac{a}{a^2+b^2}}$$

مثال: مؤلفه‌ی مماسی و قائم شتاب را برای مثال قبل بیابید

$$R(t) = (a\cos\omega t, a\sin\omega t, b\omega t)$$

مؤلفه مماسی: $a_T = \frac{d}{dt}|v| = \frac{d}{dt}(\omega\sqrt{a^2+b^2}) = 0$

مؤلفه قائم: $a_N = k|v|^2 = \frac{a}{a^2+b^2} \times \omega^2 (\sqrt{a^2+b^2})^2 = a\omega^2$

۴۳
۱۱۳ ج ۲
انحنا را در $t = \frac{\pi}{3}$ بیابید.

$$R(t) = (\underbrace{\sin t - \cancel{\cos t}}_{x}, \underbrace{\cancel{\cos t}, \cos t + t\sin t}_{y})$$

$$\begin{cases} x' = t\sin t \\ y' = t\cos t \end{cases}, \quad \begin{cases} x'' = \sin t + t\cos t \\ y'' = -t\sin t + \cos t \end{cases}$$

$$|x'y'' - y'x''| = |\underbrace{-t^2\sin^2 t - t^2\cos^2 t}_{-t^2(\underbrace{\sin^2 t + \cos^2 t}_{1})}| = |-t^2| = t^2$$

$$(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}} = (\underbrace{t^2\sin^2 t + t^2\cos^2 t}_{t^2(\sin^2 t + \cos^2 t)})^{\frac{3}{2}} = |t|^3$$

$$K(t) = \frac{|x'y'' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{|t|} \xrightarrow{\pi/3} = \frac{3}{\pi}$$

۱۴
۲۸۶ ج ۲
ماکزیمم مقدار انحنای $y = e^x$ در نقطه‌ای با کدام x رخ می‌دهد؟ (سال ۸۶)

$$y' = e^x \quad y'' = e^x$$

$$K(x) = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{e^x}{(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}} \xrightarrow{\text{لگاریتم}} \ln(K(x)) = x - \frac{3}{2}\ln(1+e^{2x}) \xrightarrow{\text{مشتق}}$$

$$\frac{K'(x)}{K(x)} = 1 - \frac{3e^{2x}}{1+e^{2x}} = \frac{1-2e^{2x}}{1+e^{2x}} \xrightarrow{\times K(x)} K'(x) = \frac{(1-2e^{2x})e^x}{(1+e^{2x})^{5/2}}$$

$$\Rightarrow 2e^{2x} = 1 \rightarrow e^{2x} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{x = -\frac{1}{2}\ln 2}$$

مشتق از ضرب برداری: $\vec{\alpha}(t), \vec{\beta}(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$$* \ \frac{d}{dt}(\vec{\alpha}(t) \cdot \vec{\beta}(t)) = \alpha' \cdot \beta + \alpha \cdot \beta'$$

$$* \ \frac{d}{dt}(\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) = \alpha' \times \beta + \alpha \times \beta'$$

$$\vec{\alpha}(t) \cdot \vec{\alpha}(t) = |\alpha(t)|^2$$

$$\frac{d}{dt}|\vec{\alpha}(t)|^2 = \frac{d}{dt}(\alpha \cdot \alpha) = \underbrace{\alpha' \cdot \alpha + \alpha \cdot \alpha'}_{\text{مساوی اند}} = 2\alpha \cdot \alpha'$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}|\vec{\alpha}(t)|^2 = 2\vec{\alpha}(t) \cdot \vec{\alpha}'(t)}$$

نکته: $|\alpha(t)| =$ ثابت $\Longleftrightarrow \alpha \perp \alpha'$

$|\vec{\alpha}(t)|$ عددی ثابت است $\Longleftrightarrow \alpha'(t) \perp \alpha(t)$

نتیجه: چون اندازه‌ی بردارهای $\vec{T}(t)$ ، $\vec{N}(t)$ ، $\vec{B}(t)$ عددی ثابت است پس:

$$T \perp T', \ N \perp N', \ B \perp B'$$

فصل سوم، توابع چندمتغیره

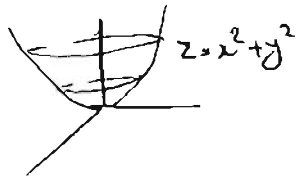
دومتغیر $f(x,y)=x^2+y^2$ $\quad \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

دامنه $=\mathbb{R}^2$

نمودار f، $\{(x,y,z):\ z=f(x,y)\}\subseteq\mathbb{R}^3$

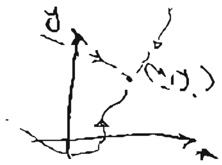
مثال، نمودار $f(x,y)=x^2+y^2$

$$z=x^2+y^2$$



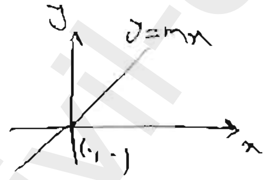
حد و پیوستگی،

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L$$



* اگر از دو مسیر متفاوت اعداد متفاوت برای حد حاصل شود آنگاه حد موجود نخواهد بود.

مثال: $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$



مسیر $y=mx$: $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+m^2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+m^2x^2}=\frac{1}{1+m^2}$

چون جواب به پارامتر m وابسته شده پس حد ندارد.

* مختصات قطبی، (فقط وقتی که $(x,y)\to(0,0)$ می‌توان از مختصات قطبی استفاده کرد)

$x=r\cos\theta$
$y=r\sin\theta$
$x^2+y^2=r^2$

مثال، $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \xrightarrow{\text{قطبی}} \lim_{\substack{r\to 0\\ \theta\ \text{آزاد}}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)$

مثال:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^4}{(x^2+y^2)^2} = \frac{(r\cos\theta)^3(r\sin\theta)^4}{(r^2)^2} = \lim_{r\to 0} r^3 \underbrace{\cos^3\theta\,\sin^4\theta}_{\text{کراندار}} = 0$$

مثال

$$\lim_{(x,y)\to 0} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \xrightarrow{\text{تغییر}} \lim_{r\to 0} \frac{r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}{r^2} = \lim_{r\to 0} \cos^2\theta-\sin^2\theta$$ وجود ندارد

چون درجه صورت و مخرج با هم برابر است پس حد وجود ندارد

مثال:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^4+y^2} \xrightarrow{u=x^2} \lim_{(u,y)\to(0,0)} \frac{2uy}{u^2+y^2}$$

نکته: اگر درجه‌ی صورت و مخرج با هم برابر یا درجه‌ی صورت کمتر از مخرج باشد حد وجود ندارد

درس ۷ ص ۱۶۱

هفته آینده (مشتق تا سر کاربرد مشتق)

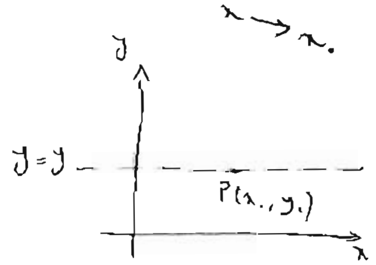
حذفیات ریاضی ۲ ← مطالب مهم کنکور ۹۰ در سایت آکاس

جلسه هشتم ۸۹,۹,۹

مشتق پاره‌ای (جزئی، نسبی): مشتق پاره‌ای تابع $f(x,y)$ به مفهوم مشتق گرفتن از f نسبت به یکی از متغیرهاست. مثلاً اگر نسبت به x از f مشتق بگیریم مشتق حاصل با نماد $\frac{\partial f}{\partial x}$ یا f_x یا f_1 یا f'_x یا f'_1 نمایش داده می‌شود.

تعریف: برای محاسبه‌ی $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ در ضابطه‌ی f قرار می‌دهیم $y=y_0$ و از تابعی که حاصل می‌شود یعنی $g(x)=f(x,y_0)$ (y_0 عدد) نسبت به x در نقطه‌ی $x=x_0$ مشتق می‌گیریم و $\frac{\partial f}{\partial x}=g'(x_0)$ پس:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$$



با گذاشتن y_0 به جای y در واقع دامنه‌ی f را محدود به x هایی می‌کنیم که در امتداد خط $y=y_0$ قرار دارد.

تذکر: معمولاً برای محاسبه‌ی $f_x(x_0,y_0)$ ابتدا از ضابطه‌ی f نسبت به x مشتق می‌گیریم و سپس $x=x_0$ و $y=y_0$ را در آن جایگذاری می‌کنیم.

مثال: $f(x,y)=x^2+xy^3$ مطلوبست $\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)$:

روش اول (تعریف): در ضابطه f قرار می‌دهیم $x=1 \Rightarrow f(1,y)=1+y^3 \xrightarrow{\partial/\partial y} \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)=3y^2\Big|_{y=2}=12$

روش دوم (فرمول‌های مشتق): $\frac{\partial f}{\partial y}=0+3xy^2 \xrightarrow[y=1]{x=1} \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)=12$

مثال ۱۰ / ۱۴۳

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2\cos x-y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

مطلوبست $f_x(0,0)$ و $f_y(0,0)$

برای محاسبه‌ی $f_x(0,0)$ از تعریف استفاده می‌کنیم (چون در این نقطه ضابطه عوض می‌شود)

$$y=0 \Rightarrow f(x,0)=\begin{cases}\cos x & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}=g(x)$$

چون $\lim_{x\to 0} g(x)=1\neq g(0)$ پس g در $x=0$ ناپیوسته است و لذا $g'(0)$ وجود ندارد و در نتیجه $f_x(0,0)$ موجود نیست.

برای محاسبه‌ی $f_y(0,0)$ نیز از تعریف استفاده می‌کنیم.

$$x=0 \Rightarrow f(0,y)=\begin{cases}-y & y\neq 0\\ 0 & y=0\end{cases}=h(y)$$

تابع h در $y=0$ پیوسته است ←

$$h'(y)=-1\Big|_{y=0}=-1 \Rightarrow f_y(0,0)=-1$$

تعریف: تابع $f(x,y)$ را همگن از درجه‌ی α می‌نامیم هرگاه،

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^{\alpha} f(x,y)$$

قضیه: اگر $f(x,y)$ همگن از درجه‌ی α باشد آنگاه،

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=\alpha f(x,y)$$ قضیه اویلر

مثال: $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^4+y^4}$ مطلوبست $x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}$

$$f(\lambda x,\lambda y)=\frac{\lambda^2\,xy}{\lambda^4(x^4+y^4)}=\lambda^{-2}f(x,y)$$ همگن از درجه‌ی -2

$$\Rightarrow x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=-2f(x,y)=\frac{-2xy}{x^4+y^4}$$

مثال: $f(x,y)=xy^2+\dfrac{x^3}{x-y}$ مطلوبست $x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}$

همگن نیست

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^3(xy^2)+\frac{\lambda^3x^3}{\lambda(x-y)}=\lambda^3\underbrace{xy^2}_{\alpha=3}+\lambda^2\underbrace{\frac{x^3}{x-y}}_{\alpha=2}$$

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=x(g_x+h_x)+y(g_y+h_y)=\underbrace{(xg_x+yg_y)}_{3g}+\underbrace{(xh_x+yh_y)}_{2h}$$ از اویلر

$$=3xy^2+\frac{2x^3}{x-y}$$

نکته: در حالت جمع و تفریق دو تابع اگر هر کدام از توابع همگن از درجه‌ی α_1، α_2، ... باشد آنگاه می‌توان قضیه اویلر را جداگانه برای آنها محاسبه کرد. (به مثال بالا مراجعه شود)

$(g(x,y)=\underbrace{\sin\left(\frac{y^2}{x}\right)}_{z})$ همگن از درجه ۱ u

نکته: اگر $u=u(x,y)$ همگن از درجه‌ی α و $z=f(u)$ باشد آنگاه

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\alpha u f'(u)=\alpha u\frac{dz}{du}$$

$\dfrac{۸۰}{۲\,ج۳۶}$ if $Z=\ln\underbrace{\dfrac{x^4+y^4}{x+y}}_{u}\Rightarrow x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=\,?$

$Z=\ln u$

u همگن از درجه ۳

$$\rightarrow x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=3\underbrace{\left(\frac{x^4+y^4}{x+y}\right)}_{u}\underbrace{\frac{dz}{du}}_{\frac{1}{u}}=3u\times\frac{1}{u}=3$$

$Z=\ln u\Rightarrow\dfrac{dz}{du}=\dfrac{u'}{u}\rightarrow 1$

$\dfrac{۲۰}{۱۴۷}$ $f(x,y)=x\cos 2y+ye^{2x}$ مطلوبست $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$

وقتی با مداد اندیس بدهند (مثل f_{yx}) از چپ به راست شروع می‌کنیم

دقت! $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}$ می‌دهند از سمت راست ($\dfrac{\partial f}{\partial y}$) شروع می‌کنیم

$$f_{yx}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$\leftarrow$ محاسبه از سمت راست

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-2x\sin 2y+e^{2x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=-2\sin 2y+2e^{2x}$$

مشتق جهتی، (سوئی)

تعریف: فرض کنید $\vec{u}=(u_1,u_2)$ برداری یکه باشد. تابع $f(x,y)$ و نقطه‌ی $P(x_0,y_0)$ مفروض است.

معادله‌ی خط گذرنده از نقطه‌ی P در راستای $\vec{u}$ عبارتست از $\frac{x-x_0}{u_1}=\frac{y-y_0}{u_2}=t$

$$\to \begin{cases} x=x_0+tu_1 \\ y=y_0+tu_2 \end{cases},\ t\in R$$ معادله‌ی پارامتری خط

هر نقطه روی این خط $Q(x_0+tu_1\ ,\ y_0+tu_2)$ است و به ازای $t=0$ نقطه‌ی P را خواهیم داشت. ضابطه f روی خط

عبارتست از $g(t)=f(x_0+tu_1\ ,\ y_0+tu_2)$

به مقدار $g'(0)$ مشتق f در نقطه‌ی P در جهت بردار $\vec{u}$ می‌گوییم و با نماد $D_u f(P)$ یا $\frac{\partial f}{\partial u}(P)$ نشان داده می‌شود.

$$\overbrace{D_u f(x_0,y_0)}^{g'(0)}=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+tu_1,y_0+tu_2)-f(x_0,y_0)}{t}$$

مثال: برای $f(x,y)=xy+2x$ در نقطه‌ی $(0,0)$ مشتق در جهت بردار $\vec{u}=(\frac{3}{5},\frac{4}{5})$ را بدست آورید.

$|u|=\sqrt{(\frac{3}{5})^2+(\frac{4}{5})^2}=1$ پس $\vec{u}$ بردار یکه می‌باشد.

$$D_u f(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(\frac{3}{5}t,\frac{4}{5}t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{(\frac{3}{5}t)(\frac{4}{5}t)+2(\frac{3}{5}t)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{12}{25}t^2+\frac{6}{5}t}{t}=\frac{6}{5}$$

تعریف: برای $f(x,y): R^2\to R$ بردار گرادیان عبارتست از:

$$\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

قضیه: اگر مشتقات جزئی مرتبه اول f در نقطه P پیوسته باشد آنگاه

$$D_u f(P)=\vec{\nabla} f(P)\cdot\vec{u}$$

ضرب داخلی

$\frac{۳۱}{۱۷۵}$ مشتق جهتی $f(x,y)=e^x tg y+2x^2y$ در $(0,\frac{\pi}{4})$ در جهت $i-j$ را بیابید. (MBAAK)

$\vec{a}=i-j\qquad \vec{a}=(1,-1)\qquad |a|=\sqrt{2}$ پس یکه نیست $\to \vec{u}=\frac{\vec{a}}{|a|}=(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$

ضابطه تابع در $(0,\frac{\pi}{4})$ شرط قضیه را دارد (پیوسته است) پس از قضیه داریم:

قضیه

$\nabla f\,(e^x tg y+4xy\ ,\ e^x(1+tg^2 y)+2x^2)$

$\nabla f(0,\frac{\pi}{4})=(1,2)$

$$\vec{\nabla} f(0,\frac{\pi}{4})\cdot\vec{u}=1\times\frac{1}{\sqrt{2}}+2\times\frac{-1}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

تمام

نکته ۱) حداکثر مقدار مشتق جهتی f در نقطه‌ی P برابر است با $|\nabla f(P)|$ و در جهت بردار گرادیان یعنی $\dfrac{\nabla f(P)}{|\nabla f(P)|}$ رخ می‌دهد

ضرب داخلی

$D_u f(P) = \nabla f(P) \cdot u = |\nabla f(P)| \times |u| \cos\alpha \leq |\nabla f(P)|$

۲) حداقل مقدار مشتق جهتی f در نقطه‌ی P برابر است با $-|\nabla f(P)|$ و در خلاف جهت گرادیان یعنی $-\dfrac{\nabla f(P)}{|\nabla f(P)|}$ رخ می‌دهد

مثال: اگر $f(x,y,z) = xe^y + xz^2$ جهت حداقل مقدار مشتق جهتی در نقطه‌ی $(1,0,-1)$ را بدست آورید.

$\nabla f = (f_x, f_y, f_z) = (e^y + z^2,\ xe^y,\ 2xz)$

$\nabla f(1,0,-1) = (2, 1, -2)$

$|\nabla f| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = 3$ ← حداکثر مقدار

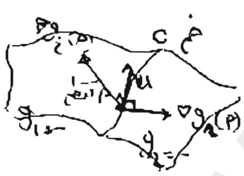
$\Rightarrow$ جهت حداقل $= -\dfrac{\nabla f(P)}{|\nabla f(P)|} = \underbrace{\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)}_{\text{جواب}}$

اندازه‌ی حداقل $= -3$

بردار عمود بر سطح: سطح به معادله $g(x,y,z) = 0$ و نقطه P روی آن مفروض است. بردار عمود بر سطح در نقطه P عبارت است از $\vec{\nabla} g(P)$

$g_1(x,y,z) = 0 \qquad g_2(x,y,z) = 0$

بردار مماس بر تقاطع دو سطح: تقاطع $g_1 = 0$ و $g_2 = 0$ را خم C و نقطه‌ی P را روی آن در نظر می‌گیریم. بردار مماس بر خم C در نقطه P عبارت است از:



$\vec{u} = \nabla g_1(P) \times \nabla g_2(P)$

$\dfrac{۱۷}{۲ج۲۸۷}$ معادله‌ی صفحه‌ی مماس بر سطح $z = 2x^2 + y^2$ در نقطه $(1,1,3)$ را بیابید

$g = 2x^2 + y^2 - z = 0$

$\nabla g = (4x, 2y, -1)$

$\nabla g(1,1,3) = (4, 2, -1) \longrightarrow (4,2,-1)$ نرمال صفحه مماس

$4(x-1) + 2(y-1) - (z-3) = 0$

معادله‌ی صفحه‌ی مماس در نقطه‌ی $(1,1,3)$

بردار عمود بر سطح

مشتق سوالاتی که در آن گرادیان می‌آید

معادله خط عمود بر سطح
هادی خط قائم

بردار نرمال صفحه مماس
بر سطح در نقطه P

۳۰ / ۱۸۰ ج۳ معادله ی خط مماس بر خم زیر در نقطه ی (1,1,1) بیابید؟ (مکانیک ۸۷)

$$xyz = 1 \quad , \quad x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6 \Rightarrow g_1 = xyz - 1 = 0 , \quad g_2 = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 6 = 0$$

$$\nabla g_1 = (yz, xz, xy)\Big|_{(1,1,1)} = (1,1,1)$$

$$\nabla g_2 = (2x, 4y, 6z)\Big|_{(1,1,1)} = (2,4,6) \Rightarrow \vec{u} = \nabla g_1 \times \nabla g_2 = (2,-4,2)$$

دو تعریف برای $\vec{u}$

بردار مماس بر خم

هادی خط مماس بر خم در نقطه P

بردار نرمال صفحه ی عمود بر خم در نقطه P

هر سه موارد فوق u کاربرد دارد

خط مماس: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{-4} = \dfrac{z-1}{2}$

خط مماس

مشتق از ترکیب توابع (مشتق زنجیره ای)

یادآوری: $z = f(y)$ ، $y = g(x)$ و $z = f(g(x)) \Rightarrow \dfrac{dz}{dx} = \underbrace{g'(x)}_{\text{مشتق نسبت به } x} \times \underbrace{f'(g(x))}_{\text{مشتق نسبت به } g}$

یا فرض $z - y - x \Rightarrow \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{dz}{dy} \times \dfrac{dy}{dx}$

$$z \begin{cases} x \begin{cases} r \\ s \\ t \end{cases} \\ y \begin{cases} r \\ s \\ t \end{cases} \end{cases}$$

z تابعی از r و s و t است ← $\dfrac{\partial z}{\partial r} = \dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial r} + \dfrac{\partial z}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial r}$

$z - x - r$

$z - y - r$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

* مثال: اگر $z = f(x,y)$ و $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$ مطلوبست $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x}(-r\sin\theta) + \frac{\partial z}{\partial y}(r\cos\theta)$$

* مثال ۳۳ / ۱۸۶ . اگر $\omega = f(u,v)$ دارای مشتقات پاره ای مرتبه دوم پیوسته است . با تغییر متغیرهای $x = u + v$ ، $y = u - v$

حاصل $\dfrac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v}$ را بیابید. (عمران ۸۷)

توضیح: هدف محاسبه سری مشتقات ω برحسب x و y است . برای اینکار از قاعده ی مشتق زنجیره ای با فرض آنکه

متغیرهای جدید یعنی x و y واسطه اند استفاده می کنیم.

$$\frac{\partial \omega}{\partial v}=\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\times\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial \omega}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\right)=\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}-\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)$$

جمله اول

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u\,\partial v}=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}-\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\Big(\underbrace{\frac{\partial \omega}{\partial x}}_{\omega_x}\Big)-\frac{\partial}{\partial u}\Big(\underbrace{\frac{\partial \omega}{\partial y}}_{\omega_y}\Big)=\left(\frac{\partial \omega_x}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial \omega_x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\right)-\left(\frac{\partial \omega_y}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial \omega_y}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\right)$$

$$\Rightarrow\quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial u\,\partial v}=(\omega_{xx}+\omega_{xy})-(\omega_{yx}+\omega_{yy})$$

نکته: اگر مشتقات مرتبه دوم تابعی پیوسته باشند آنگاه مشتقات مخلوط آن (ω_{yx} و ω_{xy}) با هم برابرند.

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u\,\partial v}=\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}$$

نکته: $\omega_{xy}=\dfrac{\partial^2 \omega}{\partial y\,\partial x}$

$\frac{۸۷}{۱۸۷}$ در تابع مشتق‌پذیر $z=y\,\phi(\underbrace{x^2-y^2}_{t \text{ واسطه}})$ مطلوب است:

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=?$$

گزینه ۱) $\frac{z}{y^2}$ ۲) $-\frac{z}{y^2}$ ۳) $-\frac{z}{y}$ ۴) $\frac{z}{y}$

حل:

$$\phi - t \begin{cases} x \\ y \end{cases}\qquad t=x^2-y^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y\Big(2x\,\underbrace{\phi'_t(x^2-y^2)}_{\phi'_t \text{ اختصاراً}}\Big)=2xy\,\frac{d\phi}{dt}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\phi+y\left(-2y\,\phi'_t\right)=\phi-2y^2\,\frac{d\phi}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x}\left(2xy\,\phi'_t\right)+\frac{1}{y}\left(\phi-2y^2\phi'_t\right)=\cancel{2y\,\phi'_t}+\frac{\phi}{y}-\cancel{2y\,\phi'_t}=\frac{1}{y}\phi=\,*$$

$$z=y\phi \Rightarrow \phi=\frac{1}{y}z \quad\Rightarrow\quad *\ \frac{1}{y}\left(\frac{1}{y}z\right)=\frac{z}{y^2}$$

$\frac{۸۸}{۱۸۷}$ اگر $\omega=f(\underbrace{u-v,\,v-u}_{\text{دو واسطه}})$ آنگاه کدام گزینه درست است؟

مشتق نسبت به مؤلفه اول

$$\frac{\partial \omega}{\partial u}=1\times f'_1+(-1)\,f'_2=f'_1-f'_2$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial v}=-1\times f'_1+1\,f'_2=f'_2-f'_1$$

$\Big\}\rightarrow \frac{\partial \omega}{\partial u}+\frac{\partial \omega}{\partial v}=0$ ✓

گزینه ۱) $\frac{\partial \omega}{\partial u}+\frac{\partial \omega}{\partial v}=0$

مشتق ضمنی ۲

یادآوری : $F(x,y)=0 \xrightarrow[x:\ \text{متغیر مستقل}]{y:\ \text{تابع}} \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$

یادآوری ۲ : $F(x,y,z)=0$ ، $\dfrac{\partial z}{\partial x}$: z : تابع ، x,y : متغیرهای مستقل

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

مشتق رابطه نسبت به تابع

مثال: در رابطه $xe^{y}+we^{x}=ywz$ ، $\dfrac{\partial x}{\partial w}$ مطلوب است

$$F = xe^{y}+we^{x}-ywz=0$$

$$\frac{\partial x}{\partial w} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial w}}{\frac{\partial F}{\partial x}} = -\frac{e^{x}-yz}{e^{y}+we^{x}}$$

انواع مشتق‌ها:
① مشتق پاره‌ای: ضمنی / زنجیره‌ای / مستقیم
② مشتق جهتی

مشتق پاره‌ای مستقیم: وقتی در صورت سوال رابطه تابع با متغیرهای مستقل آن صریحاً داده شود مثل $y=2x+z$ ، $\dfrac{\partial y}{\partial x}=?$

زنجیره‌ای: اگر در سوال رابطه تابع به وسیله واسطه به متغیرها مربوط باشد. $f(u-v,v-u)$ ، $\dfrac{\partial w}{\partial u}$

ضمنی: وقتی رابطه مخلوطی از تابع و متغیرها باشد و مستقیم و صریح نباشد. $e^{z}+z^{3}+y^{2}=0$ ، $\dfrac{\partial z}{\partial x}=?$

تعریف: ژاکوبین توابع $F(x,y)$ و $G(x,y)$ نسبت به x و y عبارت است از

$$\frac{\partial (\vec{F},G)}{\partial (\underrightarrow{x,y})} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix}$$
مشتقات تابع اول
مشتقات تابع دوم

مثال $\dfrac{۳۲}{۲ج۹۲}$: $\begin{cases} u = x^{2}-y^{2} \\ v = 2xy \end{cases}$ ، $\begin{matrix} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{matrix}$ مطلوب است: (MBA ۸۵)

$$\frac{\partial (u,v)}{\partial (r,\theta)} = \begin{vmatrix} u_r & u_\theta \\ v_r & v_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2r\cos 2\theta & -2r^{2}\sin 2\theta \\ 2r\sin 2\theta & 2r^{2}\cos 2\theta \end{vmatrix} = 4r^{3}\cos^{2}2\theta + 4r^{3}\sin^{2}2\theta = 4r^{3}$$

راه اول: $\dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial r} + \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial y}{\partial r}$

راه دوم: $u = x^{2}-y^{2} = r^{2}\cos^{2}\theta - r^{2}\sin^{2}\theta = r^{2}(\underbrace{\cos^{2}\theta-\sin^{2}\theta}_{\cos 2\theta}) = r^{2}\cos 2\theta \ , \ v = r^{2}\sin 2\theta$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 2r\cos 2\theta$$

تعمیم قانون مشتق ضمنی: اگر از دستگاه

$$\begin{cases} F(x,y,z,w)=0 \\ G(x,y,z,w)=0 \end{cases}$$

(تعداد تابع‌ها با تعداد رابطه‌ها برابر است)

متغیرهای x و z تابع باشند و w و y مستقل باشند، آنگاه:

$$\frac{\partial x}{\partial w} = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(w,z)}}{\boxed{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}}}$$

ژاکوبین رابطه‌ها نسبت به تابع‌ها

تذکر: به طور کلی شرط آنکه در یک دستگاه ضمنی برخی از متغیرها تابع باشند آن است که ژاکوبین رابطه‌ها نسبت به توابع مخالف صفر باشد.

۱۱/۲۱۰ ج ۲ در دستگاه

$$\begin{cases} 2x = v^2 - u^2 & (F) \\ y = uv & (G) \end{cases}$$

فرض کنید متغیرهای u و v تابع باشند و x و y مستقل باشند. مطلوب است

$$\frac{\partial u}{\partial x} = ?$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}$$

فرمول کلی

روش اول: از روابط دستگاه با فرض آنکه u و v تابع باشند مشتق نسبت به x می‌گیریم.

روش اول:

$$\text{مشتق}\begin{cases} 2 = 2v\dfrac{\partial v}{\partial x} - 2u\dfrac{\partial u}{\partial x} \\ 0 = \dfrac{\partial u}{\partial x}v + u\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} v\dfrac{\partial v}{\partial x} - u\dfrac{\partial u}{\partial x} = 1 \\ u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

حل به روش کرامر:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} v & 1 \\ u & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} v & -u \\ u & v \end{vmatrix}}$$

دترمینان ضرایب معادلات

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-u}{v^2+u^2} = -\frac{u}{v^2+u^2}$$

روش دوم: فرمول ژاکوبین:

$$F: v^2 - u^2 - 2x = 0$$
$$G: uv - y = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\begin{vmatrix} -2 & 2v \\ 0 & u \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2u & 2v \\ v & u \end{vmatrix}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{-2u}{-2u^2-2v^2} = -\frac{u}{v^2+u^2}$$

سوال: در مثال قبل تحت چه شرایطی u و v تابع اند؟

جواب ← $\boxed{u^2+v^2\neq 0}$ ← $2(v^2+u^2)\neq 0$ $\overset{\text{از مثال قبل}}{\Longrightarrow}$ $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(v,u)}\neq 0$:نکته

دیفرانسیل و تقریب خطی:

تعریف: برای $f(x,y)$ دیفرانسیل کامل (کل) عبارت است از:

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$$

تقریب خطی عبارت است از: نقطه $P(x_0,y_0)$

$$f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)\simeq f(P)+\underbrace{f_x(P)\,\Delta x+f_y(P)\,\Delta y}_{df(P)}$$

$\frac{1}{۲۸۱}$. $f(x,y)=\sqrt{2x^2+e^{2y}}$ مقدار تقریبی f را در نقطه $(2.2,\ -0.2)$ بدست آورید

$f(2,0)$ $\quad \Delta x=0.2$, $\Delta y=-0.2$

$$f(2.2,\ -0.2)=f(2,0)+\left.\frac{4x}{2\sqrt{2x^2+e^{2y}}}\right|_{\substack{x=2\\y=0}}(0.2)+\left.\frac{2e^{2y}}{2\sqrt{2x^2+e^{2y}}}\right|_{\substack{x=2\\y=0}}(-0.2)$$

$$f(2.2,\ -0.2)=3+\frac{4}{3}(0.2)-\frac{1}{3}(0.2)=3.2$$

درس تا ص ۱۵۸

هفته آینده ۲ کاربرد مشتق

فصل ۴. انتگرال دوگانه (دکارتی، قطبی، تغییر متغیر)

جلسه نهم ۸۹/۶/۱۳

اکسترمم نسبی:

تعریف: نقطه‌ای که در آن اکسترمم نسبی رخ دهد نقطه‌ایست که:

۱) ∇f در آن نقطه صفر شود ⇐ آن را بحرانی می‌نامیم

۲) ∇f در آن موجود نباشد ⇐ آن را ایزوله می‌نامیم

تعریف: اگر $f(x,y)$ دارای مشتقات مرتبه دوم پیوسته باشد، ماتریس هسیان عبارت است از

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

مبین $\Delta = \det H = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2$

آزمون مشتق دوم: فرض کنید P نقطه بحرانی f بوده و مشتقات مرتبه دوم f در P پیوسته باشد:

۱) $\Delta(P) > 0$, $f_{xx}(P) > 0$ آنگاه P نقطه Min نسبی است.

۲) $\Delta(P) > 0$ و $f_{xx}(P) < 0$ آنگاه P نقطه Max نسبی است.

۳) $\Delta(P) < 0$ آنگاه P نه Max نه Min است که آن را زینی می‌نامیم.

۸۵ / ۲.۵ $\quad f(x,y) = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} - 4x + y$ ، نقاط بحرانی و نوع آنها را تعیین کنید!

$$\nabla f = \left(\frac{1}{x^2} - 4, \quad -\frac{1}{y^2} + 1 \right) = (0,0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x^2} - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{y^2} + 1 = 0 \Rightarrow y = \pm 1 \end{cases} \Rightarrow (x,y) = \left(\pm \frac{1}{2}, \pm 1 \right)$$ ۴ نقطه بحرانی

$$\Delta = f_{xx} \cancel{f_{yy}} - f_{xy}^2 = \left(\frac{-2}{x^3} \cdot \frac{2}{y^3} \right) - (0)^2 = \frac{-4}{x^3 y^3}$$

$(\frac{1}{2}, 1) \Rightarrow \Delta(\frac{1}{2}, 1) = -32$ نقطه زینی

$(-\frac{1}{2}, -1) \Rightarrow \Delta(-\frac{1}{2}, -1) < 0$ نقطه زینی

$(+\frac{1}{2}, -1) \Rightarrow \Delta(-\frac{1}{2}, 1) > 0 \quad f_{xx} < 0$ نقطه Max نسبی

$(-\frac{1}{2}, +1) \quad \Delta(\frac{1}{2}, 1) > 0 \quad f_{xx} > 0$ نقطه Min نسبی

$$f_{xx}\left(\frac{1}{2}, -1\right) = \frac{-2}{(\frac{1}{2})^3} < 0$$

اکسترمم مطلق مقید (روش ضرایب لاگرانژ)

هدف محاسبه‌ی اکسترمم مطلق تابع پیوسته $f(x,y,z)$ تحت قید $g(x,y,z)=0$ است.

قضیه: اگر اکسترمم مطلق تابع پیوسته f تحت قید $g=0$ در نقطه‌ی P رخ دهد P در دستگاه زیر صدق می‌کند

$$\begin{cases} \nabla f = \underbrace{\lambda}_{\text{ضریب لاگرانژ}} \nabla g \\ g = 0 \end{cases}$$

۳۶ / ۲ج۱۱۲ — اگر $x^2+y^2+z^2=\frac{4}{5}$ بیشترین مقدار $2x+4y-5z$ را بیابید. (MBA - ۸۴)

$f(x,y,z)=2x+4y-5z$

$g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-\frac{4}{5}=0$ قید

$\nabla f=(2,4,-5)$

$\nabla g=(2x,2y,2z)$

$$\xrightarrow{\nabla f=\lambda\nabla g} \begin{cases} 2=2\lambda x \Rightarrow x=\frac{2}{2\lambda} \\ 4=2\lambda y \to y=\frac{4}{2\lambda} \\ -5=2\lambda z \to z=-\frac{5}{2\lambda} \\ x^2+y^2+z^2=\frac{4}{5} \end{cases}$$

در معادله شرط

$$\Longrightarrow \frac{4}{4\lambda^2}+\frac{16}{4\lambda^2}+\frac{25}{4\lambda^2}=\frac{4}{5} \Rightarrow \lambda=\pm\frac{15}{4}$$

کاندیداهای اکسترمم: $2\left(\frac{2}{2\lambda}\right)+4\left(\frac{4}{2\lambda}\right)-5\left(\frac{-5}{2\lambda}\right)=\frac{4}{2\lambda}+\frac{16}{2\lambda}+\frac{25}{2\lambda}=\frac{45}{2\lambda}$ ؛ $\lambda=\frac{15}{4}$: $+6$ ، $\lambda=-\frac{15}{4}$: -6

$\text{Max } f=6$

$\text{Min } f=-6$

۸۹ / ۲-۹ — کوتاهترین و بلندترین فاصله‌ی مبدأ از خم را بیابید. $x^2+xy+y^2=16$ قید

فاصله‌ی (x,y) از مبدأ $=\sqrt{x^2+y^2}$

برای سهولت در محاسبه می‌توان مربع تابع روبرو را بررسی کرد. اکسترمم یک تابع و مربع آن در یک نقطه اتفاق می‌افتد.

کافی است اکسترمم مطلق مربع فاصله از مبدأ یعنی $f(x,y)=x^2+y^2$ تحت قید $g=x^2+xy+y^2-16=0$ را بدست آوریم.

حل: $\nabla f=(2x,2y)$

$\nabla g=(2x+y,\ 2y+x)$

$$\begin{cases} \nabla f=\lambda\nabla g \\ g=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x=\lambda(2x+y) \\ 2y=\lambda(2y+x) \\ x^2+xy+y^2=16 \end{cases} \xrightarrow{\div} \frac{x}{y}=\frac{2x+y}{2y+x}$$

$\Rightarrow x^2+2xy=y^2+2xy$

$\Rightarrow x^2=y^2 \Rightarrow$

$y=\pm x$

قید:
$$\begin{cases} y=x: & 3x^2=16 \quad x^2=\frac{16}{3} \Rightarrow x=\pm\frac{4}{\sqrt{3}}=y \\ y=-x: & x^2=16 \quad x=\pm 4=-y \end{cases}$$

$f(\frac{4}{\sqrt{3}}, \frac{4}{\sqrt{3}}) = \frac{32}{3}$ $f(-\frac{4}{\sqrt{3}}, -\frac{4}{\sqrt{3}}) = \frac{32}{3}$

$(4, -4) = 32$ $(-4, 4) = 32$

مقایسه $\Rightarrow$ بلندترین فاصله $= \sqrt{32}$

کوتاهترین فاصله $= \sqrt{\frac{32}{3}}$

اکسترمم مطلق روی ناحیه :

تابع پیوسته $f(x,y)$ روی ناحیه $D \subseteq R^2$ مفروض است که D محدود و بسته (شامل مرز خود باشد) است ؛

آنگاه f بر D اکسترمم مطلق دارد

روش محاسبه : با مقایسه مقادیر f در نقاط زیر

۱) نقاط بحرانی داخل ناحیه D

۲) نقاط مرزی D (باید اکسترمم مطلق f را روی مرز محاسبه نماییم که معمولاً با روش ضرایب لاگرانژ انجام می‌شود)

۹۲/۲۱۳ مقدار اکسترمم تابع $f(x,y) = 3x^2 + 2y^2 - 4y + 1$ روی ناحیه $x^2 + y^2 \leq 16$ بیابید. (عمران ۸۳)

۱) بحرانی داخل ناحیه : $\nabla f(6x, 4y-4) = (0,0) \Rightarrow x = 0, y = 1$

$f(0,1) = \boxed{-1}$

۲) مرز ناحیه $x^2 + y^2 = 16$ است و باید اکسترمم مطلق تابع f روی مرز را بدست آوریم

روی مرز : $x^2 = 16 - y^2 \to y^2 \leq 16 \to -4 < y < 4$

$f(x,y) = 3(16 - y^2) + 2y^2 - 4y + 1 = \underbrace{-y^2 - 4y + 49}_{g(y)}$ تابع f روی مرز

$g'(y) = 0 \to -2y - 4 = 0 \to y = -2$

اکسترمم مطلق تابع g روی $[-4,4]$ بررسی شود

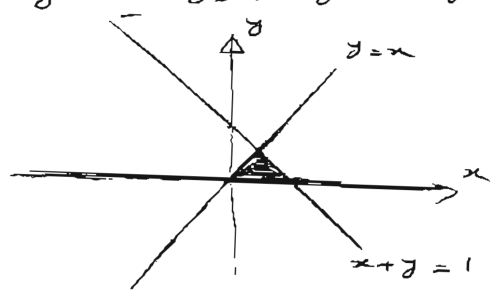
y	$g(y)$
-2	53
4	17
-4	49

روی مرز: $\boxed{max = 53}$ ، $\boxed{min = 17}$

مقایسه $\Rightarrow max(f) = 53, min(f) = -1$

مثال : مقدار اکسترمم مطلق تابع $f(x,y) = 2x - y + 1$ روی ناحیه مثلثی شکل به اضلاع زیر را بیابید.

$y = x, y + x = 1, y = 0$



نکته : اگر $f(x,y) = ax + by + c$ و ناحیه چندضلعی باشد (همه مرزهای ناحیه خطی باشند) آنگاه ext مطلق f در رئوس ناحیه رخ می‌دهد

کاندیداهای ext

حل:

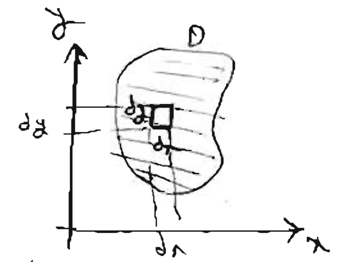
رأس	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$	$(0,0)$	$(1,0)$
مقدار f	$\frac{3}{2}$	1	3

$\Rightarrow \quad Max\ f = 3$

$Min\ f = 1$

فصل ۶: انتگرال دوگانه

$f(x,y): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ پیوسته است. $D \subseteq \mathbb{R}^2$ یک ناحیه است.

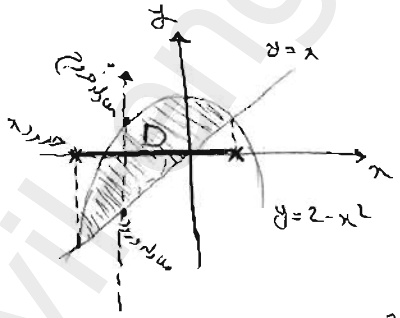


$dA = dx\,dy = dy\,dx$ دیفرانسیل سطح

$\iint_D f(x,y)\,dA$ = انتگرال دوگانه f روی ناحیه D

مثال ۱ (۲۸۷): D ناحیه بین دو نمودار $y=2-x^2$ و $y=x$ است. مطلوبست:

$$\iint x\,dA = ?$$



$$\int_{-2}^{1}\int_{x\ (\text{ورود})}^{2-x^2\ (\text{خروج})} x\,dy\,dx = \int_{-2}^{1} xy\Big|_{x}^{2-x^2} dx$$

$$= \int_{-2}^{1}(2x - x^3 - x^2)\,dx = x^2 - \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{1}$$

$$= -\frac{9}{4}$$

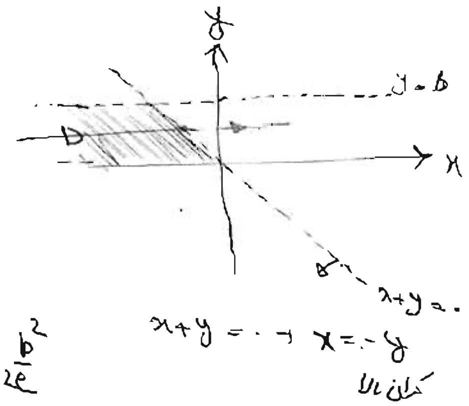
$2 - x^2 = x \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$

$x = +1$

$x = -2$

مثال ۱۲ (۳۹۳): D ناحیه $0<y<b$ و $x+y<0$ است. مطلوبست

$$\iint_D e^{\frac{x}{y}} \underbrace{dy\,dx}_{dA}$$



برای حل باید اول از dx شروع کرد.

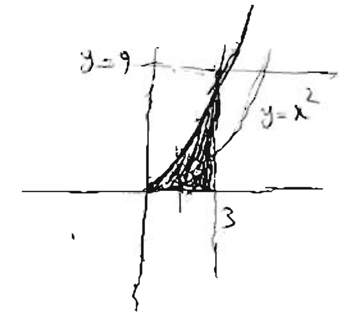
$$\int_0^b \int_{-\infty}^{-y} e^{\frac{x}{y}}\,dx\,dy$$

$$= \int_0^b \left(y e^{\frac{x}{y}} \Big|_{-\infty}^{-y} \right) dy = \int_0^b y e^{-1}\,dy = \frac{b^2}{2e}$$

$x + y = 0 \to x = -y$ کران بالا

۳۰ / ۲ج۶۴۲ محاسبه کنید؛ (مکانیک ۸۸)

$$\int_0^9 \int_{\sqrt{y}}^3 \sin(\pi x^3)\,dx\,dy = ?$$



$$\begin{cases} \sqrt{y} \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq 9 \end{cases}$$

$$\int_0^3 \int_0^{x^2} \sin(\pi x^3)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^3 y\sin(\pi x^3)\Big|_0^{x^2} dx = \int_0^3 x^2 \sin(\pi x^3)\,dx \xrightarrow[dt=3\pi x^2]{t=\pi x^3}$$

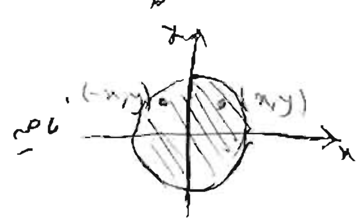
$$= \int_0^{27\pi} \frac{1}{3\pi}\sin t\,dt = -\frac{1}{3\pi}\cos t\Big|_0^{27\pi} = -\frac{1}{3\pi}(-1-1) = \frac{2}{3\pi}$$

نکته: اگر تابع f نسبت به متغیری فرد باشد (یعنی با قرینه کردن آن متغیر ضابطه نیز قرینه شود) و معادله‌ی ناحیه نسبت به همان متغیر زوج باشد آنگاه انتگرال f روی آن ناحیه صفر است.

مثال: اگر D داخل دایره $x^2+y^2=9$ باشد مطلوبست

الف) $\iint_D x^3 e^y\,dA = ?$

ب) $\iint_D (\sin y)\,x^5\,dA = ?$



الف) تابع f نسبت به x فرد است $f(x,y) = x^3 e^y$

معادله ناحیه نسبت به x زوج است

$\iint_D x^3 e^y\,dA = 0$ به نکته

ب) $\iint_D (\sin y)\,x^5\,dA = 0$

تابع f نسبت به x و y (هر دو) فرد است

معادله ناحیه نیز نسبت به هر دو زوج است. یکی را در نظر می‌گیریم و حاصل انتگرال صفر می‌شود

تغییر متغیر قطبی

معمولاً وقتی مرز ناحیه انتگرال‌گیری دایره یا قسمتی از دایره باشد از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم:

$$\iint_D f(x,y)\,dA =$$

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

$x^2+y^2 = r^2$

حفظ شود $\boxed{dA = r\,dr\,d\theta}$

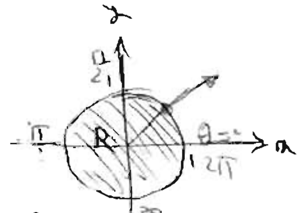
۲۸ / ۳۰۱ محاسبه کنید

$R: x^2+y^2 \leq 1$

$$\iint_R e^{-(x^2+y^2)}\,dA = ? = \int_0^{2\pi}\int_0^{1} e^{-r^2}\, r\,dr\,d\theta$$

$$= \left(\int_0^1 r e^{-r^2} dr\right)\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) **$$

$$\left(-\frac{1}{2} e^{-r^2}\Big|_0^1\right)(2\pi) =$$



$x^2+y^2=1 \xrightarrow{\text{قطبی}} r^2=1 \to \underline{r=1}$

* در مختصات قطبی برای توصیف حدود r خطی از مرکز مختصات نیم خطی به سمت بیرون رسم می کنیم معادله ی ورود و معادله ی خروج کران های انتگرال هستند.

* برای بدست آوردن حدود θ نیم خطی را از جایی شروع می کنیم و می چرخانیم تا به همانجا برسیم حدود بدست می آید.

** نکته: با رعایت دو شرط زیر می توان انتگرال های چندگانه را به صورت حاصلضرب انتگرال های یگانه نوشت،

۱) کلیه ی کران های انتگرال گیری عدد ثابت باشند

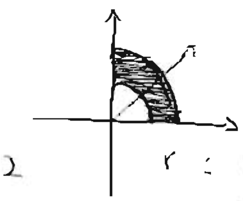
۲) تابع تحت انتگرال بصورت جداگانه باشد یعنی $f(x,y,z) = f(x)g(y).h(z)$

۱۱ / ۳۰۲ — R ناحیه محدود بین $x^2+y^2=1$ و $x^2+y^2=4$ در ربع اول است. مطلوبست

$r=1$ قطبی $r=2$

$$\iint_R \frac{dy\,dx}{x^2+y^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_1^2 \frac{r\,dr\,d\theta}{r^2}$$

$$= \left(\int_1^2 \frac{dr}{r}\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\right) = \left(\ln r\Big|_1^2\right)\left(\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = \ln 2 \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\ln 2$$



$r: (1,2)$

$\theta: (0, \frac{\pi}{2})$

۳۱ / ۳۰۲ — D ناحیه ی داخل دایره ی $x^2+y^2=ax$ و $a>0$. مطلوبست:

$$\iint_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} = ?$$

توضیح: چون معادله ی ناحیه و تابع تحت انتگرال هر دو نسبت به y زوج هستند پس $y \geq 0$ و جواب را در 2 ضرب می کنیم.

قطبی $$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a\cos\theta} \frac{r\,dr\,d\theta}{\sqrt{a^2-r^2}} \quad \underline{\underline{u=a^2-r^2}} \quad \int \frac{-\frac{1}{2}du}{\sqrt{u}} = -\sqrt{u} = -\sqrt{a^2-r^2}$$

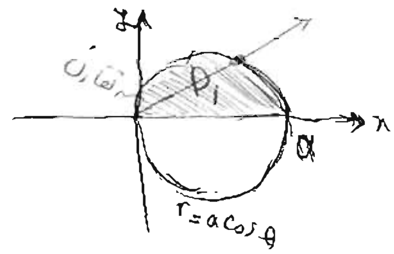
$x^2+y^2 = ax \xrightarrow{\text{قطبی}}$

$r^2 = a r\cos\theta$

$r = a\cos\theta$

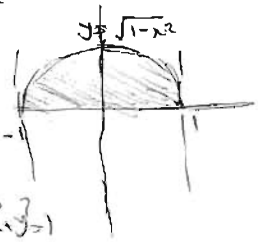
$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\sqrt{a^2-r^2}\Big|_0^{a\cos\theta}\right)$$

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (a\sin\theta - \theta)\,d\theta$$



(۷۳) $\frac{۳۲}{۳-۲}$ $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\, dy\, dx = ?$

ناحیه: $\begin{cases} 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{1-x^2} \\ -1 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$



$y=\sqrt{1-x^2}$

$y^2 = 1-x^2 \Rightarrow x^2+y^2=1$

$r=1$

$= \int_0^{\pi}\int_0^1 r^3\, r\,dr\,d\theta = \int_0^1 r^4 dr \cdot \int_0^{\pi} d\theta = \left(\frac{r^5}{5}\right)_0^1 \times \pi$

$= \pi/5$

تغییر متغیر در حالت کلی:

$\frac{۳۵}{۳.۲}$ D را ناحیه‌ی محدود به خطوط $\underbrace{x-2y=1}_{u=1}$ و $\underbrace{x-2y=2}_{u=2}$ و $\underbrace{x+2y=1}_{v=1}$ و $x+2y=3$ ($v=3$) می‌گیریم. مطلوب است

$\iint_D \left(\frac{x-2y}{x+2y}\right)^3 dx\,dy$

$x,y \xrightarrow{} (r,\theta)$, $\searrow (u,v)$

$\begin{cases} u = x-2y \\ v = x+2y \end{cases}, \quad D: \begin{cases} 1 \leqslant u \leqslant 2 \\ 1 \leqslant v \leqslant 3 \end{cases}$

نکته: در تغییر متغیرها برای محاسبه‌ی dA داریم:

$dA = |J|\, du\,dv = |J|\, dv\, du$

$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}, \quad \frac{1}{J} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$

ادامه سوال: $\frac{1}{J} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2+2 = 4 \Rightarrow J = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow dA = \frac{1}{4} du\,dv$

انتگرال $= \int_1^3\int_1^2 \left(\frac{u}{v}\right)^3 \left(\frac{1}{4} du\,dv\right) = \frac{1}{4}\left(\int_1^2 u^3 du\right)\left(\int_1^3 \frac{dv}{v^3}\right)$ ادامه $\Rightarrow$

87 کنترل ساری   MBA 85   83 کنکور سیستم‌ها ۸۶

$\frac{۳۶}{۳.۲}$ D ناحیه‌ی محدود به $y=0$ ، $x=0$ و $\underbrace{x+y=1}_{u=1}$ است. مطلوب است

$\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}} dx\,dy = ?$

$\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases}$

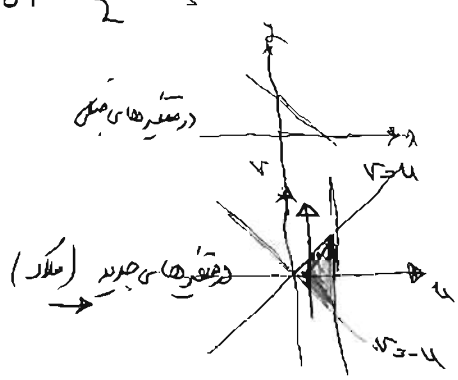
$\frac{1}{J} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \Rightarrow |J| = \frac{1}{2} \rightarrow$

$\rightarrow dA = \frac{1}{2} du\,dv$

$x+y=1 \rightarrow u=1$

$y=0 \begin{cases} u = x \\ v = x \end{cases} \rightarrow u = v$

$x=0 \begin{cases} u = y \\ v = -y \end{cases} \rightarrow v = -u$



$$\text{انتگرال} = \int_0^1\int_{-u}^{u} e^{\frac{v}{u}}\left(\tfrac{1}{2}\,dv\,du\right) = \tfrac{1}{2}\int_0^1 u\, e^{\frac{v}{u}}\Big|_{-u}^{u} du$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^1 (e^{+1}-e^{-1})\,u\,du = \tfrac{1}{4}(e-e^{-1})$$

با اولویت ترتیب انتگرال‌گیری اشتباه است
عدد با ناحیه

۳۷ / ۳۰۷ — R ناحیه‌ی محدود به $\underbrace{xy=2}_{u=2}$ ، $\underbrace{xy=4}_{u=4}$ ، $\underbrace{y^2=x}_{\frac{y^2}{x}=1,\ v=1}$ ، $\underbrace{y^2=3x}_{\frac{y^2}{x}=3,\ v=3}$. مطلوبست

$$\iint_R \frac{x^2}{y^4}\,dx\,dy$$

$$\begin{cases} u = xy \\ v = \frac{y^2}{x} \end{cases} \qquad \frac{1}{J} = \begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \end{vmatrix} = 2\frac{y^2}{x} + \frac{y^2}{x} = 3\frac{y^2}{x} \Rightarrow |J| = \frac{x}{3y^2} = \frac{1}{3v}$$

$$dA = \frac{1}{3v}\,du\,dv$$

$$\text{انتگرال} = \int_2^4\int_1^3 \frac{1}{v^2}\times\frac{1}{3v}\,dv\,du = \underbrace{\int_1^3 \frac{1}{3v^3}\,dv}\cdot\underbrace{\int_2^4 du}$$

نکته: برای ناحیه داخل $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ قرار دهید

$$\underline{\text{تغییر متغیر}}\begin{cases} x = ar\cos\theta \\ y = br\sin\theta \\ J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = abr \end{cases}$$

و ناحیه‌ی داخل بیضی به ناحیه‌ی نوشته شده دایره تبدیل می‌شود

$$\text{حدود ناحیه}\begin{cases} 0\le r\le 1 \\ 0\le\theta\le 2\pi \end{cases}$$

۸۰ / ۲ج ۲۹۳ — R ناحیه داخل $x^2+\frac{y^2}{9}=1$ مطلوبست.

$$\iint_R (x^2+y^2)\,dx\,dy$$

$$\begin{cases} a=1,\ b=3 \\ x = r\cos\theta \\ y = 3r\sin\theta \\ J = 3r \\ dA = 3r\,dr\,d\theta \end{cases}$$

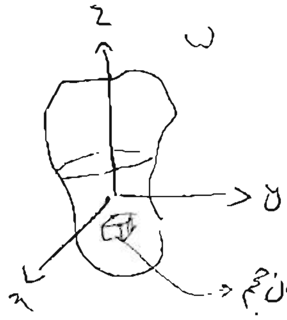
$$\text{انتگرال} = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \underbrace{(r^2\cos^2\theta + 9r^2\sin^2\theta)}_{r^2(\cos^2\theta+9\sin^2\theta)}(3r\,dr\,d\theta) = 3\int_0^1 r^3\,dr\cdot\int_0^{2\pi}\underbrace{\cos^2\theta+9\sin^2\theta}_{1+8\sin^2\theta}\,d\theta$$

$$8\left(\frac{1-\cos2\theta}{2}\right)$$

$$= 3\times\left(\frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^1\cdot\int_0^{2\pi} 5-4\cos2\theta = \frac{3}{4}\times 10\pi = \frac{30\pi}{4}$$

جلسه دهم ۸۹،۱،۲۰

انتگرال سه گانه



$f(x,y,z): \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ پیوسته

$W \subseteq \mathbb{R}^3$ حجم W

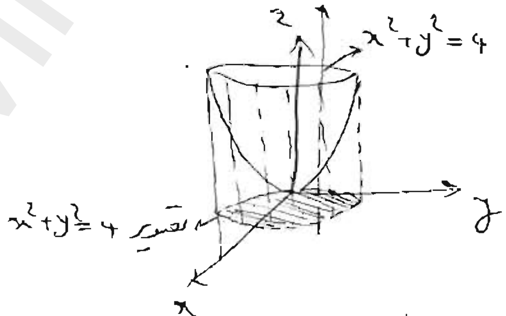
$dv = dx\,dy\,dz = dy\,dz\,dx = \dots$

انتگرال سه گانه f روی W $= \iiint_W f(x,y,z)\,dv$

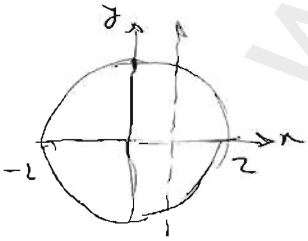
تذکر: چنانچه $f=1$ حاصل انتگرال بالا حجم W است.

مثال: W را ناحیه محدود به $z = x^2+y^2$ و $z=4$ می‌گیریم. انتگرالی بنویسید که حجم W را با $dv = dz\,dy\,dx$ توصیف کند.

$$\text{حجم} = \iiint_W dv = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{4} dz\,dy\,dx$$



برای حدود دو متغیر باقیمانده باید تصویر ناحیه را بر صفحه‌ی دو متغیر (در اینجا xy) بدست آوریم. یعنی z را بین معادلات سطوح حذف می‌کنیم تا $x^2+y^2=4$ به عنوان مرز تصویر حاصل شود و سپس حدود x و y را روی تصویر بدست می‌آوریم.



$x^2+y^2=4$

$y = \pm\sqrt{4-x^2}$

طرز تشخیص المان، به مسأله بستگی دارد. اگر در مسأله پس از مشخص کردن یکی از متغیرها اگر دقیقاً در دو معادله آمده بود المان را با آن متغیر شروع می‌کنیم. اما در مورد ۲ تای بعدی آن زمان تصمیم می‌گیریم. زمانی هر شکل را روی صفحه تصویر کرده‌ایم و به انتگرال دوگانه تبدیل شد تصمیم می‌گیریم.

مختصات استوانه‌ای:

اگر تصویر ناحیه در $\mathbb{R}^3$ بر صفحه‌ی xy را در قطبی توصیف کنیم، از مختصات استوانه‌ای می‌نامیم،

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \quad \Rightarrow \quad dv = r\, dz\, dr\, d\theta \\ z &= z \end{aligned}$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = r$$

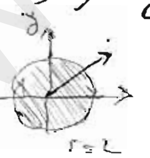
مثال: حجم ناحیه‌ی محدود به سهمیگون $\underset{z=r^2}{z=x^2+y^2}$ و $z=4$ را بیابید.

$$\text{حجم} = \iiint dv = \int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_{r^2}^{4} r\, dz\, dr\, d\theta$$

با حذف z یک دایره بدست می‌آید
پس تغییر متغیر قطبی خوب است.

همواره برای حدود r و θ باید تصویر ناحیه بر صفحه‌ی xy را در مختصات قطبی بنویسیم.

$$\begin{cases} z = r^2 \\ z = 4 \end{cases} \Rightarrow r^2 = 4 \Rightarrow r = 2$$



$r=0$ تا $r=2$
$\theta=0$ تا $\theta=2\pi$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2} rz\Big|_{r^2}^{4} dr\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{2} (4r - r^3)\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^{2} (4r - r^3)\, dr = 8\pi$$

مثال $\frac{۴۴}{۳۱۲}$: حجم محصور بین دو استوانه $x^2+y^2=a^2$ و $x^2+z^2=a^2$ را بیابید.
هر دو نسبت به z زوج هستند

$$\text{حجم} = \iiint dv$$

چون معادله‌ی مرزهای ناحیه نسبت به هر سه متغیر زوج هستند پس $z\geq 0$ و $y\geq 0$ و $x\geq 0$ ($\frac{1}{8}$ اول فضا) و جواب نهایی را در ۸ ضرب می‌کنیم.

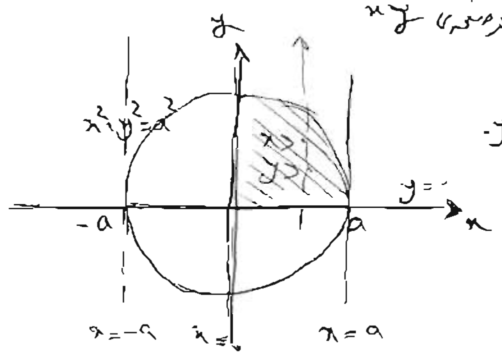
$$\text{حجم} = 8\int_0^{a}\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dz\, dy\, dx$$

مرزها
$$\begin{cases} x^2+y^2=a^2 & \text{هر سه معادله} \\ x^2+z^2=a^2 & \text{y در دو معادله} \\ x=0,\ y=0,\ z=0 & \text{z در دو معادله} \end{cases} \longrightarrow$$

ما z را شروع می‌کنیم $\Rightarrow$ بعد z یا y شروع می‌کنیم

$$\begin{cases} z=\sqrt{a^2-x^2} \\ z=0 \end{cases} \xrightarrow{\text{تقاطع}} x^2=a^2 \to x=\pm a$$

تصویر ناحیه در صفحه‌ی xy



$y=0$ ، $y=\sqrt{a^2-x^2}$

$$\text{حجم} = 8\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2}\, dy\, dx$$

$$= 8\int_0^a (a^2-x^2)\, dx = \frac{16}{3}a^3$$

در این عبارت حاصل سمت انتگرال z از عبارت $\sqrt{a^2-x^2}$ حاصل می‌شود. در این انتگرال‌گیری ابتدا از y راحت‌تر است چون انتگرال $\sqrt{a^2-x^2}$ نسبت به x دشوارتر است

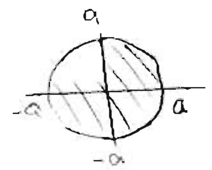
حل بدون تقارن

$$\text{حجم} = \int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{+\sqrt{a^2-x^2}} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dz = \frac{16}{3}a^3$$

مرزها
$$\begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ x^2+z^2=a^2 \end{cases}$$

x در دو
z و y در یک

$z=\pm\sqrt{a^2-x^2}$



$x^2+y^2=a^2$

$y^2=a^2-x^2$

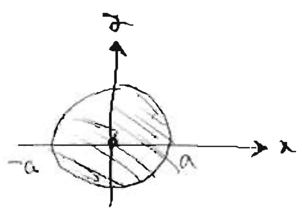
$y=\pm\sqrt{a^2-x^2}$

۴۸/۳۱۴ حجم ناحیه محصور بالای صفحه‌ی $\underbrace{xy}_{z=0}$ و زیر سهمی‌گون $\underset{z=r^2}{\underline{z=x^2+y^2}}$ و استوانه به معادله $x^2+y^2=a^2$ را بیابید.

$$\text{حل: حجم} = \iiint dv = \int_0^{2\pi}\int_0^a\int_0^{r^2} r\,dz\,dr\,d\theta$$

مختصات استوانه‌ای خوب است

z در دو معادله دیده می‌شود
x و y در چند تا



$$\begin{cases} z=0 \\ x^2+y^2=z \end{cases} \xrightarrow{\text{تقاطع}} x^2+y^2=0 \quad x=0,\ y=0$$

$r=a$

$$\text{حجم} = \int_0^{2\pi}\int_0^a r^3\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \times \int_0^a r^3\,dr = 2\pi\cdot\frac{a^4}{4} = \frac{\pi a^4}{2}$$

(۷۷)

$\frac{۴}{۲ج\ ۴۷۱}$ R ناحیه داخل کره $x^2+y^2+z^2=4a^2$ و خارج استوانه $x^2+y^2=a^2$. مطلوبست M

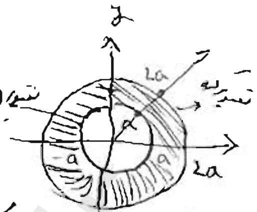
$$\iiint_R (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$$

z زوج است نسبت به مرزها و تابع تحت انتگرال

چون معادله مرزهای ناحیه و تابع تحت انتگرال هردو نسبت به z زوج هستند پس $z\geq 0$ و جواب را در ۲ ضرب می‌کنیم

$$\text{انتگرال} = 2\iiint_{R'} \underbrace{(x^2+y^2)}_{r^2}\,dV$$

تصویر کلی



مرزها $\begin{cases} z=0 \\ z=\sqrt{4a^2-x^2-y^2} \end{cases}$ در دو معادله $= \overset{\text{قطبی}}{\sqrt{4a^2-r^2}}$

آنهایی که z ندارند خودشان تصویر می‌شوند . و z از بقیه حذف می‌شود تصویر می‌شود

مختصات قطبی برای خوب است

$$\text{انتگرال} = 2\int_0^{2\pi}\int_a^{2a}\int_0^{\sqrt{4a^2-r^2}} (r^2)\,r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\int_a^{2a} r^3\sqrt{4a^2-r^2}\,dr\,d\theta = 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_a^{2a} r^3\underbrace{\sqrt{4a^2-r^2}}_{u}\,dr \xrightarrow[du=-2rdr]{u=4a^2-r^2}$$

$$= 4\pi\int_{3a^2}^{0}(4a^2-u)(\underbrace{\sqrt{u}}_{u^{\frac12}})(-\tfrac12 du) = -2\pi\int_{3a^2}^{0}(4a^2u^{\frac12}-u^{\frac32})\,du = -2\pi\left(\tfrac83 a^2u^{\frac32}-\tfrac25 u^{\frac52}\right)\Big|_{3a^2}^{0}$$

$U=4a^2-r^2 \quad r=a \Rightarrow u=3a^2$

$r=2a \Rightarrow u=0$

$\frac{۳۱}{۲ج\ ۳۷۹}$ حجم ناحیه محدود به $\underset{\text{z در دو معادله}}{z=\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}}$ و صفحه‌ی $z=10$ را بیابید . ۸۷ – MBA

$$\text{حجم}\iiint dV = \iint_D\int_{\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}}^{10} dz\,dA = \iint_D\left(10-\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}\right)dA$$

D تصویر ناحیه روی صفحه xy

D را تصویر ناحیه بر صفحه‌ی xy می‌گیریم :

z را حذف می‌کنیم $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=10 \Rightarrow$

ساده $\frac{x^2}{160}+\frac{y^2}{250}=1$

قطبی $\begin{cases} x=ar\cos\theta=\sqrt{160}\,r\cos\theta=4\sqrt{10}\,r\cos\theta \\ b=br\sin\theta=\sqrt{250}\,r\sin\theta=5\sqrt{10}\,r\sin\theta \\ J=abr=200r \end{cases}$

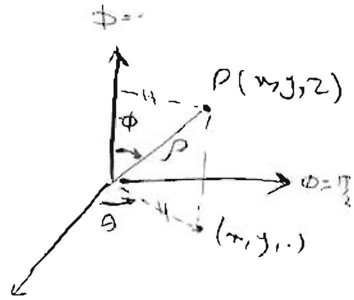
$r=0$ تا $r=1$

$\theta=0$ تا $\theta=2\pi$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (10-10r^2)(200r)\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \times \int_0^1 2000(r-r^3)\,dr = 1000\pi$$

مختصات کروی



$$\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\rho \sin\phi = \sqrt{x^2+y^2}$$

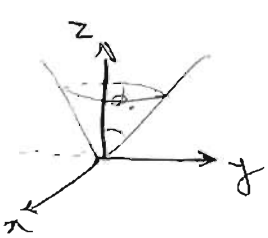
$$\begin{cases} x = \rho \sin\phi \cos\theta \\ y = \rho \sin\phi \sin\theta \\ z = \rho \cos\phi \end{cases} , \quad \begin{cases} \rho \geq 0 \\ 0 \leq \phi \leq \pi \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \;\text{؛}\; -\pi \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

$$dv = \underbrace{\rho^2 \sin\phi}_{\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\phi,\theta)}} \, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

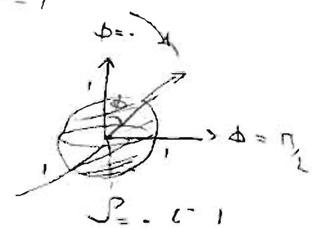
نکته: ۱) کره $x^2+y^2+z^2=a^2 \iff \rho = a > 0$

۲) $\phi = \phi_0 \implies$ مخروط

$\phi_0 \neq 0, \pi, \frac{\pi}{2}$



۵۸ / ۳۲۲ داخل کره $\underbrace{x^2+y^2+z^2=1}_{\rho=1 \text{ از کره}}$ مطلوبست $\iiint e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dv$



$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 e^{\rho^3} \rho^2 \sin\phi \, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^{\pi} \sin\phi\, d\phi \cdot \int_0^1 \rho^2 e^{\rho^3} d\rho$$

$$= (2\pi)(2)\left(\frac{1}{3} e^{\rho^3}\right)\Big|_0^1 = \frac{4\pi}{3}(e-1)$$

مثال. اگر ω ناحیه بین $\underbrace{x^2+y^2+z^2=1}_{\rho=1}$ و $\underbrace{x^2+y^2+z^2=4}_{\rho=2}$ در فضای $z \geq 0$ و $x \leq 0$ باشد

استفاده از مختصات کروی خوب است

مطلوبست.

$$\iiint_\omega \frac{dv}{\sqrt{x^2+y^2}} = \iiint \frac{\rho^2 \sin\phi \, d\rho\, d\phi\, d\theta}{\rho \sin\phi} = \int_{\pi/2}^{3\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_1^2 \rho \, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$z \geq 0 \implies 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$

$x \leq 0$

$$= \int_{\pi/2}^{3\pi/2} d\theta \cdot \int_0^{\pi/2} d\phi \cdot \int_1^2 \rho\, d\rho = \pi \times \frac{\pi}{2} \times \left(2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{3\pi^2}{4}$$

۶۱ / ۳۲۲

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{0}\frac{e^{-(x^2+y^2+z^2)}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dx\,dy\,dz \xRightarrow{\text{مختصات کروی}} = \int_{\pi/2}^{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{e^{-\rho^2}}{\rho}\,\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

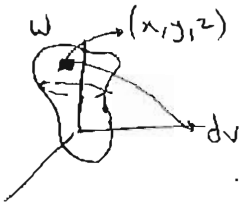
از بازه‌ها

حدود
$$\begin{cases} x \le 0 \xRightarrow{\text{ربع دوم}} \frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi \\ y \ge 0 \\ z \le 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} \le \phi \le \pi \end{cases}$$

چون هیچ معادله‌ای برای محدود کردن ρ وجود ندارد ρ همه‌ی مقادیر ممکن را می‌پذیرد

$$\text{جواب} = \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta \cdot \int_{\pi/2}^{\pi}\sin\phi\,d\phi \cdot \int_{0}^{+\infty}\rho e^{-\rho^2}\,d\rho = \left(\frac{\pi}{2}\right)(1)\underbrace{\left(-\frac{1}{2}e^{-\rho^2}\right)\Big|_0^{+\infty}}_{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

* کاربرد انتگرال:



W ناحیه‌ای در $\mathbb{R}^3$، $\delta = \delta(x,y,z)$ چگالی ناحیه است

و $G(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ مرکز جرم (ثقل)

$$\text{جرم } M = \iiint_W \delta\,dv$$

$$\text{گشتاور نسبت به صفحه } xy:\quad M_{xy} = \iiint_W \overbrace{z}^{\text{فاصله}}\cdot\overbrace{\delta\,dv}^{\text{جرم}}$$

فاصله × جرم

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{\iiint_W z\cdot\delta\,dv}{\iiint_W \delta\cdot dv}$$

* برای مرکز هندسی در فرمول بالا قرار دهید $\delta = 1$

۲۸۰ / ۲۸۷ ج۲: فاصله‌ی مرکز هندسی ناحیه محدود به $\underbrace{z = x^2+y^2}_{z=r^2}$ و $z=4$ از صفحه‌ی xy را بیابید. (۸۴ - MBA)

$G(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ ، $\bar{z}$ را می‌خواهد

$$\bar{z} = \frac{\iiint_W z\,dv}{\iiint dv} = \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_{r^2}^{4} z\,r\,dz\,dr\,d\theta}{\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_{r^2}^{4} r\,dz\,dr\,d\theta}$$

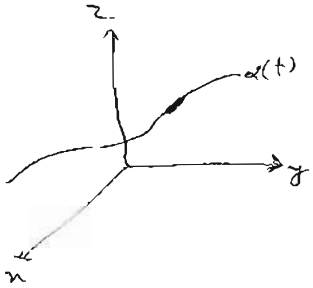
مختصات استوانه‌ای $\frac{64\pi}{3}$ ، 8π

$$= \frac{\quad}{\quad} = \frac{8}{3}$$

فصل ۵ : انتگرال روی خم و سطح

$$\begin{cases} \alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)) \\ a \leqslant t \leqslant b \end{cases}$$

پیوسته $f(x,y,z) : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$



$$ds = |\underbrace{\alpha'(t)}_{v(t)}|\, dt$$

انتگرال (خط) تابع f روی خم α $= \int_\alpha f(x,y,z)\, ds$

طرز محاسبه : $\displaystyle\int_\alpha f(x,y,z)\, ds = \int_a^b \underbrace{f(\alpha(t))}_{f \text{ روی خم } \alpha} . |\alpha'(t)|\, dt$

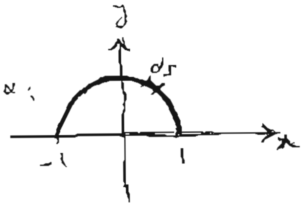
مثال، برای خم $R(t) = (t, \sin t, \cos t)$ و $0 \leqslant t \leqslant 1$ مطلوبست

$$\int_R (x+y^2+z^2)\, ds = \int_0^1 (t + \underbrace{\sin^2 t + \cos^2 t}_{1}) |\alpha'(t)|\, dt = \int_0^1 (t+1) |\alpha'(t)|\, dt$$

$$|\alpha'(t)| = |(1, \cos t, -\sin t)| = \sqrt{1+\cos^2 t+\sin^2 t} = \sqrt{2}$$

انتگرال : $\displaystyle\sqrt{2}\int_0^1 (t+1)\, dt = \sqrt{2}\left(\frac{t^2}{2}+t\right)\Big|_0^1 = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$\frac{11}{۲ج۲۸۶}$ مرکز جرم سیمی به چگالی $\delta = 2(1-y)$ به شکل نیمدایره که در نقاط $(\pm 1, 0)$ به محور x بسته شده و در نیمه بالایی صفحه قرار دارد را بیابید.



$$\alpha : \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y \geqslant 0 \end{cases} \quad , \; G(\bar{x}, \bar{y})$$

$$\bar{y} = \frac{\int_\alpha y\,\delta\, ds}{\int_\alpha \delta\, ds} = \frac{2\int (y - y^2)\, ds}{2\int_\alpha (1-y)\, ds} =$$

پارامتری $\begin{cases} \alpha(t) = (\cos t, \sin t) \\ 0 \leqslant t \leqslant \pi \end{cases}$

بهترین روش برای پارامتری کردن خم‌ها قطبی است.
برای دایره بهترین راه $\sin t$ و $\cos t$ است

$\alpha'(t) = (-\sin t, \cos t)$

$|\alpha'(t)| = 1$

$ds = dt$

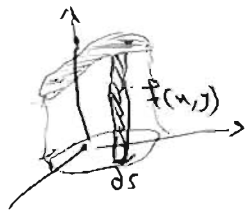
$$\rightarrow \bar{y} = \frac{\int_0^\pi \sin t - \sin^2 t\, dt}{\int_0^\pi (1-\sin t)\, dt} = \frac{4-\pi}{2(\pi-2)}$$

چون هم معادله‌ی خم و هم معادله‌ی چگالی (هر دو) نسبت به x زوج هستند پس مرکز جرم روی خط $x=0$ قرار می‌گیرد

پس $\bar{x} = 0$

$$\rightarrow G\left(0, \frac{4-\pi}{2(\pi-2)}\right)$$

$\frac{11}{۳۷۸}$ مساحت قسمتی از استوانه $x^2+y^2=1$ که بالای صفحه $z=0$ و زیر صفحه $z=\frac{1}{3}x+2$ قرار دارد را بیابید.



نکته: فرض کنید α خمی در صفحه xy است که روی آن استوانه‌ای در راستای محور z درنظر می‌گیریم و $z=0$ و $z=f(x,y)$ کف و سقف آن هستند.

$$\text{مساحت استوانه} = \int_\alpha \underbrace{f(x,y)}_{\text{ارتفاع}}\, ds$$

حل مثال: $\text{مساحت استوانه} = \int_\alpha \left(\frac{1}{3}x+2\right) ds = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{3}\cos t+2\right) dt = \left(\frac{1}{3}\sin t+2t\right)\Big|_0^{2\pi} = 4\pi$

$\alpha: x^2+y^2=1,\ z=0$

$\alpha(t) = (\cos t, \sin t),\ 0\le t\le 2\pi$

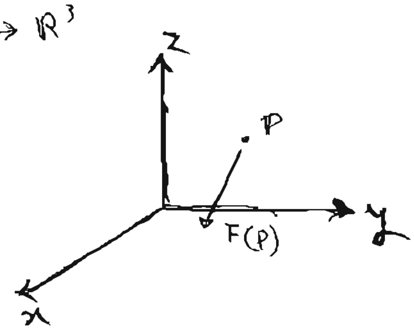
$\alpha'(t) = (-\sin t, \cos t),\ |\alpha'(t)|=1$

$ds = dt$

میدان برداری: $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad n>1$

مثال: $\begin{cases} \vec{F}(x,y,z) = (xy^2, e^z - x, xy - z^2) \\ F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \end{cases}$

$\vec{F}(1,-2,0) = \underbrace{(4, 0, -2)}_{\text{بردار}}$



$\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$

$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$

عملگر نابلا

$\operatorname{div}(F) = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$

دیورژانس

مثال: $\operatorname{div} F = y^2 + 0 - 2z : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

میدان اسکالر (عددی): $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\operatorname{curl}(F) = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

کرل یا چرخش

در مثال: $\operatorname{curl} F : \nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy^2 & e^z - x & xy - z^2 \end{vmatrix} = (x - e^z, -y, -1 - 2xy)$

نکته: $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \quad , \quad F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

۱) $\operatorname{curl}(\nabla\Phi) = \vec{0}$

۲) $\operatorname{div}(\operatorname{curl} \vec{F}) = 0$

۳) $\operatorname{div}(\Phi \vec{F}) = \overset{\text{نابلا}}{\nabla} \cdot (\Phi \vec{F}) = \underbrace{\overbrace{\nabla\Phi}^{\text{گرادیان } \Phi} \cdot F}_{\text{ضرب داخلی}} + \Phi\underbrace{\overbrace{(\nabla \cdot F)}^{\operatorname{div} F}}_{\text{ضرب داخلی}}$

برای حفظ کردن می‌توان گفت نقطه ∇ را مشتق درنظر گرفت یعنی مشتق حاصلضرب داریم. که مشتق اولی در دومی به علاوه مشتق دومی در اولی

۴) $\operatorname{curl}(\Phi \vec{F}) = \nabla \times (\Phi \vec{F}) = \nabla\Phi \times F + \Phi \overbrace{(\nabla \times F)}^{\operatorname{curl} F}$

مثال: فرض کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابع مشتق‌پذیر باشد، $\vec{r} = (x, y, z)$ و $r = |\vec{r}|$ مطلوبست $\nabla f(r)$

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\nabla f(r) = \Big(\underbrace{\frac{\partial}{\partial x} f(r)}_{fog \text{ مشتق}}, \frac{\partial}{\partial y} f(r), \frac{\partial}{\partial z} f(r)\Big) = \Big(\frac{\partial r}{\partial x} f'(r), \frac{\partial r}{\partial y} f'(r), \frac{\partial r}{\partial z} f'(r)\Big)$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}$$

$$= \Big(\frac{x}{r} f'(r), \frac{y}{r} f'(r), \frac{z}{r} f'(r)\Big) = \frac{f'(r)}{r}(x, y, z) = f'(r)\frac{\vec{r}}{r}$$

$$\boxed{\text{نکته: } \nabla f(r) = f'(r) \frac{\vec{r}}{r}}$$

نکته ۱۹ صفحه ۱۳۷ فصل ۳

۳۲/۶۷۳ فرض کنید $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ و $r = |\vec{r}|$ مطلوبست: $\operatorname{curl}(r^n \vec{r})$ ۸۵ - MBA

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad , \quad \vec{r} = (x, y, z)$$

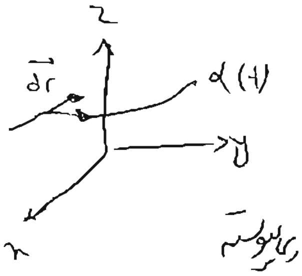
$$\operatorname{curl}(r^n \vec{r}) = \nabla \times (r^n \vec{r}) = \underbrace{\nabla r^n}_{\text{نکته}} \times \vec{r} + \cancel{r^n (\nabla \times \vec{r})}^{\,0}$$

جواب: $n r^{n-1} \left(\frac{\vec{r}}{r} \times \vec{r}\right) + 0 = \vec{0}$

$$\nabla r^n = n r^{n-1} \frac{\vec{r}}{r} \quad , \quad \nabla \times \vec{r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \vec{0}$$

درس تا ص ۳۷۸

انتگرال میدان برداری روی خم :



$$\vec{\alpha}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$
$$a \leq t \leq b$$

میدان برداری پیوسته $\vec{F}(x,y,z) = (F_1, F_2, F_3)$

$$\boxed{\vec{dr} = \vec{\alpha}'(t)\, dt} = (dx, dy, dz)$$

انتگرال (کار) میدان F روی خم α $= \int_\alpha \vec{F}\cdot\vec{dr} = \int_\alpha F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz$

طرز محاسبه : $\int \vec{F}\cdot\vec{dr} = \int_a^b \underbrace{F(\alpha(t))}_{F \text{ روی } \alpha} \cdot \alpha'(t)\, dt$

۱۳/۳۸۰ انتگرال میدان برداری $\vec{F}(x,y,z) = (xy, yz, zx)$ را روی خم $x=t,\ y=t^2,\ z=t^3$ و $0 \leq t \leq 1$ بیابید.

حل : $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$

تنها انتگرالی که برای میدان‌های برداری تعریف می‌شود انتگرال کار است.

کار $= \int_\alpha \vec{F}\cdot\vec{dr}$

$F(\alpha(t)) = (t^3, t^5, t^4)$

$\vec{dr} = \alpha'(t)\, dt = (1, 2t, 3t^2)$

$\vec{F}\cdot\vec{dr} = (t^3 + 5t^6)\, dt$

کار $= \int_0^1 (t^3 + 5t^6)\, dt = \frac{t^4}{4} + \frac{5}{7}t^7 = \frac{1}{4} + \frac{5}{7}$

در این سوال محاسبه انتگرال کار با استفاده از تعریف انجام شد.

<u>تعریف</u> : میدان برداری $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ را کنسرواتیو (اتلافی یا پایستار) می‌نامیم هرگاه $\Phi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ موجود باشد به طوری که $\nabla\Phi = F$ و به تابع Φ پتانسیل $\vec{F}$ گفته می‌شود

نکته : شرط لازم برای آنکه میدان $\vec{F}$ <u>اتلافی</u> باشد آن است که $\text{Curl}\, F = \vec{0} \overset{F=(F_1,F_2)}{\underset{\text{برای میدان در } \mathbb{R}^2}{\Longleftrightarrow}} \text{Curl}\, F = \vec{0} \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$

نکته: اگر دامنه‌ی $\vec{F}$ برابر $\mathbb{R}^n$ باشد:

$$F \text{ ابقایی است } \iff \text{Curl } F = \vec{0}$$

قضیه: اگر $\vec{F}$ ابقایی و تابع ϕ پتانسیل آن باشد:

الف) کار میدان F مستقل از مسیر است

$$\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_\alpha \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_\beta \vec{F}\cdot d\vec{r} = \phi(\overset{\text{انتها}}{B}) - \phi(\overset{\text{ابتدا}}{A})$$

ب) کار روی هر مسیر بسته صفر است

مثال: تابع پتانسیل $F=(\underbrace{y+3x^2}_{F_1},\underbrace{x+2y}_{F_2})$ را درصورت وجود بیابید.

ابتدا ابقایی بودن را بررسی می‌کنیم تا ببینیم پتانسیل وجود دارد یا خیر.

$$\text{Curl } F = \nabla\times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Curl } F = \left(0,\ 0,\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) \qquad \frac{\partial F_2}{\partial x} = 1 \ ,\ \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1 \xrightarrow[\text{دامنه}=\mathbb{R}^2]{\text{مساوی هستند}}$$

پس F ابقایی است.

پس $\underset{\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}}{\phi = \phi(x,y)}$ موجود است به طوری که $\nabla\phi = F$

$$\nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}\right) = (F_1, F_2) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial\phi}{\partial x} = F_1 = y+3x^2 & (1) \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} = F_2 = x+2y & (2) \end{cases}$$

$$(1) \xrightarrow{\int dx} \phi = xy + x^3 + \overbrace{f(y)}^{\text{ثابت نسبت به } x}$$

برای محاسبه‌ی $f(y)$ از رابطه‌ی بالا $\frac{\partial}{\partial y}$ می‌گیریم:

$$* \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = x + f'(y)$$

$$*,(2) \Rightarrow f'(y) = 2y \Rightarrow f(y) = y^2 + K \longrightarrow \boxed{\phi(x,y) = xy + x^3 + y^2 + K}$$

نکته: اگر $\vec{F} = (F_1, F_2)$ ابقایی باشد تابع پتانسیل از رابطه‌ی زیر حاصل می‌شود:

1) $\phi(x,y) = \int F_1\, dx + \int F_2^*\, dy$ $\qquad F_2^*$: جملاتی از F_2 هستند که x را ندارند (جملاتی که مشتق آن نسبت به x صفر شود)

2) $\phi(x,y) = \int F_2\, dy + \int F_1^*\, dx$ $\qquad F_1^*$: جملاتی از F_1 هستند که y را ندارند (مشتق آن نسبت به y صفر شود)

(۸۶)

مثال $\frac{10}{385}$ تابع پتانسیل را درصورت وجود بیابید

$$\vec{F} = (\underbrace{2xy - z^2}_{F_1}, \underbrace{2yz + x^2}_{F_2}, \underbrace{y^2 - 2xz + e^2}_{F_3})$$

$$\text{Curl} F = \nabla \times F = \vec{0} \xrightarrow[IR^3 \text{ دامنه}]{} F \text{ اتقایی است}$$

$$\Phi(x,y,z) = \int F_1 \, dx + \int F_2^* \, dy + \int F_3^* \, dz$$

F_2^* : جملاتی از F_2 که جملات قبلاً محاسبه شده را ندارد (x)

$$= (x^2 y - x z^2) + (y^2 z) + (e^2) + k$$

F_3^* : جملاتی از F_3 که جملات قبلاً محاسبه شده را ندارد $(x \text{ و } y)$

$\frac{5}{385}$ کار انجام شده توسط میدان نیروی $\vec{F} = (\underset{F_1}{x}, \underset{F_2}{y}, \underset{F_3}{z})$ روی خم $R(t) = (\cos t, \sin t, t)$ و $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ را بیابید.

$$\text{Curl} F = \nabla \times F = \vec{0}$$

ابتدا: $R(0) = (1, 0, 0)$ و انتها: $R(\frac{\pi}{2}) = (0, 1, \frac{\pi}{2})$

پتانسیل $\Phi(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2}$

کار: $W = \Phi(B) - \Phi(A) = \Phi(0,1,\frac{\pi}{2}) - \Phi(1,0,0) = \frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2} = \frac{\pi^2}{8}$

$\frac{29}{389}$ روی مسیر $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ در ربع اول صفحه مختصات محاسبه

$$\int_{(2,0)}^{(0,3)} \underbrace{(-2x + 3y)}_{F_1} dx + \underbrace{(3x + 2y)}_{F_2} dy = \int F \cdot dr$$

$$F = (F_1, F_2) = (-2x + 3y, 3x + 2y)$$

$$\text{Curl} \vec{F} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y} = 3 \Rightarrow F \text{ اتقایی است}$$

$$\Phi(x,y) = -x^2 + 3xy + y^2$$

انتگرال کار $= \Phi(0,3) - \Phi(2,0) = 9 + 4 = 13$

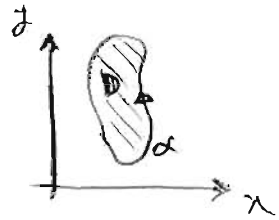
۲۸ / ۲ج۲۰ — روی مسیر $\boxed{2x^2+3y^2=6}$ بیضی مطلوبست:

$$\int \underbrace{(x+2xy)}_{F_1}dx + \underbrace{(x^2-y)}_{F_2}dy$$

$$F=(x+2xy\,,\,x^2-y)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}=2x=\frac{\partial F_1}{\partial y} \Longrightarrow \text{ابقایی}$$

قسمت ب تقصیه: چون خم داده شده بسته است و F ابقایی است کار صفر می‌شود



(در عمران مهم است)

تقصیه گرین: α خم بسته در صفحه‌ی xy است که یکبار در جهت مثلثاتی پیموده می‌شود و $F(x,y)=(F_1,F_2)$ دارای مشتقات پاره‌ای پیوسته است.

$$\oint_\alpha \bar{F}.d\bar{r}=\oint_\alpha F_1dx+F_2dy=$$

$$\oint_\alpha \bar{F}.d\bar{r}=\oint_\alpha F_1dx+F_2dy=\iint_D \underbrace{\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)}_{\text{curl } F \text{ مولفه سوم}} dA$$

$$= (\text{Curl } F.\vec{k}) \Leftarrow k=(0,0,1)$$

۳۴ / ۳۹۶ — روی بیضی $C: x^2+4y^2=1$ مطلوبست

$$\oint_C \underbrace{y}_{F_1}dx+\underbrace{3x}_{F_2}dy$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}=3-1=2$$

$$\text{کار}=\iint_D 2\,dA = 2\times(\underset{\pi ab}{\text{مساحت بیضی}}) = 2\times\frac{\pi}{2}=\pi$$

چون تعداد و جهت پیموده شدن در سوال داده نشده به طور پیش فرض یکبار رو در جهت مثلثاتی درنظر می‌گیریم.

۱ / ۴۵۹ — C مرز در جهت مثبت (جهت مثلثاتی) ناحیه زیر است

$$Q: 0\le x^2+y^2\le a^2 \quad x\ge 0\,,\,y\ge 0$$

مطلوبست:

$$\int_C \underbrace{(x-y^3)}_{F_1}dx+\underbrace{(y^3+x^3)}_{F_2}dy$$

مرز یک ناحیه‌ی محدود همواره یک خم بسته است

$$F=(x-y^3\,,\,y^3+x^3)$$

C خم بسته

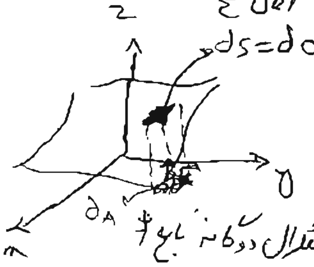
$$\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}=3x^2+3y^2$$

$$\text{کار}=3\iint_D x^2+y^2\,dA = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a r^3\,dr\,d\theta = 3\frac{\pi}{2}\times\frac{a^4}{4}=\frac{3\pi a^4}{8}$$

انتگرال روی سطح:

سطح S با معادله‌ی $g(x,y,z)=0$ و $f(x,y,z):\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ پیوسته است.

$\iint_S f(x,y,z)\,ds$ انتگرال دوگانه تابع f روی سطح داشت



انتگرال دوگانه تابع f روی سطح S $=\iint_S f(x,y,z)\,ds$

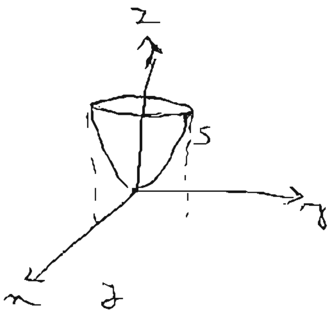
در حالتیکه $f=1$ باشد حاصل این انتگرال برابر مساحت S است.

نکته: اگر معادله‌ی سطح $g(x,y,z)=0$ باشد آنگاه:

$$ds=\frac{|\nabla g|}{|\nabla g\cdot\vec{k}|}\,dA$$

$\vec{k}$: قائم بر صفحه‌ی xy (صفحه‌ی تصویر)

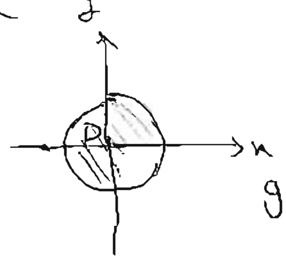
مثال: مساحت قسمتی از سهمی‌گون $z=x^2+y^2$ که زیر صفحه‌ی $z=2$ قرار دارد را بیابید.



مراحل سه‌گانه برای حل انتگرال روی سطح

مساحت سطح $=\iint_S ds$

مرحله اول، ابتدا سطح را بر یکی از صفحات اصلی تصویر می‌کنیم (بیشتر مواقع xy) و آن را D می‌نامیم.



مرحله دوم: محاسبه‌ی ds

$g:\ x^2+y^2-z=0$

$\nabla g\ (2x,2y,-1)$

$k=(0,0,1)$

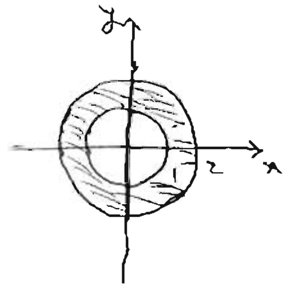
$$\Rightarrow ds=\frac{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}{|-1|}\,dA=\sqrt{4x^2+4y^2+1}\,dA$$

مرحله سوم: برقرار کردن ارتباط بین ① و ② (ds را جایگذاری کرده و روی D انتگرال بگیرید)

$$\iint_D\sqrt{4x^2+4y^2+1}\,dA=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\underbrace{\sqrt{4r^2+1}}_{u}\cdot r\,dr\,d\theta=2\pi\times\frac{1}{8}\times\frac{2}{3}(4r^2+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\sqrt{2}}$$

$r=\sqrt{2}\rightarrow u=9$

۳۰ / ۲ج ۴۲۰ — مساحت قسمتی از مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ (سطح اصلی) که بین دو استوانه $x^2+y^2=1$ و $x^2+y^2=4$ قرار دارد را بیابید.



$r: 1$ تا 2

$\theta: 0$ تا 2π

$$dS=\frac{|\nabla g|}{|\nabla g\cdot \vec{k}|}\,dA$$

$$g:\ \sqrt{x^2+y^2}-z=0$$

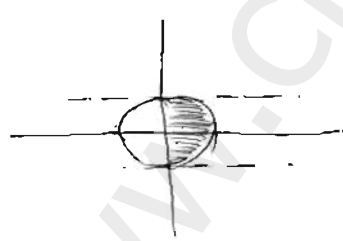
$$\nabla g:\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ -1\right)\quad,\quad |\nabla g|=\sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}+1}=\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow dS=\frac{\sqrt{2}}{|-1|}\,dA=\sqrt{2}\,dA$$

$$\iint_D \sqrt{2}\,dA=\sqrt{2}\times\big(\underbrace{\pi\times 2^2-\pi\times 1^2}_{\text{مساحت}}\big)=3\sqrt{2}\,\pi$$

۱۹ / ۲ج ۵۳۹ — S را قسمتی از مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ بگیرید محدود به فضای استوانه‌ای $\underbrace{1\ge y\ge -1\ \text{و}\ 0\le x\le 1-y^2}_{\text{تصویر سطح روی صفحه } xy\ (D)}$. مطلوبست می‌گیریم:

$$\iint_S x\,dS=?$$

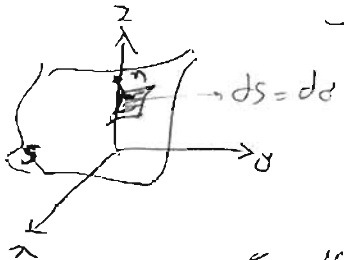


$dS=\sqrt{2}\,dA$
مانند شکل قبل

$$\iint_D \sqrt{2}\,x\,dA=\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-y^2}\sqrt{2}\,x\,dx\,dy=\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{2}}{2}(1-y^2)^2\,dy=\frac{8\sqrt{2}}{15}$$

انتگرال میدان برداری روی سطح (انتگرال شار):

سطح S به معادله‌ی $g(x,y,z)=0$ و $\vec{F}(x,y,z)=(F_1,F_2,F_3)$ مفروض است
$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$



و $\vec{n} = \pm \dfrac{\nabla g}{|\nabla g|}$ بردار یکه‌ی عمود بر سطح است.

انتگرال شار میدان F روی سطح S = $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds = \iint_S F_1\,dy\,dz + F_2\,dx\,dz + F_3\,dx\,dy$

مثال، S را قسمتی از صفحه‌ی $x+y+z=1$ در $x\geq 0$ و $y\geq 0$ و $z\geq 0$ می‌گیریم که قائم یکه‌ی $\vec n$ بر آن مولفه‌ی سوم منفی دارد. مطلوبست:

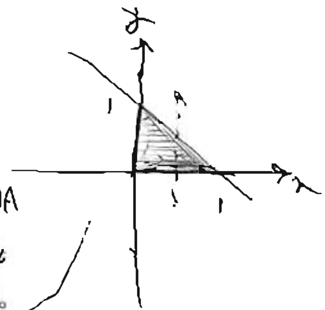
$$\iint_S \underbrace{x}_{F_2}\,dx\,dz + \underbrace{(y-1)}_{F_1}\,dy\,dz + \underbrace{(x+z)}_{F_3}\,dx\,dy$$

$F = (y-1,\ x,\ x+z)$

$g:\quad x+y+z-1=0$

$$\nabla g(1,1,1) \implies \vec{n} = \pm\frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}} \xrightarrow{\text{با توجه به صورت سوال}} \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,-1,-1)$$

از این راه طولانی می‌شود



راه دوم: $\vec{n}\,ds = \pm\dfrac{\nabla g}{|\nabla g|}\times\dfrac{|\nabla g|}{|\nabla g\cdot k|}\,dA = \dfrac{\pm(1,1,1)}{1}\,dA = (-1,-1,-1)\,dA$

حذف z: $z=1-x-y$

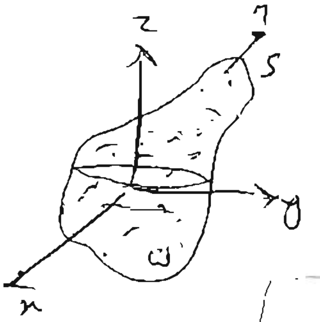
با توجه به صورت سوال منفی در نظر می‌گیریم

$$\vec{F}\cdot\vec{n}\,ds = (1-y)-x-x-z = (1-2x-y-z)\,dA = (1-2x-y-1+x+y)\,dA = -x\,dA$$

$$\iint_D F\cdot\vec{n}\,ds = \int_0^1\int_0^{1-x}(-x)\,dy\,dx = \int_0^1 -xy\Big|_0^{1-x}dx = \int_0^1 -x(1-x)\,dx = \int_0^1 x^2-x\,dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}-\frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$$

* این سری انتگرال شار با استفاده از تعریف انجام شد.
از قضیه‌ی دیورژانس نیز می‌توان محاسبه کرد که در صفحه‌ی بعد
بررسی می‌شود *



MBA

قضیه دیورژانس: (در عمران هم است)

سطح S بسته با قائم یکه‌ی $\vec{n}$ رو به سمت بیرون است و

$F=(F_1,F_2,F_3)$ میدان برداری با مشتقات جزئی پیوسته است.

آنگاه داریم:

$$\boxed{\iint_S F\cdot n\,dS=\iiint_\omega \operatorname{div}F\,dv}$$

$$\operatorname{div}F=\nabla\cdot F=\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z}$$

۱ – اگر $F=(x,-2y,4z)$ و S کره‌ی $\underbrace{x^2+y^2+z^2=a^2}_{\text{سطح بسته}}$ با قائم یکه‌ی خارجی $\vec{n}$ باشد. ۲ج ۱۹۷

مطلوبست، (عمران ۸۵)

$$\iint_S F\cdot n\,ds=\iiint_\omega \operatorname{div}F\,dv$$

$$\operatorname{div}F=1+(-2)+4=3$$

$$\iiint_\omega 3\,dv=3\times\frac{4}{3}\pi a^3=4\pi a^3$$

۶۵ / ۴۲۰ – D ناحیه‌ی محدود به استوانه‌ی $x^2+y^2=9$ و صفحات $z=0$ ، $z=5$ و S سطح محدودکننده D است (یعنی S سطح بسته)

و $F=(x+y,\,y+z,\,z+x)$. مطلوبست (MBA ۸۵)

$$\iint_S F\cdot n\,ds$$

$$=\iiint_D \operatorname{div}F\,dv=3\iiint_D dv=3\times\pi(\overset{r}{3})^2(\overset{h}{5})=135\pi$$

$$\operatorname{div}F=1+1+1=3$$

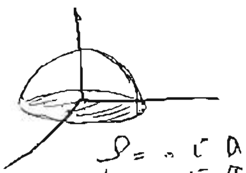
۳۰ / ۲ج ۲۱۸ – S را سطح نیم‌کره‌ی $\underbrace{z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}}_{\rho=a}$ همراه با $z=0$ می‌گیریم. مطلوبست

$$\iint_S xz^2\,dy\,dz+(x^2y-z)\,dx\,dz+(xy+y^2z)\,dx\,dy$$

$$F=(xz^2,\ x^2y-z,\ xy+y^2z)$$

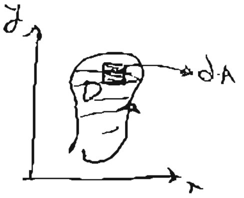
$$\operatorname{div}F=z^2+x^2+y^2$$

$$=\iiint_\omega \underbrace{(x^2+y^2+z^2)}_{\rho^2}\,dv=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{a}\rho^2\cdot\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta=\frac{2\pi}{5}a^5$$



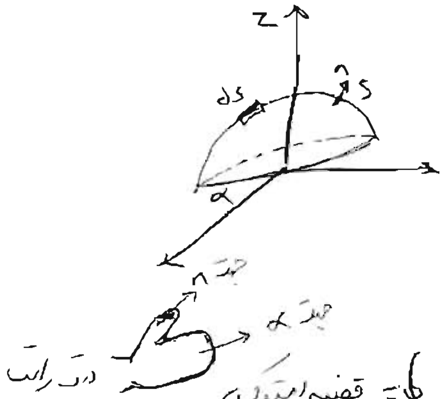
$\rho=0$ تا a

$\phi=0$ تا $\frac{\pi}{2}$



یادآوری قضیه گرین :

$$\oint_\alpha F\cdot dr = \iint \overbrace{\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}}^{\mathrm{curl}F\cdot k\,dA}\, dA$$



<u>قضیه استوکس</u> : S یک سطح با قائم یکه $\vec{n}$ رو به بیرون

و α را مرز آن یکبار پیموده شده در جهت مثلثاتی در نظر می‌گیریم

و $F:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ دارای مشتقات جزئی پیوسته باشد

قضیه استوکس : $\oint_\alpha F\cdot dr = \iint_S \mathrm{curl}F\cdot n\,ds$

کار F روی خم — شار curl F روی S

نتیجه : S_1 و S_2 دو سطح با مرز مشترک باشند

$$\iint_{S_1} \mathrm{curl}F\cdot n\,ds = \iint_{S_2} \mathrm{curl}F\cdot n\,ds$$

جهت n_1 و n_2 باید یکی باشد

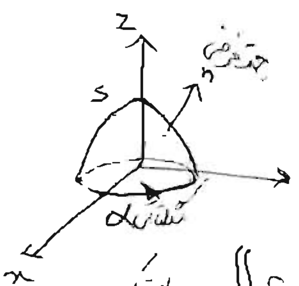
۴۰ / ج۲ ۱۱۴ — S را قسمتی از سهمیگون $z=1-x^2-y^2$ و $z\geq 0$ می‌گیریم و $\vec{F}=(z-y,\ z+x,\ -x-y)$

مطلوبست : MBA ۸۴

$$\iint_S \mathrm{curl}F\cdot n\,ds = ?$$

حل :

روش اول (استوکس) :



مرز $\alpha: (x^2+y^2=1,\ z=0)$

فرض می‌کنیم مرز یکبار در جهت مثلثاتی پیموده شده

استوکس : $\iint_S \mathrm{curl}F\cdot n\,ds = \oint_\alpha F\cdot dr = \oint_\alpha F\cdot\alpha'\,dt$

$$\alpha(t)=(\overbrace{\cos t}^{x},\overbrace{\sin t}^{y},\overbrace{0}^{z})$$

$$\vec{F}(\alpha(t)) = (0-\sin t,\ 0+\cos t,\ -\cos t-\sin t) \Rightarrow F\cdot\alpha' = 1$$

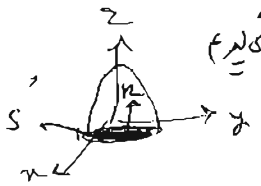
$$\alpha'(t) = (-\sin t,\ \cos t,\ 0)$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} 1\,dt = 2\pi$$

روش دوم (نتیجه استوکس)

یک سطح انتخاب می‌کنیم با مرز خم c. سطوح زیادی وجود دارد اما بهترین انتخاب سطح داخل خم مسأله است.

S' را داخل خم مرزی می‌گیریم یعنی S' را داخل دایره $x^2+y^2=1$ در صفحه‌ی $z=0$ می‌گیریم



چون سطح روی همان صفحه تصویر شده است (xy)
پس $dS = dA$

$$\iint_S \operatorname{curl}F\cdot n\,ds = \iint_{S'} \operatorname{curl}F\cdot \underbrace{n}_{k}\underbrace{ds}_{dA}$$

$$\operatorname{curl}\vec{F}\cdot\vec{k} = \frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y} = 1-(-1) = 2$$

$$= \iint_{S'} 2\,dA = 2\times \text{مساحت } S' = 2\times\pi = 2\pi$$

همواره سعی کنید از نتیجه‌ی استوکس مسائل را حل کنید.

$\frac{۷۶}{۴۲۸}$ شار برونسوی میدان $\operatorname{curl}F$ یعنی $\iint_S \operatorname{curl}F\cdot n\,ds$ را از قسمتی از کره‌ی $x^2+y^2+(z-2)^2=8$ که در بالای صفحه‌ی xy است برای میدان زیر بیابید. (عمران ۸۴)

$$F = \left(y^2\cos(xz),\ x^3e^{yz},\ e^{-xyz}\right)$$

S' را داخل خم مرزی می‌گیریم یعنی داخل $x^2+y^2=4$ در صفحه‌ی $z=0$ ؛ مرز: $z=0 \Rightarrow x^2+y^2=4$

$$\iint_S \operatorname{curl}F\cdot n\,ds = \iint_{S'} \operatorname{curl}F\cdot \underbrace{n}_{\underset{\text{با رسم شکل}}{1k}}\underbrace{ds}_{dA} = \iint_{S'} 3x^2-2y\,dA$$

روی منطقه S' ، $z=0$ است

$$\operatorname{curl}F\cdot k = \frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y} = 3x^2e^{yz}-2y\cos(xz) \Rightarrow 3x^2-2y$$

جواب: $\iint_{S'} 3x^2\,dA - \cancel{\overset{0}{\iint_{S'}} \underbrace{2y}_{\text{فرد}}\,dA} = 2\int_0^{\pi}\int_0^2 3(r\cos\theta)^2 r\,dr\,d\theta = 2\times 3\int_0^2 r^3\,dr \times \int_0^{\pi}\cos^2\theta = 12\pi$

تابع فرد و ناحیه زوج به انتگرال صفر داده

* تا هفته‌ی اول دی : جلد ۱ ریاضی ۱ و ۲

مرحله ۲ : جلد ۲ ریاضی ۱ و ۲ ⇐ تا کنکور

چه سوالاتی از جلد ۲ حل شود؟ سایت ← اطلاعات مهم کنکور ۹۰.

← چه تستهایی از جلد ۲ باید حل شود؟

مرحله ۳ : مرور نکته و تست درکلاس