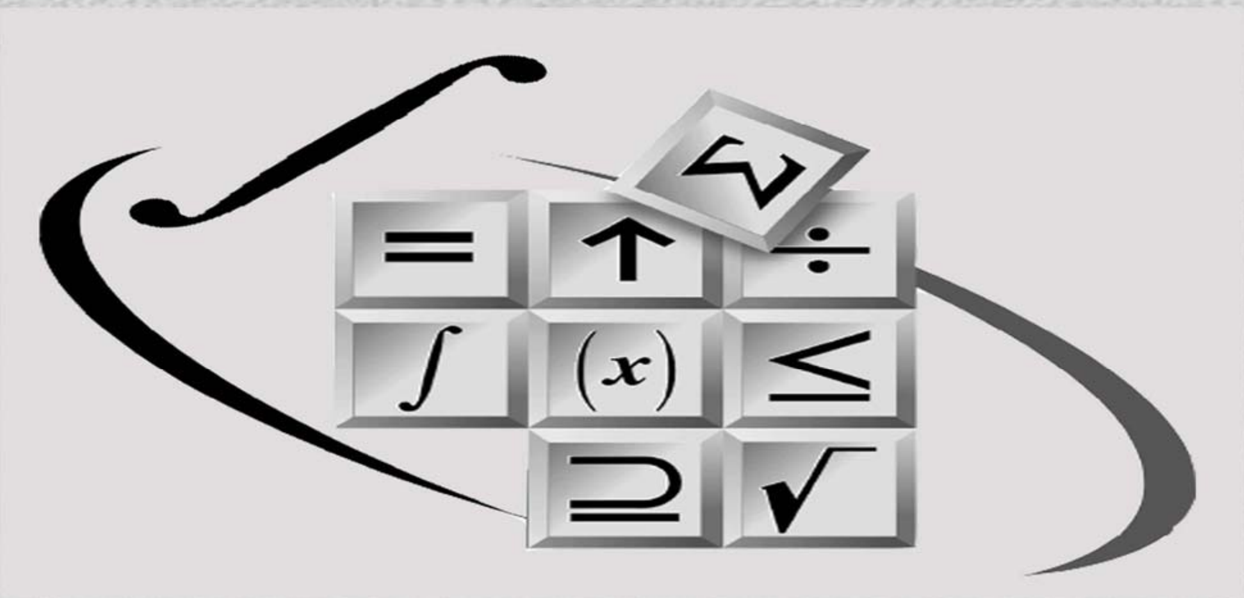
روش های انتگرال گیری



گرد آورنده :

مهدی شاداب فر

با تشکر از اساتید دانشگاه صنعت آب و برق :

دکتر حمید روانبخش

دکتر احمد فیض دیزجی

روش های انتگرال گیری

عنوان: روش های انتگرال گیری
گردآورنده: مهدی شاداب فر
تالیف دانشجوئی دانشگاه صنعت آب و برق (شهید عباسپور)
گروه علوم پایه

فهرست

مقدمه :

ریاضیات و مخصوصاً مبحث انتگرال یکی از موضوعاتی است که تقریبا دانشجویان تمام رشته های مهندسی باید بر آن مسلط باشند .

فهمیدن دروس مهمی همچون الکترو مغناطیس ، مدار ، مکانیک سیالات ، فیزیک مکانیک ، ترمودینامیک و ... در گرو تسلط بر مبحث انتگرال است .

این جزوه که هم اکنون در مقابل شما قرار دارد به بررسی روش های انتگرال گیری می پردازد .

برای تهیه این جزوه سؤالات کنکور سراسری ، کنکورهای کارشناسی ارشد ، سؤالات امتحانی دانشگاه های مختلف و ... بررسی شد و پس از انتخاب سؤالات و حل آنها ، در قالب ۱۶ روش دسته بندی گردید .

همچنین سه قسمت دیگر نیز به آنها اضافه گشت تا این جزوه برای افرادی که می خواهند اطلاعات بیشتری در زمینه انتگرال داشته باشند هم مفید واقع شود .

در پایان از همه کسانی که برای تهیه این جزوه زحمت کشیدند ، مخصوصا از استاد عزیزم جناب آقای سیروس شاداب فر و نیز از آقایان علیرضا کریم نیا و مجید زعیمی ، کمال تشکر و قدر دانی را می نمایم .

امید است که این کار کوچک مورد قبول حق تعالی قرار گرفته و باعث ارتقای علمی هر چه بیشتر دانشجویان سرزمین مقدسمان ایران شود .

با تشکر

مهدی شاداب فر

* آشنایی با انتگرال و تابع اولیه

تابع $y=f(x)$ را در نظر می گیریم و فرض می کنیم تابعی مانند $F(x)$ طوری پیدا شود که در تمامی نقاط مربوط به فاصله I داشته باشیم : $F'(x)=f(x)$

در این صورت $F(x)$ را یک تابع اولیه و یا انتگرال تابع $f(x)$ در فاصله I می نامیم و به صورت زیر نمایش می دهیم :

$$F(x)=\int f(x)dx$$

مثلا با دانستن اینکه مشتق تابع $F(x)=\sin x$ عبارتست از $f(x)=\cos x$ می توانیم نتیجه بگیریم که $\sin x$ یک تابع اولیه برای $\cos x$ است و یا انتگرال $\cos x$ ، $\sin x$ می شود .

* نکته : $F(x)$عبارتی است که مشتق آن برابر $f(x)$ و یا دیفرانسیل آن برابر $f(x)dx$ باشد ، به عبارت دیگر $F'(x)$ همان عبارت داخل انتگرال است .

مثلا اگر $f(x)=\int(x^2+3x+1)dx$ باشد ، آنگاه $f'(x)=x^2+3x+1$.

* نکته : هرگاه تابع $f(x)$ در فاصله I دارای یک تابع اولیه باشد ، در این فاصله دارای بیشمار تابع اولیه است که اختلاف همه آنها در یک عدد ثابت c است ، که به آن ثابت انتگرال گیری می گوییم .

به عبارت دیگر : $\int f(x)dx=F(x)+c$

* نکته : برای انتگرال گیری از یک تابع همیشه باید دیفرانسیل آن تابع داخل انتگرال موجود باشد .

* روش های انتگرال گیری

برای محاسبه انتگرال تابعی مانند $f(x)$ با توجه به اینکه $f(x)$ چه نوع تابعی است ، روش های مختلفی وجود دارد ، که در این مجموعه سعی می کنیم این روش ها را با بیانی ساده مطرح کنیم .

قبل از شروع فراگیری روش های انتگرال گیری می بایست کلیه فرمول های مشتق گیری را بدانیم ، زیرا انتگرال گیری و مشتق گیری عکس یکدیگر عمل می کنند .

برای روشن شدن این مطلب به مثال زیر توجه نمائید :

مثال : اگر بدانیم که $(Arc\tan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$ آنگاه می توانیم بگوئیم که : $\int\dfrac{1}{1+x^2}dx=Arc\tan x+c$ چرا که $Arc\tan x$ یک تابع اولیه برای $\dfrac{1}{1+x^2}$ به شمار می آید .

* نمونه سؤال امتحانی :

اگر $f(x)=\int(\cos^2\pi x+e^x)\,dx$ باشد ، آنگاه مشتق دوم تابع $f(x)$ را در $x=1$ بیابید .

ج) چون مشتق و انتگرال عکس هم عمل می کنند داریم :

$$f'(x)=(\int(\cos^2\pi x+e^x)dx)'=\cos^2\pi x+e^x$$

$$\Rightarrow f''(x)=-2\pi\cos\pi x\sin\pi x+e^x\Rightarrow f''(1)=2\pi\cos\pi\sin\pi+e=e$$

حال که تا حدی اطلاعاتی را در مورد انتگرال و تابع اولیه به دست آوردیم ، روش های انتگرال گیری را شروع می کنیم :

روش اول

در ابتدا باید انتگرال توابع مهم و اساسی را یاد گرفته و از آنها برای یافتن انتگرال توابع سخت تر استفاده کنیم .

تابع	انتگرال تابع
1	x
x^n	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$1+\tan^2 x$ $\sec^2 x$ $\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$
$1+\cot^2 x$ $\csc^2 x$ $\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x$
$\sec x \tan x$	$\sec x$
$\csc x \cot x$	$-\csc x$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
e^x	e^x
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$Arc\sin x$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$Arc\tan x$

جدول شماره ۱ .

برای اثبات این روابط می توان از طرف راست جدول مشتق گرفت و به عبارت سمت چپ رسید .

* با توجه به این نکته که که انتگرال یک عملگر یا اپراتور خطی می باشد ، برای محاسبه انتگرال توابع مختلف می توانیم از روابط زیر استفاده کنیم :

1) $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$

2) $\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

3) $\int (af(x)+b\,g(x))dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx$

....

$\boxed{I = \int x\sqrt{x}\,dx}$

$$I = \int x.x^{\frac{1}{2}}dx = \int x^{\frac{3}{2}}dx = \frac{1}{\frac{3}{2}+1}x^{\frac{3}{2}+1} = \frac{2}{5}\sqrt{x^5}+c$$

....

$\boxed{I = \int (8-x)\sqrt{x}\,dx}$

$$I = \int (8\sqrt{x}-x\sqrt{x})dx = 8\int x^{\frac{1}{2}}dx - \int x^{\frac{3}{2}}dx = 8.\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + c = \frac{16}{3}x\sqrt{x} - \frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+c$$

....

$\boxed{I = \int \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}}dx}$

$$I = \int (\frac{x}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}})dx = \int (\frac{x}{x^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}})dx = \int x^{\frac{2}{3}}dx - \int x^{-\frac{1}{3}}dx = \frac{1}{\frac{2}{3}+1}x^{\frac{2}{3}+1} - \frac{1}{-\frac{1}{3}+1}x^{-\frac{1}{3}+1} + c = 3\sqrt[3]{x^2}(\frac{1}{5}x - \frac{1}{2})+c$$

....

$\boxed{I = \int x^m.\sqrt[n]{x^k}.\sqrt[p]{x^s}\,dx}$

$$I = \int x^m.x^{\frac{k}{n}}.x^{\frac{s}{p}}dx = \int x^{m+\frac{k}{n}+\frac{s}{p}}dx = \frac{x^{m+\frac{k}{n}+\frac{s}{p}+1}}{m+\frac{k}{n}+\frac{s}{p}+1}+c$$

$$\boxed{I=\int(4\sin x-3\cos x)dx}$$

$$I=4\int\sin x\,dx-3\int\cos x\,dx=-4\cos x-3\sin x+c$$

....

$$\boxed{I=\int\tan^2 x\,dx}$$

$$I=\int((1+\tan^2 x)-1)dx=\int(1+\tan^2 x)dx-\int dx=\tan x-x+c$$

....

* نکته : اگر $\int f(x)dx=F(x)+c$ آنگاه $\int f(ax)dx=\frac{1}{a}F(ax)+c$

....

$$\boxed{I=\int\frac{dx}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x}}}$$

صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب می کنیم :

$$I=\int\frac{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x}}{2x+1-2x}dx=\int((2x+1)^{\frac{1}{2}}+(\sqrt{2}x^{\frac{1}{2}}))dx=\frac{1}{(\frac{1}{2}+1).2}(2x+1)^{\frac{1}{2}+1}+\frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1}+c=\frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}+\frac{2\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}}+c$$

....

$$\boxed{I=\int\frac{dx}{\sec x-1}}$$

$$I=\int\frac{dx}{\frac{1}{\cos x}-1}=\int\frac{dx}{\frac{1-\cos x}{\cos x}}=\int\frac{\cos x}{1-\cos x}dx$$

صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب می کنیم :

$$I=\int\frac{\cos x+\cos^2 x}{1-\cos^2 x}dx=\int\frac{\cos x+\cos^2 x}{\sin^2 x}dx=\int\frac{\cos x}{\sin^2 x}dx+\int\cot^2 x\,dx$$

$$=\int\csc x.\cot x\,dx+\int(1+\cot^2 x)dx-\int dx=-\csc x-\cot x-x+c$$

....

$$\boxed{I=\int(\tan^2 3x+5\cot^2 10x)dx}$$

$$I=\int\tan^2 3x\,dx+5\int\cot^2 10x\,dx$$

$$=\int(1+\tan^2 3x)dx-\int dx+5\int(1+\cot^2 10x)-5\int dx=\frac{1}{3}\tan 3x-x-\frac{1}{2}\cot 10x-5x+c$$

....

* نکته : اگر عبارت درون انتگرال تابعی کسری با صورت و مخرج چند جمله ای باشد ($\frac{f(x)}{g(x)}$) به طوری که درجه صورت بزرگتر یا مساوی درجه مخرج باشد ، باید کسر را به صورت زیر تجزیه کرد و سپس اقدام به انتگرال گیری نمود .

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\text{خارج قسمت}+\frac{\text{باقیمانده}}{g(x)}$$

$$\boxed{I=\int\frac{x^3+2x^2+x+5}{x^2+1}dx}$$

$$I=\int(x+2+\frac{3}{x^2+1})dx=\int x\,dx+2\int dx+3\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{1}{2}x^2+2x+3Arc\tan x+c$$

....

تست : اگر $\int\frac{5x^2+6x}{2\sqrt{x}}dx=f(x)\sqrt{x}+c$ ، آنگاه $f(x)$ کدام است ؟

$3x^2+3$ (1 $\quad$ $2x^2+2$ (2 $\quad$ x^2+3x (3 $\quad$ x^2+2x (4

$$I=\frac{5}{2}\int\frac{x^2}{\sqrt{x}}dx+3\int\frac{x}{\sqrt{x}}dx=\frac{5}{2}\int x^{\frac{3}{2}}dx+3\int x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{5}{2}.\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+3.\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+c=x^{\frac{5}{2}}+2x^{\frac{3}{2}}+c\Rightarrow f(x)=x^2+2x$$

....

$$\boxed{I=\int\sqrt{1-\sin 2x}\,dx \qquad 0\langle x\langle\frac{\pi}{4}}$$

$$I=\int\sqrt{(\sin^2 x+\cos^2 x)-2\sin x\cos x}\,dx=\int\sqrt{(\sin x+\cos x)^2}dx=\int|\sin x-\cos x|dx$$

در $0 \langle x \langle \frac{\pi}{4}$ داریم $\sin x \langle \cos x$. پس باید برای حذف قدر مطلق ، آن را در یک منفی ضرب کنیم :

$$I = \int (\cos x - \sin x)\, dx = \sin x + \cos x + c$$

....

$$\boxed{I = \int \frac{dx}{\sin x + \cos x - \sqrt{2}}}$$

داریم : $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4})$ و نیز $1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$

$$\Rightarrow I = -\frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{dx}{2\sin^2(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8})} = -\frac{\sqrt{2}}{4}\int (1 + \cot^2(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}))dx = -\frac{\sqrt{2}}{4}(-\frac{1}{\frac{1}{2}})\cot(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}) + c = \frac{\sqrt{2}}{2}\cot(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}) + c$$

....

* تغییر متغیر

اگر u تابعی مشتق پذیر بر حسب x باشد ، به طوری که داشته باشیم :

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$
$$du = u'dx$$

آنگاه داریم :

$$\int f(u)u'dx = F(u) + c$$
$$or \quad \int f(u)du = F(u) + c$$

برای استفاده از روش تغییر متغیر مراحل زیر را انجام می دهیم :

۱- یک تغییر متغیر مانند $u = g(x)$ انتخاب می کنیم . ($u = g(x)$ را باید طوری انتخاب کنیم که یا مشتق آن به صورت مستقیم وجود داشته باشد و یا تشخیص دهیم که می توانیم مشتق آن را بسازیم .)

۲- $du = g'(x)dx$ را حساب می کنیم .

۳- کاری می کنیم که تمام انتگرال ده بر حسب u باشد ، و هیچ x ای باقی نماند ،یعنی انتگرال را به شکل $\int f(u)du$ در می آوریم .

۴- این انتگرال را حساب می کنیم .

۵- u را با $g(x)$ جایگزین می کنیم .

....

$$\boxed{I=\int 6x\sqrt{3x^2+5}\,dx}$$

$$\begin{array}{|l} u=3x^2+5 \\ du=6x\,dx \\ \hline \end{array}$$

$$I=\int\sqrt{u}\,du=\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+c=\frac{2}{3}(3x^2+5)^{\frac{3}{2}}+c$$

....

مثال : اگر $\int f(x)dx=F(x)+c$ آنگاه $\int f(ax+b)dx$ را حساب کنید .

$$\begin{array}{|l} u=ax+b \\ du=a\,dx\Rightarrow dx=\frac{1}{a}du \\ \hline \end{array}$$

$$\Rightarrow I=f(u).\frac{1}{a}du=\frac{1}{a}\int f(u)du=\frac{1}{a}F(u)+c$$

روش دوم

در انتگرالهایی که به صورت $I=\int f(x).(g(x))^n\,dx$ هستند ، g(x) را برابر u گرفته و سپس f(x) و dx را بر حسب u نوشته و به محاسبه انتگرال می پردازیم .

....

$$\boxed{I=\int\frac{x}{\sqrt{8x^2+1}}\,dx}$$

$$\begin{array}{|l} u=8x^2+1 \\ du=16x\,dx\Rightarrow xdx=\frac{1}{16}du \\ \hline \end{array}$$

$$I=\frac{1}{16}\int u^{-\frac{1}{2}}du=\frac{1}{8}\sqrt{u}+c=\frac{1}{8}\sqrt{8x^2+1}+c$$

....

$$\boxed{I=\int\frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}\,dx}$$

$$\begin{array}{|l} u=1+\sin x \\ du=\cos x\,dx \\ \hline \end{array}$$

$$I=\int\frac{du}{u}=2\sqrt{u}+c=2\sqrt{1+\sin x}+c$$

....

$$\boxed{I=\int e^{x}\sqrt{3+4e^{x}}\,dx}$$

$$u=3+4e^{x}$$

$$du=4e^{x}dx\Rightarrow e^{x}dx=\frac{1}{4}du$$

$$I=\frac{1}{4}\int\sqrt{u}\,du=\frac{1}{6}u^{\frac{3}{2}}+c=\frac{1}{6}(3+4e^{x})^{\frac{3}{2}}+c$$

....

$$\boxed{I=\int\frac{(\sqrt{x}-1)^{3}}{\sqrt{x}}dx}$$

$$u=\sqrt{x}-1$$

$$du=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$

$$I=2\int u^{3}du=\frac{2}{4}u^{4}+c=\frac{1}{2}(\sqrt{x}-1)^{4}+c$$

....

$$\boxed{I=\int\frac{(x+\sqrt{x^{2}+1})^{3}}{\sqrt{x^{2}+1}}dx}$$

$$u=x+\sqrt{x^{2}+1}$$

$$du=(1+\frac{x}{\sqrt{x^{2}+1}})dx\Rightarrow(\frac{x+\sqrt{x^{2}+1}}{\sqrt{x^{2}+1}})dx=du$$

$$I=\int\frac{(x+\sqrt{x^{2}+1})}{\sqrt{x^{2}+1}}(x+\sqrt{x^{2}+1})^{2}dx=\int u^{2}du=\frac{1}{3}u^{3}+c=\frac{1}{3}(x+\sqrt{x^{2}+1})^{3}+c$$

....

$$\boxed{I=\int\frac{\tan x}{\cos x.\sqrt{1+\sec x}}dx}$$

$$u=1+\sec x$$

$$du=\sec x.\tan x\,dx$$

$$I=\int\frac{du}{\sqrt{u}}=2\sqrt{u}+c=2\sqrt{1+\sec x}+c$$

....

$$\boxed{I=\int\frac{\sqrt{x}+\ln x}{x}dx}$$

$$I=\int\frac{\sqrt{x}}{x}dx+\int\frac{\ln x}{x}dx=\int x^{-\frac{1}{2}}dx+\int\frac{\ln x}{x}dx$$

$$u=\ln x$$

$$du=\frac{1}{x}dx$$

$$I=\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx=\int u\,du=2\sqrt{x}+\frac{1}{2}(\ln x)^2+c$$

....

$$\boxed{I=\int 25\cos x\,\sin^7 x\,.\sqrt[3]{\sin x}\;dx}$$

$$I=\int 25\cos x\,(\sin x)^{\frac{22}{3}}\;dx \qquad \left|\begin{array}{l} u=\sin x\\ du=\cos x\;dx \end{array}\right.$$

$$I=25\int u^{\frac{22}{3}}\,du=25.\frac{3}{25}(u^{\frac{25}{3}})+c=3u^8u^{\frac{1}{3}}+c=3\sin^8 x\,.\sqrt[3]{\sin x}+c$$

....

$$\boxed{I=\int\frac{dx}{\sqrt{ax+b}-\sqrt{ax+c}}}$$

صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب می کنیم :

$$I=\int\frac{\sqrt{ax+b}+\sqrt{ax+c}}{ax+b-ax-c}\,dx=\int\frac{\sqrt{ax+b}+\sqrt{ax+c}}{b-c}\,dx=\frac{1}{b-c}\int\sqrt{ax+b}\;dx+\frac{1}{b-c}\int\sqrt{ax+c}\,dx$$

$$=\frac{1}{b-c}.\frac{2}{3a}(ax+b)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{b-c}.\frac{2}{3a}(ax+c)^{\frac{3}{2}}+c$$

....

حال به انتگرال های زیر توجه کنید :

$$I=\int(\tan x-\cot x)(\tan x+\cot x)^5\,dx=\int(\tan^2 x-\cot^2 x)(\tan x+\cot x)^4dx$$

$$=\int(\tan x+\cot x)^4((1+\tan^2 x)-(1+\cot^2 x))\;dx=\ldots$$

....

$$I=\int\tan x\,.\sec^2 x\;dx \qquad \underline{|u=\tan x} \quad \ldots$$

....

$$I=\int \tan^3 x.\sec x\ dx=\int \tan^2 x.(\tan x.\sec x)\ dx=\int (\sec^2 x-1).(\tan x.\sec x)\ dx$$

$|\underline{u=\sec x}$ ...

$$I=\int \sin^2 2x.\cos^3 2x\ dx=\int \sin^2 2x.(1-\sin^2 2x).\cos 2x\ dx=\int (\sin^2 2x-\sin^4 2x).\cos 2x\ dx$$

$|\underline{u=\sin 2x}$ ...

....

$I=\int \cot^3 x.\csc^2 x\, dx$ $|\underline{u=\cot x}$,....

....

* نکته : در انتگرال هایی که به صورت $I=\int \frac{(au+b)^n}{(cu+d)^{n+2}}du$ هستند ،یک روش مناسب این است که $\frac{au+b}{cu+d}$ را برابر u گرفته و ادامه دهیم .

$$\boxed{I=\int \frac{(5\cos x+3)^7 \sin x}{(2\cos x+1)^9}dx}$$

$$u=\frac{5\cos x+3}{2\cos x+1}$$

$$du=\frac{\sin x}{(2\cos x+1)^2}dx$$

$$I=\int u^7 du=\frac{1}{8}u^8+c=\frac{1}{8}(\frac{5\cos x+3}{2\cos x+1})^8+c$$

روش سوم

در انتگرال های مثلثاتی ای که کمان آنها تابعی از x می باشد ، یک روش مناسب این است که کمان را برابر u گرفته و مشتق آن را در کنارش بسازیم .

....

$$\boxed{I=\int e^{x}\sec^{2}(e^{x})dx}$$

$$\left|\begin{array}{l} u=e^{x} \\ du=e^{x}\,dx \end{array}\right.$$

$$I=\int \sec^{2}u\,du=\tan u+c=\tan e^{x}+c$$

$$\boxed{I=\int \frac{\cos(\ln x)}{x}dx}$$

$$\left|\begin{array}{l} u=\ln x \\ du=\frac{1}{x}dx \end{array}\right.$$

$$I=\int \cos u\,du=\sin u+c=\sin(\ln x)+c$$

....

$$\boxed{I=\int \sec^{2}x.\sin(\tan x)dx}$$

$$\left|\begin{array}{l} u=\tan x \\ du=\sec^{2}x\,dx \end{array}\right.$$

$$I=\int \sin u\,du=-\cos u+c=-\cos(\tan x)+c$$

....

$$\boxed{I=\int \frac{\sin(\log_{2}^{x})}{x}dx}$$

$$\left|\begin{array}{l} u=\log_{2}^{x} \\ du=\frac{1}{x}\log_{2}^{x}\,dx \end{array}\right.$$

$$I=\frac{1}{\log_{2}^{e}}\int \sin u\,du=\ln 2\int \sin u\,du=-\ln 2(\cos u)+c=-\ln 2.(\cos\log_{2}^{x})+c$$

....

$$\boxed{I=\int \frac{\sec^{2}\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^{2}}}dx}$$

$$\left|\begin{array}{l} u=\sqrt[3]{x} \\ du=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^{2}}}dx \end{array}\right.$$

$$I=3\int \sec^{2}u\,du=3\tan u+c=3\tan\sqrt[3]{x}+c$$

....

* نکته : برای محاسبه انتگرال هایی که به صورت حاصلضرب نسبت های مثلثاتی سینوس و کسینوس می باشند ، باید ابتدا از روابط تبدیل حاصلضرب به حاصل جمع استفاده کرده و سپس به محاسبه انتگرال بپردازیم .

$$\sin a.\cos b=\frac{1}{2}(\sin(a+b)+\sin(a-b))$$

$$\sin a.\sin b=-\frac{1}{2}(\cos(a+b)-\cos(a-b))$$

....

$$\boxed{I=\int \sin x.\cos x.\sin 3x\,dx}$$

$$I=\frac{1}{2}\int \sin 2x\,\sin 3x dx=\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})\int(\cos 5x-\cos x)dx=-\frac{1}{4}.\frac{1}{5}\sin 5x-\frac{1}{4}\sin x+c=-\frac{1}{2}\sin 5x-\frac{1}{4}\sin x+c$$

روش چهارم

برای محاسبه انتگرال هایی که به صورت $\frac{du}{u}$ هستند از فرمول زیر استفاده می کنیم :

$$\int\frac{du}{u}=\int\frac{u'dx}{u}=\ln|u|+c$$

به عبارت دیگر در اینگونه انتگرال ها مخرج را برابر u در نظر گرفته ، و سپس dx را بر حسب du و u می نویسیم .

....

* قبل از هر چیز در این قسمت به محاسبه انتگرال های $\csc x, \sec x, \cot x, \tan x$ می پردازیم .

$$I=\int \tan x\,dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx \qquad \begin{array}{|l} u=\cos x\\ du=-\sin x\,dx\\ \hline\end{array}$$

$$\Rightarrow I=-\int\frac{du}{u}=-\ln|u|+c=-\ln|\cos x|+c=\ln|\sec x|+c$$

....

$$I=\int \cot x\,dx=\int \frac{\cos x}{\sin x}dx \qquad \begin{array}{|l} u=\sin x \\ du=\cos x\,dx \end{array}$$

$$\Rightarrow I=\int \frac{du}{u}=\ln|u|+c=\ln|\sin x|+c$$

....

$$I=\int \sec x\,dx$$

این انتگرال را در $\sec x+\tan x$ ضرب و تقسیم می کنیم :

$$\Rightarrow I=\int \frac{\sec x.(\sec x+\tan x)}{\sec x+\tan x}dx=\int \frac{\sec^2 x+\sec x.\tan x}{\sec x+\tan x}dx \qquad \begin{array}{|l} u=\sec x+\tan x \\ du=(\sec x.\tan x+\sec^2 x)dx \end{array}$$

$$I=\int \frac{du}{u}=\ln|u|+c=\ln|\sec x+\tan x|+c$$

....

$$I=\int \csc x\,dx$$

این انتگرال را در $\csc x-\cot x$ ضرب و تقسیم می کنیم .

$$I=\int \frac{\csc^2 x-\csc x.\cot x}{\csc x-\cot x}dx \qquad \begin{array}{|l} u=\csc x-\cot x \\ du=(-\csc x.\cot x+\csc^2 x)dx \end{array}$$

$$I=\int \frac{du}{u}=\ln|u|+c=\ln|\csc x-\cot x|+c$$

....

$$\boxed{I=\int \frac{e^x(x+1)}{xe^x+\sqrt{3}}dx} \qquad \begin{array}{|l} u=xe^x+\sqrt{3} \\ du=(e^x+xe^x)dx=e^x(x+1)dx \end{array}$$

$$I=\int \frac{du}{u}=\ln|u|+c=\ln\left|xe^x+\sqrt{3}\right|+c$$

$$\boxed{I=\int\frac{dx}{1+\sqrt{1+x}}}$$

$$\begin{array}{|l} u=\sqrt{1+x} \\ du=\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}dx \Rightarrow dx=2udu \\ \hline \end{array}$$

$$I=\int\frac{2udu}{1+u}=2\int\frac{(u+1)-1}{1+u}du=2\int du-2\int\frac{du}{1+u}=2u-2\ln\left|1+u\right|+c=2\sqrt{1+x}-2\ln\left|1+\sqrt{1+x}\right|+c$$

....

$$\boxed{I=\int\frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}}$$

$$\begin{array}{|l} u=1+\sqrt{x} \\ du=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx \\ \hline \end{array}$$

$$I=2\int\frac{du}{u}=2\ln\left|u\right|+c=2\ln\left|1+\sqrt{x}\right|+c$$

....

$$\boxed{I=\int\frac{\cos 2x}{(\sin x+\cos x)^2}dx}$$

$$I=\int\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{(\sin x+\cos x)^2}dx=\int\frac{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}{(\cos x+\sin x)^2}dx=\int\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}dx$$

$$\begin{array}{|l} u=\cos x+\sin x \\ du=(\cos x-\sin x)dx \\ \hline \end{array}$$

$$\Rightarrow I=\int\frac{du}{u}=\ln\left|u\right|+c=\ln\left|\cos x+\sin x\right|+c$$

....

$$\boxed{I=\int\frac{1-\tan x}{1+\tan x}dx}$$

$$I=\int\frac{1-\tan x}{1+\tan x}dx=\int\frac{1-\dfrac{\sin x}{\cos x}}{1+\dfrac{\sin x}{\cos x}}dx=\int\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}dx=\ldots$$

* حال به چند مثال ترکیبی از روش های ۳ و ۴ دقت کنید .

$$\boxed{I=\int\frac{\tan(Arc\sin x)}{\sqrt{1-x^2}}dx}$$

$$u=Arc\sin x$$
$$du=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$I=\int\tan u\,du=\ln\left|\sec u\right|+c=\ln\left|\sec(Arc\sin x)\right|+c$$

....

$$\boxed{I=\int\sec(\tan x)\sec^2 x\,dx}$$

$$u=\tan x$$
$$du=\sec^2 x\,dx$$

$$I=\int\sec u\,du=\ln\left|\sec u+\tan u\right|+c=\ln\left|\sec(\tan x)+\tan(\tan x)\right|+c$$

....

$$\boxed{I=\int\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx}$$

$j=\int\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$ را تشکیل می دهیم ، در نتیجه می توان نوشت :

$$I+j=\int\frac{\cos x+\sin x}{\sin x+\cos x}dx=\int dx=x+c_1 \qquad (1$$

$$I-j=\int\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}dx=\int\frac{du}{u}=\ln\left|u\right|+c=\ln\left|\sin x+\cos x\right|+c_2 \qquad (2$$

$$\xrightarrow{1+2}2I=x+\ln\left|\sin x+\cos x\right|+c_1+c_2\Rightarrow I=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\ln\left|\sin x+\cos x\right|+c$$

....

روش پنجم

در انتگرال هایی که به صورت توابع نمایی هستند به صورت زیر عمل می کنیم :

$$\int e^u du=e^u+c \qquad , \qquad \int a^u du=\frac{1}{\ln a}a^u+c$$

در واقع در اینگونه انتگرال ها ، توان را برابر u گرفته و سعی می کنیم dx را در کنار a^u ، بر حسب u بسازیم .

$$\boxed{I=\int (2x+1)e^{x^2+x}\,dx}$$

$$\begin{array}{|l}u=x^2+x\\ du=(2x+1)dx\\ \hline\end{array}$$

$$I=\int e^u du=e^u+c=e^{x^2+x}+c$$

....

$$\boxed{I=\int \frac{2^{Arc\tan x}}{1+x^2}dx}$$

$$\begin{array}{|l}u=Arc\tan x\\ du=\dfrac{1}{1+x^2}dx\\ \hline\end{array}$$

$$I=\int 2^u du=\frac{1}{\ln 2}.2^u+c=\frac{1}{\ln 2}.2^{Arc\tan x}+c$$

....

$$\boxed{I=\int \frac{xe^{x^2+x+1}}{\sqrt{e^{2x+4}}}dx}$$

$$I=\int \frac{xe^{x^2+x+1}}{(e^{2x+4})^{\frac{1}{2}}}dx=\int \frac{xe^{x^2+x+1}}{e^{x+2}}dx=\int xe^{x^2+x+1}.e^{-x-2}dx=\int xe^{x^2-1}dx$$

$$\begin{array}{|l}u=x^2-1\\ du=2x\,dx\\ \hline\end{array}$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{2}\int e^u du=\frac{1}{2}e^u+c=\frac{1}{2}e^{x^2-1}+c$$

روش ششم

در این قسمت می خواهیم به محاسبه انتگرال توان های مختلف $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$, $\csc x$ بپردازیم .

۱- انتگرال توان های فرد و مثبت $\sin x$, $\cos x$ ($\sin^m x$, $\cos^m x$, $m=2k+1$)

در این موارد به ترتیب زیر عمل می کنیم :

$$I=\int \sin^m x\,dx=\int (\sin x)^{2k+1}dx=\int (\sin^2 x)^k.\sin x\,dx=\int (1-\cos^2 x)^k.\sin x\,dx$$

$$\begin{array}{|l}u=\cos x\\ du=-\sin x\\ \hline\end{array}\qquad \Rightarrow I=-\int (1-u^2)^k du=\ldots$$

$$I=\int \cos^m x\,dx=\int (\cos x)^{2k+1}dx=\int (\cos^2 x)^k.\cos x\,dx=\int (1-\sin^2 x)^k.\cos x\,dx$$

$$\begin{array}{|l}u=\sin x\\ du=\cos x\\ \hline\end{array}\qquad \Rightarrow I=\int (1-u^2)^k du=\ldots$$

$$\boxed{I=\int 5\cos^3 x\,dx}$$

$$I=5\int \cos^2 x.\cos x\,dx=5\int(1-\sin^2 x).\cos x\,dx \qquad \begin{vmatrix} u=\sin x \\ du=\cos x\,dx \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow I=5\int(1-u^2)du=5u-\frac{5}{3}u^3+c=5\sin x-\frac{5}{3}\sin x+c$$

....

$$\boxed{I=\int \sin^7 x\,dx}$$

$$I=\int \sin^6 x.\sin x\,dx=\int(1-\cos^2 x)^3.\sin x\,dx \qquad \begin{vmatrix} u=\cos x \\ du=-\sin dx \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow I=-\int(1-u^2)^3\,du=-\int(1-3u^2+3u^4-u^6)du=-u+u^3-\frac{3}{5}u^5+\frac{1}{7}u^7+c$$

$$=-\cos x+\cos^3 x-\frac{3}{5}\cos^5 x+\frac{1}{7}\cos^7 x+c$$

....

۲- انتگرال توان های زوج و مثبت $\cos x\ ,\sin x$ $\quad(\cos^m x\ ,\sin^m x\ \ ,\ \ m=2k)$

در این موارد با استفاده از رابطه های زیر عبارت های مثلثاتی را به صورت حاصل جمع درآورده و سپس به محاسبه انتگرال می پردازیم .

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\sin a.\cos b=\frac{1}{2}\left[\sin(a+b)+\sin(a-b)\right]$$

$$\cos a.\cos b=\frac{1}{2}\left[\cos(a+b)+\cos(a-b)\right]$$

$$\sin a.\sin b=\frac{1}{2}\left[\cos(a-b)-\cos(a+b)\right]$$

....

$$\boxed{I=\int \sin^4 x\,dx}$$

$$I=\int(\sin^2 x)^2 dx=\int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx=\frac{1}{4}\int(1-2\cos 2x+\cos^2 2x)dx$$

داریم : $\cos^2 2x=\frac{1}{2}(1+\cos 4x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 4x$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{4}\int\left(\frac{3}{2}-2\cos 2x+\frac{1}{2}\cos 4x\right)dx=\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+c$$

$\boxed{I = \int \cos^4 x \, dx}$

$$I = \int (\cos^2 x)^2 dx = \int (\frac{1+\cos 2x}{2})^2 dx = \frac{1}{4}\int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x)dx$$

داریم : $\cos^2 2x = \frac{1}{2}(1+\cos 4x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{4}\int (\frac{3}{2} + 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x)dx = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c$$

....

$\boxed{I = \int (\sin^4 x + \cos^4 x)dx}$

$$I = \int ((\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x)dx = \int (1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x)dx = \int (1 - \frac{1}{4}(1-\cos 4x))dx$$

$$\Rightarrow I = \frac{3}{4}\int dx + \frac{1}{4}\int \cos 4x \, dx = \frac{3}{4}x + \frac{1}{16}\sin 4x + c$$

....

۳- انتگرال توان های زوج و مثبت $\csc x$, $\sec x$ $\left(\frac{1}{\sin^m x}, \frac{1}{\cos^m x} \quad , \quad m = 2k\right)$

در اینگونه موارد به ترتیب زیر عمل می کنیم :

$$I = \int \sec^m x \, dx = \int (\sec x)^{m-2}.\sec^2 x \, dx = \int (\sec^2 x)^{\frac{m-2}{2}}.\sec^2 x \, dx = \int (1+\tan^2 x)^{\frac{m-2}{2}} (1+\tan^2 x)dx$$

$$\left| \begin{array}{l} u = \tan x \\ du = (1+\tan^2 x)dx \end{array} \right. \Rightarrow I = \int (1+u^2)^{\frac{m-2}{2}} du$$

در مورد $\int \csc^m x \, dx$ نیز به همین ترتیب عمل می کنیم .

$\boxed{I = \int \sec^6 x \, dx}$

$$I = \int \sec^4 x .\sec^2 x \, dx = \int (\sec^2 x)^2.\sec^2 x \, dx = \int (1+\tan^2 x)^2.(1+\tan^2 x)dx$$

$$\left| \begin{array}{l} u = \tan x \\ du = 1+\tan^2 x \, dx \end{array} \right. \Rightarrow I = \int (1+u^2)^2 du = \int (1+2u^2+u^4)du = u + \frac{2}{3}u^3 + \frac{4}{5}u^5 + c = \tan x + \frac{2}{3}\tan^3 x + \frac{4}{5}\tan^5 x + c$$

....

۴- انتگرال $\sin^m x .\cos^n x$

الف) وقتی که حد اقل یکی از دو عدد m یا n فرد باشد .

در این صورت از m یا n ویا هر کدام که فرد هستند یکی کم می کنیم ، تا به عددی زوج تبدیل شود . سپس به ترتیب زیر عمل می کنیم :

با فرض اینکه n فرد باشد :

$$I=\int \sin^m x.\cos^n x\,dx=\int \sin^m x.(\cos x)^{2k+1}dx=\int \sin^m x.(\cos x)^{2k}.\cos x\,dx=\int \sin^m x.(1-\sin^2 x)^k.\cos x\,dx$$

حال با تغییر متغیر $u=\sin x$ به حل انتگرال می پردازیم .

....

$$\boxed{I=\int \cos^3 x.\sin x\,dx}$$

$$I=\int \cos^2 x.\cos x.\sin x\,dx=\int (1-\sin^2 x).\cos x.\sin x\,dx=\int \sin x.\cos x\,dx-\int \sin^3 x.\cos x\,dx$$

$$\begin{array}{|l} u=\sin x \\ du=\cos x\,dx \end{array}\Rightarrow I=\int u\,du-\int u^3du=\frac{1}{2}u^2-\frac{1}{4}u^4+c=\frac{1}{2}\sin^2 x-\frac{1}{4}\sin^4 x+c$$

....

ب)وقتی که هر دو زوج با شند .

در این صورت با استفاده از روابط $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$ ، $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$ ، $\sin^m x$ و $\cos^n x$ را جایگزین می کنیم .

در این صورت انتگرال ده ما ، بر حسب توان های $\cos x$ مرتب می شود که در اینجا با روشی که قبلا گفته شده بود ، شروع به حل انتگرال می کنیم .

$$\boxed{I=\int \sin^4 x.\cos^2 x\,dx}$$

$$I=\int (\sin^2 x)^2.\cos^2 x\,dx=\int (\frac{1-\cos 2x}{2})^2.(\frac{1+\cos 2x}{2})dx=\frac{1}{8}\int (1-2\cos 2x+\cos^2 2x)(1+\cos 2x)dx$$

$$=\frac{1}{8}\int (1-\cos 2x-\cos^2 2x+\cos^3 2x)dx=\frac{1}{8}\int\left((1-\cos 2x)-\frac{1+\cos 4x}{2}+(\cos^2 2x)(\cos 2x)\right)dx$$

$$=\frac{1}{8}\int (\frac{1}{2}-\cos 2x-\frac{1}{2}\cos 4x)dx+\frac{1}{8}\int (1-\sin^2 2x)\cos 2x\,dx$$

$$=\frac{1}{8}(\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{8}\sin 4x)+\frac{1}{8}\int \cos 2x\,dx-\frac{1}{16}\int \underbrace{\sin^2 2x}_{u^2}\underbrace{(2\cos 2x)dx}_{du}$$

$$=\frac{1}{16}x-\frac{1}{16}\sin 2x-\frac{1}{64}\sin 4x+\frac{1}{16}\sin 2x-\frac{1}{48}\sin^3 2x+c=\frac{1}{16}(x-\frac{1}{4}\sin 4x-\frac{1}{3}\sin^3 2x)+c$$

۵- انتگرال توان های $\tan x$ و $\cot x$ ($\tan^n x$ و $\cot^m x$)

در این مرحله ابتدا یک روش کلی برای محاسبه انتگرال های $\tan^n x$, $\cot^n x$ ارائه می دهیم . به این روش که به کاهش توان شهرت دارد ، توجه کنید .

$$I_n = \int \tan^n x\,dx = \int (\tan^n x + \tan^{n-2} x - \tan^{n-2} x)dx = \int (\tan x)^{n-2}.(1+\tan^2 x)dx - \int (\tan x)^{n-2}dx$$

$$\left| \begin{array}{l} u = \tan x \\ du = (1+\tan^2 x)\,dx \end{array} \right. \Rightarrow I_n = \int u^{n-2}du - \int (\tan x)^{n-2}dx = \frac{1}{n-1}.u^{n-1} - \int (\tan x)^{n-2}dx$$

$$= \frac{1}{n-1}(\tan x)^{n-1} - \int (\tan x)^{n-2}dx \Rightarrow I_n = \frac{(\tan x)^{n-1}}{n-1} - I_{n-2}$$

این کار برای محاسبه I_{n-2} نیز تکرار می شود .

$$I_n = \int \cot^n x\,dx = \int (\cot^n x + \cot^{n-2} x - \cot^{n-2} x)dx = \int (\cot x)^{n-2}.(1+\cot^2 x)dx - \int (\cot x)^{n-2}dx$$

$$\left| \begin{array}{l} u = \cot x \\ du = -(1+\cot^2 x)\,dx \end{array} \right. \Rightarrow I_n = -\int u^{n-2}du - \int (\cot x)^{n-2}dx = \frac{-1}{n-1}.u^{n-1} - \int (\cot x)^{n-2}dx$$

$$= \frac{-1}{n-1}(\cot x)^{n-1} - \int (\cot x)^{n-2}dx \Rightarrow I_n = \frac{-(\cot x)^{n-1}}{n-1} - I_{n-2}$$

....

$$\boxed{I = \int \tan^4 x\,dx}$$

$$I = \int (\tan^4 x + \tan^2 x - \tan^2 x)dx = \int \tan^2 x(1+\tan^2 x)dx - \int \tan^2 x\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\tan^3 x - \int (\tan^2 x + 1 - 1)dx = \frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x + c$$

....

$$\boxed{I = \int \cot^6 x\,dx}$$

$$I = \int (\cot^6 x + \cot^4 x - \cot^4 x - \cot^2 x + \cot^2 x + 1 - 1)dx$$

$$= \int \left[\cot^4 x(1+\cot^2 x) - \cot^2 x(1+\cot^2 x) + (\cot^2 x + 1) - 1\right]dx$$

$$\left| \begin{array}{l} u = \cot x \\ du = -(1+\cot^2 x)dx \end{array} \right. \Rightarrow I = -\int u^4 du + \int u^2 du - \int du - \int dx$$

$$= -\frac{1}{5}u^5 + \frac{1}{3}u^3 - u - x + c = -\frac{1}{5}\cot^5 x + \frac{1}{3}\cot^3 x - \cot x - x + c$$

....

$$\boxed{I=\int \tan^3 x\,dx}$$

$$I=\int(\tan^3 x+\tan x-\tan x)dx=\int\left[\underbrace{\tan x}_{u}\,\underbrace{(1+\tan^2 x)}_{u'}-\tan x\right]dx=\frac{1}{2}\tan^2 x+\ln\left|\cos x\right|+c$$

....

با توجه به مثال های بالا می توان نوشت :

$$n=2k\ :\quad \boxed{\begin{aligned}&\int \tan^n x\,dx=\frac{(\tan x)^{n-1}}{n-1}-\frac{(\tan x)^{n-3}}{n-3}+\ldots+(-1)^k x+c\\&\int \cot^n x\,dx=-\frac{(\cot x)^{n-1}}{n-1}+\frac{(\cot x)^{n-3}}{n-3}+\ldots+(-1)^k\cot x+(-1)^k x+c\end{aligned}}$$

$$n=2k+1\ :\quad \boxed{\begin{aligned}&\int \tan^n x\,dx=\frac{(\tan x)^{n-1}}{n-1}-\frac{(\tan x)^{n-3}}{n-3}+\ldots+(-1)^k\ln\left|\sec x\right|+c\\&\int \cot^n x\,dx=-\frac{(\cot x)^{n-1}}{n-1}+\frac{(\cot x)^{n-3}}{n-3}-\ldots+(-1)^k\frac{\cot^2 x}{2}+(-1)^k\ln\left|\sin x\right|+c\end{aligned}}$$

مثلا :

$$\int \cot^4 x\,dx=-\frac{\cot^3 x}{3}+\cot x+x+c$$

$$\int \tan^8 x\,dx=\frac{\tan^7 x}{7}-\frac{\tan^5 x}{5}+\frac{\tan^3 x}{3}-\tan x+x+c$$

$$\int \cot^{10} x\,dx=-\frac{\cot^9 x}{9}+\frac{\cot^7 x}{7}-\frac{\cot^5 x}{5}+\frac{\cot^3 x}{3}-\cot x-x+c$$

$$\int \cot^5 x\,dx=-\frac{\cot^4 x}{4}+\frac{\cot^2 x}{2}+\ln\left|\sin x\right|+c$$

$$\int \cot^7 x\,dx=-\frac{\cot^6 x}{6}+\frac{\cot^4 x}{4}-\frac{\cot^2 x}{2}-\ln\left|\sin x\right|+c$$

....

۶- انتگرال $\sec^n x.\tan^m x$ و $\csc^n x.\cot^m x$

الف : در صورتی که n عدد صحیح ، زوج و مثبتی باشد .

$$I=\int \sec^n x.\tan^m x\,dx=\int(\sec x)^{n-2}.\sec^2 x.\tan^m x\,dx=\int(\sec^2 x)^{\frac{n-2}{2}}\sec^2 x.\tan^m x\,dx$$

$$=\int(1+\tan^2 x)^{\frac{n-2}{2}}\tan^m x.(1+\tan^2 x)dx\qquad \begin{array}{|l}u=\tan x\\ du=(1+\tan^2 x)dx\\\hline\end{array}\ \Rightarrow I=\int(1+u^2)^{\frac{n-1}{2}}u^m\,du=\ldots$$

همین روش را هم برای $\csc^n x.\cot^m x$ به کار می بریم .

....

ب : در صورتی که m و n اعدادی صحیح ، مثبت و فرد باشند .

$$I=\int \sec^n x.\tan^m x\,dx=\int (\sec x)^{n-1}.(\tan x)^{m-1}.\sec x.\tan x\,dx=\int (\sec x)^{n-1}.(\tan^2 x)^{\frac{m-1}{2}}.\sec x.\tan x\,dx$$

$$=\int (\sec x)^{n-1}.(\sec^2 x-1)^{\frac{m-1}{2}}.\sec x.\tan x\,dx \qquad \begin{array}{|l} u=\sec x \\ du=\sec x.\tan x\,dx \\ \hline \end{array} \Rightarrow I=\int u^{n-1}(u^2-1)^{\frac{m-1}{2}}du=\ldots$$

همین روش را هم برای $\csc^n x.\cot^m x$ به کار می بریم .

$$\boxed{I=\int \sec^4 x.\tan^6 x\,dx}$$

$$I=\int \sec^2 x.\sec^2 x.\tan^6 x\,dx=\int (1+\tan^2 x).(1+\tan^2 x).\tan^6 x\,dx=\int (\tan^6 x+\tan^8 x).(1+\tan^2 x)dx$$

$$\begin{array}{|l} u=\tan x \\ du=(1+\tan^2 x)dx \\ \hline \end{array} \Rightarrow I=\int (u^6+u^8)du=\frac{1}{7}\tan^7 x+\frac{1}{9}\tan^9 x+c$$

....

$$\boxed{I=\int \sec^3 x.\tan^5 x\,dx}$$

$$I=\int \sec^2 x.(\tan^2 x)^2.\sec x.\tan x\,dx=\int \sec^2 x.(\sec^2 x-1)^2.\sec x.\tan x\,dx \qquad \begin{array}{|l} u=\sec x \\ du=\sec x.\tan x\,dx \\ \hline \end{array}$$

$$\Rightarrow I=\int u^2.(u^2-1)^2\,du=\int (u^6-2u^4+u^2)du=\frac{1}{7}\sec^7 x-\frac{2}{5}\sec^5 x+\frac{1}{3}\sec^3 x+c$$

....

روش هفتم

انتگرال هایی که جواب آنها بر حسب توابع معکوس مثلثاتی است .

$$I=\int\frac{du}{a^2+u^2}$$

$$\left|\begin{array}{l} u=a\tan t\Rightarrow \tan t=\frac{u}{a}\Rightarrow t=Arc\tan\frac{u}{a} \\ du=a(1+\tan^2 t)dt \qquad , \qquad -\frac{\pi}{2}\langle t\langle\frac{\pi}{2} \end{array}\right.$$

$$I=\int\frac{a(1+\tan^2 t)}{a^2(1+\tan^2 t)}dt=\frac{1}{a}\int dt=\frac{1}{a}t+c=\frac{1}{a}Arc\tan\frac{u}{a}+c$$

$$\Rightarrow\int\frac{du}{a^2+u^2}=\frac{1}{a}Arc\tan\frac{u}{a}+c$$

....

$$I=\int\frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}$$

$$\left|\begin{array}{l} u=a\sin t\Rightarrow \sin t=\frac{u}{a}\Rightarrow t=Arc\sin\frac{u}{a} \\ du=a\cos t\,dt \qquad , \qquad -\frac{\pi}{2}\langle t\langle\frac{\pi}{2} \end{array}\right.$$

$$I=\int\frac{a\cos t}{\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}}dt=\int\frac{a\cos t}{a|\cos t|}dt$$

$$-\frac{\pi}{2}\langle t\langle\frac{\pi}{2}\Rightarrow\cos t\rangle 0\Rightarrow I=\int\frac{a\cos t}{a\cos t}dt=\int dt=t+c=Arc\sin\frac{u}{a}+c$$

$$\Rightarrow\int\frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}=Arc\sin\frac{u}{a}+c$$

....

$$\boxed{I=\int\frac{dx}{4x^2+25}dx}$$

$$I=\int\frac{dx}{5^2+(2x)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{2dx}{5^2+(2x)^2}=\frac{1}{2}.\frac{1}{5}Arc\tan\frac{2x}{5}+c=\frac{1}{10}Arc\tan\frac{2x}{5}+c$$

....

$$\boxed{I=\int\frac{dx}{x^2+x+1}}$$

$$I=\int\frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}Arc\tan\frac{2x+1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+c=\frac{2}{\sqrt{3}}Arc\tan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+c$$

$$\boxed{I=\int\frac{3x+1}{x^2+x+5}dx}$$

$$I=\int\frac{\frac{3}{2}(2x+1)-\frac{1}{2}}{x^2+x+5}dx=\frac{3}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+x+5}dx-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{19}{4}}=\frac{3}{2}\ln\left|x^2+x+5\right|-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{19}{4}}$$

$$=\frac{3}{2}\ln\left|x^2+x+5\right|-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{19}}Arc\tan\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{19}}{2}}\right)+c=\frac{3}{2}\ln\left|x^2+x+5\right|-\frac{1}{\sqrt{19}}Arc\tan\frac{2x+1}{\sqrt{19}}+c$$

....

$$\boxed{I=\int\frac{dx}{1+\sin^2 x}}$$

در جاهایی که انتگرال ، یک تابع کسری بر حسب توان های زوج سینوس و کسینوس است ، یک راه حل مناسب این است که صورت و مخرج را بر $\cos^2 x$ ، تقسیم کنیم :

$$I=\int\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}dx=\int\frac{(1+\tan^2 x)dx}{1+\tan^2 x+\tan^2 x}=\int\frac{(1+\tan^2 x)}{2\tan^2 x+1}dx \qquad \begin{array}{|l} u=\tan x \\ du=(1+\tan^2 x)dx \\ \hline \end{array}$$

$$\Rightarrow I=\int\frac{du}{2u^2+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{\sqrt{2}\,du}{(\sqrt{2}u)^2+1^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}Arc\tan\sqrt{2}u+c=\frac{\sqrt{2}}{2}Arc\tan(\sqrt{2}\tan x)+c$$

....

$$\boxed{I=\int\frac{dx}{\sqrt{-4x^2+8x+1}}}$$

در این گونه موارد تنها کاری که می کنیم این است که مخرج کسر را مرتب می کنیم :

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{5}{4}-(x-1)^2}}=\frac{1}{2}Arc\sin\frac{2(x-1)}{\sqrt{5}}+c$$

....

$$\boxed{I=\int\frac{dx}{\sqrt{2}+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}}$$

صورت و مخرج را در $\sqrt{2}-(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})$ ضرب می کنیم :

$$I=\int\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{2-(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})^2}dx=\int\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{2-(1+x+1-x+2\sqrt{1-x^2})}dx=\int\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{-4\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=-\frac{1}{4}\left[\int\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}-\sqrt{\frac{1+x}{1-x^2}}-\sqrt{\frac{1-x}{1-x^2}}\right)dx\right]=-\frac{\sqrt{2}}{4}\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\sqrt{1-x}}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\sqrt{1+x}}$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{4}\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{4}\int(1-x)^{-\frac{1}{2}}dx+\frac{1}{4}\int(1+x)^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{4}Arc\sin x+\frac{\frac{1}{4}}{\left(-\frac{1}{2}+1\right)(-1)}(1-x)^{-\frac{1}{2}+1}+\frac{\frac{1}{4}}{\left(-\frac{1}{2}+1\right)(1)}(1+x)^{-\frac{1}{2}+1}+c$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{4}Arc\sin x-\frac{1}{2}\sqrt{1-x}+\frac{1}{2}\sqrt{1+x}+c$$

روش هشتم

در این روش بر روی انتگرال های زیر کار می کنیم :

$$I=\int\frac{du}{u^2-a^2}$$

کسر $\frac{1}{u^2-a^2}$ را به حاصل جمع دو کسر تبدیل می کنیم :

$$\frac{1}{u^2-a^2}=\frac{1}{(u+a)(u-a)}\equiv\frac{A}{u+a}+\frac{B}{u-a}\Rightarrow A(u-a)+B(u+a)\equiv 1\Rightarrow(A+B)u+Ba-Aa\equiv 1$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A+B=0\\-Aa+Bb=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-\frac{1}{2a}\\B=\frac{1}{2a}\end{cases}$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{2a}\int\frac{du}{u-a}-\frac{1}{2a}\int\frac{du}{u+a}=\frac{1}{2a}\ln|u-a|-\frac{1}{2a}\ln|u+a|+c=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right|+c$$

$$\Rightarrow\int\frac{du}{u^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right|+c$$

....

$$I=\int\frac{du}{(u+a)(u+b)}$$

باز هم کسر $\frac{1}{(u+a)(u+b)}$ را تجزیه می کنیم :

$$\frac{1}{(u+a)(u+b)}\equiv\frac{A}{u+a}+\frac{B}{u+b}\Rightarrow A(u+b)+B(u+a)\equiv 1\Rightarrow(A+B)u+Ba+Ab\equiv 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ bA+aB=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\dfrac{-1}{a-b} \\ B=\dfrac{1}{a-b} \end{cases}$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{a-b}\int\frac{du}{u+b}-\frac{1}{a-b}\int\frac{du}{u+a}=\frac{1}{a-b}\ln|u+b|-\frac{1}{a-b}\ln|u+a|+c=\frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{u+b}{u+a}\right|+c$$

$$\Rightarrow \int\frac{du}{(u+a)(u+b)}=\frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{u+b}{u+a}\right|+c$$

....

$$\boxed{I=\int\frac{dx}{x^2-4x-5}}$$

$$\Rightarrow I=\int\frac{dx}{(x-2)^2-9}=\frac{1}{2\times3}\ln\left|\frac{(x-2)-3}{(x-2)+3}\right|+c=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-5}{x+1}\right|+c$$

....

$$\boxed{I=\int\frac{5x+2}{4x^2-8x-1}dx}$$

$$\Rightarrow I=\int\frac{\frac{5}{8}(8x-8)+7}{4x^2-8x-1}dx=\frac{5}{8}\int\frac{8x-8}{4x^2-8x-1}dx+7\int\frac{dx}{4x^2-8x-1}=\frac{5}{8}\ln|4x^2-8x-1|+\frac{7}{2}\int\frac{2dx}{4(x-1)^2-5}$$

$$=\frac{5}{8}\ln|4x^2-8x-1|+\frac{7}{2\times2\times\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2(x-1)-\sqrt{5}}{2(x-1)+\sqrt{5}}\right|+c$$

....

$$\boxed{I=\int\frac{dx}{x^2-x-6}}$$

$$I=\int\frac{dx}{(x-3)(x+2)}=-\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x+2}{x-3}\right|+c$$

....

روش نهم

در این قسمت بنا نداریم روش خاص دیگری را بگوییم ، بلکه می خواهیم با استفاده از اطلاعات قبل بررسی کنیم که انتگرال توابع از فرم $\frac{1}{ax^2+bx+c}$ و نیز $\frac{a'x+b'}{ax^2+bx+c}$ در حالت کلی چگونه حل می شوند .

الف) انتگرال $\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$ ، در صورتی که دلتای مخرج بزرگتر از صفر باشد ، یا به عبارتی مخرج دارای دو ریشه متمایز باشد .

در این حالت مخرج کسر را تجزیه می کنیم و سپس کل کسر را به صورت حاصل جمع دو کسر می نویسیم وسپس به محاسبه ادامه انتگرال می پردازیم .

$$\boxed{I=\int\frac{dx}{2x^2-5x+3}}$$

$$\frac{1}{2x^2-5x+3}=\frac{1}{(2x-3)(x-1)}\equiv\frac{A}{2x-3}+\frac{B}{x-1}\Rightarrow(A+2B)x-A-3B\equiv1$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A+2B=0\\-A-3B=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=2\\B=-1\end{cases}$$

$$\Rightarrow I=\int\frac{2dx}{2x-3}-\int\frac{dx}{x-1}=\ln|2x-3|-\ln|x-1|+c=\ln\left|\frac{2x-3}{x-1}\right|+c$$

....

ب) انتگرال $\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$ ، در صورتی که دلتای مخرج کوچکتر از صفر باشد و یا به عبارتی مخرج ریشه نداشته باشد .

وقتی ax^2+bx+c دارای ریشه نباشد ، آن را به صورت u^2+a^2 نوشته و با استفاده از روش های قبل به محاسبه انتگرال می پردازیم .

$$\boxed{I=\int\frac{dx}{x^2-3x-5}}$$

$$x^2-3x-5=(x-\frac{3}{2})^2+\frac{11}{4}$$

$$\Rightarrow I=\int\frac{dx}{(x-\frac{3}{2})^2+\frac{11}{4}}=\frac{2}{\sqrt{11}}Arc\tan\frac{x-\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{11}}{2}}+c$$

ج) انتگرال $\int \frac{dx}{a x^2 + b x + c}$ ، در صورتی که دلتای مخرج صفر باشد و یا به عبارتی مخرج فقط یک ریشه داشته باشد .

در این صورت $a x^2 + b x + c$ را به صورت $(a'x + b')^2$ در می آوریم و سپس داریم :

$$\int \frac{dx}{(a'x + b')^2} = -\frac{1}{(a'x + b')} + c$$

....

$$\boxed{I = \int \frac{dx}{16x^2 + 16x + 4}}$$

$$16x^2 + 16x + 4 = (4x + 2)^2$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{dx}{(4x + 2)^2} = -(4x + 2) + c$$

....

د) در انتگرال هایی که به شکل $\int \frac{a'x + b'}{a x^2 + b x + c} dx$ هستند ، انتگرال را به صورت زیر می نویسیم و سپس به محاسبه آن می پردازیم :

$$\int \frac{a'x + b'}{a x^2 + b x + c} dx = \int \frac{m(2ax + b)}{a x^2 + b x + c} dx + \int \frac{n}{a x^2 + b x + c}$$

که در آن m و n دو عدد هستند که باید تعیین شوند .

در واقع ما اینگونه انتگرال ها را به دو انتگرال تبدیل می کنیم ، که اولی با استفاده از روش $\int \frac{du}{u}$ حل می شود و دومی هم یکی از سه حالت قبل است .

$$\boxed{I = \int \frac{5x + 2}{x^2 + 6x + 11} dx}$$

$$I = \int \frac{\frac{5}{2}(2x + 6) - 13}{x^2 + 6x + 11} dx = \frac{5}{2} \int \frac{2x + 6}{x^2 + 6x + 11} dx - 13 \int \frac{dx}{x^2 + 6x + 11} = \frac{5}{2} \int \frac{2x + 6}{x^2 + 6x + 11} dx - 13 \int \frac{dx}{(x + 3)^2 + 2}$$

$$= \frac{5}{2} \ln(x^2 + 6x + 11) - \frac{13}{\sqrt{2}} Arc\tan \frac{x + 3}{\sqrt{2}} + c$$

....

روش دهم

در این روش به بررسی انتگرال هایی می پردازیم که به صورت یک تابع کسری بر حسب سینوس و کسینوس هستند .

* این روش یک روش مهم است و بسیاری از مسائل امتحانی از این قسمت مطرح می شوند .

در این روش با استفاده از فرمول های $\sin x = \dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$ و $\cos x = \dfrac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$ و نیز با استفاده از تغییر متغیر

$$\left| \begin{array}{l} u = \tan\dfrac{x}{2} \\ du = \dfrac{1}{2}(1+\tan^2\dfrac{x}{2})dx \end{array} \right.$$

به حل انتگرال می پردازیم .

به مثال هایی که برای این قسمت در نظر گرفته شده اند دقت کنید :

$$\boxed{I = \int \frac{dx}{\sin x + \cos x + 1}}$$

داریم : $\cos x = \dfrac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$ و $\sin x = \dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$

$$\Rightarrow I = \int \frac{dx}{\dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} + \dfrac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} + 1} = \int \frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{2\tan\frac{x}{2} + 1 - \tan^2\frac{x}{2} + 1 + \tan^2\frac{x}{2}}dx = \int \frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{2(1+\tan\frac{x}{2})}dx$$

$$\left| \begin{array}{l} u = \tan\dfrac{x}{2} \\ du = \dfrac{1}{2}(1+\tan^2\dfrac{x}{2})dx \end{array} \right. \Rightarrow I = \int \frac{du}{1+u} = \ln|1+u| + c = \ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right| + c$$

....

ریاضی عمومی ۱ – دانشگاه تهران

$$\boxed{I = \int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}dx}$$

$$I = \int \frac{2}{2+\cos x}dx - \int \frac{\sin x}{2+\cos x}dx = 2\underbrace{\int \frac{dx}{2+\cos x}}_{I_1} + \ln|2+\cos x| + c$$

امابرای محاسبه I_1 داریم: $I_1=\int\frac{dx}{2+\cos x}=\int\frac{dx}{2+\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}}=\int\frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{3+\tan^2\frac{x}{2}}dx$

$$\left|\begin{array}{l} u=\tan\frac{x}{2} \\ du=\frac{1}{2}(1+\tan^2\frac{x}{2})dx \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow I_1=2\int\frac{du}{3+u^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}Arc\tan\frac{u}{\sqrt{3}}+c=\frac{2}{\sqrt{3}}Arc\tan\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}+c$$

$$\Rightarrow I=\frac{4}{\sqrt{3}}Arc\tan\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}+\ln|2+\cos x|+c$$

....

$$\boxed{I=\int\sec x\,dx}$$

$$I=\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{dx}{\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}}=\int\frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}dx$$

$$\left|\begin{array}{l} u=\tan\frac{x}{2} \\ du=\frac{1}{2}(1+\tan^2\frac{x}{2})dx \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow I=2\int\frac{du}{1-u^2}=\ln\left|\frac{u+1}{u-1}\right|+c=\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}+1}{\tan\frac{x}{2}-1}\right|+c=\ln\left|\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})\right|+c$$

....

روش یازدهم

این روش یک روش مناسب و ابتکاری برای حل بعضی از توابع گویا بر حسب سینوس و کسینوس است .

در این روش ، ما برای حل انتگرال هایی که به فرم $\int\frac{a\sin x+b\cos x}{a'\sin x+b'\cos x}dx$ هستند ، صورت انتگرال ده را به شکل زیر می نویسیم:

صورت کسر $=M\times$ (مخرج کسر) $+\ N\times$ (مشتق مخرج کسر)

که M و N اعداد حقیقی ای هستند که باید پیدا شوند .

برای روشن شدن این مطلب به مثال زیر توجه کنید :

ریاضی عمومی ۱ – دانشگاه تهران

$$\boxed{I=\int\frac{3\sin x+2\cos x}{2\sin x+3\cos x}dx}$$

$$3\sin x+2\cos x\equiv M\times(2\sin x+3\cos x)+N\times(2\cos x-3\sin x)$$

$$\Rightarrow 3\sin x+2\cos x\equiv(2M-3N)\sin x+(3M+2N)\cos x$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2M-3N=3\\3M+2N=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}M=\dfrac{12}{13}\\N=-\dfrac{5}{13}\end{cases}$$

$$\Rightarrow I=\int\frac{\frac{12}{13}(2\sin x+3\cos x)-\frac{5}{13}(2\cos x-3\sin x)}{2\sin x+3\cos x}dx=\frac{12}{13}\int\frac{2\sin x+3\cos x}{2\sin x+3\cos x}dx-\frac{5}{13}\int\frac{2\cos x-3\sin x}{2\sin x+3\cos x}dx$$

$$=\frac{12}{13}\int dx-\frac{5}{13}\int\frac{2\cos x-3\sin x}{2\sin x+3\cos x}dx=\frac{12}{13}x-\frac{5}{13}\ln\left|2\sin x+3\cos x\right|+c$$

....

روش دوازدهم

و اما یک روش بسیار مهم به نام روش جزء به جزء .

ما با استفاده از این روش می توانیم بسیاری از انتگرال های دشوار را حل کنیم . این روش به صورت زیر است :

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du$$

اثبات :

$$[f(x).g(x)]'=f'(x).g(x)+f(x).g'(x)\Rightarrow\int[f(x).g(x)]'dx=\int f'(x).g(x)dx+\int f(x).g'(x)dx$$

$$\Rightarrow f(x).g(x)=\int g(x).f'(x)dx+\int f(x).g'(x)dx\Rightarrow\int g(x).f'(x)dx=f(x).g(x)-\int f(x).g'(x)dx$$

$$\boxed{\Rightarrow\int u\,dv=uv-\int v\,du}$$

این روش را در خیلی جاها به کار می بریم . مثلا :

در جا هایی که دو تابع (یک تابع جبری و یک تابع لگاریتمی ، یک تابع جبری و یک تابع مثلثاتی و ...) در هم ضرب شده باشند .

برای آشنایی بیشتر با این روش به مثال هایی که برای این بخش در نظر گرفته شده است توجه نمایید :

$$\boxed{I=\int x\cos 2x\,dx}$$

$$\begin{cases} x=u\Rightarrow du=dx \\ \cos 2x\,dx=dv\Rightarrow v=\frac{1}{2}\sin 2x \end{cases}$$

$$\Rightarrow I=\int x\cos 2x\,dx=\frac{x}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\int \sin 2x\,dx=\frac{x}{2}\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+c$$

....

$$\boxed{I=\int x\ln x\,dx}$$

$$\begin{cases} u=\ln x\Rightarrow du=\frac{dx}{x} \\ x\,dx=dv\Rightarrow v=\frac{1}{2}x^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow I=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\int x\,dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+c$$

....

$$\boxed{I=\int e^x\left[f(x)+f'(x)\right]dx}$$

انتگرال $\int e^x f(x)dx$ را در نظر بگیرید . با استفاده از روش جزء به جزء داریم :

$$\int e^x f(x)dx=\int \underbrace{f(x)}_{u}.\underbrace{e^x dx}_{dv}=f(x)e^x-\int e^x f'(x)dx$$

$$\Rightarrow \int e^x f(x)dx+\int e^x f'(x)dx=f(x)e^x\Rightarrow \int e^x\left[f(x)+f'(x)\right]dx=f(x)e^x+c$$

....

$$\boxed{I=\int Arc\sin x\,dx}$$

$$\begin{cases} u=Arc\sin x\Rightarrow du=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ dv=dx\Rightarrow v=x \end{cases}$$

$$\int Arc\sin x\,dx=xArc\sin x-\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=...=xArc\sin x+\sqrt{1-x^2}+c$$

حال شما سعی کنید انتگرال توابع معکوس مثلثاتی دیگر را محاسبه کنید .

$$\boxed{I=\int \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|dx}$$

$$\left|\begin{array}{l} u=\dfrac{1+x}{1-x}\Rightarrow du=\dfrac{2}{(1-x)^2}dx \\ dv=dx\Rightarrow v=x \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \int \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|dx=\frac{x+x^2}{1-x}-\underbrace{\int\frac{2x}{(1-x)^2}dx}_{I_1}$$

$$I_1=\int\frac{2x}{(1-x^2)}dx \quad \left|\begin{array}{l} t=1-x\Rightarrow x=1-t \\ dt=-dx\Rightarrow dx=-dt \end{array}\right. \Rightarrow I_1=\int\frac{-2(1-t)}{t^2}dt=\int -2t^{-2}dt+\int\frac{2dt}{t}$$

$$=\frac{-2}{-2+1}t^{-2+1}+2\ln|t|+c_1=\frac{2}{t}+2\ln|t|+c_1=\frac{2}{1-x}+2\ln|1-x|+c_1$$

$$\Rightarrow I=\frac{x+x^2}{1-x}-\frac{2}{1-x}-2\ln|1-x|+c=\frac{x^2+x-2}{1-x}-2\ln|1-x|+c=\frac{(x+2)(x-1)}{1-x}-2\ln|1-x|+c$$

$$\xrightarrow{x\neq 1} I=-x-2-2\ln|1-x|+c$$

....

نمونه سؤال امتحانی :

حاصل $A=\int e^{ax}\sin bx\,dx$ و $B=\int e^{ax}\cos bx\,dx$ را بیابید .

$$A=\int e^{ax}\sin bx\,dx \quad \left|\begin{array}{l} u=e^{ax}\Rightarrow du=ae^{ax}dx \\ dv=\sin bx\,dx\Rightarrow v=-\dfrac{1}{b}\cos bx \end{array}\right. \Rightarrow A=-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx+\frac{a}{b}\underbrace{\int e^{ax}\cos bx\,dx}_{B}$$

$$\Rightarrow A=-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx+\frac{a}{b}B\Rightarrow bA-aB=-e^{ax}\cos bx \qquad (1$$

$$B=\int e^{ax}\cos bx\,dx \quad \left|\begin{array}{l} u=e^{ax}\Rightarrow du=a\,e^{ax}dx \\ dv=\cos bx\,dx\Rightarrow v=\dfrac{1}{b}\sin bx \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow B=\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx-\frac{a}{b}\underbrace{\int e^{ax}\sin bx\,dx}_{A}$$

$$\begin{cases} bA-aB=-e^{ax}\cos bx \\ aA+bB=e^{ax}\sin bx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2A-ab\,B=-b\,e^{ax}\cos bx \\ a^2A+ab\,B=a\,e^{ax}\sin bx \end{cases} \Rightarrow (b^2+a^2)A=e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)$$

$$\Rightarrow A=\frac{e^{ax}}{b^2+a^2}(a\sin bx-b\cos bx)+c$$

حال با جایگذاری در یکی از رابطه های ۱ یا ۲ داریم :

$$\Rightarrow B=\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx-\frac{a}{b}A \Rightarrow bB=e^{ax}\sin bx-aA \Rightarrow aA+bB=e^{ax}\sin bx \qquad (2$$

$$B=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx+b\sin bx)+c$$

....

$$\boxed{I_n=\int \sin^n x\,dx \qquad , \quad n\geq 2}$$

$$\left| \begin{array}{l} u=\sin^{n-1}x \Rightarrow du=(n-1)\sin^{n-2}x.\cos x \\ dv=\sin x\,dx \Rightarrow v=-\cos x \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow I_n=\int \sin^n x\,dx=-\cos x\,\sin^{n-1}x+(n-1)\int (\sin x)^{n-2}\cos^2 x\,dx$$

$$\Rightarrow I_n=-\cos x\,\sin^{n-1}x+(n-1)\int (\sin x)^{n-2}(1-\sin^2 x)dx=-\cos x\,\sin^{n-1}x+(n-1)\underbrace{\int (\sin x)^{n-2}dx}_{I_{n-2}}-(n-1)\underbrace{\int (\sin x)^{n}dx}_{I_n}$$

$$\Rightarrow I_n=-\cos x\,(\sin x)^{n-1}+(n-1)I_{n-2}-nI_n+I_n \Rightarrow nI_n=-\cos x\,(\sin x)^{n-1}+(n-1)I_{n-2}$$

$$\Rightarrow I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}-\frac{1}{n}\cos x\,(\sin x)^{n-1}$$

....

حال شما سعی کنید فرمول های

$$I_n=\int \cos^n x\,dx=\frac{1}{n}\sin x\,(\cos x)^{n-1}+\frac{n-1}{n}I_{n-2}$$

$$I_n=\int \tan^n x\,dx=\frac{1}{n-1}(\tan x)^{n-1}-I_{n-2}$$

را اثبات کنید .

....

روش سیزدهم

برای محاسبه برخی انتگرال ها مجبوریم از تغییر متغیر های مثلثاتی استفاده کنیم . در این قسمت استفاده از تغییر متغیر های مثلثاتی را در حالات زیر بررسی می کنیم :

۱- حالت اول مربوط به انتگرال های شامل $\sqrt{x^2+a^2}$ است .

در این نوع انتگرال ها از تغییر متغیر $\left|\begin{array}{ll} x = a\tan u & -\frac{\pi}{2} \le u \le \frac{\pi}{2} \\ dx = a(1+\tan^2 u)du & \end{array}\right.$ استفاده می کنیم . با این کار $\sqrt{x^2+a^2}$ به $a\sec u$ تبدیل می شود :

$$\sqrt{x^2+a^2} = \sqrt{a^2+a^2\tan^2 u} = \sqrt{a^2(1+\tan^2 u)} = a\left|\sec u\right| = a\sec u$$

....

$$\boxed{I = \int \frac{dx}{\sqrt{25+x^2}}}$$

$$\left|\begin{array}{ll} x = 5\tan u & -\frac{\pi}{2} \le u \le \frac{\pi}{2} \\ dx = 5(1+\tan^2 u)du & \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{dx}{\sqrt{25+x^2}} = \int \frac{5(1+\tan^2 u)}{\sqrt{25(1+\tan^2 u)}}du = \int \frac{5\sec^2 u}{5\sec u}du = \int \sec u\, du = \ln\left|\sec u + \tan u\right| + c$$

$$= \ln\left|\sec(Arc\tan\frac{x}{5}) + \tan(Arc\tan\frac{x}{5})\right| + c = \ln\left|\sqrt{1+\tan^2(Arc\tan\frac{x}{5})} + \tan(Arc\tan\frac{x}{5})\right| + c$$

$$= \ln\left|\sqrt{1+(\frac{x}{5})^2} + \frac{x}{5}\right|$$

....

$$\boxed{I = \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2+1}}}$$

$$\left|\begin{array}{ll} x = \tan u & -\frac{\pi}{2} \le u \le \frac{\pi}{2} \\ dx = (1+\tan^2 u)du & \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int \frac{\tan^3 u\,.\sec^2 u}{\sqrt{1+\tan^2 u}}du = \int \tan^3 u \sec u\, du = \int (\sec^2 u - 1)\sec u\,.\tan u\, du = \frac{1}{3}\sec^3 u - \sec u + c$$

$$= \frac{1}{3}\sec^3(Arc\tan x) - \sec(Arc\tan x) = \frac{1}{3}\left(\sqrt{1+\tan^2(Arc\tan x)}\right)^3 - \sqrt{1+\tan^2(Arc\tan x)} + c$$

$$= \frac{1}{3}\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3 - \sqrt{1+x^2} + c$$

....

۲- حالت دوم مربوط به انتگرال های شامل $\sqrt{a^2-x^2}$ است .

در این نوع انتگرال ها از تغییر متغیر $\left|\begin{array}{l} x=a\sin u \quad -\frac{\pi}{2}\le u\le\frac{\pi}{2} \\ dx=a\cos u\,du \end{array}\right.$ (یا $\left|\begin{array}{l} x=a\cos u \quad -\frac{\pi}{2}\le u\le\frac{\pi}{2} \\ dx=-a\sin u\,du \end{array}\right.$)

استفاده می کنیم . با این کار $\sqrt{a^2-x^2}$ به $a\cos u$ (یا $a\sin u$) تبدیل می شود :

$$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 u}=\sqrt{a^2(1-\sin^2 u)}=a\left|\cos u\right|=a\cos u$$

....

$$\boxed{I=\int\frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}}}$$

$$\left|\begin{array}{l} x=\cos u \quad -\frac{\pi}{2}\le u\le\frac{\pi}{2} \\ dx=-\sin u\,du \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow I=\int\frac{-\cos^3 u\sin u}{\sqrt{1-\cos^2 u}}du=-\int(1-\sin^2 u)\cos u\,du=-\sin u+\frac{1}{3}\sin^3 u+c$$

$$=-\sin(Arc\cos x)+\frac{1}{3}\sin^3(Arc\cos x)+c=-\sqrt{1-\cos^2(Arc\cos x)}+\frac{1}{3}\left(\sqrt{1-\cos^2(Arc\cos x)}\right)^3+c$$

$$=-\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{3}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3+c$$

....

$$\boxed{I=\int\frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}}$$

$$\left|\begin{array}{l} x=2\sin u \quad -\frac{\pi}{2}\le u\le\frac{\pi}{2} \\ dx=2\cos u\,du \end{array}\right.$$

$$I=\int\frac{2\cos u\,du}{(2\sin u)^2\sqrt{4-4\sin^2 u}}=\int\frac{2\cos u\,du}{(4\sin^2 u)2\cos u}=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{\sin^2 u}=-\frac{1}{4}\cot u+c$$

$$=\frac{1}{4}\frac{\cos u}{\sin u}+c=\frac{1}{4}\frac{\cos(Arc\sin\frac{x}{2})}{\sin(Arc\sin\frac{x}{2})}+c=\frac{1}{4}\frac{\sqrt{1-\sin^2(Arc\sin\frac{x}{2})}}{\sin(Arc\sin\frac{x}{2})}+c=\frac{1}{4}\frac{\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}}{(\frac{x}{2})}+c=\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}+c$$

....

۳- حالت سوم مربوط به محاسبه انتگرال های شامل $\sqrt{x^2-a^2}$ است .

در این نوع انتگرال ها از تغییر متغیر $\left| \begin{array}{l} x = a\sec u \quad 0 \le u \le \frac{\pi}{2} \;\; or \;\; \pi \le u \le \frac{3\pi}{2} \\ dx = a\sec u .\tan u \, du \end{array} \right.$ استفاده می کنیم . با این کار

$\sqrt{x^2-a^2}$ به $a\tan u$ تبدیل می شود : $\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2(\sec^2 x - 1)} = a\left|\tan u\right| = a\tan u$

....

$$\boxed{I = \int \frac{\sqrt{x^2+25}}{x} dx}$$

$$\left| \begin{array}{l} x = 5\sec u \quad 0 \le u \le \frac{\pi}{2} \;\; or \;\; \pi \le u \le \frac{3\pi}{2} \\ dx = 5\sec u .\tan u \, du \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{\sqrt{25\sec^2 u - 25}}{5\sec u}(5\sec u \tan u) du = \int \frac{5\tan u}{5\sec u}(5\sec u \tan u) du = 5\int \tan^2 u \, du = 5\tan u - 5u + c$$

$$= 5\sqrt{\sec^2 u - 1} - 5u + c = 5\sqrt{\sec^2(Arc\sec\frac{x}{5}) - 1} - 5(Arc\sec\frac{x}{5}) + c = 5\sqrt{(\frac{x}{5})^2 - 1} - 5(Arc\sec\frac{x}{5}) + c$$

....

روش چهاردهم

یکی از روش های مؤثر در حل انتگرال ها ، روش تجزیه کسر است . از این روش برای انتگرال گیری از توابع گویا به فرم $\frac{f(x)}{g(x)}$ استفاده می شود ، که شامل حالات زیر است :

الف) اگر درجه صورت بزرگتر یا مساوی درجه مخرج باشد .

دراینگونه موارد همان طورکه قبلا توضیح داده شده بود، صورت را برمخرج تقسیم کرده وانتگرال را به شکل زیردرمی آوریم :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \text{خارج قسمت} + \frac{\text{باقیمانده}}{g(x)}$$

در این صورت به یک چند جمله ای و یک تابع گویای دیگر می رسیم که درجه صورت از مخرج کمتر است ، بنابراین به راحتی اینگونه انتگرال ها را می توان به یکی از حالات بعد تبدیل کرد .

ب) اگر مخرج کسر حاصل ضرب چندین عامل از نوع $(x-a)$ باشد .

در این حالت ما به ازای هر $x-a$ یک عبارت به شکل $\dfrac{A}{x-a}$ می گذاریم .

$$\boxed{I=\int\frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}}$$

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}\equiv\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x+3}$$

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}\equiv\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x+3}\Rightarrow\begin{cases}x=0\Rightarrow\dfrac{1}{6}\equiv A+\dfrac{B}{2}+\dfrac{C}{3}\\ x=1\Rightarrow\dfrac{1}{24}\equiv\dfrac{A}{2}+\dfrac{B}{3}+\dfrac{C}{4}\\ \text{هر دو طرف را در } x \text{ ضرب کرده و } \lim\limits_{x\to\infty} \text{ می گیریم}\Rightarrow 0\equiv A+B+C\end{cases}$$

$$\begin{cases}A=\dfrac{1}{2}\\ B=-1\\ C=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow I=\int\left(\frac{\frac{1}{2}}{x+1}-\frac{1}{x+2}+\frac{\frac{1}{2}}{x+3}\right)dx=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}-\int\frac{dx}{x+2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+3}$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{2}\ln|x+1|-\ln|x+2|+\frac{1}{2}\ln|x+3|+c$$

....

$$\boxed{I=\int\frac{dx}{x^2-x}}$$

$$\Rightarrow I=\int\frac{dx}{x(x-1)}$$

$$\frac{dx}{x(x-1)}\equiv\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}\Rightarrow Ax-A+Bx\equiv1\Rightarrow(A+B)x-A\equiv1\Rightarrow\begin{cases}A+B\equiv0\\ -A\equiv1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-1\\ B=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow I=\int\frac{dx}{x-1}-\int\frac{dx}{x}=\ln|x-1|-\ln|x|+c$$

....

ج) اگر مخرج کسر ما شامل عباراتی مانند $(x-a)^k$ باشد ، به ازای هر $(x-a)^k$ یک عبارت به شکل زیرمی گذاریم :

$$\frac{A_1}{(x-a)}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_k}{(x-a)^k}$$

$$\boxed{I=\int\frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x}dx}$$

$$\Rightarrow I=\int\frac{3x^2+8}{x(x+2)^2}dx$$

$$\frac{3x^2+8}{x(x+2)^2}\equiv\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}\Rightarrow 3x^2+8\equiv A(x+2)^2+B(x+2)+Cx\Rightarrow\ \ldots\ \Rightarrow\begin{cases}A=2\\B=1\\C=-10\end{cases}$$

$$\Rightarrow I=\int(\frac{2}{x}+\frac{1}{x+2}+\frac{10}{(x+2)^2})dx\Rightarrow I=2\int\frac{dx}{x}+\int\frac{dx}{x+2}-10\int\frac{dx}{(x+2)^2}=2\ln|x|+\ln|x+2|+\frac{10}{x+2}+c$$

....

$$\boxed{I=\int\frac{dx}{x^3+3x^2}}$$

$$I=\int\frac{dx}{x^2(x+3)}$$

$$\frac{1}{x^2(x+3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+3}\Rightarrow 1\equiv Ax(3+x)+B(x+3)+cx^2\Rightarrow\ldots\Rightarrow\begin{cases}A=-\frac{1}{9}\\B=\frac{1}{3}\\C=\frac{1}{9}\end{cases}$$

$$\Rightarrow I=\int(\frac{-\frac{1}{9}}{x}+\frac{\frac{1}{3}}{x^2}+\frac{\frac{1}{9}}{x+3})dx\Rightarrow I=-\frac{1}{9}\int\frac{dx}{x}+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2}+\frac{1}{9}\int\frac{dx}{x+3}=-\frac{1}{9}\ln|x|-\frac{1}{3x}+\frac{1}{9}\ln|x+3|+c$$

....

د) اگر مخرج کسر شامل عبارت درجه دومی به صورت ax^2+bx+c باشد ، که تجزیه نمی شود آنگاه به ازای هر ax^2+bx+c یک عبارت به شکل $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ قرار می دهیم .

$$\boxed{I=\int\frac{dx}{x^3-1}}$$

$$I=\int\frac{dx}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}\Rightarrow 1\equiv A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-1)\Rightarrow\ldots\Rightarrow\begin{cases}A=\frac{1}{3}\\ B=-\frac{1}{3}\\ C=-\frac{2}{3}\end{cases}$$

$$\Rightarrow I=\int\left(\frac{\frac{1}{3}}{x-1}+\frac{-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}}{x^2+x+1}\right)dx\Rightarrow I=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{3}\int\frac{x+2}{x^2+x+1}dx$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x^2+x+1}\right]$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{6}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln|x^2+x+1|-\frac{\sqrt{3}}{6}Arc\tan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+c$$

....

ه) اگر مخرج کسر شامل عبارتی مانند $(ax^2+bx+c)^k$ باشد ، به طوری که ax^2+bx+c تجزیه نشود ، آنگاه به ازای هر $(ax^2+bx+c)^k$ ، یک عبارت به صورت زیر در نظر می گیریم .

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\ldots+\frac{A_kx+B_k}{(ax^2+bx+c)^k}$$

$$\boxed{I=\int\frac{dx}{x^5+2x^3+x}}$$

$$I=\int\frac{dx}{x(x^2+1)^2}$$

$$\frac{1}{x(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}\Rightarrow\ldots\Rightarrow\begin{cases}A=1\\ B=-1\\ C=0\\ D=-1\\ E=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow I=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{-x}{x^2+1}+\frac{-x}{(x^2+1)^2}\right)dx=\int\frac{dx}{x}-\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}dx-\int\frac{x}{(x^2+1)^2}dx$$

$$=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x^2+1|-\int\frac{x}{(x^2+1)^2}dx+c$$

واما برای حل انتگرال $\int\frac{x}{(x^2+1)^2}dx$ به روش زیر عمل می کنیم :

$$\left|\begin{array}{l} x=\tan u \\ dx=(1+\tan^2 u)du \end{array}\right. \Rightarrow I=\int\frac{\tan x\,.\,\sec^2 x\,dx}{(1+\tan^2 x)^2}=\int\frac{\tan x}{\sec^2 x}dx$$

$$=\int\sin u\,.\cos u\,du=\frac{1}{2}\int\sin 2u\,du=-\frac{1}{4}\cos 2u+c=-\frac{1}{4}\cos(2Arc\tan x)$$

$$=-\frac{1}{4}(\cos^2(Arc\tan x)-\sin^2(Arc\tan x))$$

$$=-\frac{1}{4}\cos(2Arc\tan x)+c=-\frac{1}{4}(2\cos^2(Arc\tan x)-1)+c=-\frac{1}{4}\left(2\left(\frac{1}{1+\tan^2(Arc\tan x)}\right)-1\right)+c$$

$$=-\frac{1}{4}\left(2\left(\frac{1}{1+x^2}\right)-1\right)+c$$

$$\Rightarrow I=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x^2+1|+\frac{1}{4}\left(2\left(\frac{1}{1+x^2}\right)-1\right)+c$$

....

حال که با روش تجزیه عبارت های گویا آشنا شده اید به مثال های زیر توجه کنید :

$$\boxed{I=\int\sqrt{\tan x}\;dx}$$

$$\left|\begin{array}{l} u=\sqrt{\tan x}\Rightarrow u^2=\tan x \\ \Rightarrow 2u\,du=(1+\tan^2 x)dx\Rightarrow dx=\dfrac{2u\,du}{1+u^4} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow I=\int u.\frac{2u\,du}{1+u^4}=2\int\frac{u^2}{1+u^4}du$$

$$\frac{u^2}{1+u^4}=\frac{u^2}{(u^2+1)^2-2u^2}=\frac{u^2}{(u^2-\sqrt{2}u+1)(u^2+\sqrt{2}u+1)}\equiv\frac{Au+B}{u^2-\sqrt{2}u+1}+\frac{Cu+B}{u^2+\sqrt{2}u+1}$$

$$\begin{cases} u=0 \Rightarrow B+D\equiv 0 & (1 \\ u=1 \Rightarrow \dfrac{A+B}{2-\sqrt{2}}+\dfrac{C+D}{2+\sqrt{2}}\equiv\dfrac{1}{2} & (2 \\ u=-1 \Rightarrow \dfrac{B-A}{2+\sqrt{2}}+\dfrac{D-C}{2-\sqrt{2}}\equiv\dfrac{1}{2} & (3 \\ \text{هر دو طرف را در } u \text{ ضرب کرده و } \lim\limits_{u\to\infty} \text{ می گیریم} \Rightarrow A+C\equiv 0 & (4 \end{cases}$$

از ۱ و ۴ داریم که $B=-D$ و $C=-A$. با جایگذاری B و C در معادلات ۲ و ۳ داریم :

$$\begin{cases} \dfrac{-D-A}{2+\sqrt{2}}+\dfrac{D+A}{2-\sqrt{2}}\equiv\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{A-D}{2-\sqrt{2}}+\dfrac{-A+D}{2+\sqrt{2}}\equiv\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4D+2\sqrt{2}A\equiv 1 \\ -2\sqrt{2}\,D+2\sqrt{2}A\equiv 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\dfrac{\sqrt{2}}{4} \\ B=0 \\ C=-\dfrac{\sqrt{2}}{4} \\ D=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow I=2\int\left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}u}{u^2-\sqrt{2}u+1}-\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}u}{u^2+\sqrt{2}u+1}\right)du=\frac{\sqrt{2}}{4}\int\frac{2u}{u^2-\sqrt{2}u+1}du-\frac{\sqrt{2}}{4}\int\frac{2u}{u^2+\sqrt{2}u+1}du$$

$$\Rightarrow I=\frac{\sqrt{2}}{4}\int\frac{2u-\sqrt{2}}{u^2-\sqrt{2}u+1}du+\frac{1}{2}\int\frac{du}{u^2-\sqrt{2}u+1}-\frac{\sqrt{2}}{4}\int\frac{2u+\sqrt{2}}{u^2+\sqrt{2}u+1}du+\frac{1}{2}\int\frac{du}{u^2+\sqrt{2}u+1}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|u^2-\sqrt{2}u+1\right|+\frac{1}{2}\int\frac{du}{(u-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}-\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|u^2+\sqrt{2}u+1\right|+\frac{1}{2}\int\frac{du}{(u+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|u^2-\sqrt{2}u+1\right|+\frac{\sqrt{2}}{2}Arc\tan\left(\frac{u-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)-\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|u^2+\sqrt{2}u+1\right|+\frac{\sqrt{2}}{2}Arc\tan\left(\frac{u+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)+c$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|u^2-\sqrt{2}u+1\right|+\frac{\sqrt{2}}{2}Arc\tan(\sqrt{2}u-1)-\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|u^2+\sqrt{2}u+1\right|+\frac{\sqrt{2}}{2}Arc\tan(\sqrt{2}u+1)+c$$

....

$$\boxed{I=\int\frac{1}{x^6+1}dx}$$

$$\frac{1}{x^6+1}=\frac{1}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}$$

حال فرض کنید $x^2=u$ باشد $\Rightarrow \dfrac{1}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}=\dfrac{1}{(u+1)(u^2-u+1)}\equiv\dfrac{A}{u+1}+\dfrac{Bu+C}{u^2-u+1}$

$$\begin{cases} u=0\Rightarrow A+C=1 \\ u=1\Rightarrow \frac{1}{2}A+B+C=\frac{1}{2} \\ \text{هر دو طرف را در } u \text{ ضرب کرده و } \lim\limits_{u\to\infty} \text{ می گیریم} \Rightarrow A+B=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} A=\frac{1}{3} \\ B=-\frac{1}{3} \\ C=\frac{2}{3} \end{cases} \qquad \Rightarrow \frac{1}{x^6+1}=\frac{\frac{1}{3}}{x^2+1}+\frac{-\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}}{x^4-x^2+1}=\frac{1}{3}\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{3}\frac{x^2-2}{x^4-x^2+1}$$

و نیز داریم:

$$\frac{x^2-2}{x^4-x^2+1}=\frac{x^2-2}{\left[(x^2+1)^2-3x^2\right]}=\frac{x^2-2}{(x^2-\sqrt{3}x+1)(x^2+\sqrt{3}x+1)}\equiv\frac{Ax+B}{x^2-\sqrt{3}x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+\sqrt{3}x+1}$$

$$\Rightarrow\frac{x^2-2}{(x^2-\sqrt{3}x+1)(x^2+\sqrt{3}x+1)}\equiv\frac{(Ax+B)(x^2-\sqrt{3}x+1)+(Cx+D)(x^2+\sqrt{3}x+1)}{(x^2-\sqrt{3}x+1)(x^2+\sqrt{3}x+1)}$$

$$\Rightarrow(A+C)x^3+(\sqrt{3}A+B-\sqrt{3}C+D)x^2+(A+\sqrt{3}B+C-\sqrt{3}D)x+(B+D)\equiv x^2-2$$

$$\Rightarrow\begin{cases} A+C\equiv 0 \\ \sqrt{3}A+B-\sqrt{3}C+D\equiv 1 \\ A+\sqrt{3}B+C-\sqrt{3}D\equiv 0 \\ B+D\equiv 2 \end{cases} \quad \Rightarrow\begin{cases} A=\frac{\sqrt{3}}{2} \\ B=-1 \\ C=-\frac{\sqrt{3}}{2} \\ D=-1 \end{cases} \quad \Rightarrow\frac{1}{x^6+1}=\frac{1}{3}\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{3}\left[\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}x-1}{x^2-\sqrt{3}x+1}+\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}x-1}{x^2+\sqrt{3}x+1}\right]$$

$$\Rightarrow\int\frac{dx}{1+x^6}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{1+x^2}-\frac{1}{3}\int\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}x-1}{x^2-\sqrt{3}x+1}dx-\frac{1}{3}\int\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}x-1}{x^2+\sqrt{3}x+1}dx$$

$$=\frac{1}{3}Arc\tan x-\frac{\sqrt{3}}{12}\ln\left|x^2-\sqrt{3}x+1\right|+\frac{1}{12}\int\frac{dx}{(x-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{1}{2})^2}+\frac{\sqrt{3}}{12}\ln\left|x^2+\sqrt{3}x+1\right|+\frac{1}{12}\int\frac{dx}{(x+\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{1}{2})^2}+c_1$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{1+x^2}-\frac{\sqrt{3}}{12}\int\frac{2x-3}{x^2-\sqrt{3}x+1}+\frac{1}{12}\int\frac{dx}{x^2-\sqrt{3}x+1}+\frac{\sqrt{3}}{12}\int\frac{2x+3}{x^2+\sqrt{3}x+1}dx+\frac{1}{12}\int\frac{dx}{x^2+\sqrt{3}x+1}$$

$$=\frac{1}{3}Arc\tan x-\frac{\sqrt{3}}{12}\ln\left|x^2-\sqrt{3}x+1\right|+\frac{1}{6}Arc\tan(2x-\sqrt{3})+\frac{\sqrt{3}}{12}\ln\left|x^2+\sqrt{3}x+1\right|+\frac{1}{9}Arc\tan(2x+\sqrt{3})+c$$

روش پانزدهم

در این قسمت به بررسی انتگرال توابع اصم می پردازیم :

الف) در قسمت اول به بررسی انتگرال هایی می پردازیم که انتگرال ده تابعی گویا از x و توان های کسری x باشد .

در این حالت مضرب مشترک مخرج های توان های x را به دست آورده (مثلا این مقدار r شده) و سپس با تغییر متغیر $x = t^r$ به حل انتگرال می پردازیم .

$$\boxed{I = \int \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\,dx}$$

$$x = t^2 \Rightarrow dx = 2t\,dt$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{t+1}{t-1}.t\ dt = 2\int \frac{t^2+t}{t-1}dt = 2\int (t+2+\frac{2}{t-1})dt = t^2+4t+4\ln|t-1|+c$$

$$= x+4\sqrt{x}+4\ln\left|\sqrt{x}-1\right|+c$$

....

$$\boxed{I = \int \frac{dx}{4\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}}$$

توان های x ، $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3}$ هستند $\Leftarrow$ از تغییر متغیر $x = t^6$ استفاده می کنیم .

$$x = t^6 \Rightarrow dx = 6t^5\,dt \quad \Rightarrow I = \int \frac{6t^5}{4t^3+t^2}dt = 6\int \frac{t^3}{4t+1}dt = 6\int (\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{16}t+\frac{1}{64})dt - \frac{6}{256}\int \frac{4dt}{4t+1}$$

$$= \frac{6}{12}t^3-\frac{6}{32}t^2+\frac{6}{64}t-\frac{6}{256}\ln|4t+1|+c \Rightarrow I = \frac{1}{2}t^3-\frac{3}{16}t^2+\frac{3}{32}t-\frac{3}{128}\ln\left|4\sqrt[6]{x}+1\right|+c$$

....

$$\boxed{I = \int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}+1}}$$

$$x = t^4 \Rightarrow dx = 4t^3\,dt \quad \Rightarrow I = \int \frac{4t^3}{t+1}dt = 4\int (t^2-t+1)dt - 4\int \frac{dt}{t+1}$$

$$= \frac{4}{3}t^3-2t^2+4t-4\ln|t+1|+c = \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}-2\sqrt{x}+4\sqrt[4]{x}-4\ln\left|\sqrt[4]{x}+1\right|+c$$

ب) روشی که در این مرحله گفته خواهد شد ، انتگرال دیفرانسیل دو جمله ای نامیده می شود .

در این روش به بررسی انتگرال هایی از فرم $\int x^c (a+b\,x^d)^e\,dx$ می پردازیم .

- اگر e عددی صحیح باشد ، که مسئله به همان حالت الف تبدیل می شود . در این حالت از تغییر متغیر $x=t^r$ استفاده می کنیم ، که r ک.م.م مخرج کسر های c و d است .

- و اگر e عدد صحیحی نباشد ، پس کسری مانند $e=\frac{m}{n}$ که در این حالت :

۱- اگر $\frac{c+1}{d}$ عدد صحیحی بود ، می توان از تغییر متغیر $a+b\,x^d=z^n$ استفاده کرد . (که n مخرج کسر e است .)

۲- و اگر $\frac{c+1}{d}+e$ عددی صحیح بود ، می توان از تغییر متغیر $a\,x^{-d}+b=z^n$ استفاده می کنیم . (که n مخرج کسر e است .)

$$\boxed{I=\int\frac{dx}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}}$$

$$I=\int x^0(1+x^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}dx$$

بررسی می کنیم : $\frac{c+1}{d}=\frac{0+1}{\frac{1}{2}}=2\in z$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} 1+x^{\frac{1}{2}}=z^2\Rightarrow x^{\frac{1}{2}}=z^2-1\Rightarrow x=(z^2-1)^2 \\ \Rightarrow dx=4z\,(z^2-1)\,dz \end{array} \right. \qquad \Rightarrow I=\int\frac{4z\,(z^2-1)}{z}dz$$

$$=4\int(z^2-1)\,dz=\frac{4}{3}z^3-4z+c$$

....

$$\boxed{I=\int\frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt[4]{x})^3}}$$

$$I=\int x^{-\frac{1}{2}}(1+x^{\frac{1}{4}})^{-3}dx$$

$$\left| \begin{array}{l} x=t^4 \\ \Rightarrow dx=4t^3\,dt \end{array} \right. \qquad \Rightarrow I=\int\frac{4t^3}{t^2(t+1)^3}dt=4\int\frac{t}{(t+1)^3}dt$$

$$\frac{t}{(t+1)^3}\equiv\frac{A}{1+t}+\frac{B}{(1+t)^2}+\frac{C}{(1+t)^3}\Rightarrow\begin{cases}A=0\\B=1\\C=-1\end{cases}\qquad\Rightarrow I=4\int\left[\frac{1}{(1+t)^2}-\frac{1}{(1+t)^3}\right]dt$$

$$=-\frac{4}{t+1}+\frac{2}{(1+t)^2}+c=-\frac{4}{\sqrt[4]{x}+1}+\frac{2}{(1+\sqrt[4]{x})^2}+c$$

$$\boxed{I=\int\frac{dx}{x^{3}\,.\,\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}}}$$

$$I=\int x^{-3}(1+x^{-1})^{-\frac{1}{5}}\,dx$$

بررسی می کنیم : $\frac{c+1}{d}=\frac{-3+1}{-1}=2\in z$

$$\left|\begin{array}{l}1+x^{-1}=t^{5}\Rightarrow x=\frac{1}{1+t^{5}}\\ \Rightarrow dx=\frac{-5t^{4}}{(1+t^{5})^{2}}dt\end{array}\right. \qquad \Rightarrow I=\int\frac{-5t^{4}\,dt}{(t^{5}-1)^{2}.(\frac{1}{t^{5}-1})^{3}.t}=-5\int(t^{5}-1)t^{3}\,dt=-5\int(t^{8}-t^{3})dt$$

$$=-\frac{5}{9}t^{9}+\frac{5}{4}t^{4}+c=-\frac{5}{9}(1+\frac{1}{x}).\sqrt[5]{(1+\frac{1}{x})^{4}}+\frac{5}{4}\sqrt[5]{(1+\frac{1}{x})^{4}}+c$$

....

$$\boxed{I=\int\frac{x^{3}}{\sqrt{(2+x^{2})^{3}}}dx}$$

$$I=\int x^{3}(2+x^{2})^{-\frac{3}{2}}\,dx$$

بررسی می کنیم : $\frac{c+1}{d}=\frac{3+1}{2}=2\in z$

$$\left|\begin{array}{l}2+x^{2}=z^{2}\\ \Rightarrow x\,dx=z\,dz\end{array}\right. \Rightarrow I=\int\frac{(z^{2}-2).z\,dz}{z^{3}}dt=\int\frac{(z^{2}-2)\,dz}{z^{2}}=\int dz-\int\frac{2dz}{z^{2}}$$

$$=z+\frac{2}{z}+c=\sqrt{2+x^{2}}+\frac{2}{\sqrt{2+x^{2}}}+c$$

....

روش شانزدهم

انتگرال های رادیکالی دارای اهمیت خاصی می باشند . بعضی از این نوع انتگرال ها حل نشدنی هستند ، ولی برای تعداد دیگری ازاین انتگرال ها راه حل هایی داده شده است ، که استفاده ازاین راه حل ها ، به عبارت زیرانتگرال وابسته می شود .

یکی از مهمترین این روش ها تغییر متغیر اویلر است . این تغییر متغیر به فرم های زیر می باشد :

۱) اگر $a\rangle 1$ $\qquad \sqrt{ax^{2}+bx+c}=\sqrt{a}x\pm t$

۲) اگر $a\rangle 0 \ \ , \ c\rangle 0$ $\sqrt{ax^2+bx+c}=tx\pm\sqrt{c}$

۳) چنانچه زیر رادیکال تجزیه پذیر باشد : $\pm(x-\alpha)z$ یا $\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)}=\pm(x-\beta)z$

....

$$\boxed{I=\int\frac{dx}{(-x^2-4x+5)\sqrt{5-4x-x^2}}}$$

عبارت زیر رادیکال تجزیه پذیر است : $(-x^2-4x+5)=(x+5)(-x+1)$

$$\Rightarrow\sqrt{(5-4x-x^2)}=(x+5)z\Rightarrow(x+5)(-x+1)=(x+5)^2z^2\Rightarrow z=\sqrt{\frac{1-x}{x+5}}\quad,\quad x=\frac{-5z^2+1}{z^2+1}$$

$$\Rightarrow 5+x=\frac{6}{1+z^2}\ \ ,\ \ dx=\frac{-12z}{(1+z^2)^2}$$

$$\Rightarrow I=\int\frac{\frac{12z}{(1+z^2)^2}}{\frac{36z^2}{(1+z^2)^2}\times\frac{6z}{1+z^2}}dz=\int-(\frac{1+z^2}{18z^2})dz=\frac{1}{18}z^{-1}-\frac{1}{18}z+c$$

حال به جای z عبارت $z=\sqrt{\frac{1-x}{x+5}}$ را قرار دهید .

....

گاهی مجبوریم همراه با تغییر متغیر اویلر از روش های دیگر نیز بهره ببریم :

$$\boxed{I=\int\frac{dx}{2\sqrt{x^2-3x+4}\left(x-\sqrt{x^2-3x+4}\right)}}$$

با استفاده از تغییر متغیر اول اویلر داریم : $\sqrt{x^2-3x+4}=(1)x+t \qquad (1)$

$$\Rightarrow x-\sqrt{x^2-3x+4}=t\Rightarrow(\frac{2\sqrt{x^2-3x+4}-2x+3}{2\sqrt{x^2-3x+4}})dx=dt\xrightarrow{(1)}(\frac{2(x+t)-2x+3}{2\sqrt{x^2-3x+4}})dx=dt$$

$$\Rightarrow\frac{dx}{2\sqrt{x^2-3x+4}}=\frac{dt}{2t+3}$$

حال با جایگذاری در انتگرال داریم :

$$I=\int\frac{dt}{(2t+3)t}$$

در این قسمت با استفاده از روش تجزیه کسر به ادامه حل می پردازیم :

$$I=\int\frac{1}{3}(\frac{1}{t}-\frac{2}{2t+3})dt=\frac{1}{3}(Ln|t|-Ln|2t+3|)+c=\frac{1}{3}(Ln\left|x-\sqrt{x^2-3x+4}\right|-Ln\left|2x-2\sqrt{x^2-3x+4}+3\right|)+c$$

$$\boxed{I=\int\sqrt{e^{2x}+2e^{x}+4}\;dx}$$

ابتدا e^x را برابر m می گیریم :

$$m=e^x \Rightarrow \frac{dm}{m}=dx$$

$$\Rightarrow I=\int(\sqrt{m^2+2m+4})\frac{dm}{m}$$

حال با استفاده از تغییر متغیر دوم اویلر داریم :

$$\sqrt{m^2+2m+4}=t\,m+\sqrt{4}$$

$$\Rightarrow m^2+2m+4=t^2m^2+4+2t\,m \Rightarrow m^2(1-t^2)+m\,(2-2t)=0 \Rightarrow \begin{cases} m=0 \\ or\;\; m=\dfrac{2t-2}{1-t^2}=\dfrac{-2}{1+t} \Rightarrow dm=\dfrac{2}{(1+t)^2}dt \end{cases}$$

$$\Rightarrow I=\int\frac{t\,m+2}{m}dm=\int(t+\frac{2}{m})dm=\int\left(t-(1+t)\right)\frac{2}{(1+t)^2}dt=2(\frac{1}{1+t})+c$$

$$=\frac{2m}{\sqrt{m^2+2m+4}-2+m}+c=\frac{2e^x}{\sqrt{e^{2x}+2e^x+4}+e^x-2}+c$$

....

❋ انتگرال معین

هدف ما در این قسمت آشنایی با چگونگی توجیه انتگرال معین و اثبات قضایای مقدار میانگین ، بولتسانو و ... نیست ، بلکه تنها می خواهیم به محاسبه انتگرال معین بپردازیم .

ما برای محاسبه انتگرال معین به قضایای اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال نیازمندیم .

❋ قضیه اساسی اول حساب دیفرانسیل و انتگرال :

اگر تابع f روی فاصله بسته [a , b] پیوسته و x به این بازه تعلق داشته باشد و $\rho(x)=\int_a^x f(t)dt$ آنگاه : $\rho'(x)=f(x)$.

تعمیم قضیه بالا با همان مفروضات :
اگر $F(x)=\int_{v(x)}^{u(x)}f(t)dt$ آنگاه $F'(x)=u'(x).f(u)-v'(x).f(v)$

❋ قضیه اساسی دوم حساب دیفرانسیل و انتگرال :

اگر تابع F ، تابع اولیه تابع پیوسته f روی فاصله بسته [a , b] باشد ، در اینصورت داریم :

$$\int_b^a f(x)dx=F(b)-F(a)$$

قضیه اساسی دوم به ما کمک می کند تا از همه روشهایی که برای حل انتگرال نامعین یاد گرفته ایم ، کمک گرفته و انتگرال های معین را هم حل کنیم .

* تغییر متغیر در انتگرال معین

فرض می کنیم تابع $y = f(x)$ روی $[a, b]$ پیوسته ، یک به یک و دارای مشتق پیوسته باشد و همچنین فرض می کنیم $x = g(t)$ روی $[\alpha, \beta]$ پیوسته ، یک به یک و دارای مشتق پیوسته باشد و $g(\alpha) = a$ و $g(\beta) = b$.
حال اگر t در بازه $[\alpha, \beta]$ طوری تغییر کند که $x = g(t)$ از فاصله $[a, b]$ خارج نشود ، در اینصورت :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))\, g'(t)dt$$

....

$$\boxed{I = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4 - x^2}\, dx}$$

$$\begin{array}{|l} x = 2\sin t \\ dx = 2\cos t\, dt \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|l} x = \sqrt{3} \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{3} \\ x = -\sqrt{3} \Rightarrow t = -\dfrac{\pi}{3} \end{array} \Rightarrow I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{4 - 4\sin^2 t}\,(2\cos t)dt = 4\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (\cos t)(\cos t)dt$$

$$= 4\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 t\, dt = 4\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \left[t + \frac{1}{2}\sin 2t\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} = 2\left[(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}) - (-\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4})\right] = \frac{4\pi}{3} + \sqrt{3}$$

....

$$\boxed{I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 + \cos x}}$$

$$\cos x = \frac{1 - \tan^2(\frac{x}{2})}{1 + \tan^2(\frac{x}{2})} \;, \qquad \begin{array}{|l} \tan\dfrac{x}{2} = t \\ dx = \dfrac{2dt}{1 + t^2} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|l} x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1 \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 \frac{\frac{2dt}{1 + t^2}}{2 + \frac{1 - t^2}{1 + t^2}} = 2\int_0^1 \frac{dt}{3 + t^2} = 2 \times \frac{1}{\sqrt{3}}\left[Arc\tan\frac{t}{\sqrt{3}}\right]_0^1 = \frac{2}{\sqrt{3}}(Arc\tan\frac{\sqrt{3}}{3} - Arc\tan 0) = \frac{2}{\sqrt{3}}(\frac{\pi}{6}) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

ریاضی عمومی ۱ – دانشگاه تهران (با تغییر)

$$\boxed{I=\int_0^{2\pi}\frac{x^2}{(\cos x+x\sin x)^2}dx}$$

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{x}{\cos x}\times\frac{x\cos x}{(\cos x+x\sin x)^2}dx$$

حال برای حل این انتگرال از روش جزء به جزء استفاده می کنیم :

$$\left|\begin{array}{l} u=\dfrac{x}{\cos x}\Rightarrow du=\dfrac{\cos x+x\sin x}{\cos^2 x}\\ dv=\dfrac{x\cos x}{(\cos x+x\sin x)^2}\Rightarrow v=\dfrac{-1}{\cos x+x\sin x}\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow I=\frac{x}{\cos x}\times\frac{-1}{\cos x+x\sin x}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x+x\sin x}{\cos^2 x}\times\frac{-1}{\cos x+x\sin x}dx$$

$$=\left[\frac{-x}{\cos x(\cos x+x\sin x)}+\tan x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}$$

همانطور که می بینید در این گونه انتگرال ها ما تابع اولیه را با استفاده از روش هایی که یاد گرفته ایم محاسبه می کنیم و سپس با استفاده از قضیه اساسی دوم مقدار این انتگرال را محاسبه می کنیم .

....

خاصیت ۱) اگر f تابعی انتگرال پذیر و a عدد دلخواهی باشد ، آنگاه

$$\int_0^a f(x)dx=\int_0^a f(a-x)dx$$

اثبات :

$$\left|\begin{array}{l}u=a-x\\ du=-dx\end{array}\right.\ ,\ \left|\begin{array}{l}x=a\Rightarrow u=0\\ x=0\Rightarrow u=a\end{array}\right.\Rightarrow\int_0^a f(x)dx=\int_a^0 f(a-x)(-1)dx=\int_0^a f(a-x)dx$$

....

$$\boxed{I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x}{\sin^3 x+\cos^3 x}dx}$$

با اعمال تغییر متغیر گفته شده داریم :

$$I=\int_{\frac{\pi}{2}}^0\frac{\sin^3(\frac{\pi}{2}-t)}{\sin^3(\frac{\pi}{2}-t)+\cos^3(\frac{\pi}{2}-t)}(-dt)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 t}{\cos^3 t+\sin^3 t}dt\Rightarrow\begin{cases}I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x}{\sin^3 x+\cos^3 x}dx\\ I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 x}{\cos^3 x+\sin^3 x}dx\end{cases}$$

$$\Rightarrow 2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\Rightarrow 2I=\left[x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow I=\frac{\pi}{4}$$

$$\boxed{I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} Ln(\sin x)dx}$$

$$I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} Ln(\cos x)(-dx)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} Ln(\cos x)dx \Rightarrow \begin{cases} I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} Ln(\sin x)dx \\ I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} Ln(\cos x)dx \end{cases} \Rightarrow 2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[Ln(\sin x)+Ln(\cos x)\right]dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} Ln(\sin x.\cos x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} Ln(\frac{1}{2}\sin 2x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[Ln\frac{1}{2}+Ln(\sin 2x)\right]dx=Ln\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}} Ln(\sin 2x)dx$$

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}} Ln(\sin 2x)dx$$

$$\left| \begin{array}{l} 2x=t\Rightarrow x=\frac{1}{2}t \\ dx=\frac{1}{2}dt \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x=0\Rightarrow t=0 \\ x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=\pi \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow I_1=\int_0^{\pi} Ln(\sin t)(\frac{1}{2}dt)=\frac{1}{2}\int_0^{\pi} Ln(\sin t)dt=\frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} Ln(\sin t)dt+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} Ln(\sin t)dt\right)$$

$$\left| \begin{array}{l} t=\frac{\pi}{2}+u \\ dt=du \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} t=\frac{\pi}{2}\Rightarrow u=0 \\ t=\pi\Rightarrow u=\frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow I_1=\frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} Ln(\sin t)dt+\int_0^{\frac{\pi}{2}} Ln(\cos t)dt\right)=\frac{1}{2}\left(I+I\right)=I$$

$$\Rightarrow 2I=Ln\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx+I\Rightarrow I=Ln\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=Ln\frac{1}{2}\left[x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}Ln\frac{1}{2}=-\frac{\pi}{2}Ln 2$$

....

خاصیت ۲) داریم : $\int_{-a}^{a} f(x)dx=\int_0^{a}\left(f(x)+f(-x)\right)dx$

اثبات :

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=\int_{-a}^{0} f(x)dx+\int_0^{a} f(x)dx$$

اما با اعمال تغییر متغیر $\left| \begin{array}{l} x=-a\Rightarrow t=a \\ x=0\Rightarrow t=0 \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x=-t \\ dx=-dt \end{array} \right.$ داریم :

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx=\int_a^{0} f(-t)(-dt)=-\int_a^{0} f(-t)dt=\int_0^{a} f(-t)dt=\int_0^{a} f(-x)dx$$

$$\Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)dx=\int_0^{a} f(-x)dx+\int_0^{a} f(x)dx=\int_0^{a}\left(f(-x)+f(x)\right)dx$$

- حال از این خاصیت می توان دو نتیجه مهم گرفت :

نتیجه ۱ : اگر f تابعی فرد باشد آنگاه :

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a}\big(f(-x)+f(x)\big)dx = \int_{0}^{a}\big(-f(x)+f(x)\big)dx = 0$$

نتیجه ۲ : اگر f تابعی زوج باشد آنگاه :

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a}\big(f(-x)+f(x)\big)dx = \int_{0}^{a}\big(f(x)+f(x)\big)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

....

$$\boxed{I = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - Arc\tan x}{1+\sin^2 x}dx}$$

$$I = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx - \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{Arc\tan x}{1+\sin^2 x}dx$$

تابع اول زوج و دومی فرد است . بنابراین داریم :

$$I = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx + 0$$

حال با تغییر متغیر $\left| \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1 \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \end{array} \right.$ $\Rightarrow$ $\left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x\, dx \end{array} \right.$ داریم :

$$\Rightarrow I = \int_{0}^{1} \frac{dt}{1+t^2} = \left[Arc\tan t\right]_0^1 = \left[Arc\tan 1 - Arc\tan 0\right] = \frac{\pi}{4}$$

....

خاصیت ۳) داریم :

$$\int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{\frac{1}{2}a} f(x)dx + \int_{0}^{\frac{1}{2}a} f(a-x)dx$$

اثبات :

$$\int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{\frac{1}{2}a} f(x)dx + \int_{\frac{1}{2}a}^{a} f(x)dx$$

حال برای حل $\int_{\frac{1}{2}a}^{a} f(x)dx$ در نظر می گیریم :

$\left| \begin{array}{l} x = a - t \\ dx = -dt \end{array} \right.$ $\Rightarrow$ $\left| \begin{array}{l} x = \frac{1}{2}a \Rightarrow t = \frac{1}{2}a \\ x = a \Rightarrow t = 0 \end{array} \right.$

$$\Rightarrow \int_{\frac{1}{2}a}^{a} f(x)dx = \int_{\frac{1}{2}a}^{0} f(a-t)(-dt) = -\int_{\frac{1}{2}a}^{0} f(a-t)dt = \int_{0}^{\frac{1}{2}a} f(a-t)dt = \int_{0}^{\frac{1}{2}a} f(a-x)dx$$

$$\Rightarrow I = \int_{0}^{\frac{1}{2}a} f(x)dx + \int_{0}^{\frac{1}{2}a} f(a-x)dx$$

از این خاصیت هم میتوان به یک نتیجه جالب دست یافت :

نتیجه : اگر $f(a-x)=f(x)$ ، آنگاه :

$$\int_0^a f(x)dx=\int_0^{\frac{1}{2}a} f(x)dx+\int_0^{\frac{1}{2}a} f(a-x)dx=\int_0^{\frac{1}{2}a} f(x)dx-\int_0^{\frac{1}{2}a} f(x)dx=0$$

....

$$\boxed{I=\int_0^{\pi}\sin^7 x\,.\cos^5 x\,dx}$$

$$\sin^7(\pi-x).\cos^5(\pi-x)=-\sin^7 x\,.\cos^5 x$$
$$\Rightarrow\int_0^a \sin^7 x\,.\cos^5 x\,dx=0$$

به طور کلی اگر m و n اعدادی فرد باشند ، داریم :

$$\int_0^{\pi}\sin^m x\,.\cos^n x\,dx=0$$

....

خاصیت ۴) اگر $f(x)=f(a+x)$ آنگاه :

$$\int_0^{na} f(x)dx=n\int_0^a f(x)dx$$

برای اثبات این قضیه می توانید از استقراء استفاده کنید .

$$\boxed{I=\int_0^{20\pi}\sin x\,dx}$$

$$I=\int_0^{10\times2\pi}\sin x\,dx=10\int_0^{2\pi}\sin x\,dx=10\big[-\cos x\big]_0^{2\pi}=10\times0=0$$

....

خاصیت ۵) داریم :

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx$$

اثبات :

$$\left|\begin{array}{l} x=a+b-t \\ dx=-dt \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} x=b\Rightarrow t=a \\ x=a\Rightarrow t=b \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow\int_a^b f(x)dx=\int_b^a f(a+b-t)(-dt)=-\int_b^a f(a+b-t)dt=\int_a^b f(a+b-t)dt=\int_a^b f(a+b-x)dx$$

....

حال شما سعی کنید ثابت کنید که اگر f تابعی متناوب با دوره تناوب T باشد آنگاه :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a+nT}^{b+nT} f(x)dx$$

*** انتگرال معین توابع جزء صحیح :**

برای حل انتگرال توابعی که شامل عبارت [f (x)] می باشند ، باید حدود انتگرال را به علت ناپیوستگی هایی که تابع احتمالا در نقاطی که درون براکت را یک عدد صحیح می کنند دارد ، به چند بخش تقسیم کنیم .

$$\boxed{I = \int_0^4 (x-1)\left[\frac{x}{2}\right]dx}$$

$$0 \le x \le 4 \Rightarrow 0 \le \frac{x}{2} \le 2 \Rightarrow \begin{cases} if \quad 0 \le \frac{x}{2} \langle 1 \Rightarrow \left[\frac{x}{2}\right] = 0 \ , \ 0 \le x \langle 2 \\ if \quad 1 \le \frac{x}{2} \langle 2 \Rightarrow \left[\frac{x}{2}\right] = 1 \ , \ 2 \le x \langle 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \int_0^2 (x-1)(0)dx + \int_2^4 (x-1)(1)dx = 0 + \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_2^4 = 4$$

....

$$\boxed{I = \int_0^{2\pi} [\sin x \cos x]dx}$$

$$I = \int_0^{2\pi} [\sin x \cos x]dx = \int_0^{2\pi} \left[\frac{\sin 2x}{2}\right]dx$$

دوره تناوب تابع $f(x) = \frac{\sin 2x}{2}$ برابر $T = \pi$ می باشد ، لذا انتگرال را در بازه $[0 \ , \ \pi]$ حساب کرده و دو برابر می کنیم :

$$\begin{cases} if \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \ 0 \le 2x \le \pi \Rightarrow 0 \le \sin 2x \le 1 \Rightarrow 0 \le \frac{\sin 2x}{2} \le \frac{1}{2} \Rightarrow \left[\frac{\sin 2x}{2}\right] = 0 \\ if \quad \frac{\pi}{2} \le x \le \pi \Rightarrow \ \pi \le 2x \le 2\pi \Rightarrow -1 \le \sin 2x \le 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} \le \frac{\sin 2x}{2} \le 0 \Rightarrow \left[\frac{\sin 2x}{2}\right] = -1 \end{cases}$$

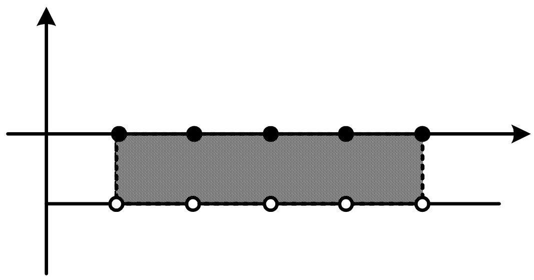
$$\Rightarrow I = \int_0^{2\pi} \left[\frac{\sin 2x}{2}\right]dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (0)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{1} (-1)dx = -x \ \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -\frac{\pi}{2}$$

پس انتگرال این تابع در بازه $[0 \ , \ 2\pi]$ ، دو برابر انتگرال در بازه $[0 \ , \ \pi]$ می باشد . لذا داریم :

$$I = \int_0^{2\pi} \left[\frac{\sin 2x}{2}\right] dx = 2(-\frac{\pi}{2}) = -\pi$$

نکته : برای محاسبه بعضی توابع جزء صحیح چاره ای جز رسم شکل نداریم :

$$\boxed{I=\int_1^5([x]+[-x])dx}$$



می دانیم :

$$[x]+[-x]=\begin{cases}0 & x\in z\\ -1 & x\notin z\end{cases}$$

پس نمودار این تابع به صورت مقابل است .

که انتگرال و یا مساحت قسمت هاشور خورده عبارتست از :

$$I=\int_1^5([x]+[-x])dx=-(5-1)\times 1=-4$$

....

⁎ انتگرال معین توابع قدر مطلقی :

اگر درون یک انتگرال ، عبارتی به صورت $|f(x)|$ باشد ، باید $f(x)$ را تعیین علامت کرده و با توجه به حدود انتگرال آن را به چند بخش تقسیم کنیم .

$$\boxed{I=\int_{-2}^{1}\frac{|x^2-3x|}{x}dx}$$

درون قدر مطلق را تعیین علامت می کنیم :

$$p=x^2-3x=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ x=3\end{cases}$$

x	$-\infty$	0		3	$+\infty$
p	+		−		+

با توجه به جدول فوق عبارت درون قدر مطلق در بازه $(-2\,,\,0)$ مثبت و در بازه $(0\,,\,1)$ منفی است :

$$\Rightarrow I=\int_{-2}^{0}\frac{x(x-3)}{x}dx+\int_0^1\frac{-x(x-3)}{x}dx=\left(\frac{x^2}{2}-3x\right)_{-2}^{0}+\left(\frac{x^2}{2}-3x\right)_0^1=-8+\frac{5}{2}=-\frac{11}{2}$$

....

*** محاسبه انتگرال معین توابع رادیکالی با استفاده از مساحت دایره :**

انتگرال بعضی از توابع رادیکالی که به فرم $\int_c^d \sqrt{a^2-u^2}\,du$ هستند را با استفاده از مساحت دایره می توان حساب کرد . دقت کنید :

$$\boxed{I=\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx}$$

اگر عبارت درون انتگرال را برابر با y بگیریم ، داریم :

$y^2=9-x^2 \Rightarrow x^2+y^2=9$

واین معادله دایره ای است به مرکز مبدا مختصات و شعاع ۳ . ولی $y=\sqrt{9-x^2}$ معادله نیم دایره بالای محور x ها می باشد ، ولی با توجه به حدود انتگرال یعنی $0\le x\le 3$ ربع مساحت دایره مد نظر است .

$$S=\frac{1}{4}\,(\text{مساحت دایره})=\frac{1}{4}\pi(3)^2=\frac{9\pi}{4}\Rightarrow I=\int_0^3\sqrt{9-x^2}\,dx=\frac{9\pi}{4}$$

....

$$\boxed{I=\int_{-1}^3 \sqrt{3-x^2+2x}\,dx}$$

عبارت درون ناتگرال را برابر y می گیریم ، لذا داریم :

$y^2=3-x^2+2x \Rightarrow y^2=4-(x^2-2x+1)\Rightarrow y^2=4-(x-1)^2\Rightarrow (x-1)^2+y^2=4$

و این معادله معادله دایره ای است ، به مرکز $A\ (1\ ,\ 0)$ و شعاع ۲ .

چون انتگرال در بازه $[3\ ,\ 1]$ می باشد ، پس حاصل انتگرال مورد نظر نیم دایره بالای محور x است .

$$\Rightarrow I=\frac{1}{2}\,(\text{مساحت دایره})=\frac{1}{2}\pi(2)^2=2\pi$$

ضمیمه ۱

کاربرد تبدیل لاپلاس ، تابع β و تابع γ در محاسبه انتگرال

تبدیل لاپلاس :

یکی از ابزارهای بسیار قدرتمند در حل معادلات دیفرانسیل ، تبدیل لاپلاس می باشد ، که می توان از آن برای حل بعضی از انتگرال ها نیز استفاده کرد . قبل از بررسی این توانایی تبدیل لاپلاس ، به خود تبدیل لاپلاس و خواص آن می پردازیم .

* تعریف تبدیل لاپلاس :

فرض کنید تابع $f(t)$ در بازه $(0\ ,\ +\infty)$ تعریف شده باشد ، تبدیل لاپلاس این تابع را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$F(s)=L\left[f(t)\right]=\int_0^\infty f(t).e^{-st}\,dt$$

که در اینجا s یک متغیر حقیقی است .

در واقع تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ وقتی موجود است که انتگرال فوق همگرا گردد .

* معکوس تبدیل لاپلاس $F(s)$ را $f(t)$ نامیده و به صورت زیر نمایش می دهند :

$$f(t)=L^{-1}\left[F(s)\right]$$

نکته : تبدیل لاپلاس و نیز معکوس تبدیل لاپلاس ، هر دو به صورت خطی عمل می کنند یعنی داریم :

$$L\left[k_1f_1(t)\pm k_2f_2(t)\right]=k_1L\left[f_1(t)\right]\pm k_2L\left[f_2(t)\right]$$

$$L^{-1}\left[k_1F_1(s)\pm k_2F_2(s)\right]=k_1L^{-1}\left[F_1(s)\right]\pm k_2L^{-1}\left[F_2(s)\right]$$

حال به چگونگی به دست آوردن تبدیل لاپلاس چند تابع دقت کنید :

۱- اگر $f(t)=1$ و نیز $s\rangle 0$:

$$F(s)=\int_0^\infty f(t).e^{-st}dt=\int_0^\infty e^{-st}dt=\left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_0^\infty=\frac{1}{s}\ \Rightarrow\ L\left[1\right]=\frac{1}{s}$$

۲- اگر $f(t)=e^{at}$ و نیز $s\rangle a$:

$$F(s)=\int_0^\infty f(t).e^{-st}dt=\int_0^\infty e^{at}.e^{-st}dt=\int_0^\infty e^{(a-s)t}dt=\int_0^\infty e^{-(s-a)t}dt=\left.\frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)}\right|_0^\infty=\frac{1}{s-a}\Rightarrow L\left[e^{at}\right]=\frac{1}{s-a}$$

۳- حال تبدیل لاپلاس تابع $f(t)=\sin t$ را به دو روش محاسبه می کنیم :

- روش اول با استفاده از قاعده جزء به جزء :

$$I=\int e^{-st}\sin t\,dt=-e^{-st}\cos t-s\int e^{-st}\cos t\,dt=-e^{-st}\cos t-s\left[e^{-st}\sin t+s\int e^{-st}\sin t\,dt\right]$$

$$\Rightarrow I=-e^{-st}\cos t-s\,e^{-st}\sin t-s^2 I\Rightarrow(s^2+1)I=-e^{-st}\cos t-s\,e^{-st}\sin t\Rightarrow I=\frac{1}{s^2+1}(e^{-st}\cos t-s\,e^{-st}\sin t)$$

$$L\left[\sin t\right]=\int_0^\infty e^{-st}\sin t\,dt=\frac{1}{s^2+1}(e^{-st}\cos t-s\,e^{-st}\sin t)\Big|_0^\infty=\frac{1}{s^2+1}$$

- روش دوم با استفاده از فرمول اویلر

$$\begin{cases}e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta\\ e^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sin\theta=\dfrac{1}{2i}(e^{i\theta}-e^{-i\theta})\\ \cos\theta=\dfrac{1}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta})\end{cases}$$

$$L\left[\sin t\right]=L\left[\frac{1}{2i}(e^{i\theta}-e^{-i\theta})\right]=\frac{1}{2i}\left(L\left[e^{i\theta}\right]-L\left[e^{-i\theta}\right]\right)$$

اما در قسمت قبل به دست آوردیم که ، $L\left[e^{at}\right]=\dfrac{1}{s-a}$ در نتیجه داریم :

$$L\left[\sin t\right]=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-i}-\frac{1}{s+i}\right)=\frac{1}{2i}\left(\frac{(s+i)-(s-i)}{s^2+1}\right)=\frac{1}{2i}\left(\frac{2i}{s^2+1}\right)=\frac{1}{s^2+1}$$

* در جدول زیر تبدیل لاپلاس و معکوس تبدیل لاپلاس توابع مهم نوشته شده است :

$f(t)$	$L[f(t)]$	$F(s)$	$L^{-1}[F(s)]$
$t^\alpha\ ,\ (\alpha\rangle-1)$	$\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$ 1	$\dfrac{1}{s^{\alpha+1}}$	$\dfrac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$
t^n	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$	t^n
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$	$\dfrac{1}{s-a}$	e^{at}
$\cos at$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}$	$\cos at$
$\sin at$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}$	$\sin at$
$\cosh at$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh at$
$\sinh at$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}$	$\sinh at$

مثال : تبدیل لاپلاس توابع زیر را محاسبه کنید .

الف) $t^3 \to L\left[t^3\right]=\dfrac{3!}{s^4}=\dfrac{6}{s^4}$

ب) $\sinh 2t \to L\left[\sinh 2t\right]=\dfrac{2}{s^2-4}$

ج) $2\sinh 3t-4 \to L\left[2\sinh 3t-4\right]=2L\left[\sinh 3t\right]-4L\left[1\right]=\dfrac{6}{s^2+9}-4t$

د) $\cosh t-4\sqrt{t^3} \to L\left[\cosh t-4t^{\frac{3}{2}}\right]=L\left[\cosh t\right]-4L\left[t^{\frac{3}{2}}\right]=\dfrac{s}{s^2-1}-\dfrac{4\Gamma(\frac{5}{2})}{s^{\frac{5}{2}}}$

مثال : معکوس تبدیل لاپلاس توابع زیر را به دست آورید .

الف) $\dfrac{1}{s^2+4} \to L^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2+4}\right]=\dfrac{1}{2}L^{-1}\left[\dfrac{2}{s^2+2^2}\right]=\dfrac{1}{2}\sin 2t$

ب) $\dfrac{s+5}{s^2+4} \to L^{-1}\left[\dfrac{s+5}{s^2+4}\right]=L^{-1}\left[\dfrac{s}{s^2+4}\right]+5L^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2+4}\right]=\cos 2t+\dfrac{5}{2}\sin 2t$

ج) $\dfrac{s+4}{s^2+s} \to L^{-1}\left[\dfrac{s+4}{s^2+s}\right]=L^{-1}\left[\dfrac{s+4}{s\,(s+1)}\right]=L^{-1}\left[\dfrac{A}{s}+\dfrac{B}{s+1}\right]=L^{-1}\left[\dfrac{4}{s}+\dfrac{-3}{s+1}\right]$

$=4L^{-1}\left[\dfrac{1}{s}\right]-3L^{-1}\left[\dfrac{1}{s+1}\right]=4-3e^{-t}$

....

* حال به چند نکته توجه کنید :

$$1)\,if\ \ L\left[f\ (t)\right]=F(s)\Rightarrow L\left[e^{at}f\ (t)\right]=F(s-a)$$

مثال :
$$\begin{cases} L\left[\sin 3t\right]=\dfrac{3}{s^2+9}\Rightarrow L\left[e^{2t}\sin 3t\right]=\dfrac{3}{(s-2)^2+9} \\ L^{-1}\left[\dfrac{s+1}{s^2+2s+2}\right]=L^{-1}\left[\dfrac{s+1}{(s+1)^2+1}\right]=e^{-t}L^{-1}\left[\dfrac{s}{s^2+1}\right]=e^{-t}\cos t \end{cases}$$

....

$$2)\,if\ \ L\left[f\ (t)\right]=F(s)\Rightarrow L\left[t^n f\ (t)\right]=(-1)^n F^{(n)}(s)$$

$\Rightarrow$ می توان گفت :
$$\begin{cases} L^{-1}\left[-F'(s)\right]=t\,f\ (t)=t\,L^{-1}\left[F(s)\right] \\ L^{-1}\left[F(s)\right]=\dfrac{-1}{t}L^{-1}\left[F'(s)\right] \end{cases}$$

این نکته بیشتر در جایی به کارمی رودکه احتمالاً تبدیل معکوس مشتقات آنها ساده ترمحاسبه گردد . مثل توابع لگاریتمی ، معکوس مثلثاتی و ... .

مثال :

$$* \; L\left[t\,e^{2t}\sin t\right]=?$$

$$L\left[t\sin t\right]=-\left(\frac{1}{s^2+1}\right)'=-\frac{(-2s)}{(s^2+1)^2}=\frac{2s}{(s^2+1)^2}\Rightarrow L\left[e^{2t}t\sin t\right]=\frac{2(s-2)}{((s-2)^2+1)^2}$$

$$* \; L^{-1}\left[Ln\frac{s-1}{s+1}\right]=?$$

$$L^{-1}\left[Ln\frac{s-1}{s+1}\right]=-\frac{1}{t}L^{-1}\left[\left(Ln\frac{s-1}{s+1}\right)'\right]=-\frac{1}{t}L^{-1}\left[(Ln\,s-1)'-(Ln\,s+1)'\right]=-\frac{1}{t}L^{-1}\left[\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s+1}\right]=-\frac{1}{t}(e^{t}-e^{-t})$$

....

$$3)\,L\left[\frac{f(t)}{t}\right]=\int_0^\infty L\left[f(t)\right]ds$$

$$L\left[\frac{f(t)}{t^2}\right]=\int_0^\infty\left(\int_0^\infty L\left[f(t)\right]ds\right)ds$$

....

$$L\left[\frac{f(t)}{t^n}\right]=\int_0^\infty\dots\int_0^\infty L\left[f(t)\right]\,(ds)^n$$

مثال :

$$L\left[\frac{1-\cos t}{t^2}\right]=\int_s^\infty\left(\int_s^\infty L\left[1-\cos t\right]ds\right)ds=\int_s^\infty\left(\int_s^\infty\left(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+1}\right)ds\right)ds=\int_0^\infty\left(Ln\,s-\frac{1}{2}Ln\,(s^2+1)\right)_s^\infty ds$$

$$=\int_s^\infty\left(Ln\frac{s}{\sqrt{s^2+1}}\right)_s^\infty ds=\int_s^\infty\left(0-Ln\frac{s}{\sqrt{s^2+1}}\right)ds=\int_s^\infty Ln\frac{\sqrt{s^2+1}}{s}ds=\left(s\,Ln\frac{\sqrt{s^2+1}}{s}+\tan^{-1}s\right)_s^\infty$$

$$=\frac{\pi}{2}-s\,Ln\frac{\sqrt{s^2+1}}{s}+\tan^{-1}s$$

توجه کنید که برای حل انتگرال از قاعده جزء به جزء استفاده کردیم .

....

$$4)\,L\left[f'(t)\right]=s\,L\left[f(t)\right]-f(0)$$

$$L\left[f''(t)\right]=s^2L\left[f(t)\right]-s\,f(0)-f'(0)$$

... ...

$$L\left[f^{(n)}(t)\right]=s^nL\left[f(t)\right]-s^{n-1}f(0)-\dots-s\,f^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$$

....

تا اینجا اطلاعات خوبی راجع به تبدیل لاپلاس و بعضی خواص آن به دست آورده ایم . حال می خواهیم در این قسمت به بررسی کاربرد تبدیل لاپلاس در محاسبه برخی انتگرال های غیر عادی بپردازیم .

* برای آشنایی با توانایی تبدیل لاپلاس در حل انتگرال ها ، به مثال های زیر توجه کنید :

$$\boxed{I=\int_0^\infty t\,e^{-t}\,dt}$$

ما می دانیم که : $L[t]=\int_0^\infty t\,e^{-st}dt=\frac{1}{s^2}$

حال با قرار دادن $s=1$ در رابطه بالا ، تعریف لاپلاس فوق به همان انتگرال مورد نظر ما تبدیل می گردد :

$$I=\int_0^\infty t\,e^{-t}dt=\frac{1}{1^2}=1$$

به عبارت دیگر ، انتگرالی را که به ما داده بودند همان لاپلاس t بود ولی به ازای $s=1$.

....

$$\boxed{I=\int_0^\infty \sin t\;2^{-t}\,dt}$$

$$I=\int_0^\infty \sin t\;e^{-t\,Ln 2}dt$$

می دانیم که : $L[\sin t]=\int_0^\infty \sin t\,e^{-st}dt=\frac{1}{s^2+1}$

حال با قرار دادن $s=Ln\,2$ داریم :

$$I=\int_0^\infty \sin t\,.2^{-t}\,dt=\frac{1}{(Ln2)^2+1}$$

....

$$\boxed{I=\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt}$$

$$\boxed{L\left[\frac{\sin t}{t}\right]=\int_0^\infty L[\sin t]ds=\int_s^\infty \frac{1}{s^2+1}ds=\left(\tan^{-1}s\right)_s^\infty=\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}s=\tan^{-1}\frac{1}{s}}$$

$$\Rightarrow L\left[\frac{\sin t}{t}\right]=\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}.e^{-st}dt=\tan^{-1}\frac{1}{s}$$

حال با گذاشتن $s=0$ داریم :

$$I=\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt=\tan^{-1}\infty=\frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{I=\int_0^\infty \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt}$$

$$\boxed{L\left[\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\right]=L\left[\frac{e^{-at}}{t}-\frac{e^{-bt}}{t}\right]=\int^\infty\left(\frac{1}{s+a}-\frac{1}{s+b}\right)ds=\left(Ln\left(\frac{s+a}{s+b}\right)\right)_0^\infty=0-Ln\frac{a}{b}=Ln\frac{b}{a}}$$

$$L\left[\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\right]=\int_0^\infty \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}.e^{-st}dt$$

با قرار دادن $s=0$ داریم :

$$I=\int_0^\infty \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt=Ln\frac{b}{a}$$

....

تست : مقدار $\int_0^\infty t\,e^{-t}\sin 2t\,dt$ کدامست ؟ کارشناسی ارشد – ریاضی ۷۷

$\frac{2}{25}$ (1 $\frac{4}{25}$ (2 $\frac{25}{4}$ (3 $\frac{25}{2}$ (4

$$\boxed{\begin{array}{l} L[t\,f(t)]=-F'(s) \qquad , \qquad L[\sin 2t]=\dfrac{2}{s^2+4} \\ \Rightarrow L[t\sin 2t]=-\left(\dfrac{2}{s^2+4}\right)'\Rightarrow L[t\sin t]=\dfrac{4s}{(s^2+4)^2}\end{array}}$$

$$L[t\sin 2t]=\int_0^\infty t\sin 2t\,e^{-st}dt$$

با قرار دادن $s=1$ داریم :

$$I=\int_0^\infty t\sin 2t\,dt=\frac{4(1)}{(1^2+4)^2}=\frac{4}{25}$$

....

نکته : دقت کنید انتگرال غیر عادی ای که به شما می دهند ، می بایست همگرا باشد و اگر، واگرا باشد که اصلا مقداری برای آن وجود ندارد که ما بخواهیم آن را به دست آوریم .

مثلا در انتگرال $\int_0^\infty t\,e^t dt$ داریم که $\lim_{t\to\infty} t\,e^t=\infty$. بنابراین این انتگرال فاقد شرط اولیه لازم برای همگرایی است و لذا واگراست .

*** تابع گاما یا فاکتوریل**

تابع گاما برای $\alpha\rangle 0$ به صورت مقابل تعریف می شود : $\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt$

مثال :

$$\Gamma(1)=\int_0^{\infty} e^{-t}dt=\left[-e^{-t}\right]_0^{\infty}=1$$

....

$$\Gamma(\frac{1}{2})=\int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt=\int_0^{\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt=\int_0^{\infty}\frac{e^{-u^2}}{u}2u\,du=2\int_0^{\infty}e^{-u^2}du=2.\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\sqrt{\pi}$$

نکته : با استفاده از انتگرال در گانه که در اینجا توضیح داده نشده است می توان ثابت کرد که :

$$\int_0^{\infty} e^{-u^2}du=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

....

$$\Gamma(\alpha+1)=\int_0^{\infty} t^{\alpha}e^{-t}dt$$

$$\left|\begin{array}{l} u=t^{\alpha} \\ dv=e^{-t}dt \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} du=\alpha t^{\alpha-1}dt \\ v=-e^{-t} \end{array}\right. \Rightarrow \Gamma(\alpha+1)=(-t^{\alpha}.e^{-t})_0^{\infty}+\int_0^{\infty}\alpha t^{\alpha-1}e^{-t}dt=(-t^{\alpha}e^{-t})_0^{\infty}+\alpha\int_0^{\infty}\alpha t^{\alpha-1}e^{-t}dt$$

$$=(-t^{\alpha}e^{-t})_0^{\infty}+\alpha\int_0^{\infty}t^{\alpha-1}e^{-t}dt$$

$$\boxed{\lim\frac{-t^{\alpha}}{e^{t}}=0}\Rightarrow\Gamma(\alpha+1)=\alpha\int_0^{\infty}t^{\alpha-1}e^{-t}dt=\alpha\Gamma(\alpha)\Rightarrow\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$$

مثلا :

$$\begin{array}{l}
\Gamma(2)=1\Gamma(1)=1 \\
\Gamma(3)=\Gamma(2+1)=2\Gamma(2)=2\times 1 \\
\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n(n-1)\Gamma(n-1)=\dots=n!\Rightarrow\Gamma(n+1)=n!
\end{array}$$

مثلا اگر از شما بپرسند $\frac{1}{2}!$ چند می شود باید بگویید :

$$\frac{1}{2}!=\Gamma(\frac{1}{2}+1)=\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

....

فرمول بازگشتی $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$ را می توان به صورت $\Gamma(\alpha)=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha}$ نوشت که از آن برای محاسبه α های منفی استفاده می کنند :

$$\Gamma(-\frac{5}{2})=\frac{\Gamma(-\frac{5}{2}+1)}{(-\frac{5}{2})}=\frac{\Gamma(-\frac{3}{2})}{-\frac{5}{2}}=\frac{\Gamma(-\frac{3}{2}+1)}{(-\frac{5}{2})(-\frac{3}{2})}=\frac{\Gamma(-\frac{1}{2})}{(-\frac{5}{2})(-\frac{3}{2})}=\frac{\Gamma(-\frac{1}{2}+1)}{(-\frac{5}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{1}{2})}=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{-\frac{15}{8}}=-\frac{8\sqrt{\pi}}{15}$$

$$\Gamma(-1)=\frac{\Gamma(-1+1)}{-1}=\frac{\Gamma(0)}{-1}$$

اما چون $\Gamma(0)$ تعریف نشده است پس $\Gamma(-1)$ هم تعریف نشده است .

* به طور کلی گامای اعداد صحیح منفی تعریف نشده است .

....

حال که تا حدودی با تابع گاما آشنا شدیم ، به کاربرد آن در حل انتگرال می پردازیم :

$$\boxed{I=\int_0^\infty x^6e^{-2x}dx}$$

$$\left|\begin{array}{l} 2x=u \\ \Rightarrow 2dx=du\Rightarrow dx=\frac{1}{2}du \end{array}\right. \quad \Rightarrow I=\int_0^\infty (\frac{u}{2})^6e^{-u}\frac{du}{2}=\frac{1}{2^7}\int_0^\infty e^{-u}u^6du=\frac{\Gamma(7)}{2^7}=\frac{6!}{2^7}=\frac{45}{8}$$

....

$$\boxed{I=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{-Lnx}}}$$

$$\left|\begin{array}{l} -Ln\,x=u\Rightarrow x=e^{-u} \\ \Rightarrow -\frac{1}{x}dx=du\Rightarrow dx=-x\,du\Rightarrow dx=-e^{-u\,du} \end{array}\right. \quad , \quad \left|\begin{array}{l} x\to 0\Rightarrow u\to\infty \\ x\to 1\Rightarrow u\to 0 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow I=\int_\infty^0\frac{-e^{-u}\,du}{\sqrt{u}}=\int_0^\infty\frac{e^{-u}du}{\sqrt{u}}=\int_0^\infty e^{-u}u^{-\frac{1}{2}}du=\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$$

....

$$\boxed{I=\int_0^\infty 3^{-4y^2}dy}$$

$$\Rightarrow I=\int_0^\infty (e^{Ln3})^{-4y^2}dy=\int_0^\infty e^{(-4Ln3)y^2}dy$$

$$\left|\begin{array}{l} 4y^2Ln3=t \\ \Rightarrow 8yLn3dy=dt\Rightarrow dy=\frac{dt}{(8Ln3)y}=\frac{dt}{(8Ln3)\sqrt{\frac{t}{4Ln3}}}=\frac{dt}{4\sqrt{Ln3}\sqrt{t}} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow I=\int_0^\infty\frac{e^{-t}}{4\sqrt{Ln3}\sqrt{t}}dt=\frac{1}{4\sqrt{Ln3}}\int_0^\infty e^{-t}t^{-\frac{1}{2}}dt=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{4\sqrt{Ln3}}=\frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{Ln3}}$$

$$\boxed{I=\int_0^{\infty}\sqrt{t}\,e^{-t^3}dt}$$

$$\left|\begin{array}{l} x=t^3 \Rightarrow t=x^{\frac{1}{3}} \\ \Rightarrow dx=3t^2dt \Rightarrow dt=\dfrac{dx}{3t^2}=\dfrac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow I=\int_0^{\infty}\sqrt{x^{\frac{1}{3}}}.e^{-x}\,\frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}}=\frac{1}{3}\int_0^{\infty}e^{-x}x^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{3}\Gamma(\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{\pi}}{3}$$

....

تابع بتا :

تابع بتا نیز یکی از ابزارهای قدرتمندی است که میتوان به کمک آن انتگرال های بسیاری را حل کرد :

تابع بتا را به صورت $\beta(m,n)$ نمایش داده و به شکل زیر تعریف می کنند :

$$\beta(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$$

که البته انتگرال فوق برای $m\rangle 0$ و $n\rangle 0$ همگرا خواهد بود .

* خصوصیات مهم تابع بتا :

1) $\beta(m,n)=\beta(n,m)$

2) $\beta(m,n)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta)^{2m-1}(\cos\theta)^{2n-1}d\theta$

به راحتی می توان با استفاده از تعریف تابع بتا و نیز با استفاده از تغییر متغیر $x=\sin^2\theta$ رابطه بالا را ثابت کرد .

3) $\beta(m,n)=\dfrac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$

4) $if\quad 0\langle\alpha\langle 1 \Rightarrow \beta(\alpha,1-\alpha)=\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)=\dfrac{\pi}{\sin\alpha\pi}$

* حال که تابع بتا را نیزاندکی شناختیم مثالهای زیر،که نشان دهنده توانایی تابع بتا درحل انتگرال هستند را مطرح می کنیم. دقت کنید :

$$\boxed{I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^8\theta d\theta}$$

بر طبق خاصیت ۲ و ۳ تابع بتا خواهیم داشت :

$$\begin{cases}2m-1=8\\2n-1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=\dfrac{9}{2}\\n=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{2}\beta(\frac{9}{2},\frac{1}{2})=\frac{\Gamma(\frac{9}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{2\Gamma(\frac{9}{2}+\frac{1}{2})}=\frac{(\frac{7}{2})(\frac{5}{2})(\frac{3}{2})(\frac{1}{2})(\pi)}{2\times1\times2\times3\times4}=\frac{35\pi}{128}$$

$$\boxed{I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta.\cos^5\theta d\theta}$$

بر طبق خواص ۲ و ۳ تابع بتا خواهیم داشت :

$$\begin{cases}2m-1=4\\2n-1=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=\frac{5}{2}\\n=3\end{cases}$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{2}\beta(\frac{5}{2},3)=\frac{\Gamma(\frac{5}{2})\Gamma(3)}{2(\frac{5}{2}+2)\Gamma(\frac{5}{2}+2)}=\frac{\Gamma(\frac{5}{2})\Gamma(3)}{2(\frac{5}{2}+2)(\frac{5}{2}+1)\Gamma(\frac{5}{2}+1)}=\frac{\Gamma(\frac{5}{2})\Gamma(3)}{2(\frac{5}{2}+2)(\frac{5}{2}+1)(\frac{5}{2})\Gamma(\frac{5}{2})}=\frac{2}{2\times\frac{9}{2}\times\frac{7}{2}\times\frac{5}{2}}=\frac{8}{315}$$

....

$$\boxed{I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{\tan\theta}}}$$

$$\Rightarrow I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{\frac{1}{2}}.(\sin\theta)^{-\frac{1}{2}}d\theta$$

$$\begin{cases}2m-1=-\frac{1}{2}\\2n-1=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=\frac{1}{4}\\n=\frac{3}{4}\end{cases}$$

حال با توجه به خواص ۲ و ۳ و ۴ خواهیم داشت :

$$\Rightarrow I=\frac{1}{2}\beta(\frac{1}{4},\frac{3}{4})=\frac{1}{2}\Gamma(\frac{3}{4})\Gamma(\frac{1}{4})=\frac{1}{2}\frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{4})}=\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

ضمیمه ۲

کاربرد انتگرال در محاسبه بعضی حدود

برای محاسبه بعضی از حدها می توان از انتگرال معین استفاده کرد . علت این امر به تعریف انتگرال معین برمی گردد .
انتگرال معین در واقع حد یک سیگما است ، بنابراین برای محاسبه بعضی از حدها می توان از آن استفاده کرد .

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

برای تسلط بیشتر بر این بخش به مثال های زیر دقت کنید :

....

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left((t+\frac{a}{n})^2+(t+\frac{2a}{n})^2+\ldots+(t+\frac{na}{n})^2\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(t+\frac{k}{n}a)^2=\int_0^1(t+ax)^2dx = \ldots$$

....

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{(\pi^2+1)}{n}+\sin\frac{2(\pi^2+1)}{n}+\ldots+\sin\frac{n(\pi^2+1)}{n}\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\sin\frac{k}{n}\pi^2+\frac{k}{n}\right)=\int_0^1\sin(\pi^2x+x)dx = \ldots$$

....

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{\frac{2+4n}{n^4}}+\sqrt[3]{\frac{4+4n}{n^4}}+\ldots+\sqrt[3]{\frac{2n+4n}{n^4}}\right)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt[3]{\frac{2}{n}+4}+\sqrt[3]{\frac{4}{n}+4}+\ldots+\sqrt[3]{\frac{2n}{n}+4}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt[3]{\frac{2k}{n}+4}=\int_0^1\sqrt[3]{2x+4}\,dx = \ldots$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\ldots+\sin\frac{n\pi}{n}\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)=\int_0^1\sin\pi x\,dx=\ldots$$

....

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{n}}{n^{\frac{3}{2}}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}.\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}=\int_0^1\sqrt{x}\,dx=\ldots$$

....

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}.\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{n}{n}}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}\right)=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x}}=\ldots$$

....

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{(4-(\frac{1}{n})^2}}+\frac{1}{\sqrt{(4-(\frac{2}{n})^2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{(4-(\frac{n}{n})^2}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{(4-(\frac{k}{n})^2}}=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx=\ldots$$

....

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^2(n+1)}}+\frac{1}{\sqrt[3]{n^2(n+2)}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{2n^3}}\right)}$$ ریاضی عمومی ۱ – دانشگاه تهران

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^2(n+1)}}+\frac{1}{\sqrt[3]{n^2(n+2)}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{n^2(n+n)}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^3(1+\frac{1}{n})}}+\frac{1}{\sqrt[3]{n^3(1+\frac{2}{n})}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{n^3(1+\frac{n}{n})}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{(1+\frac{1}{n})}}+\frac{1}{\sqrt[3]{(1+\frac{2}{n})}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{(1+\frac{n}{n})}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{(1+\frac{k}{n})}}\right)=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[3]{1+x}}=\ldots$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1\times2\times3\times\ldots\times n}{n\times n\times n\times\ldots\times n}}$$

$$A=\sqrt[n]{\frac{1\times2\times3\times\ldots\times n}{n\times n\times n\times\ldots\times n}}\Rightarrow Ln\,A=\frac{1}{n}Ln\,(\frac{1}{n}\times\frac{2}{n}\times\ldots\times\frac{n}{n})=\frac{1}{n}\left(Ln\,\frac{1}{n}+Ln\,\frac{2}{n}+\ldots+Ln\,\frac{n}{n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}.\sum_{k=1}^{n}Ln\,(\frac{k}{n})=\int_0^1 Lnx\,dx=\left(x\,Lnx-x\right)_0^1$$

در اینجا به یک حد مبهم برخورده ایم ، برای رفع ابهام اینگونه عمل می کنیم :

$$\lim_{x\to0}x\,Ln\,x=\lim_{x\to0}\frac{Ln\,x}{\frac{1}{x}}\overset{H}{=}\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0}(-x)=0$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}Ln\,A=\lim_{n\to\infty}\left((0-1)-(0-0)\right)=-1\Rightarrow\lim_{n\to\infty}A=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

....

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\ldots(1+\frac{n}{n})}}$$

$$A=\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\ldots(1+\frac{n}{n})}\Rightarrow Ln\,A=\frac{1}{n}\left(Ln\,(1+\frac{1}{n})+Ln\,(1+\frac{2}{n})+\ldots+Ln\,(1+\frac{n}{n})\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(1+\frac{k}{n})$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}Ln\,A=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(1+\frac{k}{n})=\int_0^1 Ln\,(1+x)dx=Ln\,\frac{4}{e}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}A=\frac{4}{e}$$

....

ریاضی عمومی ۱ – دانشگاه تهران

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1+\sqrt{n}}{n^2\sqrt{n}}}+\sqrt{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{n}}{n^2\sqrt{n}}}+\ldots+\sqrt{\frac{2}{n^2}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1+\sqrt{n}}{n^2\sqrt{n}}}+\sqrt{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{n}}{n^2\sqrt{n}}}+\ldots+\sqrt{\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n}}{n^2\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}}+\sqrt{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}}+\ldots+\sqrt{\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{n}}}+\sqrt{1+\sqrt{\frac{2}{n}}}+\ldots+\sqrt{1+\sqrt{\frac{n}{n}}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\sqrt{\frac{k}{n}}}=\int_0^1\sqrt{1+\sqrt{x}}\,dx=\ldots$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{2^{\alpha}+4^{\alpha}+...+(2n)^{\alpha}}{n^{\alpha+1}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left((\frac{2\times1}{n})^{\alpha}+(\frac{2\times2}{n})^{\alpha}+...+(\frac{2\times n}{n})^{\alpha}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\frac{2k}{n})^{\alpha}=\int_0^1(2x)^{\alpha}\,dx=...$$

....

ریاضی عمومی ۱ – دانشگاه صنعتی شریف

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\prod_{k=0}^{n}(n^2+k^2)^{\frac{1}{n}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=0}^{n}(\frac{1}{n^2})^{\frac{1}{n}}(n^2+k^2)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=0}^{n}(1+(\frac{k}{n})^2)^{\frac{1}{n}}$$

$$A=\prod_{k=0}^{n}(1+(\frac{k}{n})^2)^{\frac{1}{n}}\Rightarrow Ln\,A=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n}Ln\,(1+(\frac{k}{n})^2)$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}Ln\,A=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n}Ln\,(1+(\frac{k}{n})^2)=\int_0^1 Ln\,(1+x^2)\,dx=...$$

ضمیمه ۳

(نمونه سؤالات)

$$I=\int\left(\frac{\sin 3x}{\cos x}+\tan x\right)dx$$

$$\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$$

$$\Rightarrow I=\int\left(\frac{3\sin x-4\sin^3 x}{\cos x}+\frac{\sin x}{\cos x}\right)dx=\int\left(\frac{4\sin x-4\sin^3 x}{\cos x}\right)dx=$$

$$\int\frac{4\sin x(1-\sin^2 x)}{\cos x}dx=\int 4\sin x\cos x dx=\int 2\sin 2x\, dx=-\cos 2x+c$$

حال شما سعی کنید سوال را بدون استفاده از فرمول بالا حل کنید.

....

$$I=\int\frac{1}{(x+1)^2}\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}dx$$

$$\frac{1-x}{1+x}=u$$

$$\frac{-2}{(1+x)^2}dx=du\Rightarrow\frac{dx}{(1+x)^2}=-\frac{1}{2}du$$

$$\Rightarrow I=\int-\frac{1}{2}u^{\frac{1}{3}}du=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}+1}u^{\frac{1}{3}+1}+c=\frac{-3}{8}u\sqrt[3]{u}+c=-\frac{3}{8}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}+C$$

....

$$I=\int\frac{x}{x^3+3x^2+3x+1}dx$$

$$\Rightarrow I=\int\frac{x}{(x+1)^3}dx=\int\frac{(x+1)-1}{(x+1)^3}dx=\int\left[\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x+1)^3}\right]dx$$

$$=\int\left[(x+1)^{-2}-(x+1)^{-3}\right]dx=\frac{-1}{x+1}+\frac{1}{2(x+1)^2}+C$$

$$I=\int \frac{dx}{\cos x\sqrt{\sin 2x}}, \cos x>0$$

$$I=\int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{\cos x}{\cos x}\times\frac{\sqrt{2\sin x\cos x}}{\cos x}}=\int \frac{(1+\tan^2 x)dx}{\sqrt{\frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x}}}=\int \frac{(1+\tan^2 x)}{\sqrt{2\tan x}}dx$$

$$\left|\begin{array}{l} u=\tan x \\ \Rightarrow du=(1+\tan^2 x)dx \end{array}\right. \Rightarrow I=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{du}{u^{\frac{1}{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}du=\sqrt{2}u^{\frac{1}{2}}+c=\sqrt{2\tan x}+c$$

....

$$I=\int\frac{2x^2+1}{x^3+x}dx$$

$$I=\int(\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1})dx=\int(\frac{1}{x}+\frac{x}{x^2+1})dx=Ln|x|+\frac{1}{2}Ln(x^2+1)+c$$

....

$$I=\int\sqrt{\sin x}\cos^3 x\,dx$$

$$I=\int\sqrt{\sin x}\cos^2 x\cos x\,dx=\int\sin^{\frac{1}{2}}x(1-\sin^2 x)(\cos x)dx=\int\left((\sin x)^{\frac{1}{2}}-(\sin x)^{\frac{5}{2}}\right)dx$$

$$=\int(u^{\frac{1}{2}}-u^{\frac{5}{2}})du=\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{7}u^{\frac{7}{2}}+c=\frac{2}{3}(\sin x)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{7}(\sin x)^{\frac{7}{2}}+c$$

....

$$I=\int e^{3x}\sin 2x\,dx$$

$$\left|\begin{array}{l} u=e^{3x}\Rightarrow du=3e^{3x}dx \\ dv=\sin 2x\,dx\Rightarrow v=-\frac{1}{2}\cos 2x \end{array}\right. \Rightarrow I=-\frac{1}{2}e^{3x}\cos 2x+\frac{3}{2}\int e^{3x}\cos 2x\,dx$$

$$\left|\begin{array}{l} u=e^{3x}\Rightarrow du=3e^{3x}dx \\ dv=\cos 2x\,dx\Rightarrow v=\frac{1}{2}\sin 2x \end{array}\right. \Rightarrow I=-\frac{1}{2}e^{3x}\cos 2x+\frac{3}{2}(\frac{1}{2}e^{3x}\sin 2x-\frac{3}{2}\int e^{3x}\sin 2x\,dx)$$

$$=-\frac{1}{2}e^{3x}\cos 2x+\frac{3}{4}e^{3x}\sin 2x-\frac{9}{4}\int e^{3x}\sin 2x\,dx\Rightarrow I=-\frac{1}{2}e^{3x}\cos 2x+\frac{3}{4}e^{3x}\sin 2x-\frac{9}{4}I$$

$$\Rightarrow\frac{13}{14}I=-\frac{1}{2}e^{3x}\cos 2x+\frac{3}{4}e^{3x}\sin 2x\Rightarrow I=-\frac{12}{13}e^{3x}\cos 2x+\frac{3}{13}e^{3x}\sin 2x$$

به نظر شما آیا در حل این انتگرال اشکالی وجود دارد ؟

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{x}+x\sqrt{x}+2x}$$

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+x+2\sqrt{x}\,)}=\int\frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x}\,)^2}\qquad \begin{array}{|l}u=1+\sqrt{x}\\ \Rightarrow\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=du\\ \hline\end{array}$$

$$\Rightarrow I=2\int\frac{dx}{2\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x}\,)^2}=2\int\frac{du}{u^2}=-\frac{2}{u}+c=\frac{-2}{1+\sqrt{x}}+c$$

....

$$I=\int_1^e\frac{(1+Ln\,x\,)^2}{x}dx$$

$$\begin{array}{|l}u=1+Lnx\\ \Rightarrow du=\frac{1}{x}dx\\ \hline\end{array}\ ,\ \begin{array}{|l}x\to 1\Rightarrow u\to 1\\ x\to e\Rightarrow u\to 2\\ \hline\end{array}\ \Rightarrow\ I=\int_1^2 u^2\,du=\left(\frac{u^3}{3}\right)_1^2=\frac{7}{3}$$

....

$$I=\int\frac{(1+e^t)^2}{e^t}dt$$

$$I=\int\frac{1+e^{2t}+2e^t}{e^t}dt=\int(e^{-t}+e^t+2)dt=-e^{-t}+e^t+2t+c$$

....

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 t}{(1+\cos t\,)^2}dt$$

با توجه به این نکته که ، $\frac{\sin t}{1+\cos t}=\frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\cos^2\frac{t}{2}}=\tan\frac{t}{2}$ داریم :

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan^2\frac{t}{2}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left((1+\tan^2\frac{t}{2})-1\right)dt=\left(2\tan\frac{t}{2}-t\right)_0^{\frac{\pi}{2}}=2-\frac{\pi}{2}$$

....

$$I=\int\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx$$

$$\begin{array}{|l}x=\sin t\\ \Rightarrow dx=2\sin t\,\cos t\,dt\\ \hline\end{array}\quad\Rightarrow I=\int\sqrt{\frac{\sin^2 t}{1-\sin^2 t}}\,(2\sin t\,\cos t\,)dt=\int\frac{\sin t}{\cos t}(2\sin t\,\cos t\,)dt=\int 2\sin^2 t\,dt$$

$$=\int(1-\cos 2t\,)dt=t-\frac{1}{2}\sin 2t+c=Arc\sin x-\frac{1}{2}\sin 2(Arc\sin x\,)+c$$

$$I=\int \sec hx\,dx$$

$$I=\int\frac{2dx}{e^{x}+e^{-x}}=\int\frac{2e^{x}}{e^{2x}+1}dx \qquad \left| \begin{array}{l} e^{x}=u \\ \Rightarrow e^{x}dx=du \end{array}\right. \qquad \Rightarrow I=\int\frac{2du}{u^{2}+1}=2Arc\tan u+c=2Arc\tan e^{x}+c$$

....

$$I=\int \csc hx\,dx$$

$$I=\int\frac{2dx}{e^{x}-e^{-x}}=\int\frac{2e^{x}}{e^{2x}-1}dx \qquad \left| \begin{array}{l} e^{x}=u \\ \Rightarrow e^{x}dx=du \end{array}\right. \qquad \Rightarrow I=\int\frac{2du}{u^{2}-1}=Ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|+c=Ln\left|\frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}\right|+c$$

....

$$I=\int\frac{Ln\,x}{x\,(1+Ln\,x)}dx$$

$$\left| \begin{array}{l} 1+Ln\,x=u \\ \Rightarrow du=\dfrac{dx}{x} \end{array}\right. \qquad \Rightarrow I=\int\frac{u-1}{u}du=\int(1-\frac{1}{u})du=u-Ln\left|u\right|+c=1+Ln\,x-Ln\left|1+Lnx\right|+c$$

$$=Ln\left|\frac{x}{1+Ln\,x}\right|+c$$

....

$$I=\int\frac{\cos^{5}x}{\sin^{3}x}dx$$

$$I=\int\cot^{5}x\,\sin^{2}x\,dx=\int\cot^{5}x\,\csc^{-4}x\,\csc^{2}x\,dx \qquad \left| \begin{array}{l} u=\cot x \\ \Rightarrow du=-\csc^{2}x\,dx \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow I=-\int u^{5}(1+u^{2})^{-2}du=-\int\frac{u^{5}du}{(1+u^{2})^{2}} \qquad \left| \begin{array}{l} v=1+u^{2} \\ \Rightarrow dv=2u\,du \end{array}\right. \qquad \Rightarrow I=-\frac{1}{2}\int\frac{(v-1)^{2}dv}{v^{2}}$$

$$=-\frac{1}{2}\int(1-\frac{2}{v}+\frac{1}{v^{2}})dv=-\frac{1}{2}v+Ln\left|v\right|+\frac{1}{2v}+c=-\frac{1+u^{2}}{2}+Ln\,(1+u^{2})+\frac{1}{2+2u^{2}}+c$$

$$=-\frac{1+\cot^{2}x}{2}+Ln\,(1+\cot^{2}x)+\frac{1}{2+2\cot^{2}x}+c$$

....

$$I=\int\frac{x^{3}dx}{x^{3}-a^{3}}$$

$$I=\int\frac{(x^{3}-a^{3})+a^{3}}{x^{3}-a^{3}}dx=\int(1+\frac{a^{3}}{x^{3}-a^{3}})dx \qquad \left(\frac{3a^{3}}{x^{3}-a^{3}}=\frac{a}{x-a}-\frac{ax+2a^{2}}{x^{2}+ax+a^{2}}\right)$$

$$\Rightarrow I=x+\frac{a}{3}\int\frac{dx}{x-a}-\frac{a}{6}\int\frac{2x+a}{x^{2}+ax+a^{2}}dx-\frac{a^{2}}{2}\int\frac{dx}{(x+\frac{a}{2})^{2}+\frac{3a^{2}}{4}}$$

$$= x + \frac{a}{3} Ln\left| x - a \right| - \frac{a}{6} Ln\,(x^2 + ax + a^2) - \frac{a}{\sqrt{3}} Arc\tan(\frac{2x + a}{\sqrt{3}a}) + c$$

....

$$I = \int \frac{dx}{x\,(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\left| \begin{array}{l} 1+x^2 = u^2 \\ \Rightarrow 2x\,dx = 2u\,du \end{array} \right. \Rightarrow I = \int \frac{du}{(u^2-1)u^2} = \int (\frac{2}{u-1} - \frac{2}{u+1} - \frac{1}{u^2})du = 2Ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + \frac{1}{u} + c$$

$$= 2Ln\,(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}) + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + c$$

....

$$I = \int \frac{dx}{1+\cos x + \sin x}$$

$$\begin{cases} \cos x = \dfrac{1-\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} \\ \sin x = \dfrac{2\tan(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} \end{cases} , \quad \left| \begin{array}{l} \tan(\frac{x}{2}) = u \\ \Rightarrow \frac{1}{2}(1+\tan^2(\frac{x}{2}))dx = du \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{du}{1+u} = Ln\left|u+1\right| + c = Ln\left|\tan(\frac{x}{2}) + 1\right| + c$$

....

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(4+\sqrt[3]{x})}$$

$$\left| \begin{array}{l} x = u^6 \\ dx = 6u^5du \end{array} \right. \Rightarrow I = \int \frac{6u^5du}{u^3(4+u^2)} = 6\int \frac{u^2du}{4+u^2} = 6\int (1 - \frac{4}{4+u^2})du = 6u - 12Arc\tan\frac{u}{2} + c$$

$$= 6\sqrt[6]{x} - 12Arc\tan\frac{\sqrt[6]{x}}{2} + c$$

$$I=\int (x^3+x^2+x+1)e^{2x}dx$$

$$\left|\begin{array}{l} u=x^3+x^2+x+1 \\ dv=e^{2x} \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} du=3x^2+2x+1 \\ dv=\frac{1}{2}e^{2x} \end{array}\right. \Rightarrow I=\frac{x^3+x^2+x+1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}\int (3x^2+2x+1)\,e^{2x}\,dx$$

$$\left|\begin{array}{l} u=3x^2+2x+1 \\ dv=e^{2x} \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} du=6x+2 \\ dv=\frac{1}{2}e^{2x} \end{array}\right. \Rightarrow I=\frac{2x^3-x^2+1}{4}e^{2x}+\frac{1}{2}\int (3x+1)\,e^{2x}\,dx$$

$$\left|\begin{array}{l} u=3x+1 \\ dv=e^{2x} \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} du=3 \\ dv=\frac{1}{2}e^{2x} \end{array}\right. \Rightarrow I=\frac{2x^3-x^2+3x+2}{4}\,e^{2x}-\frac{3}{4}\int e^{2x}\,dx=\frac{4x^3-2x^2+6x+1}{8}\,e^{2x}+c$$

....

$$I=\int \tanh x\,dx$$

$$\left|\begin{array}{l} e^x+e^{-x}=u \\ e^x-e^{-x}=du \end{array}\right. \Rightarrow I=\int \frac{du}{u}=Ln\left|u\right|+c=Ln\,(e^x+e^{-x})+c=Ln\,(\cosh x)+c'$$

به نظر شما انتگرال زیبایی نبود ؟

....

$$I=\int_0^1 x^2 Arc\tan(x)dx$$

$$\left|\begin{array}{l} u=Arc\tan x \\ dv=x^2 \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} du=\frac{dx}{x^2+1} \\ v=\frac{x^3}{3} \end{array}\right. \Rightarrow I=\left(\frac{x^3}{3}Arc\tan x\right)_0^1-\frac{1}{3}\int_0^1\frac{x^3\,dx}{x^2+1}=\frac{\pi}{12}-\frac{1}{6}\left(x^2-Ln(x+1)\right)_0^1$$

$$=\frac{\pi}{12}+\frac{1}{6}(Ln2-1)$$

....

$$I=\int_0^2 x\sqrt{16-x^4}\,dx$$

$$\left|\begin{array}{l} u=x^2 \\ du=2x\,dx \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} 0\to 0 \\ 2\to 4 \end{array}\right. \Rightarrow I=\frac{1}{2}\int_0^4\sqrt{16-u^2}\,du$$

که $\sqrt{16-u^2}$ معادله یک نیم دایره به شعاع ۴ است و انتگرال آن روی $[0,4]$ ، مساحت ربع دایره می باشد . پس جواب نهایی $\frac{1}{2}.\frac{1}{4}(\pi.4^2)=2\pi$ است .

$$I=\int\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,dx$$

$$I=\int\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}dx=\int\frac{\sqrt{x+1}.\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}.\sqrt{x+1}}dx=\int\frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}dx=\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}}+\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$=\sqrt{x^2-1}+Ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$$

....

$$I=\int\frac{x^4-3x^2-3x-2}{x^3-x^2-2x}dx$$

با تجزیه کسر داریم :

$$\frac{x^4-3x^2-3x-2}{x^3-x^2-2x}=x+1-\frac{x+2}{x(x-2)(x+1)}=x+1-\left(\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{D}{x+1}\right)\Rightarrow\begin{cases}A=-1\\B=\frac{2}{3}\\D=\frac{1}{3}\end{cases}$$

$$\Rightarrow I=\int(x+1)dx+\int\frac{dx}{x}-\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x-2}-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1}=\frac{x^2}{2}+x+Ln|x|-\frac{2}{3}Ln|x-2|-\frac{1}{3}Ln|x+1|+c$$