« ریاضی دو »

« دکتر رضائی »

خانم نفیسی
mednafisi@gmail.com

« توابع برداری »

$f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ حقیقی

تابع برداری: هر تابعی با دامنه در $\mathbb{R}$ با برد در $\mathbb{R}^n$ یک تابع برداری نامیده می‌شود.

$r(t) : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \qquad r(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots x_n(t))$

$x_i : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad i = 1, 2, 3, \dots, n$

در $\mathbb{R}^3$ توابع برداری را با نمایش زیر در نظر می‌گیریم:

$r(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$

مثال: $r(t) = t\vec{i} + e^t\vec{j} + \sin t\,\vec{k} \quad , \quad r(t) = a\cos t\,\vec{i} + b\sin t\,\vec{j}$

$* \quad D_{r(t)} = D_{x(t)} \cap D_{y(t)} \cap D_{z(t)}$

حد توابع برداری:

فرض کنید $r(t)$ در یک همسایگی محذوف t_0 معین باشد در اینصورت

$$\lim_{t \to t_0} r(t) = L \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \ni 0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow \| r(t) - L \| < \varepsilon$$

$$x = (x_1, x_2) \quad a = (a_1, a_2) \Rightarrow \| x - a \| = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2}$$

قضیه: فرض کنید $r(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ و $L=(a,b,c)$ در اینصورت

$$\lim_{t\to t_0} r(t) = L \iff \begin{cases} \lim\limits_{t\to t_0} x(t)=a \\ \lim\limits_{t\to t_0} y(t)=b \\ \lim\limits_{t\to t_0} z(t)=c \end{cases}$$

مثال: $\lim\limits_{t\to 0} e^t \vec{i} + \frac{Ln(t+1)}{t}\vec{j} + \frac{\sin 2t}{t}\vec{k} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$

مثال: $\lim\limits_{t\to 0} \sin t\, \vec{i} + \cos t\, \vec{j} + \frac{|t|}{t}\vec{k} =$ حد ندارد چون مؤلفه سوم حد ندارد.

قضیه: فرض کنید $r_1(t)$ و $r_2(t)$ دو تابع برداری و $h(t)$ یک تابع حقیقی باشد در اینصورت درصورت وجود حدها داریم:

1) $\lim\limits_{t\to t_0} (r_1(t)+r_2(t)) = \lim\limits_{t\to t_0} r_1(t) + \lim\limits_{t\to t_0} r_2(t)$

2) $\lim\limits_{t\to t_0} (h(t)\cdot r_1(t)) = \lim\limits_{t\to t_0} h(t) \cdot \lim\limits_{t\to t_0} r_1(t)$

3) $\lim\limits_{t\to t_0} r_1(t)\cdot r_2(t) = \lim\limits_{t\to t_0} r_1(t) \cdot \lim\limits_{t\to t_0} r_2(t)$

4) $\lim\limits_{t\to t_0} r_1(t)\times r_2(t) = \lim\limits_{t\to t_0} r_1(t) \times \lim\limits_{t\to t_0} r_2(t)$

مثال: فرض کنید $r_1(t) = t\vec{i} + \cos t\, \vec{j} + e^t \vec{k}$ و $r_2(t) = \cos t\, \vec{i} + \sin t\, \vec{j} + t\vec{k}$ مطلوب است محاسبه

$\lim\limits_{t\to 0} r_1(t) \overset{\cdot}{\underset{\times}{+}} r_2(t)$ $\quad \lim\limits_{t\to 0} r_1(t) = (0,1,1)$ $\quad \lim\limits_{t\to 0} r_2(t) = (1,0,0)$

$\lim\limits_{t\to 0} r_1(t)+r_2(t) = (1,1,1)$ $\quad \lim\limits_{t\to 0} r_1(t)\cdot r_2(t) = (0,0,0) = 0$

$$\lim_{t\to 0} r_1(t)\times r_2(t) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{j} - \vec{k} = (0,1,-1)$$

پیوستگی توابع برداری:

فرض کنید $r(t)$ تابع برداری در یک همسایگی t_0 تعریف باشد در اینصورت تابع برداری $r(t)$ در t_0 پیوسته است هرگاه:

$$\forall \epsilon>0\ \exists \delta>0 \ni |t-t_0|<\delta \Rightarrow \|r(t)-r(t_0)\|<\epsilon$$

و یا: $\lim\limits_{t\to t_0} r(t) = r(t_0)$

قضیه: تابع برداری $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ در t_0 پیوسته است هرگاه $x(t)$، $y(t)$ و $z(t)$ در t_0 پیوسته باشند.

مثال: تابع برداری $r(t) = \sinh t\, \vec{i} + e^{t^2}\vec{j} + Ln(t^2+1)\vec{k}$

$\rightarrow$ در $\mathbb{R}$ پیوسته است

مثال: $r(t) = \cos t\,\vec{i} + \frac{\sin t}{t}\,\vec{j} + \vec{k}$ در $\mathbb{R}-\{0\}$ پیوسته است.

* قضایای حد به طور مشابه برای پیوستگی برقرار است.

* $r(t): D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ ، $h(t): D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R} \Rightarrow roh(t)$ تعریف شده

مشتق توابع برداری:

فرض کنید تابع برداری $r(t)$ در t_0 معین باشد در اینصورت مشتق تابع برداری را در t_0 چنین تعریف می‌کنیم:

$$r'(t_0)=\lim_{t\to t_0}\frac{r(t)-r(t_0)}{t-t_0}$$

قضیه: اگر $r(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$ آنگاه:

$$r'(t)=x'(t)\vec{i}+y'(t)\vec{j}+z'(t)\vec{k}$$

مثال: $r(t)=\operatorname{tg}^{-1}t\,\vec{i}+\cosh t\,\vec{j}+e^{t^2}\vec{k}$

$$r'(t)=\frac{1}{1+t^2}\vec{i}+\sinh\vec{j}+2te^{t^2}\vec{k}$$

مثال: $r(t)=\left(\int_0^t\frac{1}{1+s^2}ds\right)\vec{i}+\left(\int_t^{t^2}\sin(s^2)ds\right)\vec{j}$

$$r'(t)=\frac{1}{1+t^2}\vec{i}+\left(2t\sin(t^4)-\sin(t^2)\right)\vec{j}$$

قضایای مشتق توابع برداری:

فرض کنید $r_1(t)$ و $r_2(t)$ دو تابع برداری و $h(t)$ یک تابع حقیقی در اینصورت در صورت وجود مشتق داریم:

1) $(r_1(t)+r_2(t))'=r_1'(t)+r_2'(t)$

2) $(h(t)\cdot r_1(t))'=h'(t)r_1(t)+h(t)r_1'(t)$

3) $(r_1(t)\cdot r_2(t))'=r_1'(t)\cdot r_2(t)+r_1(t)\cdot r_2'(t)$

4) $(r_1(t)\times r_2(t))'=r_1'(t)\times r_2(t)+r_1(t)\times r_2'(t)$

قضیه: هر تابع برداری با طول ثابت بر مشتق خود عمود است.

اثبات: $\|r(t)\|=c \Rightarrow \|r(t)\|^2=c^2\Rightarrow r(t)\cdot r(t)=c^2$

$$2r'(t)\cdot r(t)=0\Rightarrow r'(t)\cdot r(t)=0\Rightarrow r(t)\perp r'(t)$$

منحنی:

تعریف: فرض کنید $r(t)$ یک تابع برداری با دامنه $I\subseteq\mathbb{R}$ باشد چنانچه

1) $r(t)$ دارای مشتق پیوسته باشد

2) $r'(t)\neq 0 \quad \forall t\in I$

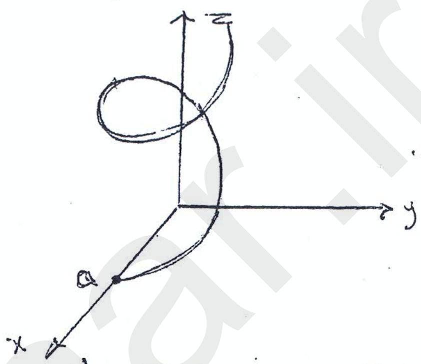
آنگاه $r(t)$ را یک منحنی می‌نامیم و $r(I)$ را اثر منحنی می‌نامیم.

مثال: $r(t)=a\cos t\,\vec{i}+a\cos t\,\vec{j}\Rightarrow r'(t)=-a\sin t\,\vec{i}+a\cos t\,\vec{j}$

حل ← $r(t)$ یک منحنی است. اگر $I=[0,2\pi]$ آنگاه $r(I)$ یک دایره است.

مثال: $r(t) = a\cos t\,\vec{i} + a\sin t\,\vec{j} + bt\vec{k}$

$\Rightarrow r'(t) = -a\sin t\,\vec{i} + a\cos t\,\vec{j} + b\vec{k}$ ~ این معادله یک منحنی است



$r(t)$ منحنی مارپیچ می نامیم
منحنی مزبور روی یک استوانه حرکت می کند.

تابع طول قوس یک منحنی:

فرض کنید $r(t)$ یک منحنی باشد تابع طول قوس منحنی $r(t)$ در بازه $[t_0, t]$ به صورت زیر تعریف می شود.

$s(t)=\int_{t_0}^{t} \|r'(x)\|\,dx \qquad \|r'(t)\|^2 = x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2$

مثال: تابع طول قوس منحنی دایره و مارپیچ را بیابید و سپس محیط دایره را محاسبه کنید. (در بازه $[0,t]$)

$s(t)=\int_0^t\sqrt{(-a\sin u)^2+(a\cos u)^2}\,du=\int_0^t a\,du=at$

$s_t = at \Rightarrow s(2\pi)=2\pi a$

$s(t)=\int_0^t\sqrt{a^2\sin^2u+a^2\cos^2u+b^2}\,du=\int_0^t\sqrt{a^2+b^2}\,du$

$=\sqrt{a^2+b^2}\,t \Rightarrow s(t)=\sqrt{a^2+b^2}\,t$

$s(t)=\int_{t_0}^{t}\|r'(u)\|\,du \qquad s'(t)=\|r'(t)\|>0$

پس $s(t)$ تابعی اکیداً صعودی پس $s(t)$ معکوس پذیر است:

$s=s(t) \Leftrightarrow t=t(s)$

چنانچه در تابع برداری به جای پارامتر دلخواه برحسب پارامتر طول قوس بنویسیم می بینیم تابع برداری به نوعی پارامتر طبیعی یا استاندارد مجهز شده است.

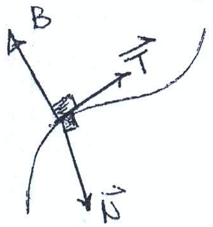
مثال: منحنی $r(t)=\cos t\,\vec{i}+\sin t\,\vec{j}+t\vec{k}$ را برحسب پارامتر طبیعی بنویسید.

$s(t)=\sqrt{2}\,t \Rightarrow t=\frac{s}{\sqrt{2}}$

پس $\Rightarrow r(s)=\cos(\frac{s}{\sqrt{2}})\vec{i}+\sin(\frac{s}{\sqrt{2}})\vec{j}+\frac{s}{\sqrt{2}}\vec{k}$

$\frac{ds}{dt}=\|r'(t)\| \qquad \frac{dt}{ds}=\frac{1}{\|r'(t)\|}$ *

• فرض کنید $r(t)$ یک منحنی باشد تابع برداری $T=\frac{r'(t)}{\|r'(t)\|}$ بردار یکانی مماس بر هر نقطه بر منحنی $r(t)$ نامیده می شود



بردار: $N=\frac{\frac{dT}{ds}}{\|\frac{dT}{ds}\|}$

بردار یکانی قائم اول در هر نقطه بر منحنی $r(t)$ نامیده می شود همچنین بردار $B=T\times N$ بردار یکانی قائم دوم در هر نقطه بر منحنی نامیده می شود.

صفحه بوسان $\Rightarrow 0(x-1) - \frac{1}{\sqrt{2}}(y-0) + \frac{1}{\sqrt{2}}(z-0) = 0 \Rightarrow z = y$

تعریف: فرض کنید $r(t)$ بردار مکان یک ذره در فضای $\mathbb{R}^3$ باشد. بردارهای سرعت و شتاب در هر نقطه به صورت زیر تعریف می‌شود.

سرعت: $\vec{V}(t) = r'(t)$

شتاب: $\vec{a}(t) = r''(t)$

رابطه بردارهای سرعت و شتاب با بردارهای T و N و B:

$$\vec{V} = r'(t) = \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|} \cdot \|r'(t)\| \Rightarrow \boxed{\vec{V} = \vec{T} \cdot \frac{ds}{dt}}$$

پس T و V موازی‌اند.

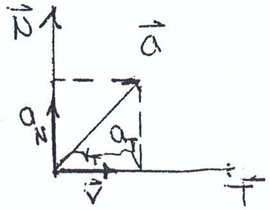
$$a = r''(t) = \frac{d(V(t))}{dt} = \frac{d}{dt}\left(T \cdot \frac{ds}{dt}\right) = \frac{dT}{dt} \cdot \frac{ds}{dt} + T \cdot \frac{d^2s}{dt^2}$$

$$= \frac{\frac{dT}{dt}}{\left\|\frac{dT}{dt}\right\|} \cdot \left\|\frac{dT}{dt}\right\| \cdot \frac{ds}{dt} + T \cdot \frac{d^2s}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \vec{N} \left\|\frac{dT}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}\right\| \frac{ds}{dt} + T \cdot \frac{d^2s}{dt^2}$$

$$= N \left\|\frac{dT}{ds}\right\| \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + T \frac{d^2s}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a} = K\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \vec{N} + \frac{d^2s}{dt^2} \vec{T}}$$



$a_N = K\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$ مولفه قائم شتاب $\quad a_T = \frac{d^2s}{dt^2}$ مولفه مماس شتاب

$V_T = \frac{ds}{dt}$ مولفه مماس سرعت

صفحه بوسان دربردارنده بردارهای V و a میزی باشد پس $V \times a$ بردار نرمال صفحه بوسان است.

$$B = \frac{V \times a}{\|V \times a\|} \Rightarrow \boxed{B = \frac{r' \times r''}{\|r' \times r''\|}} \quad T = \frac{r'}{\|r'\|} \quad N = B \times T$$

$$\vec{V} \times \vec{a} = \left(\vec{T} \cdot \frac{ds}{dt}\right) \times \left(K\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \vec{N} + \frac{d^2s}{dt^2}\vec{T}\right) = K\left(\frac{ds}{dt}\right)^3 B$$

$$B = \frac{K\left(\frac{ds}{dt}\right)^3}{\|r' \times r''\|} B \Rightarrow \boxed{K = \frac{\|r' \times r''\|}{\|r'\|^3}}$$

مثال: مطلوبست محاسبه T و N و B، V و a و K و ρ، صفحه بوسان، a_N و a_T و V_T برای $r(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}$ در $t = 0$.

$$r'(t) = \vec{i} + 2t\vec{j} + 3t^2\vec{k} \qquad r''(t) = 2\vec{j} + 6t\vec{k}$$

$V(0) = \vec{i} \Rightarrow T(0) = \vec{i} \qquad a(0) = 2\vec{j} \Rightarrow N(0) = \vec{j} \qquad B(0) = \vec{k}$

$a_T = 0 \qquad a_N = 2 \qquad V_T = 1 \qquad K = 2 \qquad \rho = \frac{1}{2}$

$t = 0 \Rightarrow (0,0,0)$, $B(0) = (0,0,1)$ $\Rightarrow z = 0$ صفحه بوسان

دایره‌ی انحناء (دایره‌ی بوسان):

فرض کنید $\gamma(t)$ یک منحنی مسطح باشد. (در $\mathbb{R}^2$)

$$\gamma(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}$$

$$\vec{T}=\frac{x'\vec{i}+y'\vec{j}}{\sqrt{x'^2+y'^2}} \qquad \vec{N}=\frac{-y'\vec{i}+x'\vec{j}}{\sqrt{x'^2+y'^2}} \qquad \text{همواره: } B=\vec{K}$$

صفحه بوسان $z=0$

$$K=\frac{\|r'\times r''\|}{\|r'\|^3} \qquad \begin{vmatrix} i & j & k \\ x' & y' & 0 \\ x'' & y'' & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow K=\frac{(x'y''-y'x'')}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad \rho=\frac{1}{K}$$

$$y=f(x) \qquad \gamma(t)=t\vec{i}+f(t)\vec{j} \qquad \vec{T}=\frac{\vec{i}+y'\vec{j}}{\sqrt{1+y'^2}}$$

$$\vec{N}=\frac{-y'\vec{i}+\vec{j}}{\sqrt{1+y'^2}} \qquad B=\vec{K} \qquad K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

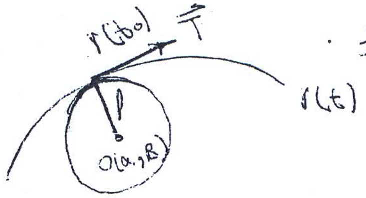
تعریف دایره بوسان:

دایره‌ای که در جهت تقعر منحنی بر منحنی مماس می‌باشد و شعاع آن شعاع انحنای منحنی می‌باشد را دایره بوسان می‌باشد.

فرض کنید $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\rho^2$ معادله دایره بوسان باشد. در نقطه تماس مشتق دایره و منحنی یکسان است. همچنین در نقطه تماس شعاع انحنا دایره و منحنی برابر است پس انحنا دایره منحنی برابر است و چون دایره در جهت تقعر منحنی بر منحنی مماس است پس مشتق دوم آن‌ها هم علامت است و با توجه به رابطه $K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ مشتق دوم دایره و منحنی با هم برابر است.

$$2(x-\alpha)+2(y-\beta)y'=0 \Rightarrow \begin{cases} x-\alpha+(y-\beta)y'=0 \\ 1+y'^2+(y-\beta)y''=0 \end{cases}$$

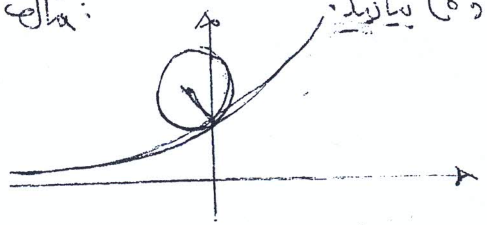
از حل دو معادله دو مجهول α, β به دست می‌آید.



$$\overrightarrow{r(t_0)O}=\rho\vec{N}$$

$$(\alpha-x(t_0),\ \beta-y(t_0))=\rho\vec{N}$$

مثال: دایره بوسان منحنی $y=e^x$ را در $(0,1)$ بیابید:



$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{e^x}{(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}}$$

$$x=0 \Rightarrow K=\frac{1}{\sqrt{8}} \qquad \rho=\sqrt{8}\Rightarrow(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=8$$

$$\begin{cases} 0-\alpha+(1-\beta)=0 & \Uparrow \alpha=-2 \\ 1+1^2+(1-\beta)1=0 \Rightarrow \beta=3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x+2)^2+(y-3)^2=8 \quad \text{دایره بوسان}$$

$$\frac{dB}{ds} = \frac{dT}{ds}\times N + T\times\frac{dN}{ds}$$

پس $\frac{dB}{ds} = T\times\frac{dN}{ds}$ پس $\frac{dB}{ds}\perp T$

پس $\frac{dB}{ds}$ با N موازی است پس $\frac{dB}{ds} = \tau\vec{N}$ $\Rightarrow \left\|\frac{dB}{ds}\right\| = \tau$

کمیت $\tau = \left\|\frac{dB}{ds}\right\|$ را تاب یک منحنی در هر نقطه می نامیم.

مثال: مطلوبست محاسبه تاب منحنی $r(t)=\cos t\,\vec{i}+\sin t\,\vec{j}+t\vec{k}$ در هر نقطه دلخواه:

$$r'(t) = -\sin t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j} + \vec{k}$$

$$r''(t) = -\cos t\,\vec{i} - \sin t\,\vec{j}$$

$$r'\times r'' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\sin t & \cos t & 1 \\ -\cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix} = \sin t\,\vec{i} - \cos t\,\vec{j} + \vec{k} \qquad \|r'\times r''\| = \sqrt{2}$$

پس: $$B = \frac{r'\times r''}{\|r'\times r''\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin t\,\vec{i} - \cos t\,\vec{j} + \vec{k})$$

$$\frac{dB}{ds} = \frac{dB}{dt}\cdot\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j})\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\tau = \left\|\frac{dB}{ds}\right\| = \frac{1}{2}$ $\qquad$ شعاع تاب $\delta = \frac{1}{\tau}$

قضیه: منحنی $r(t)$ مسطح است اگر و تنها اگر تاب آن در امتداد صفر باشد.

اثبات: فرض کنید $r(t)$ یک منحنی مسطح باشد پس $r(t)$ در یک صفحه قرار دارد:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

ادامه: $r(0)=(0,1)$ $\quad O(\alpha,\beta)$ $\quad \rho=\sqrt{8}$

$$N(0) = \frac{-\vec{i}+\vec{j}}{\sqrt{2}} \qquad (\alpha, \beta-1) = \sqrt{8}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \qquad \alpha=-2,\ \beta=3$$

در $\mathbb{R}^3$:

دایره بوسان $\left\{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=\rho^2\right.$

صفحه بوسان

مثال: دایره بوسان منحنی $r(t)=\cos t\,\vec{i}+\sin t\,\vec{j}+t\vec{k}$ را در $t=0$ بیابید.

$$K = \frac{a}{a^2+b^2} \qquad K=\frac{1}{2} \Rightarrow \rho=2 \qquad N(0)=-\vec{i}$$

$$O(\alpha,\beta,\gamma) \qquad r(0)=(1,0,0)$$

$$\Rightarrow (\alpha-1, \beta, \gamma) = (-2,0,0) \Rightarrow \alpha=-1,\ \beta=0,\ \gamma=0$$

دایره بوسان $\begin{cases}(x+1)^2+y^2+z^2=4\\ z=y\end{cases}$

تاب یک منحنی در $\mathbb{R}^3$:

بردار $\frac{dB}{ds}$ بر B و T عمود است.

چون $\|B\|=1$ پس $\frac{dB}{ds}\perp B$

$$B = T\times N$$

hamednafisi@gmail.com

$$\vec{N}\cdot(X-X_0)=0$$

(a,b,c) (x,y,z) (x_0,y_0,z_0)

بالعکس $r(t)$ در معادله‌ای به صورت زیر صدق می‌کند

$$\vec{P}\cdot(r(s)-r(0))=0$$

$$\vec{P}\cdot r'(s)=0 \Rightarrow P\cdot T=0 \Rightarrow \vec{P}\perp\vec{T}$$

$$\vec{P}\cdot r''(s)=0 \Rightarrow P\cdot\frac{dT}{ds}=0 \Rightarrow \vec{P}\perp\vec{N}$$

پس $\vec{P}\parallel\vec{B}$ لذا $P=\lambda B$

چون P یک بردار ثابت است پس B نیز یک بردار ثابت است در حقیقت:

$$B=\pm\frac{P}{\|P\|}$$

پس $\frac{dB}{ds}=0$ پس $\tau=0$

بالعکس: فرض کنید $\tau=0$ نشان دهید $r(t)$ یک منحنی مسطح است.

$$\tau=\left\|\frac{dB}{ds}\right\|=0$$

پس $\frac{dB}{ds}=0 \Longrightarrow$ B برداری ثابت است.

تابع زیر را در نظر بگیرید $f(s)=B\cdot(r(s)-r(0))$

$$f'(s)=B\cdot r'(s)=B\cdot T=0$$

پس $f(s)$ تابعی ثابت است. از طرفی $f(0)=0$ پس $f(s)=0$

یعنی $B\cdot(r(s)-r(0))=0$

یعنی $r(s)$ در صفحه‌ای قرار دارد که بردار نرمال آن بردار ثابت B می‌باشد

پس $r(s)$ یا $r(t)$ یک منحنی مسطح است.

$$K=\left\|\frac{dT}{ds}\right\| \qquad \tau=\left\|\frac{dB}{ds}\right\|$$

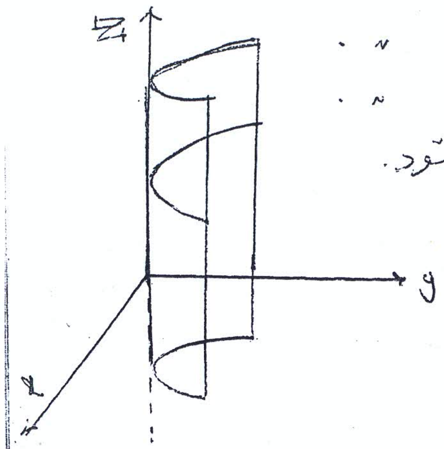
تمرین: رابطه‌ای بر حسب مشتق تابع برداری $r(t)$ برای تاب بیابید.

$$\tau=\frac{\|r'\times r''\cdot r'''\|}{\|r'\times r''\|^2}$$

رویه‌ها: (سطوح):

مکان هندسی تمام نقاطی در $\mathbb{R}^3$ که در رابطه $F(x,y,z)=0$ صدق می‌کنند
را یک سطح یا رویه می‌نامیم.

مثال:



1) $ax+by+cz=0$ یک رویه است که صفحه نامیده می‌شود.
2) $x^2+(y-1)^2+z^2=4$ " " " " کره " " .
3) $x^2+y^2=1$ " " " " " استوانه " " .
4) $y=x^2$ یک رویه است که استوانه نامیده می‌شود.
5) $xy+x^2+2x-1=0$ یک رویه است.

رویه‌ها را به دسته‌های زیر تقسیم می‌کنیم

1) رویه‌های استوانه‌ای
2) رویه‌های مخروطی
3) رویه‌های دوار
4) رویه‌های درجه دوم شناخته شده.

1) رویه‌های استوانه‌ای:

مکان هندسی تمام نقاطی در $\mathbb{R}^3$ که اگر در آن نقاط به موازات خط ثابتی
رسم کنیم خط حاصل تماماً بر سطح رویه قرار گیرد رویه استوانه‌ای می‌نامیم خط

ثابت را هادی استوانه می‌نامیم.

مثال: $y=x^2$ یک استوانه با مولدهای موازی محور z هاست.

حل: نقطه‌ای دلخواه ثابت $A(x_0,y_0,z_0)$ از رویه را در نظر می‌گیریم. معادله خطی که از A می‌گذرد و به موازات محور z ها رسم می‌شود به صورت زیر است:

$$\begin{cases} x=x_0+0t \\ y=y_0+0t \\ z=z_0+1t \end{cases} \qquad A(x_0,y_0,z_0) \quad (0,0,1)$$

با جایگذاری خط در معادله رویه داریم: $y_0=x_0^2$ ؛ در رابطه فوق برقرار است. چون A نقطه‌ای بر رویه است پس خط در معادله رویه صدق می‌کند.

پس رویه استوانه‌ای است.

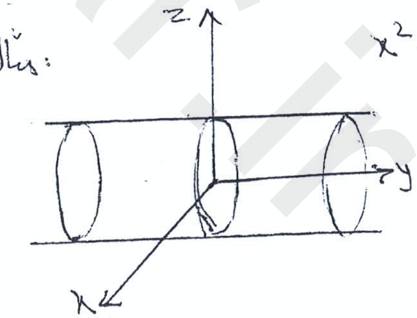
تمرین:

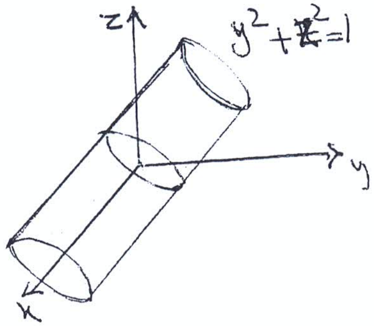
1) هر رویه به صورت $f(x,y)=0$ یک رویه استوانه‌ای (با محور موازی محور z ها) است.

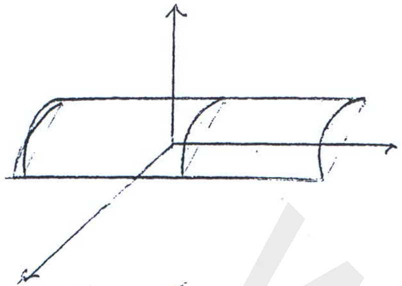
2) " " " " $f(x,z)=0$ " " " " " " " y " "

3) " " " " $f(y,z)=0$ " " " " " " " x " "

مثال:







$x=z^2$

مثال: نشان دهید $z^2=x+y$ یک رویه استوانه‌ای است که محور آن را مشخص کنید.

حل: فرض می‌کنیم $\vec{L}(a,b,c)$ و $A(x_0,y_0,z_0)$ نقطه‌ای دلخواه روی رویه باشند و L محور استوانه باشد.

معادله خط گذرا از A به موازات L به صورت زیر است:

$$\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases}$$

با جایگذاری خط در معادله رویه داریم:

$$(z_0+ct)^2=x_0+at+z_0+bt \Rightarrow$$

$$z_0^2+2z_0ct+c^2t^2=x_0+z_0+at+bt$$

$$c^2t^2+(2z_0c-a-b)t=0 \quad \forall t\in\mathbb{R}$$

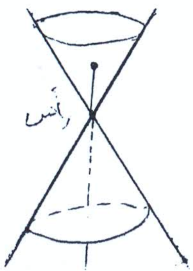
$$\Rightarrow c^2=0 \Rightarrow c=0$$

$$2z_0c-a-b=0 \Rightarrow a=-b$$

پس $\vec{L}(a,-a,0)$ راستای محور استوانه $(1,-1,0)$ می‌باشد.

2) رویه‌های مخروطی:

مکان هندسی تمام نقاطی در $\mathbb{R}^3$ که اگر از آن نقاط به نقطه ثابتی وصل کنیم خط حاصل تماماً بر سطح رویه



را قرار نگیرد رویه مخروطی می‌نامیم و نقطه ثابت را رأس مخروط می‌نامیم.

مثال: نشان دهید رویه $z^2=x^2+y^2$ یک رویه مخروطی به رأس مبدأ باشد.

اثبات: فرض کنید $A(x_0,y_0,z_0)$ نقطه‌ای دلخواه بر رویه باشد معادله خطی از A و $S(0,0,0)$ می‌گذرد به صورت زیر است:

$$\begin{cases} x=0+x_0t \\ y=0+y_0t \\ z=0+z_0t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

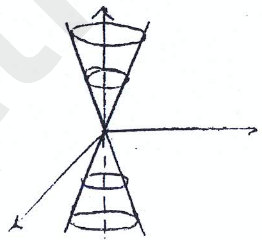
با جایگذاری خط در معادله رویه داریم:

$$(z_0t)^2=(x_0t)^2+(y_0t)^2 \Rightarrow t^2z_0^2=(x_0^2+y_0^2)t^2$$

$t=0 \Rightarrow (0,0,0)\in$ رویه $\qquad t\neq 0 \Rightarrow z_0^2=x_0^2+y_0^2$

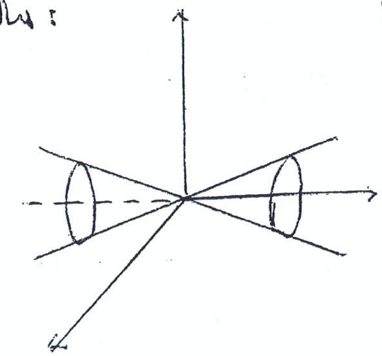
در رابطه فوق برقرار است زیرا A نقطه‌ای بر رویه می‌باشد.

یک خط در معادله رویه صدق می‌کند پس رویه مخروطی است.

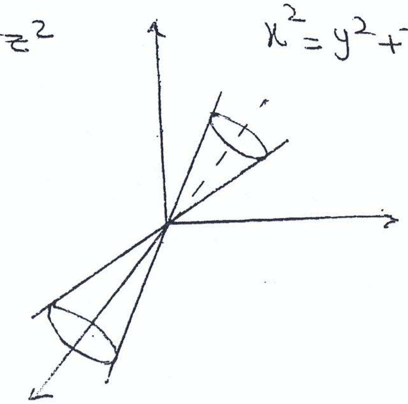


مثال:

$y^2=x^2+z^2$



$x^2=y^2+z^2$



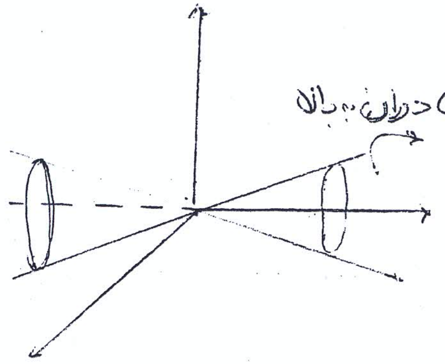
تمرین) هر رویه همگن یک رویه مخروطی به رأس مبدأ می‌باشد.

تعریف: تابع $f(x,y,z)$ را یک تابع همگن از درجه n می‌نامیم هرگاه

$$f(tx,ty,tz)=t^nf(x,y,z)\quad t\in\mathbb{R}$$

مثال: $z^2=xy$ یک رویه مخروطی است (همگن از درجه 2 می‌باشد)

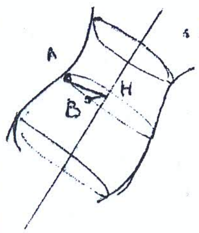
مثال:



ج) رویه‌های دوار:

یک رویه دوار از دوران یک منحنی حول خط ثابتی مانند L به دست می‌آید.

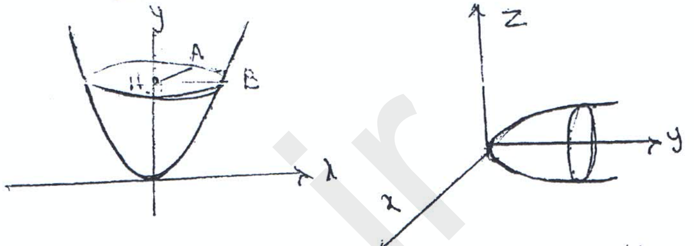
خط L را محور دوران می‌نامیم.



مقطع هر صفحه عمود بر محور دوران و رویه دوار یک دایره است. از این خاصیت برای به دست آوردن معادله رویه دواری استفاده می‌کنیم.

$|AH|=|BH|$

مثال: رویه دوار حاصل از دوران منحنی $x^2 = y$ و $z=0$ را حول محور y ها بیابید.



$A(x, y, z)$

$B(x_0, y_0, 0)$

$H(0, y_1, 0)$

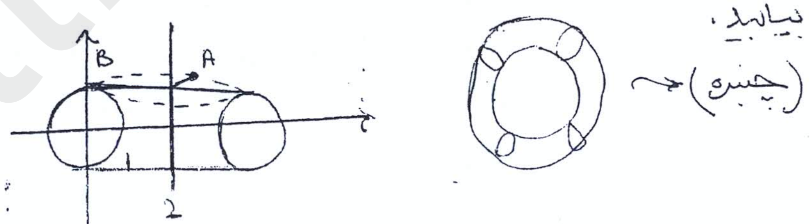
$y = y_0 = y_1$

$|AH| = |BH| \Rightarrow \sqrt{x^2+z^2} = \sqrt{x_0^2} \Rightarrow x^2+z^2 = x_0^2$

نقطه B روی منحنی است $y_0 = x_0^2$ و $y = y_0 \Rightarrow y=y_0=x_0^2$

پس $x^2+z^2=y$ معادله رویه دواری. (سهمی گون دوار)

مثال: رویه دوار حاصل از دوران منحنی $x^2+y^2=1$ و $z=0$ را حول خط $x=2$ و $z=0$ بیابید.



$A(x,y,z)$ $B(x_0,y_0,0)$ $H(2,y_1,0)$ $y=y_0=y_1$

$|AH|=|BH| \Rightarrow \sqrt{(x-2)^2+z^2} = \sqrt{(x_0-2)^2}$

$\Rightarrow (x-2)^2+z^2 = (x_0-2)^2$

$B \in$ منحنی $\Rightarrow x_0^2+y_0^2=1 \Rightarrow x_0 = \pm\sqrt{1-y_0^2} = \pm\sqrt{1-y^2}$

پس معادله رویه دوار به صورت زیر است:

$$(x-2)^2+z^2 = (\pm\sqrt{1-y^2}-2)^2$$

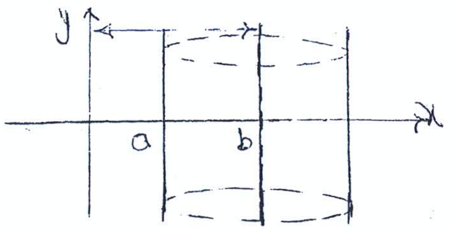
تمرین:

منحنی دوران	محور دوران	رویه دوار
$f(x,y)=0$	x	$f(x, \pm\sqrt{y^2+z^2})=0$
$f(x,y)=0$	y	$f(\pm\sqrt{x^2+z^2}, y)=0$
$f(x,z)=0$	x	$f(x, \pm\sqrt{y^2+z^2})=0$
$f(x,z)=0$	z	$f(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z)=0$
$f(y,z)=0$	y	$f(y, \pm\sqrt{x^2+z^2})=0$
$f(y,z)=0$	z	$f(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z)=0$

مثال: رویه دوار حاصل از دوران منحنی $x=z^3$ و $y=0$ را حول محور x ها بیابید.

$x = (\pm\sqrt{y^2+z^2})^3 \Rightarrow x^2 = (y^2+z^2)^3$

مثال: رویه دوار حاصل از دوران خط $x=a$ و $z=0$ حول خط $x=b$ و $z=0$ را بیابید. $(b>a)$



$\Rightarrow \begin{cases} x+b=a \\ z=0\end{cases}$, $\begin{cases}x+b=b\\ z=0\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x=a-b \\ z=0 \end{cases}$ دوران حول محور yها

$\Rightarrow \pm\sqrt{x^2+z^2}=a-b \Rightarrow x^2+z^2=(a-b)^2$

انتقال B واحد به راست $(x-b)^2+z^2=(a-b)^2$

$y=f(x) \xrightarrow{\text{انتقال به چپ}} f(x+k)$

4) رویه‌های درجه دوم شناخته شده:

هر رویه درجه دوم در $\mathbb{R}^3$ به صورت زیر است:

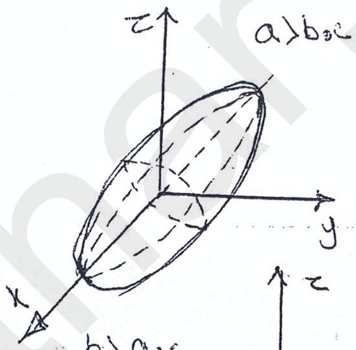
$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+Gx+hy+iz+K=0$$

اکنون حالتهای مختلفی که رویه فوق می‌تواند داشته باشد را بحث می‌کنیم.

1) بیضی‌گون، هر رویه به صورت زیر یک بیضی‌گون نامیده می‌شود:

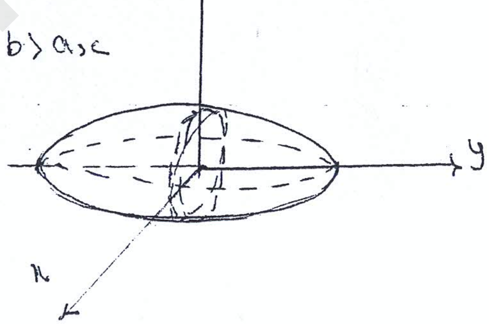
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1}$$

$a>b,c$

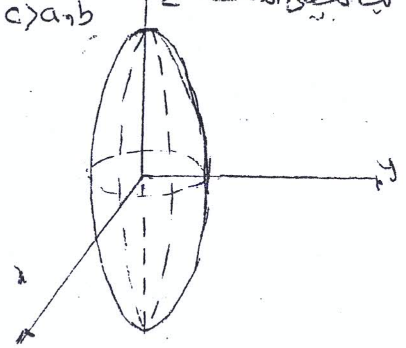


مقطع بیضی‌گون با صفحات $x=K$ و $y=k$ و $z=k$ یک بیضی است.

$b>a,c$



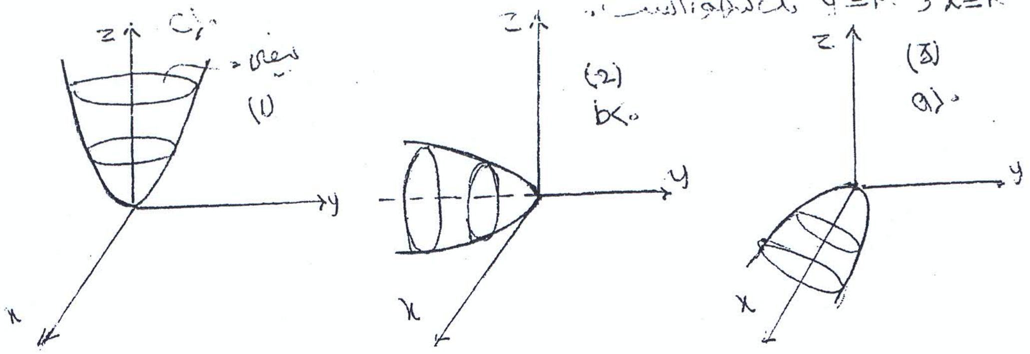
$c>a,b$



2) سهمی‌گون بیضوی، هر رویه به صورت یکی از حالتهای زیر سهمی‌گون بیضوی است:

$$\begin{cases} (1)\quad \boxed{cz=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}} \\ (2)\quad by=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2} \\ (3)\quad ax=\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2} \end{cases}$$

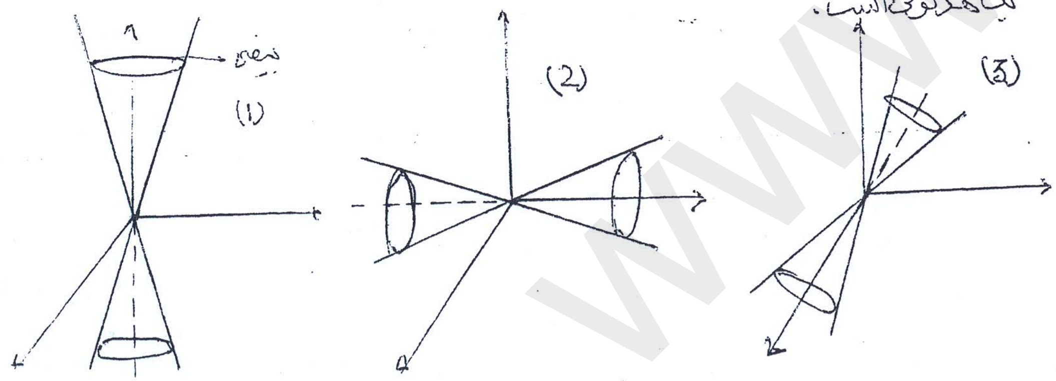
مقطع سهمی‌گون بیضوی شماره ۱ با صفحه $z=k$ یک بیضی و با صفحات $x=k$ و $y=k$ یک سهمی است.



3) مخروط بیضوی: هر رویه به صورت زیر یکی از حالتهای مخروط بیضوی است،

$$(1)\ \boxed{\frac{z^2}{c^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\qquad (2)\ \frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}\qquad (3)\ \frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$$

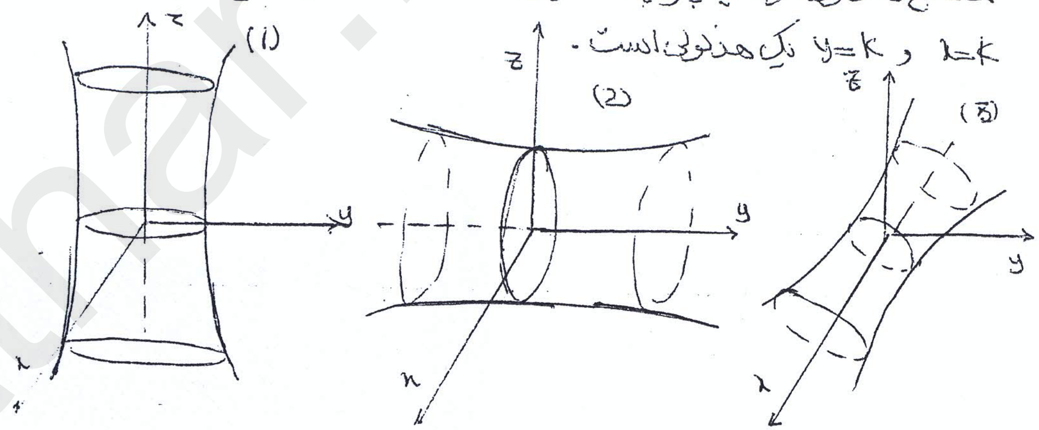
مقطع مخروط بیضوی شماره ۱ با صفحه $z=k$ یک بیضی و با صفحات $x=k$ و $y=k$ یک هذلولی است.



4) هذلولی گون یک پارچه: هر رویه به یکی از حالتهای زیر هذلولی گون یک پارچه نامیده می شود:

(1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ (2) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ (3) $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

مقطع هذلولی گون یک پارچه شماره ۱ با صفحه $z=k$ یک بیضی و با صفحات $x=k$ و $y=k$ یک هذلولی است.



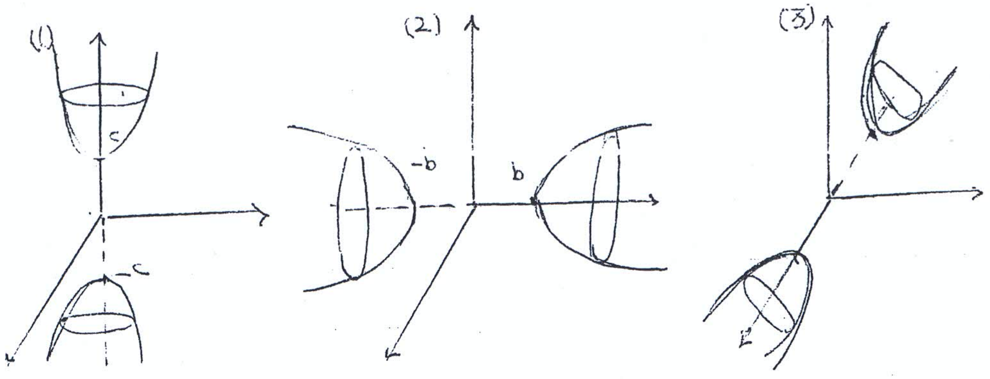
5) هذلولی گون دو پارچه: هر رویه به یکی از حالتهای زیر هذلولی گون دو پارچه نامیده می شود:

(1) $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ (2) $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ (3) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

مقطع هذلولی گون دو پارچه شماره ۱ با صفحه $z=k$ یک بیضی است و با صفحات $x=k$ و $y=k$ یک هذلولی است.

(1) $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{z^2}{c^2} \Rightarrow 1-\frac{z^2}{c^2}\le 0 \Rightarrow z^2\ge c^2 \quad c>0$

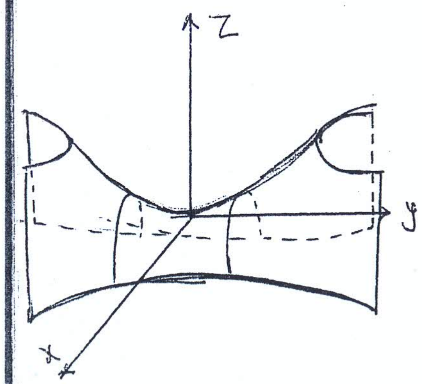
$\Rightarrow |z|\ge c \Rightarrow z\ge c$ یا $z\le -c$



6) سهمی گون هذلولوی (زین اسبی): هر رویه به یکی از حالتهای زیر زین اسبی نامیده می شود.

(1) $cz=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$ (2) $by=\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}$ (3) $ax=\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}$

مقطع زین اسبی شماره (1) با صفحه $z=k$ یک هذلولی است و با صفحات $x=k$ و $y=k$ یک سهمی است.



انتقال ـ دوران:

با انتقال و دوران اکثر رویه ها را می شود به رویه های شناخته شده تبدیل نمود:

$X=x+a \quad Y=y+b \quad Z=z+c$

اگر در صفحه xy دورانی به اندازه θ داشته باشیم آنگاه مختصات جدید و مختصات

تدیم... در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta$$
$$y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$$

رویه زیر را توصیف کنید: $z^2 = xy$

مثال:

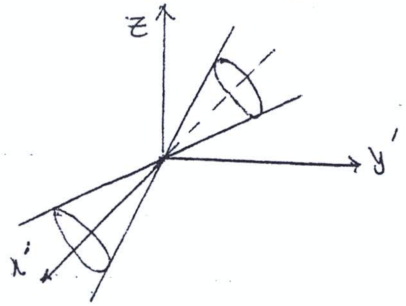
$$\theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y' \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' \end{cases}$$

$$\Rightarrow z^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)$$

$$\Rightarrow z^2 = \frac{1}{2}x'^2 - \frac{1}{2}y'^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}x'^2 = \frac{1}{2}y'^2 + z^2$$

مخروط بیضوی



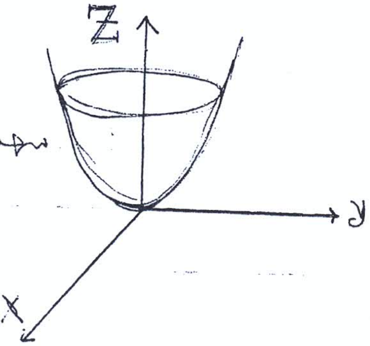
مثال: $x^2 + y^2 - 2x = 1 - z$

$(x-1)^2 + y^2 = 2 - z$

$x - 1 = X \quad , 2 - z = Z$

$X^2 + y^2 = Z$

سهمی‌گون دوار



مثال: $xy + xz = 1$

$y = \frac{\sqrt{2}}{2}(y' - z')$, $z = \frac{\sqrt{2}}{2}(y' + z')$ $\quad \frac{\sqrt{2}}{2}(xy' - xz') + \frac{\sqrt{2}}{2}(xy' + xz')$

$\sqrt{2}xy' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'^2 - y''^2) = 1 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y'')$ و $y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y'')$

$\frac{\sqrt{2}}{2}x'^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}y''^2 = 1$

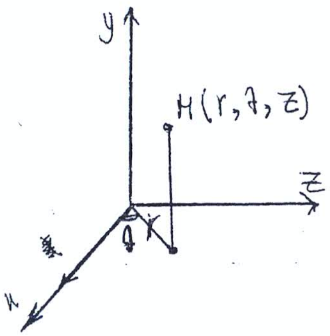
دستگاه مختصات:

1) دستگاه مختصات دکارتی

2) دستگاه مختصات استوانه‌ای

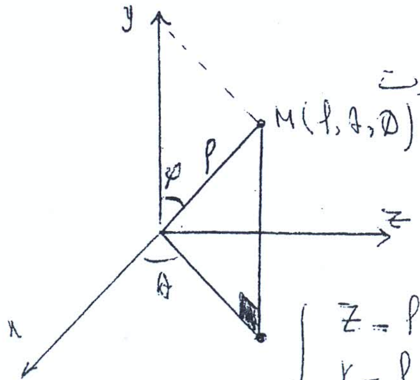
3) دستگاه مختصات کروی

1) دکارتی: هر نقطه در دستگاه مختصات دکارتی به صورت $M(x,y,z)$ نمایش داده می‌شود که در آن x و y و z به ترتیب فاصله نقطه M تا صفحات yz ، xz ، yz می‌باشد.



2) استوانه‌ای: هر نقطه در دستگاه مختصات استوانه‌ای به صورت $M(r,\theta,z)$ نمایش داده می‌شود.

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = tg^{-1}\frac{y}{x} \\ z = z \end{cases} \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$$



3) کروی: نمایش هر نقطه در این دستگاه به صورت $M(\rho,\theta,\varphi)$ می‌باشد.

$0 \le \theta \le 2\pi$

$0 \le \varphi \le \pi$

$$\begin{cases} z = \rho\cos\varphi \\ r = \rho\sin\varphi \\ x = \rho\sin\varphi\cos\theta \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta = tg^{-1}\frac{y}{x} \\ \varphi = \cos^{-1}\frac{z}{\rho} \end{cases}$$

تذکر: مقطع دو رویه یک منحنی است و به عنوان یک تابع برداری می‌توان همه مباحث توابع برداری را بر روی آن بیان کرد.

$y=f(x) \Rightarrow r(t)=t\vec{i}+f(t)\vec{j}$

$y=x^2 \Rightarrow r(t)=t\vec{i}+t^2\vec{j}$

$x^2+y^2=1 \Rightarrow r(t)=\sin\theta\,\vec{j}+\cos\theta\,\vec{i}$

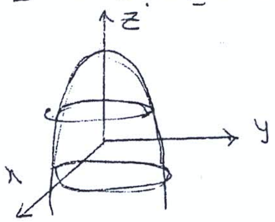
یا $r(t)=t\vec{i}\pm\sqrt{1-t^2}\,\vec{j}$

مثال: مقطع دو رویه زیر را پارامتری کنید.

$\begin{cases} z=2-x^2-y^2 \Rightarrow \text{سهمی‌گون دوار} \\ z=x^2-y^2 \Rightarrow \text{زین اسبی} \end{cases}$

$x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$

$r(t)=\vec{i}+t\vec{j}+(1-t^2)\vec{k}$



مثال: مطلوبست محاسبه T، N، B، k، τ در نقطه $(0,1,1)$ از منحنی مقطع دو رویه فوق.

$r(t)=\vec{i}+t\vec{j}+(1-t^2)\vec{k} \qquad t=1$

$T=\dfrac{r'(t)}{\|r'(t)\|}=\dfrac{\vec{j}-2t\vec{k}}{\sqrt{1+4t^2}} \qquad T(1)=\dfrac{\vec{j}-2\vec{k}}{\sqrt{5}} \qquad B=\dfrac{r'\times r''}{\|r'\times r''\|}$

$r'(t)=\vec{j}-2\vec{k} \qquad r'(1)=-2\vec{k} \qquad r'(1)\times r''(1)=(\vec{j}-2\vec{k})(-2\vec{k})=-2\vec{i}$

$\vec{B}(1)=\dfrac{-2\vec{i}}{2}=-\vec{i} \qquad \vec{N}(1)=\vec{B}(1)\times\vec{T}(1)=-i\times\left(\dfrac{\vec{j}-2\vec{k}}{\sqrt{5}}\right)=\dfrac{-\vec{k}-2\vec{j}}{\sqrt{5}}$

$r'(t)\times r''(t)=(\vec{j}-2t\vec{k})\times(-2\vec{k})=-2i \qquad B=-\vec{i} \qquad \dfrac{dB}{ds}=0 \Rightarrow \tau=0$

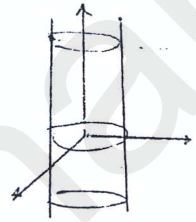
مثال: رویه‌های زیر را توصیف کنید.

1) $\Rightarrow r=2$ 2) $r=2\cos\theta$ 3) $z=r$ 4) $\Rightarrow z=r^2$ 5) $\Rightarrow z=r^2\sin 2\theta$

6) $\rho=2$ 7) $\rho=2\cos\phi$ 8) $\Rightarrow \varphi=\pi/4$

1) $x^2+y^2=4$

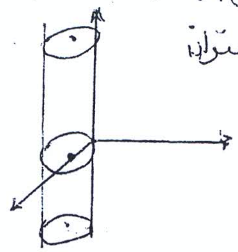
استوانه



(2) $r^2=2r\cos\theta$

$x^2+y^2=2x \qquad (x-1)^2+y^2=1$

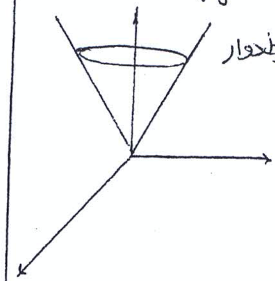
استوانه



3) $z=r$

$z=\sqrt{x^2+y^2}$

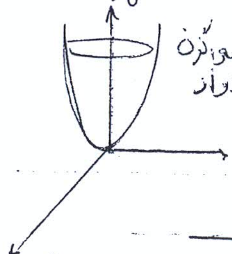
مخروط دوار



4) $z=r^2$

$z=x^2+y^2$

سهمی‌گون دوار



5) $z=r^2\,2\sin\theta\cos\theta$

$\Rightarrow z=2xy$

$\begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y') \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y') \end{cases}$

$z=x'^2-y'^2$ زین اسبی

6) $\rho=2$

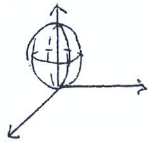
$x^2+y^2+z^2=4$

کره

7) $\rho=2\cos\phi$

$\rho^2=2\rho\cos\phi \qquad x^2+y^2+z^2=2z$

$x^2+y^2+(z-1)^2=1$ کره

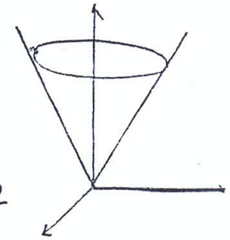


8) $\varphi=\frac{\pi}{4}$

$x^2+y^2=\rho^2\sin^2\varphi$

$\varphi=\frac{\pi}{4} \Rightarrow x^2+y^2=\frac{1}{2}\rho^2$

$z^2=\frac{1}{2}\rho^2, \quad x^2+y^2=z^2$ مخروط



توابع چندمتغیره:

هر تابعی با دامنه در $\mathbb{R}^n$ و برد در $\mathbb{R}$ را یک تابع چندمتغیره می‌نامیم.

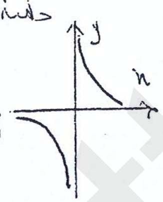
$$f: D\subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x_1,x_2,\dots,x_n)\longmapsto f(x_1,x_2,\dots,x_n)$$

مثال: $f(x,y)=x^2y+xy+3x-4y+5$ تابع دو متغیره

مثال: $f(x,y,z)=xye^{x^2yz}$ تابع سه متغیره

مثال: $f(x,y)=\frac{1}{\ln(xy)}$ دامنه توابع زیر را مشخص کنید.

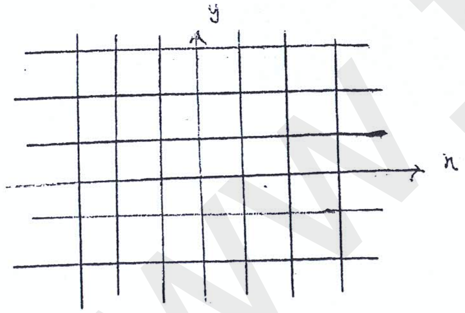
$D_f=\{(x,y)\mid xy>0,\ \ln(xy)\neq 0\}=\{(x,y)\mid xy>0,\ xy\neq 1\}$



مثال: $f(x,y)=\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\sin y}$

$D_f=\{(x,y)\mid \sin x\neq 0,\ \sin y\neq 0\}$

$=\{(x,y)\mid x\neq k\pi,\ y\neq k\pi\}$, $k\in\mathbb{Z}$



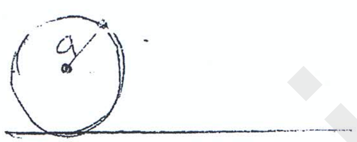
حد توابع چندمتغیره:

فرض کنید تابع n متغیره $f(M)$ در یک همسایگی محذوف $M_0\in\mathbb{R}^n$ تعریف شده باشد. در این صورت

$$\lim_{M\to M_0} f(M)=L \iff \forall\epsilon>0\ \exists\delta>0 \ni \|M-M_0\|<\delta \Rightarrow |f(M)-L|<\epsilon$$

منحنی سیکلوئید (چرخزاد):

تعریف: در اثر غلطاندن یک چرخ به شعاع a یک نقطه دلخواه بر روی این چرخ یک منحنی ایجاد می‌کند یعنی مکان هندسی تمام نقاطی که P ایجاد می‌کند منحنی سیکلوئیدی می‌باشد که آن را بیابید.



تمرین 1) طول قوس منحنی $y^2=x^3$ از $(1,-1)$ تا $(1,1)$

2) طول قوس منحنی $y=\cosh x$ از $(0,1)$ تا $(x,\cosh x)$

3) طول قوس منحنی چرخزاد $r(t)=a(t-\sin t,1-\cos t)$ $(a>0)$ در $[0,2\pi]$

4) مطلوب است محاسبه T، N، B، k و τ در [illegible] برای

الف) $r(t)=(2t^2,t^3-3t,t^3+3t)$

ب) $r(s)=(\frac{4}{5}\cos s,1-\sin s,-\frac{3}{5}\cos s)$

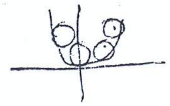
پ) $r(t)=(\cosh t,\sinh t,t)$

برای (پ) تاب و انحنا را برحسب طول قوس بدست آورید.

5) شعاع انحنای منحنی $r(t)=(4\cos t,\sin t,4\cos t)$ را بیابید

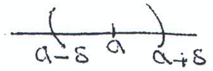
6) تاب و انحنا را برای $r(t)=(\int f(t)\sin t\,dt,\int f(t)\cos t\,dt,\int f(t)\,dt)$ برحسب t بیابید

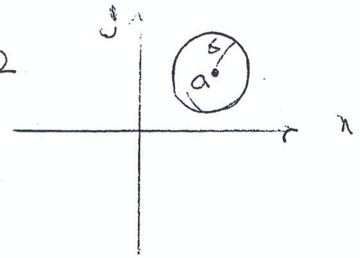
7) دایره بوسان $y=\operatorname{tg}x$ در $(\frac{\pi}{4},1)$

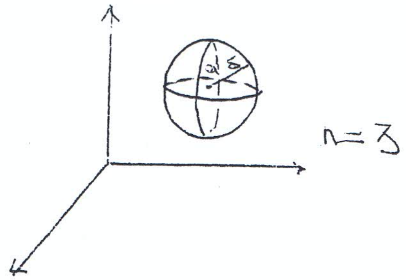


8) مکان هندسی مراکز انحنای منحنی $y=x^2$ را بیابید.

همسایگی در $\mathbb{R}^n$

$n=1$ 

$n=2$ 

$n=3$ 

در $\mathbb{R}^3$ فرض کنید $M=(x,y,z)$ و $M_0=(x_0,y_0,z_0)$

$$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} f(x,y,z)=L \iff \forall \epsilon>0,\ \exists \delta>0,\ \ni 0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}<\delta$$

$$\Rightarrow |f(x,y,z)-L|<\epsilon$$

مثال: ثابت کنید: $\lim_{(x,y,z)\to(1,2,3)} 2x-3y+4z=8$

$$\forall \epsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \ni 0<\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}<\delta$$

$$\Rightarrow |2x-3y+4z-8|<\epsilon$$

$$|2x-3y+4z-8|=|2(x-1)-3(y-2)+4(z-3)|<\epsilon$$

$$|2(x-1)-3(y-2)+4(z-3)|\le 2|x-1|+3|y-2|+4|z-3|$$

$$\le 9\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}<\frac{\epsilon}{9}$$

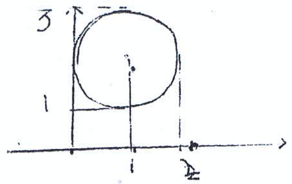
پس کافی است $0<\delta\le\frac{\epsilon}{9}$

حامد رهبری

مثال: ثابت کنید: $\lim_{(x,y)\to(1,2)} x^2+xy-3=0$

$$\forall\epsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \ni 0<\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}<\delta \Rightarrow |x^2+xy-3|<\epsilon$$

$$|x^2+xy-3|=|x(x-1)+x(y-2)+3x-3|\le|x+3||x-1|+|x||y-2|$$



$\delta\le 1$ $\quad 0<x<2$, $\quad 1<y<3$ $\Rightarrow 3(x+3)\}<5$

$$\Rightarrow |x^2+xy-3|\le 5|x-1|+2|y-2|$$

$$\le 7\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}<\epsilon \Rightarrow \delta=\mathrm{Min}\{1,\frac{\epsilon}{7}\}$$ قرار می‌دهیم.

مثال: $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\sin(2x+3y)=0$

$$\forall\epsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \ni 0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta\Rightarrow|(x+y)\sin(2x+3y)|<\epsilon$$

$$|(x+y)\sin(2x+3y)|\le|x+y|\le|x|+|y|\le 2\sqrt{x^2+y^2}<\epsilon$$

پس $0<\delta\le\frac{\epsilon}{2}$

مثال: $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2\sin(y)}{x^2+y^2}=0$ $\qquad |\sin x-\sin y|\le|a-b|$, $\ \sin x\le x$

$$\forall\epsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \ni 0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta\Rightarrow\left|\frac{x^2\sin(y)}{x^2+y^2}\right|<\epsilon$$

$$\left|\frac{x^2\sin(y)}{x^2+y^2}\right| \le \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| \le |y| \le \sqrt{x^2+y^2} < \epsilon$$

پس $0<\delta\le\epsilon$

مثال: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{|x|+|y|} = 0$ نشان دهید.

$$\forall \epsilon>0\ \exists \delta>0\ \ni 0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta \Rightarrow \left|\frac{xy}{|x|+|y|}\right|<\epsilon$$

$$\frac{|xy|}{|x|+|y|} = \frac{|x||y|}{|x|+|y|} \le |y| \le \sqrt{x^2+y^2} < \epsilon$$

پس $0<\delta\le\epsilon$

مثال: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin^2(x-y)}{|x|+|y|} = 0$

$$\forall \epsilon>0\ \exists \delta>0\ \ni 0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta \Rightarrow \left|\frac{\sin^2(x-y)}{|x|+|y|}\right|<\epsilon$$

$$\left|\frac{\sin^2(x-y)}{|x|+|y|}\right| \le \frac{(x-y)^2}{|x|+|y|} \le \frac{(|x|+|y|)^2}{|x|+|y|} = |x|+|y| \le 2\sqrt{x^2+y^2} < \epsilon$$

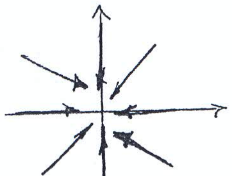
پس $0<\delta\le\frac{\epsilon}{2}$

قضیه: حد توابع چندمتغیره در صورت وجود منحصر به فرد است. (تمرین)

برای اثبات عدم وجود حد با کمک قضیه فوق کافی است از بین بی‌شمار مسیری که به نقطه $M\in R^n$ میل می‌کند فقط دو مسیر بیابیم که مقدار حد روی آن دو مسیر برابر نباشد.

مثال: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ = حد موجود نمی‌باشد نشان دهید

راه اول



C_1 مسیر محور xها باشد

$$C_1: y=0 \Rightarrow \lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = 0$$

نیمساز: $C_2: y=x \Rightarrow \lim\limits_{(x,x)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+x^2} \to \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = 1/2$

راه دوم

دسته مسیری که از مبدأ می‌گذرد به صورت $y=mx$ می‌تواند باشد

$$\lim_{(x,mx)\to(0,0)} \frac{mx^2}{x^2+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{(1+m^2)x^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

چون مقدار حد به m بستگی دارد پس تابع حد ندارد.

مثال: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$

$$y=mx \Rightarrow \lim_{(x,mx)\to 0} \frac{m^2x^2}{x^2+m^4x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{m^2x}{1+m^4x^3} = 0$$

به m بستگی ندارد (چیزی نمی‌توان گفت).

$$y=\sqrt{x} \Rightarrow \lim_{(x,\sqrt{x})\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2}$$

پس حد ندارد.

مثال: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy}$

پس حد وجود دارد. چون تابع به تعریف حد صدق می‌کند.

قضایای حد توابع حقیقی یک متغیره معمولی، تفاضل، حاصلضرب و تقسیم برای توابع چند متغیره نیز برقرار است.

پیوستگی توابع چند متغیره: فرض کنید تابع چند متغیره f در یک همسایگی $M_0 \in \mathbb{R}^n$ معین باشد. تابع f را در M_0 پیوسته نامیم هرگاه:

$$\forall \epsilon>0,\ \exists \delta>0: \|M-M_0\|<\delta \Rightarrow |f(M)-f(M_0)|<\epsilon$$

و یا:
$$\lim_{M\to M_0} f(M)=f(M_0)$$

مثال: تابع $f(x,y)=\frac{x^2y}{x^2+y^2}$ در $(0,0)$ پیوسته نیست چون $f(0,0)$ نامعین است.

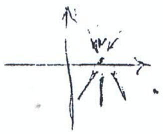
مثال: تابع $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$ در $(0,0)$ پیوسته می‌باشد.

قضیه: اگر تابع f در یک همسایگی M_0 کراندار باشد و $\lim_{x\to M_0} g(x)=0$ آنگاه

$$\lim_{x\to M_0} f(x)\cdot g(x)=0$$

مثال: تابع $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{|x|+|y|} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ در $(0,0)$ پیوسته است.

مثال: نقاط ناپیوستگی تابع $f(x,y)=\begin{cases}1 & xy\neq 0\\ 0 & xy=0\end{cases}$ را در $\mathbb{R}^2$ مشخص کنید.



حل: نقاط روی محورها (محور x و y) نقاط ناپیوستگی تابع هستند.

* قضایای پیوستگی مشابه قضایای حدی باشند.

قضیه: چندجمله‌ای‌ها در $\mathbb{R}^n$ پیوسته‌اند

چندجمله‌ای درجه ۱ در $\mathbb{R}$: $P_1(x)=ax+b$

چندجمله‌ای از درجه n در $\mathbb{R}$: $P_n(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$

چندجمله‌ای از درجه ۱ در $\mathbb{R}^2$: $P_1(x,y)=ax+by+c$

چندجمله‌ای از درجه ۲ در $\mathbb{R}^2$: $P_2(x,y)=ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f$

چندجمله‌ای از درجه k در $\mathbb{R}^2$: $P_k(x,y)=\sum_{0\leq i+j\leq k} a_{ij}x^iy^j$

مثال: $P_3(x,y)=a_{00}+a_{10}x+a_{01}y+a_{20}x^2+a_{11}xy+a_{02}y^2+a_{30}x^3+a_{21}x^2y+a_{12}xy^2+a_{03}y^3$

چندجمله‌ای از درجه K در $\mathbb{R}^n$:

$$P_k(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\sum_{0\leq i_1+i_2+\cdots+i_n\leq K} a_{i_1i_2\ldots i_n}\, x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n}$$

مثال: $P_3(x,y,z)=\sum_{0\leq i+j+k\leq 2} a_{ijk}x^iy^jz^k=a_{000}+a_{100}x+a_{010}y+a_{001}z$
$+a_{200}x^2+a_{110}xy+a_{101}xz+a_{020}y^2+a_{011}yz+a_{002}z^2$

پیوستگی: توابع گویا در دامنه تعریفشان پیوسته‌اند: $x\in\mathbb{R}^n$ $\quad f(x)=\frac{\text{چندجمله‌ای}}{\text{چندجمله‌ای}}$

* $f: D\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ $\quad g: D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad g\circ f$

مشتق نسبی (جزئی): فرض کنید تابع $f(x,y)$ در یک همسایگی (x_0,y_0) معین باشد مشتق نسبی تابع f نسبت به x در (x_0,y_0) را با نماد $f_x(x_0,y_0)$ و یا $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

و به طور مشابه:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

مثال: فرض کنید $f(x,y)=x^2y+x-y+2$ مطلوبست محاسبه $f_x(1,2)$ و $f_y(-1,0)$.

$$f_x(1,2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x,2)-f(1,2)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(1+\Delta x)^2+(1+\Delta x)-2+2-3}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{4\Delta x+2\Delta x^2+\Delta x}{\Delta x}=5=\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)$$

$$f_y(-1,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(-1,0+\Delta y)-f(-1,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{-1+\Delta y-\Delta y+2-1}{\Delta y}=0$$

مثال: فرض کنید $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$ مطلوبست محاسبه $f_x(0,0)$ و $f_y(0,0)$.

در $(0,0)$:

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0$$

تابع فوق حد ندارد و پیوسته نیست

اما مشتقات نسبی آن موجود است

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0$$

مثال: فرض کنید $f(x,y)=\begin{cases}0 & x^2+y^2=0\\ \frac{\sin^2(x-y)}{|x|+|y|} & x^2+y^2\neq 0\end{cases}$ مطلوبست محاسبه $f_x(0,0)$ و $f_y(0,0)$.

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\sin^2(\Delta x)}{|\Delta x|}-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin^2\Delta x}{|\Delta x|\,\Delta x}=$$ موجود نیست

$f_y(0,0)=$ موجود نیست

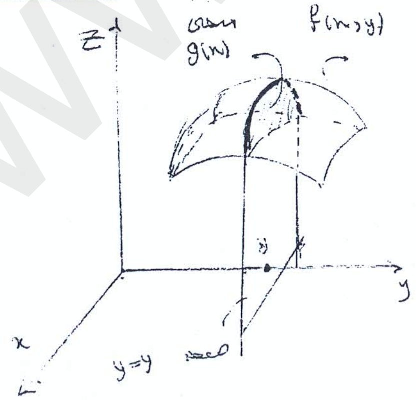
این تابع در $(0,0)$ دارای حد است و پیوسته می‌باشد ولی دارای مشتق نیست

تذکر: مشتق با حد و پیوستگی هیچ رابطه‌ای ندارد (مشتقات نسبی).

** فرض کنید تابع $f(x,y_0)=g(x)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x}=g'(x_0)$$



* تابع دو متغیره نمایش یک سطح را در فضای $\mathbb{R}^3$ خواهد بود و مشتق نسبی تابع f در نقطه (x_0,y_0) نسبت به x برابر با شیب خط مماس بر منحنی $g(x)$ در نقطه x_0 می‌باشد منحنی $g(x)$ از تقاطع صفحه $y=y_0$ با سطح $z=f(x,y)$ حاصل می‌شود.

مثال: فرض کنید $f(x,y,z)=xy+yz^2+x^3z+4z-5$ مطلوبست محاسبه $f_x(1,2,3)$ ، $f_y(1,2,3)$ ، $f_z(1,2,3)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbb{R}^3)=y+3x^2z \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbb{R}^3)=x+z^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbb{R}^3)=2yz+x^3+4$$

$$f_x(1,2,3)=11 \qquad f_y(1,2,3)=10 \qquad f_z(1,2,3)=17$$

مشتق سوئی (مشتق جهتی)، فرض کنید تابع $f(x,y)$ در یک همسایگی $M_0(x_0,y_0)$ معین باشد و فرض کنید $\vec{u}=a\vec{i}+b\vec{j}$ برداری یکانی باشد $(a^2+b^2=1)$ مشتق سوئی تابع f در جهت بردار $\vec{u}$ در نقطه M_0 به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D_{\vec{u}}f(M_0)=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(M_0+tu)-f(M_0)}{t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x_0+at,y_0+bt)-f(x_0,y_0)}{t}$$

مثال: فرض کنید $f(x,y)=xy^2+x^2$ مطلوبست محاسبه $D_{\vec{u}}f(1,2)$

$$\vec{u}=\frac{3}{5}\vec{i}+\frac{4}{5}\vec{j}$$

$$D_{\vec{u}}f(1,2)=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(1+\frac{3}{5}t,\,2+\frac{4}{5}t)-f(1,2)}{t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{(1+\frac{3}{5}t)(2+\frac{4}{5}t)^2-(1+\frac{3}{5}t)^2-5}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{(1+\frac{3}{5}t)(4+\frac{16}{5}t+\frac{16}{25}t^2)+1+\frac{6}{5}t+\frac{9}{25}t^2-5}{t}=\frac{34}{5}$$

مثال: نشان دهید تابع f در $(0,0)$ در چه جهاتی دارای مشتق سوئی است.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$$

حل: فرض کنید $\vec{u}=a\vec{i}+b\vec{j}$ برداری یکانی و دلخواه باشد $(a^2+b^2)=1$

$$D_{\vec{u}}f(0,0)=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(at,bt)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\frac{abt^2}{a^2t^2+b^2t^2}}{t}=$$

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{ab}{t}=\begin{cases}0 & ab=0\\ \text{نامعین} & ab\neq 0\end{cases}$$

$ab=0 \Rightarrow a=0$ یا $b=0$

$a=0 \Rightarrow b=\pm 1$

$b=0 \Rightarrow a=\pm 1$ $\Rightarrow \vec{u}=\pm\vec{i},\pm\vec{j}$

مثال: تابع f در $(0,0,0)$ در چه جهاتی دارای مشتق سوئی می‌باشد

$$f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{x^2z}{x^2+y^2+z^2} & x^2+y^2+z^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2+z^2=0\end{cases}$$

$\vec{u}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$ و $\|u\|=1$

$$D_{\vec{u}}f(0,0,0)=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(at,bt,ct)-f(0,0,0)}{t}$$

$$D_{\vec{u}}f(0,0,0)=\lim_{t\to 0^+}\frac{\frac{a^2ct^3}{(a^2+b^2+c^2)t^2}-0}{t}=a^2c$$

پس در همه جهات دارای مشتق سوئی است.

$$D_{i,j,k}f(0,0,0)=0$$

تمرین: رابطه مشتق سوئی با مشتق جزئی؟

$$D_{\vec u} f(M_0) = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(M_0+tu)-f(M_0)}{t} \qquad M_0\in\mathbb{R}^2$$

$$D_{\vec u} f(x_0,y_0)=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x_0+at,\, y_0+bt)-f(x_0,y_0)}{t}$$

$\vec u=\pm i \qquad D_{\vec i} f(x_0,y_0)=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x_0+t,\, y_0)}{t}=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$

$\vec u=\pm j \qquad D_{\vec j} f(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$

پس مشتقات جزئی حالت خاصی از مشتقات سوئی می باشند.

مشتق پذیری: فرض کنید $f(x,y)$ در یک همسایگی (x_0,y_0) تعریف باشد تابع f را در (x_0,y_0) مشتق پذیر نامیم هرگاه اعداد ثابت A و B و توابع $\alpha(\Delta x,\Delta y)$ و $\beta(\Delta x,\Delta y)$ موجود باشند به طوریکه به ازاء هر Δx و Δy که $(x_0+\Delta x,\, y_0+\Delta y)\in D_f$ داشته باشیم:

$$f(x_0+\Delta x,\, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=A\Delta x+B\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\\ \Delta y}\to 0} \alpha,\beta=0$$

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+\alpha\Delta x$$

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=A+\alpha \qquad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=A$$

مثال: ثابت کنید تابع $f(x,y)=x^2y$ در $\mathbb{R}^2$ مشتق پذیر می باشد.

حل: فرض کنید $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ دلخواه باشد

$$f(x_0+\Delta x,\, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=(x_0+\Delta x)^2(y_0+\Delta y)-x_0^2y_0$$

$$=\cancel{x_0^2y_0}+2x_0\Delta x y_0+\Delta x^2y_0+x_0^2\Delta y+2x_0\Delta x\Delta y+\Delta x^2\Delta y-\cancel{x_0^2y_0}$$

$$=2x_0y_0\Delta x+x_0^2\Delta y+(y_0\Delta x)\Delta x+(2x_0\Delta x+\Delta x^2)\Delta y$$

$A=2x_0y_0 \quad , B=x_0^2 \quad , \alpha=y_0\Delta x \quad , \beta=2x_0\Delta x+\Delta x^2$

$$\lim_{\substack{\Delta x\\ \Delta y}\to 0} \alpha,\beta=0$$

پس f در $\mathbb{R}^2$ مشتق پذیر است.

مثال: نشان دهید تابع $f(x,y,z)=xy+z^2$ در $(-1,2,3)$ مشتق پذیر است.

$$f(-1+\Delta x,\, 2+\Delta y,\, 3+\Delta z)-f(-1,2,3)=$$

$$(-1+\Delta x)(2+\Delta y)+(3+\Delta z)^2-7=-2-\Delta y+2\Delta x+\Delta x\Delta y$$

$$+9+6\Delta z+\Delta z^2-7=2\Delta x-\Delta y+6\Delta z+\Delta x\Delta y+\Delta z\Delta z$$

$A=2 \ , B=-1 \ , C=6 \ , \alpha=\Delta y \ , \beta=0 \ , \gamma=\Delta z$

$$\lim_{\substack{\Delta x\\ \Delta y\\ \Delta z}\to 0} \alpha,\beta,\gamma=0$$

پس تابع مشتق پذیر است.

قضیه: اگر تابع f در (x_0,y_0) مشتق پذیر باشد آنگاه $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ در (x_0,y_0) موجودند (شرط مشتق پذیری وجود مشتقات جزئی است)

اثبات: فرض کنید تابع f در (x_0,y_0) مشتق پذیر باشد پس:

$$\exists\, A,B,\alpha,\beta \ni f(x_0+\Delta x,\, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=A\Delta x+B\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\\ \Delta y}\to 0} \alpha,\beta=0 \qquad \forall\, \Delta x,\Delta y$$

hamednafisi@gmail.com

چون در رابطه فوق به ازاء هر Δx و Δy برقرار است پس برای $\Delta y = 0$ نیز برقرار است پس داریم:

$$f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) = A\Delta x + \alpha \Delta x$$

$$\frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = A + \alpha$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = A \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = A$$

پس $\frac{\partial f}{\partial x}$ در (x_0, y_0) موجود است. به طور مشابه با فرض $\Delta x = 0$ خواهیم داشت:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = B$$

مثال: نشان دهید تابع $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin^2(x+y)}{|x|+|y|} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ در $(0,0)$ مشتق پذیر نیست؟

حل: $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin^2 \Delta x}{\Delta x |\Delta x|} =$ موجود نیست

پس f در $(0,0)$ مشتق پذیر نیست.

قضیه: اگر تابع $f(x,y)$ در (x_0, y_0) مشتق پذیر باشد آنگاه f در (x_0, y_0) پیوسته است (شرط لازم مشتق پذیری پیوستگی است).

اثبات: بنابر تعریف مشتق پذیری داریم:

$$\exists \alpha, \beta \ni f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y$$

با فرض $x = x_0 + \Delta x$ و $y = y_0 + \Delta y$ داریم:

$$f(x,y) - f(x_0, y_0) = A(x - x_0) + B(y - y_0) + \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0)$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$$

پس f در (x_0, y_0) پیوسته است.

مثال: مشتق پذیری یا عدم مشتق پذیری تابع $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$ را در $(0,0)$ بررسی کنید.

حل: مشتقات جزئی موجود است. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

$$y = mx \Rightarrow \lim_{(x,mx) \to (0,0)} f(x,y) = \frac{m}{1+m^2}$$

حد ندارد پس پیوسته نیست.

پس f در $(0,0)$ مشتق پذیر نیست.

مثال: ثابت کنید تابع $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$ در $(0,0)$ مشتق پذیر نیست.

حل: مشتقات جزئی موجود است. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0 = f(0,0)$$

پس تابع f دارای مشتقات جزئی بوده و پیوسته نیز است.

فرض کنید تابع f در $(0,0)$ مشتق پذیر است (فرض خلف)

$$\exists \alpha, \beta \ni f(\Delta x, \Delta y) - f(0,0) = \alpha \Delta x + \beta \Delta y$$

$$\frac{\Delta x^2 \Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \alpha \Delta x + \beta \Delta y \qquad \forall \Delta x, \Delta y$$

با فرض $\Delta x = \Delta y$ داریم:

$$\frac{\Delta x^3}{2\Delta x^3} = \cancel{\Delta x}/\cancel{\Delta x} = (\alpha+\beta) \Rightarrow \frac{1}{2} = \alpha + \beta \underset{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}}{\Rightarrow} \frac{1}{2} = 0$$ تناقض

تمرین: مشتق‌پذیری یا عدم مشتق‌پذیری تابع

$$f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2} & x^2+y^2+z^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2+z^2=0\end{cases}$$

را در $(0,0,0)$ بررسی کنید.

قضیه: اگر تابع در (x_0,y_0) مشتق‌پذیر باشد آنگاه در (x_0,y_0) در هر سویی دارای مشتق سویی می‌باشد (شرط لازم است)

اثبات: بنابر تعریف مشتق‌پذیری داریم:

$$\exists\, \alpha,\beta \Rightarrow f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\\ \Delta y}\to 0}\alpha,\beta$$

فرض کنید $u=a\vec{i}+b\vec{j}$ برداری یکانی دلخواه باشد فرض کنید

$$\Delta x = at\,,\quad \Delta y = bt$$

پس:

$$f(x_0+at, y_0+bt)-f(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)at+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)bt+\alpha at+\beta bt$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+at,y_0+bt)-f(x_0,y_0)}{t}=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)a+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)b$$

$$\Rightarrow D_{\vec{u}}f(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)a+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)b$$

پس $D_{\vec{u}}f(x_0,y_0)$ در هر جهت دلخواه $\vec{u}$ موجود است.

تعریف: بردار $\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$ را بردار گرادیان می‌نامیم و می‌نویسیم:

$$\vec{\nabla} f=\overrightarrow{\text{grad} f}=f_x\vec{i}+f_y\vec{j}$$

نتیجه: اگر تابع f در (x_0,y_0) مشتق‌پذیر باشد آنگاه:

$$D_{\vec{u}}f(x_0,y_0)=\vec{\nabla} f(x_0,y_0)\cdot\vec{u}$$

مثال*: $f(x,y)=xy^2+x^2$ $\quad (1,2)$ $\quad \vec{u}=\frac{3}{5}\vec{i}+\frac{4}{5}\vec{j}$

$$\vec{\nabla} f=(y^2+2x,\,2xy)\qquad \vec{\nabla} f(1,2)=(6,4)$$

$$D_{\vec{u}}f(1,2)=(6,4)\left(\tfrac{3}{5},\tfrac{4}{5}\right)=\frac{34}{5}$$

مثال*: تابع

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$$

در $(0,0)$ در هر سویی دارای مشتق سویی است اما مشتق‌پذیر نیست.

$$D_{\vec{u}=a\vec{i}+b\vec{j}}f(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{a^2bt^2}{(a^2+b^2)t^2}-0}{t}=a^2b$$

ماکزیمم مقدار مشتق سویی: فرض کنید تابع f مشتق‌پذیر باشد.

$$D_{\vec{u}}f=\vec{\nabla} f\cdot\vec{u}=|\vec{\nabla} f||\vec{u}|\cos\theta=|\nabla f|\cos\theta$$

پس: $D_{\vec{u}}f=|\nabla f|\cos\theta$

اگر $\cos\theta=1$ آنگاه ماکزیمم مقدار مشتق سویی را خواهیم داشت. یعنی $\theta=0$ و یا بردار گرادیان و بردار u هم جهت می‌شوند و اگر $\cos\theta=-1$ می‌نیمم مقدار مشتق سویی را

خواهیم داشت یعنی $\theta=\pi$ و یا بردار گرادیان و بردار $\vec{u}$ خلاف جهت باشند.

مثال: ماکزیمم و می‌نیمم مقدار مشتق سوئی تابع $f(x,y)=x^2y+xy^3$ در نقطه $(1,2)$ در چه جهاتی است.

$$\vec{\nabla} f=(2xy+y^3,\ x^2+3xy^2) \qquad \vec{\nabla} f(1,2)=(12,13)$$

در جهت بردار $(12,13)$ ماکزیمم مقدار و در جهت $-(12,13)$ می‌نیمم مقدار اتفاق می‌افتد.

مثال: فرض کنید $f(x,y)=xy^2+x^3y+2x-3y+4$ ماکزیمم مقدار مشتق سوئی تابع در نقطه‌ای روی محور xها برابر با 10 می‌باشد. آن نقطه را بیابید.

$$A(a,0) \qquad \vec{\nabla} f=(y^2+3x^2y+2,\ 2xy+x^3-3)$$

$$\vec{\nabla} f(a,0)=(2,\ a^3-3) \qquad |\vec{\nabla} f(a,0)|=\sqrt{4+(a^3-3)^2}=10$$

$$(a^3-3)^2=96 \qquad a^3=3\pm\sqrt{96} \qquad a=\sqrt[3]{3\pm\sqrt{96}}$$

قاعده زنجیره‌ای (2): اگر f تابعی n متغیره باشد و $x=x(u,v)$ ، $y=y(u,v)$ در این صورت:

$$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}$$

$f(u,v)$ ، $u=u(x,y)$ ، $v=v(x,y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{و} \quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

مثال: فرض کنید $f(u,v)=u^2+v^3$ و $u=xy$ و $v=x^2+y^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2uy+3v^2(2x) \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=2ux+3v^2(2y)$$

مثال: فرض کنید $\omega(x,y,z)=f(\overbrace{x-y}^{u},\ \overbrace{y-z}^{v},\ \overbrace{z-x}^{k})$

مطلوبست محاسبه $\omega_x+\omega_y+\omega_z=?$

$$\omega_x=f_u\cdot u_x+f_v\cdot v_x+f_k\cdot k_x=f_u(1)+f_v(0)+f_k(-1)$$
$$=f_u-f_k$$
$$\omega_y=f_u(-1)+f_v(1)+f_k(0)=-f_u+f_v$$
$$\omega_z=f_u(0)+f_v(-1)+f_k(1)=-f_v+f_k$$

پس: $\omega_x+\omega_y+\omega_z=0$

مثال: $f(x,y)=x^2y+xy^2+2x^3+3y^3$ مطلوبست محاسبه xf_x+yf_y

$$f_x=2xy+y^2+6x^2 \qquad f_y=x^2+2xy+9y^2$$

$$xf_x+yf_y=2x^2y+xy^2+6x^3+yx^2+2xy^2+9y^3$$
$$=3(x^2y+xy^2+2x^3+3y^3)=3f(x,y)$$

مثال: $f(x,y)=xy+y^2$ مطلوبست صحت $xf_x+yf_y=2f(x,y)$

* اگر $f(x,y)$ همگن از درجه n باشد آنگاه

$$xf_x+yf_y=nf.$$

حل:

$$f(tx,ty)=t^n f(x,y) \quad \forall t\in\mathbb{R}$$

مشتق نسبت به t:

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x)+\frac{\partial f}{\partial v}(y)=nt^{n-1}f(x,y)$$

$$t=1 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}x+\frac{\partial f}{\partial y}y=nf(x,y) \quad \forall t\in\mathbb{R}$$

مثال: $xf_x+yf_y=0$ همگن از درجه صفر پس $f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{2xy}e^{\frac{x-y}{x+y}}$

مشتق ضمنی: فرض کنید $g(x,y,u,v)=0$ ، $f(x,y,u,v)=0$ و u و v توابعی از x و y باشند. برای محاسبه u_x و u_y و v_x و v_y از مشتق ضمنی استفاده می‌کنیم.

با مشتق گیری از توابع فوق نسبت به x و y و حل یک دستگاه دو معادله دو مجهول u_x و u_y و v_x و v_y محاسبه می‌شود.

مثال: $x^2v+yu+uv+2x=0$ ، $xu+yv+u-y=0$

مطلوبست محاسبه u_x و v_x و u_y و v_y.

مشتق نسبت به x:

$$\Rightarrow \begin{cases} u+xu_x+yv_x+u_x=0 \\ 2xv+x^2v_x+yu_x+u_xv+uv_x+2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+1)u_x+yv_x=-u \\ (y+v)u_x+(x^2+u)v_x=-2xv-2 \end{cases}$$

$$u_x=\frac{\begin{vmatrix} -u & y \\ -2xv-2 & x^2+u \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x+1 & y \\ y+v & x^2+u \end{vmatrix}} \qquad v_x=\frac{\begin{vmatrix} x+1 & -u \\ y+v & -2xv-2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x+1 & y \\ y+v & x^2+u \end{vmatrix}}$$

تعریف: فرض کنید

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{vmatrix}$$

در اینصورت اگر $f(x,y,u,v)=0$ ، $g(x,y,u,v)=0$

آنگاه:

$$u_x=-\frac{\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,v)}}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}} \qquad u_y=-\frac{\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,v)}}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}}$$

$$v_x=-\frac{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,x)}}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}} \qquad v_y=-\frac{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,y)}}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}}$$

مثال: $xy+ux+vy+4y=0$ ، $x^2uy+uv+x=0$

مطلوبست محاسبه x_u و x_v و y_u و y_v.

$$x_u=-\frac{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,y)}}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}}=-\frac{\begin{vmatrix} x^2y+v & x^2u \\ x & x+v+4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2xuy+1 & x^2u \\ y+u & x+v+4 \end{vmatrix}}$$

قاعده زنجیره‌ای و مشتق ضمنی: فرض کنید:

$z=f(u,v)$ $\quad g(x,y,u,v)=0 \quad h(x,y,u,v)=0$

برای محاسبه $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ داریم:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

برای محاسبه u_x و v_x از مشتق ضمنی به کمک g و h استفاده می‌کنیم.

مثال: $uy^2+xyv+x=0\ ,\ xu+yv^2+y=0\ ,\ z=u^2+uv$

مطلوبست محاسبه $\frac{\partial z}{\partial y}$

$$z_y=(2u+v)u_y+uv_y$$

مشتق نسبت به y

$$\Rightarrow\begin{cases} xu_y+v^2+2yuv_y+1=0\\ u_yy^2+2uy+xv+xyv_y=0\end{cases}$$

$$u_y=\frac{\begin{vmatrix}-v^2-1 & 2yv\\ -2yu+v & xy\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}x & 2yv\\ y^2 & xy\end{vmatrix}}\qquad v_y=\frac{\begin{vmatrix}x & -v^2-1\\ y^2 & -2yu+v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}x & 2yv\\ y^2 & xy\end{vmatrix}}$$

مشتق‌های مراتب بالاتر: فرض کنید $f(x,y)$ یک تابع دو متغیره معروف باشد. $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ خود توابعی دو متغیره می‌باشند.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\Big|_{x_0,y_0}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\Delta x,y_0)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0+\Delta y)-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+\Delta x,y_0)-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0+\Delta y)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

مثال: فرض کنید $f(x,y)=x^4y+xy^5+x^2-y^3+4y$ مطلوبست محاسبه

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial x}\ ,\ \frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2}\ ,\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=x^4+5xy^4-3y^2-3y^2+4\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=4x^3+5y^4$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}=12x^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=4x^3y+y^5+2x\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=4x^3+5y^4\qquad \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial x}=12x^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=12x^2y+2\qquad \frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2}=12x^2$$

* $\frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m\partial y^n}$ یعنی از تابع f ابتدا n بار مشتق نسبت به y و سپس m بار نسبت به x مشتق می‌گیریم.

تذکر: ترتیب محاسبه مشتق دارای اهمیت است

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\neq\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$$

مثال: فرض کنید

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$$

مطلوبست محاسبه $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ ، $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbb{R}^2)=\begin{cases}\dfrac{(x^3-3xy^2)(x^2+y^2)-2y(x^3y-xy^3)}{(x^2+y^2)^2} & x^2+y^2\neq 0\\ \lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0 & x^2+y^2=0\end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(\Delta x,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta x^5}{\Delta x^4}-0}{\Delta x}=1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbb{R}^2)=\begin{cases}\dfrac{(2x^2y-y^2)(x^2+y^2)-2x(x^3y-xy^3)}{(x^2+y^2)^2} & x^2+y^2\neq 0\\ \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0 & x^2+y^2=0\end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,\Delta y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{-\frac{\Delta y^5}{\Delta y^4}-0}{\Delta y}=-1$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)\neq\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=f_x \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f_{xx} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f_{yy} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=f_{yx} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=f_{xy} \ *$$

قضیه: اگر $\frac{\partial f}{\partial x}$ ، $\frac{\partial f}{\partial y}$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ موجود و پیوسته باشند آنگاه:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$$

مثال: $f(x,y)=x\sin(xy^2)$ ،

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\sin(xy^2)+xy^2\cos(xy^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2x^2y\cos(xy^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=4xy\cos(xy^2)-2x^2y^3\sin(xy^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=4xy\cos(xy^2)-2x^2y^3\sin(xy^2)$$

مثال: عبارت $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$ را در مختصات قطبی بنویسید.

عبارت $u_{xx}+u_{yy}$ را در مختصات قطبی بنویسید.

(فرض کنید $u(x,y)$ دارای مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم پیوسته باشد)

$$x=r\cos\theta \ , \ y=r\sin\theta \Rightarrow r=\sqrt{x^2+y^2} \ , \ \theta=tg^{-1}\frac{y}{x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial x}=u_r\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+u_\theta\frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}}=$$

$$u_r\cos\theta-u_\theta\frac{\sin\theta}{r}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial y}=u_r\sin\theta+u_\theta\frac{\cos\theta}{r}$$

$$=u_r\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+u_\theta\cdot\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2$$

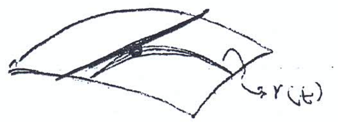
$$u_{xx}=\frac{\partial}{\partial x}\left(u_r\cos\theta-u_\theta\frac{\sin\theta}{r}\right)=\frac{\partial}{\partial r}\left(u_r\sin\theta-u_\theta\frac{\sin\theta}{r}\right)\frac{\partial r}{\partial x}+$$
$$\frac{\partial}{\partial \theta}\left(u_r\sin\theta-u_\theta\frac{\sin\theta}{r}\right)\frac{\partial \theta}{\partial x}=\left(u_{rr}\cos\theta-u_{\theta r}\frac{\sin\theta}{r}+u_\theta\frac{\sin\theta}{r^2}\right)$$
$$\cos\theta+\left(u_{\theta r}\cos\theta-u_r\sin\theta-u_{\theta\theta}\frac{\sin\theta}{r}-u_\theta\frac{\cos\theta}{r}\right)\left(-\frac{\sin\theta}{r}\right)$$

$$u_{yy}=\left(u_{rr}\sin\theta+u_{\theta r}\frac{\cos\theta}{r}-u_\theta\frac{\cos\theta}{r^2}\right)\sin\theta+$$
$$\left(u_{\theta r}\sin\theta+u_r\cos\theta+u_{\theta\theta}\frac{\cos\theta}{r}-u_\theta\frac{\sin\theta}{r}\right)\frac{\cos\theta}{r}$$
$$\Rightarrow u_{xx}+u_{yy}=u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}$$

صفحه مماس و خط قائم: تابع دو متغیره $z=f(x,y)$ نمایش یک رویه در $\mathbb{R}^3$ باشد.

بردار گرادیان در هر نقطه بر رویه عمود است.

$$\vec{\nabla} f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$



$r(t)=(x(t),y(t),z(t))$

$f(x,y,z)=0$

$r(t)$ بر رویه واقع است پس:

$$f(x(t),y(t),z(t))=0$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}x'(t)+\frac{\partial f}{\partial y}y'(t)+\frac{\partial f}{\partial z}z'(t)=0$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)\cdot(x',y',z')=0\Rightarrow\vec{\nabla} f\cdot r'(t)=0$$

پس بردار گرادیان بر تمامی خطوط مماس بر رویه در نقطه مفروض عمود است یعنی بردار گرادیان بر رویه عمود است.

صفحه ای که در بردارنده تمامی خطوط مماس در هر نقطه بر رویه است را صفحه مماس بر رویه می نامیم.

واضح است که بردار گرادیان بردار نرمال صفحه مماس است.

خطی که بر صفحه مماس در نقطه داده شده عمود است را خط قائم بر رویه می نامیم

بردار هادی خط همان بردار گرادیان است.

* **مثال:** صفحه مماس و خط قائم بر رویه $z=xy$ را در نقطه $(1,-2,-2)$ بیابید.

$f(x,y,z)=z-xy \quad \vec{\nabla} f=(-y,-x,1) \quad \vec{\nabla} f(1,-2,-2)=(2,-1,1)$

$2(x-1)-1(y+2)+1(z+2)=0$ صفحه مماس

خط قائم: $x=1+2t,\ y=-2-t,\ z=-2+t$

از تقاطع دو رویه یک منحنی حاصل می شود. در هر نقطه بر منحنی تقاطع دو رویه می توان خط مماس، صفحه قائم را تعریف نمود. اگر رویه های به معادلات f و g باشند آن گاه $\vec{\nabla} f\times\vec{\nabla} g$ خط مماس، بردار نرمال صفحه قائم خواهد بود.

* **مثال:** مطلوبست محاسبه خط مماس و صفحه قائم در نقطه $(1,-1,1)$ واقع بر محل برخورد دو رویه زیر:

$$\begin{cases} f: & xy+xz^2-y=1\\ g: & x^2z+yz-3x+3=0\end{cases}$$

$\vec{\nabla} f = (y+z^2,\ x-1,\ 2xz)$ $\vec{\nabla} g = (2xz-3,\ z,\ x^2+y)$

$\vec{\nabla} f(1,-1,1) = (0,0,2)$ $\vec{\nabla} g(1,-1,1) = (-1,1,0)$

$\vec{\nabla} f \times \vec{\nabla} g = -2\vec{i} - 2\vec{j}$

خط مماس: $x=1-2t,\ y=-1-2t,\ z=1$

صفحه قائم: $-2(x-1)-2(y+1)=0$

دیفرانسیل: دیفرانسیل تابع n متغیره $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

$f(x,y) \Rightarrow df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$

تعریف: هر عبارتی به صورت $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ را یک فرم دیفرانسیلی می‌نامیم.

تعریف: فرم دیفرانسیلی $Pdx+Qdy$ را دیفرانسیل کامل می‌نامیم هرگاه تابعی $\varphi(x,y)$ یافت شود به طوریکه $d\varphi = Pdx+Qdy$

مثال: $ydx+xdy$ یک دیفرانسیل کامل است زیرا اگر $\varphi = xy$ آنگاه $d\varphi = ydx + xdy$

حامد نفیسی

قضیه: اگر $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ آنگاه $Pdx+Qdy$ دیفرانسیل کامل است.

مثال: فرم دیفرانسیلی $(y^2+3x^2y+1)dx+(2xy+x^3-2y)dy$ کامل است.

$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y+3x^2 \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y+3x^2 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

حال فرض کنید $Pdx+Qdy$ دیفرانسیل کامل باشد پس بنابر تعریف

$\exists \varphi \ni d\varphi = Pdx + Qdy$

از طرفی $d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy$ پس:

(1) $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = P$ و (2) $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q$

(1) $\Rightarrow \varphi(x,y) = \int P dx + g(y) \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int P dx\right) + g'(y) = Q$

$\Rightarrow g'(y) = Q - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int P dx\right)$

پس: $g(y) = \int \left[Q - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int P dx\right)\right] dx + c$

پس: $\boxed{\varphi(x,y) = \int P dx + \int \left[Q - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int P dx\right)\right] dy + C}$

مثال: تابع φ را برای مثال قبل بنویسید.

(1) $\frac{\partial f}{\partial x} = y^2+3x^2y+1$, (2) $\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy+x^3-2y$

$\overset{(1)}{\Longrightarrow} \varphi(x,y) = xy^2 + x^3y + x + g(y) \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2xy + x^3 + g'(y)$

$= 2xy + x^3 - 2y \Rightarrow g'(y) = -2y \Rightarrow g(y) = -y^2 + c$

مثال:

۱) ثابت کنید، $\frac{dr}{ds}\cdot\frac{d^3r}{ds^3}=-k^2$

حل: $\|T\|=1 \Rightarrow \|T\|^2=1 \to T\cdot T=1 \to \frac{dT}{ds}\cdot T+T\cdot\frac{dT}{ds}=0$

$2T\cdot\frac{dT}{ds}=0 \Rightarrow T\cdot\frac{dT}{ds}=0 \Rightarrow \frac{dT}{ds}\cdot\frac{dT}{ds}+T\cdot\frac{d^2T}{ds^2}=0 \xrightarrow{T=\frac{dr}{ds}}$

$\left\|\frac{dT}{ds}\right\|^2+\frac{dr}{ds}\cdot\frac{d^3r}{ds^3}=0 \Rightarrow \frac{dr}{ds}\cdot\frac{d^3r}{ds^3}=-k^2$

۲) ثابت کنید: $N=\frac{f(t)}{\|r'\|^4}\left(r'\times(r''\times r')\right)$

حل: $N=B\times T=\frac{r'\times r''}{\|r'\times r''\|}\times\frac{r'}{\|r'\|} \Rightarrow f=\frac{\|r'\|^3}{\|r'\times r''\|}$

$N=\frac{(r'\times r'')\times r'}{\|r'\times r''\|}\frac{\|r'\|^3}{\|r'\|^4} \Rightarrow N=\frac{f(t)}{\|r'\|^4}\boxed{\left(r'\times(r''\times r')\right)}\ (r'\times r'')\times r'$

$(r'\times r'')\times r'=-r'\times(r'\times r'')=r'\times(r''\times r')$

۳) مطلوبست محاسبه T و N و B و K و τ برای منحنی تقاطع رویه‌های زیر

$\begin{cases} z=x^2 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}\quad (0,1,0)$ $\qquad \begin{cases} z=y^2-x^2 \\ z=2-x^2-y^2 \end{cases}\quad (0,1,1)$

حل: $x=\cos t$ $\quad r(t)=\cos t\,\vec{i}+\sin t\,\vec{j}+\cos^2 t\,\vec{k} \quad t=\frac{\pi}{2}$

$y=\sin t$

$z=\cos^2 t$

(2) $y^2-x^2=2-x^2-y^2 \Rightarrow y=\pm 1$

$x=t,\ y=1,\ z=1-t^2 \Rightarrow r(t)=t\vec{i}+\vec{j}+(1-t^2)\vec{k}$

پس: $\varphi(x,y)=xy^2+x^3y+x-y^2+c$

قضیه: فرم دیفرانسیلی $Pdx+Qdy+Rdz$ کامل است اگر و تنها اگر

$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\ \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}$

مثال: نشان دهید $e^{yz^2}dx+xz^2e^{yz^2}dy+(2xyze^{yz^2}+1)dz$ کامل است سپس φ را پیدا کنید.

$P_y=z^2e^{yz^2}=Q_x \qquad P_z=2yze^{yz^2}=R_x$

$Q_z=2xe^{yz^2}\cdot z+2xyz^3e^{yz^2}=R_y \Rightarrow$ کامل است:

(1) $\frac{\partial\varphi}{\partial x}=e^{yz^2}$, (2) $\frac{\partial\varphi}{\partial y}=xz^2e^{yz^2}$, (3) $\frac{\partial\varphi}{\partial z}=2xyze^{yz^2}+1$

$\xrightarrow{(1)} \varphi(x,y,z)=xe^{yz^2}+g(y,z)$

$\frac{\partial P}{\partial y}=xz^2e^{yz^2}+\frac{\partial g}{\partial y}=xz^3e^{yz^2}$

پس: $\frac{\partial g}{\partial y}=0$

$\Rightarrow g(y,z)=h(z)$

پس: $\varphi(x,y,z)=xe^{yz^2}+h(z)$

$\Rightarrow \frac{\partial\varphi}{\partial z}=2xyze^{yz^2}+h'(z)=2xyze^{yz^2}+1$

$\Rightarrow h'(z)=1 \Rightarrow h(z)=z+c$

پس: $\varphi(x,y,z)=xe^{yz^2}+z+c$

$r(t)=\cos t\,\vec i+\sin t\,\vec j+\cos^2 t\,\vec k$ $\quad T=\frac{-\sin t\,\vec i+\cos t\,\vec j-2\sin t\cos t\,\vec k}{\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t+4\sin^2 t\cos^2 t}}$

$\vec T(\frac{\pi}{2})=-\vec i$

$B=\frac{r'\times r''}{\|r'\times r''\|}\Rightarrow \begin{array}{l} r'(t)=-\sin t\,\vec i+\cos t\,\vec j-2\sin t\cos t\,\vec k \\ r''(t)=-\cos t\,\vec i-\sin t\,\vec j-2\cos 2t\,\vec k\end{array}$

$r'(\frac{\pi}{2})=-\vec i \quad r''(\frac{\pi}{2})=-\vec j+2\vec k \Rightarrow r'(\frac{\pi}{2})\times r''(\frac{\pi}{2})=-\vec i\times(-\vec j+2\vec k)=\vec k+2\vec j$

$\|r'\times r''\|=\sqrt5 \Rightarrow B=\frac{\vec k+2\vec j}{\sqrt5}$

$\vec N=\vec B\times\vec T=\frac{\vec k+2\vec j}{\sqrt5}\times(-\vec i)=\frac{-\vec j+2\vec k}{\sqrt5}$

$k=\frac{\|r'\times r''\|}{\|r'\|^3}=\frac{\sqrt5}{1}=\sqrt5$

$\boxed{\tau=\frac{r'\cdot(r''\times r''')}{k^2\|r'\|^6}}$ * $r'''=\sin t\,\vec i-\cos t\,\vec j+4\sin 2t\,\vec k$, $\quad r'''(\frac{\pi}{2})=\vec i$

$\tau=\frac{-\vec i\cdot((-\vec j+2\vec k)\times\vec i)}{(\sqrt5)^2\,1^6}=\frac{-\vec i\cdot(\vec k-2\vec j)}{5}=\frac{0}{5}=0$

منحنی‌های قطبی: برای رسم منحنی‌های قطبی از جدول مقادیر و تقارن‌ها استفاده می‌کنیم $r=f(\theta)$

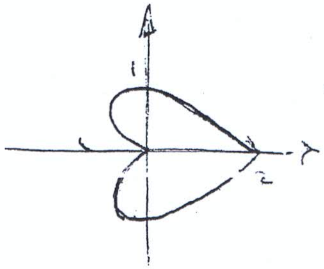
4) رویه زیر را توصیف کنید. $r=2(1+\cos\theta)$ ← دلنماگون

* اگر θ را به $(-\theta)$ تبدیل کنیم در معادله تغییر حاصل نشود منحنی نسبت به محور قطبی متقارن است

$r=1+\cos\theta$

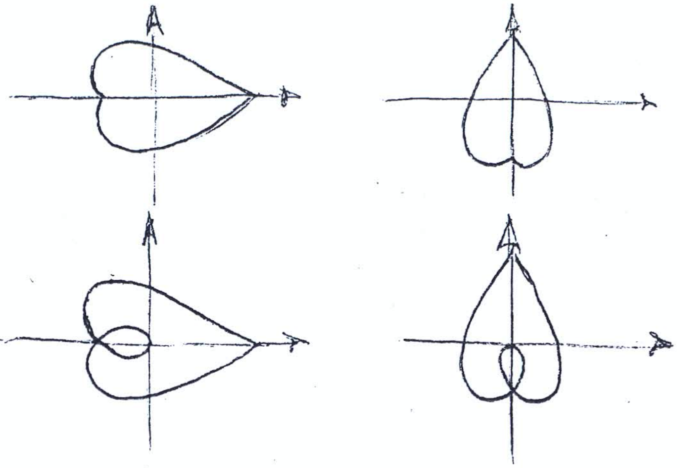
θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
r	2	$1+\frac{\sqrt2}{2}$	1	$1-\frac{\sqrt2}{2}$	0

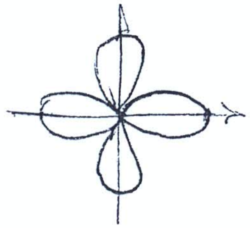
دلنما.



$r=a\pm b\cos\theta \qquad r=a\pm b\sin\theta$

دلنما:





5) رویه $r^2=\cos 2\theta$ را توصیف کنید

θ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
r	1	$\frac{\sqrt3}{2}$	0	$-\frac12$	-1	$-\frac12$	1

6) فرض کنید $u(x,y,z)=x^m f(\frac{y}{x},\frac{z}{x})$

ثابت کنید $xu_x+yu_y+zu_z=mu$

حل: $u_x=mx^{m-1}f+x^m(f_s\cdot(-\frac{y}{x^2})+f_k(\frac{-z}{x^2}))$

$u_y=x^m(f_s\cdot(\frac{1}{x})+f_k(0)) \qquad u_z=x^m(f_s\cdot 0+f_k\cdot\frac{1}{x})$

$xu_x = mx^m f - f_s x^{m-1} y - f_t x^{m-1} z$

$yu_y = f_s x^{m-1} y \qquad zu_z = f_t x^{m-1} z$

$\Rightarrow xu_x + yu_y + zu_z = mu$

۷) فرض کنید: $f(\overset{u}{xy}, \overset{v}{z-2x})=0$ ثابت کنید $xz_x - yz_y = 2x$

حل: $f_u\cdot y + f_v\cdot(z_x-2)=0$, $f_u\cdot x + f_v\cdot z_y = 0 \Rightarrow$

$z_x = \frac{2f_v - yf_u}{f_v}$, $z_y = -\frac{xf_u}{f_v}$

$xz_x - yz_y = \frac{2xf_v - xyf_u}{f_v} + \frac{xyf_u}{f_v} = 2x$

۸) ثابت کنید مشتق سوئی تابع $f(x,y)=\frac{y^2}{x}$ در هر نقطه از بیضی $2x^2+y^2=c^2$ در سوی قائم بر بیضی صفر است.

حل: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow x=a\cos t$, $y=b\sin t$

$\Rightarrow \frac{x^2}{(\frac{c}{\sqrt2})^2}+\frac{y^2}{c^2}=1 \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{c}{\sqrt2}\cos t \\ y=c\sin t \end{cases}$

$\Rightarrow \vec N = \frac{-c\cos t - \frac{c}{\sqrt3}\sin t\,\vec j}{\sqrt{c^2\sin^2 t+\frac{c^2}{2}\cos^2 t}} \Rightarrow D_{\vec N}f=\nabla f\cdot\vec N$

$\nabla f = (-\frac{y^2}{x^2}, \frac{2y}{x}) = (-2tg^2t, 2\sqrt2\, tgt)$

$D_{\vec N}f = \frac{2c\,tg^2t\cos t - 2c\,tgt\sin t}{\sqrt{c\cos^2 t+\frac{c^2}{2}\sin^2 t}} = 0$

۹) اگر توابع $P(1,2,3)$, $A(2,3,4)$, $B(3,B,1)$, $C(2,1,4)$, $f(x,y,z)$ در نقطه P مشتق پذیر باشند، مشتق سوئی تابع f را در جهت بردار $\vec u$ برابر 2 ، $D_{\vec u}f(P)=2$, $D_{\vec v}f(P)=0$, $D_{\vec w}f(P)=\frac{2}{3}$ و بردارهای $\vec u$ و $\vec v$ و $\vec w$ به ترتیب بردار یکانی بردارهای $\vec{PA}$, $\vec{PB}$, $\vec{PC}$ هستند مطلوبست گرادیان f در نقطه P و مشتق سوئی تابع f در نقطه P در جهت بردار $\vec A$ که $\vec a=\frac{1}{3}(2\vec i+2\vec j+\vec k)$

حل: $\vec{PA}=(1,1,1)$ $\quad \vec u=\frac{1}{\sqrt3}(1,1,1)$

$D_{\vec u}f(P)=\nabla f\cdot\vec u=\frac{1}{\sqrt3}(f_x+f_y+f_z)=2$

$\vec{PB}=(2,1,-2)\Rightarrow \vec v=\frac{1}{3}(2,1,-2)\Rightarrow D_{\vec v}f(P)=\nabla f\cdot\vec v=\frac{1}{3}(2f_x+f_y-2f_z)=0$

$\vec{PC}=(1,-1,1)\Rightarrow\vec w=\frac{1}{3}(1,-1,1)\Rightarrow D_{\vec w}f(P)=\nabla f\cdot\vec w=\frac{1}{\sqrt3}(f_x-f_y+f_z)=\frac{2}{3}$

$f_x+f_y+f_z=2\sqrt3 \qquad \Rightarrow f_y=\frac{2\sqrt3}{3} \qquad f_x=? \quad f_z=?$

$\Rightarrow 2f_x+f_y-2f_z=0$

$f_x-f_y+f_z=\frac{2\sqrt3}{3}$

تمرین:

۱) طول قوس منحنی $y=\cosh x$ از $(x,\cosh x)$ تا $(0,1)$

$x=t \Rightarrow y=\cosh t \qquad s=\int\|r'(t)\|dt$

$r(t)=\vec i+\sinh t\,\vec j \qquad s=\int_0^x\sqrt{1+\sinh^2t}=\int_0^x\cosh t\,dt$

$s=\sinh t$

۲) طول قوس منحنی چرخزاد $r(t)=a(t-\sin t, 1-\cos t)$ $(0\to2\pi)$

hamednafisi@gmail.com

$$N=\frac{\frac{dT}{dt}}{\left\|\frac{dT}{dt}\right\|} \qquad T \Rightarrow N=\frac{-\frac{1}{\cos^2 t}\vec{i}+\vec{j}}{\left\|\left(-\frac{1}{\cos^2 t}\right)^2+1\right\|} \Rightarrow N_{(\frac{\pi}{4})}=\frac{-2\vec{i}+\vec{j}}{\sqrt{(2)^2+1}}=\frac{-2\vec{i}+\vec{j}}{\sqrt{5}}$$

$$r\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{\pi}{4},1\right) \qquad \alpha-\frac{\pi}{4}=-\frac{5}{2} \quad ,\beta-1=\frac{5}{4}$$

کاربردهای مشتق:

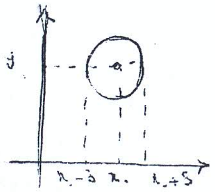
تعیین اکسترمم های تابع چند متغیره: فرض کنید $f(x,y)$ یک تابع دو متغیره باشد. نقطه $(x_0,y_0)\in D_f$ را یک نقطه ماکزیمم نسبی تابع $f(x,y)$ می نامیم هرگاه یک همسایگی از (x_0,y_0) باشد مانند I موجود باشد به طوریکه: $f(x_0,y_0)\geq f(x,y) \quad \forall (x,y)\in I$

و (x_0,y_0) را نقطه می نیمم نسبی نامیم هرگاه: $f(x_0,y_0)\leq f(x,y) \quad \forall (x,y)\in I$

اگر $f(x_0,y_0)\geq f(x,y) \quad \forall (x,y)\in D_f$ آنگاه (x_0,y_0) نقطه ماکزیمم مطلق تابع f باشد و اگر $f(x_0,y_0)\leq f(x,y) \quad \forall (x,y)\in D_f$ آنگاه (x_0,y_0) نقطه می نیمم مطلق می نامیم.

قضیه: اگر (x_0,y_0) نقطه اکسترمم نسبی تابع $f(x,y)$ باشد و f تابعی مشتق پذیر باشد آنگاه $\vec{\nabla} f(x_0,y_0)=0$

اثبات: (x_0,y_0) نقطه ماکزیمم نسبی



$$y=y_0 \Rightarrow f(x_0,y_0)\geq f(x,y_0) \quad \forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$$

پس اگر $g(x)=f(x,y_0)$

آنگاه $g(x_0)\geq g(x) \quad \forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$

یعنی x_0 نقطه ماکزیمم نسبی تابع حقیقی $g(x)$ می باشد پس $g'(x_0)=0$

$$\text{Lm} \quad g'(x_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$$

$$r(t)=a(1-\cos t,\sin t) \qquad S=\int_0^{2\pi}\|r'(t)\|dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2[(1-\cos t)^2+\sin^2 t]}\,dt$$

$$=a\int_0^{2\pi}\sqrt{2}\cdot\sqrt{(1-\cos t)}\,dt=\sqrt{2}a\int_0^{2\pi}\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}dt=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt$$

$$=-4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}=-4a(-1-1)=8a$$

3) آلبر احصاء: $r(t)=\left(\int f(t)\sin t\,dt,\int f(t)\cos t\,dt,\int f(t)\,dt\right)$

$$k=\frac{\|r'\times r''\|}{\|r'\|^3} \qquad \tau=\frac{r'\cdot(r''\times r''')}{\|r'\times r''\|^2}$$

$$r'(t)=(f(t)\sin t,f(t)\cos t,f(t))$$

$$r''(t)=(f'(t)\sin t+\cos t f(t),f'(t)\cos t-\sin t f(t),f'(t))$$

$$T=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin t\vec{i}+\cos t\vec{j}+\vec{k}) \qquad N=(\cos t\vec{i}-\sin t\vec{j})$$

$$\frac{dT}{ds}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos t\vec{i}-\sin t\vec{j})\frac{1}{\sqrt{2}f(t)} \Rightarrow k=\left\|\frac{dT}{ds}\right\|=\frac{1}{2f(t)}$$

$$B=T\times N=(-\sin t\vec{i}+\cos t\vec{j}-\vec{k})\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tau=\left\|\frac{dB}{ds}\right\|=\frac{1}{2f(t)} \qquad \frac{\tau}{k}=cte \Rightarrow$$ منحنی مارپیچ تعمیم یافته

4) دایره بوسان

$y=tgx$ در $\left(\frac{\pi}{4},1\right)$

$$r(t)=t\vec{i}+tg t\vec{j} \Rightarrow r'(t)=\vec{i}+(1+tg^2 t)\vec{j}$$

$$K=\frac{\|r'\times r''\|}{\|r'\|^3}=4 \Rightarrow \rho=\frac{1}{4} \quad \text{یا} \quad K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\rho=\frac{5\sqrt{5}}{4}$$

یعنی $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=0$ و به طور مشابه $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0$

پس $\nabla f(x_0,y_0)=0$

تعریف: نقطه‌ای که گرادیان f در آن نقطه صفر باشد یا مشتقات نسبی در آن نقطه موجود نباشد را نقطه بحرانی می‌نامیم.

نتیجه: اکسترمم‌های نسبی تابع f در نقاط بحرانی اتفاق می‌افتد.

مثال: $f(x,y)=(x-1)^2+y^2+2$

نقطه بحرانی $\Rightarrow \nabla f\,(2(x-1),2y)=0 \Rightarrow x=1,\ y=0 \Rightarrow (1,0)$

$f(1,0)=2\le (x-1)^2+y^2+2=f(x,y)$

$\Rightarrow f(1,0)\le f(x,y)\quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$

پس $(1,0)$ نقطه مینیمم نسبی و مطلق تابع f می‌باشد.

تذکر: یک نقطه بحرانی ممکن است نقطه اکسترمم نباشد. همچنین نقطه‌ای را نقطه زینی نامیم.

مثال: $f(x,y)=x^2-y^2$

نقطه بحرانی $\nabla f\,(2x,-2y)=0 \Rightarrow x=0,\ y=0$

در هر همسایگی $(0,0)$ داریم:

$f(0,0)=0\ge -y^2=f(0,y)$

$f(0,0)=0\le x^2=f(x,0) \Rightarrow$ پس $(0,0)$ نقطه اکسترمم نیست

پس $(0,0)$ نقطه زینی است.

آزمون مشتق دوم: فرض کنید (x_0,y_0) نقطه بحرانی تابع $f(x,y)$ باشد و تابع f در (x_0,y_0) مشتق‌پذیر باشد. تعریف می‌کنیم:

$$\Delta(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2$$

در این صورت

1) اگر $\Delta(M_0)>0$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_0)>0$ آن‌گاه نقطه M_0 نقطه می‌نیمم نسبی است.

2) اگر $\Delta(M_0)>0$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_0)<0$ آن‌گاه نقطه M_0 نقطه ماکزیمم نسبی است.

3) اگر $\Delta(M_0)<0$ آن‌گاه نقطه M_0 نقطه زینی است.

4) اگر $\Delta(M_0)=0$ چیزی نمی‌توان گفت.

مثال: $f(x,y)=(x-1)^2+y^2+2$ نقطه بحرانی: $M_0(1,0)$

$\frac{\partial f}{\partial x}=2(x-1)\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2\quad \frac{\partial f}{\partial y}=2y\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0 \Rightarrow \Delta=4 \qquad \Delta(M_0)>0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_0)=2>0$

M_0 نقطه می‌نیمم نسبی است.

مثال: $f(x,y)=x^3+2y^3-3x-9y^2+12y+2$ نقاط بحرانی:

$\nabla f=(3x^2-3,\ 6y^2-18y+12)=0$

$3x^2-3=0 \Rightarrow x=\pm1 \Rightarrow \underset{M_1}{(1,1)}\ \underset{M_3}{(-1,1)}\ \underset{M_2}{(1,2)}\ \underset{M_4}{(-1,2)}$

$6y^2-18y+12=0 \Rightarrow y=1,2$ نقاط بحرانی

$f_{xx}=6x\quad f_{yy}=12y-18\quad f_{xy}=0$

$\Rightarrow \Delta(x,y)=6x(12y-18)$

$\Delta(M_1) = -36 < 0 \Rightarrow$ M_1 زینی است.

$\begin{cases} \Delta(M_2) = 36 > 0 \\ f_{yy}(M_2) = 6 > 0 \end{cases} \Rightarrow$ M_2 می نیمم نسبی است

$\begin{cases} \Delta(M_3) = 36 > 0 \\ f_{yy}(M_1) = -6 < 0 \end{cases} \Rightarrow$ M_3 ماکزیمم نسبی است

$\Delta(M_4) = -36 < 0 \Rightarrow$ M_4 زینی است.

تمرین: نقاط بحرانی و ماهیت آن ها را برای توابع زیر بیابید.

$f(x,y) = x^3+y^3-x^2-2xy-y^2$

$f(x,y) = x^3+y^3-3xy$

اکسترمم های شرطی یا مقید: اکسترمم مقید یعنی پیدا کردن اکسترمم های تابع f با این شرط که نقاط در ضابطه $g=0$ صدق کند.

قضیه: اگر M_1 نقطه اکسترمم تابع f باشد با g باشد آن گاه

$$\vec{\nabla} f - \lambda \vec{\nabla} g = 0$$

روش فوق را ضرایب لاگرانژ و λ را ضریب لاگرانژ می نامیم.

مثال: برصفحه $x+2y+3z=1$ نقطه را بیابید که تا مبدا می نیمم فاصله را داشته باشد؟

$d=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \Rightarrow$ می نیمم $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$

$\Leftarrow$ با $g(x,y,z) = x+2y+3z-1$ باشد:

$$\vec{\nabla} f - \lambda \vec{\nabla} g = (2x, 2y, 2z) - \lambda(1, 2, 3) = 0$$

$$\Rightarrow 2x = \lambda, \ 2y = 2\lambda, \ 2z = 3\lambda, \ x+2y+3z=1$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda}{2} + 2\lambda + \frac{9}{2}\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{7} \Rightarrow x = \frac{1}{12}, \ y = \frac{1}{7}, \ z = \frac{3}{14}$$

$\Leftarrow$ $\left(\frac{1}{12}, \frac{1}{7}, \frac{3}{14}\right)$ نقطه می نیمم است.

* چنانچه بخواهیم اکسترمم های تابع f را با شرایط $g=0$ و $h=0$ محاسبه کنیم آن گاه خواهیم داشت:

$$\vec{\nabla} f - \lambda \vec{\nabla} g - \mu \vec{\nabla} h = 0$$

مثال: برخط $x+y+z=2$ و $x-y-z=3$ نقطه ای را بیابید که تا مبدا می نیمم فاصله را داشته باشد.

$$\min f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$$

با شرایط $\begin{cases} g(x,y,z) = x+y+z-2 = 0 \\ h(x,y,z) = x-y-z-3 = 0 \end{cases}$

$$\vec{\nabla} f - \lambda \vec{\nabla} g - \mu \vec{\nabla} h = 0$$

$$\Rightarrow (2x, 2y, 2z) - \lambda(1, 1, 1) - \mu(1, -1, -1) = 0$$

$$2x = \lambda + \mu, \ 2y = \lambda + (-\mu), \ 2z = \lambda - \mu$$

$$x+y+z = 2, \ x-y-z = 3$$

$$\Rightarrow y = z \Rightarrow x = \frac{5}{2} \Rightarrow z = y = -\frac{1}{4}$$

نقطه مورد نظر: $\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$

~~روش~~ اکنون برای تعیین اکسترمم‌های مطلق تابع f در ناحیه‌ای مانند D در $\mathbb{R}^2$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

ناحیه D را به دو قسمت درون D و روی مرز D تقسیم می‌کنیم: در درون D قرار می‌دهیم $\nabla f = 0$ و روی مرز D از اکسترمم مقید استفاده می‌کنیم.

مجموعه نقاط بدست آمده را در تابع f قرار می‌دهیم بیشترین مقدار حاصل ماکزیمم مطلق و کمترین مقدار، مینیمم مطلق می‌نامیم.

مثال: اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x,y)=xy$ را در ناحیه $D: x^2+y^2\le 1$ بیابید.

درون D: $x^2+y^2<1$ و مرز D: $x^2+y^2=1$

$$\nabla f=(y,x)=0 \Rightarrow x=0,\ y=0 \Rightarrow M_0(0,0)\in D$$ درون

$$f(x,y)=xy,\quad g(x,y)=x^2+y^2-1=0$$

$$\Rightarrow \nabla f-\lambda\nabla g=0 = (y,x)-\lambda(2x,2y)=0$$

$$\Rightarrow y=2\lambda x,\quad x=2\lambda y \Rightarrow \frac{y}{x}=\frac{x}{y} \Rightarrow x^2=y^2$$

$$\Rightarrow 2x^2=1 \Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

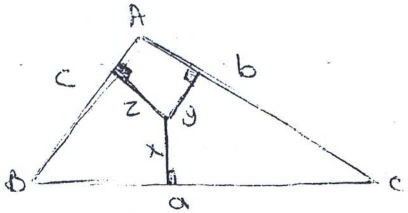
$$M_1\left(\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{2}\right),\ M_2\left(\frac{\sqrt2}{2},-\frac{\sqrt2}{2}\right),\ M_3\left(-\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{2}\right),\ M_4\left(-\frac{\sqrt2}{2},-\frac{\sqrt2}{2}\right)$$

$$f(M_0)=0 \quad f(M_1)=\frac12 \quad f(M_2)=-\frac12 \quad f(M_3)=-\frac12 \quad f(M_4)=\frac12$$

مینیمم مطلق

ماکزیمم مطلق

تمرین 1) مثلثی را تعیین کنید که حاصلضرب سینوس‌های زوایای داخلی Max باشد.



2) مساحت مثلث S،

الف) ثابت کنید $ax+by+cz=2S$.

ب) مینیمم مقدار $x^2+y^2+z^2$ را بیابید

بسط تیلور توابع چند متغیره: فرض کنید تابع $f(x,y)$ در نقطه (x_0,y_0) دارای مشتقات جزئی در هر مرتبه‌ای باشد در این صورت داریم:

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+(y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)+$$
$$\frac12(x-x_0)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)+(x-x_0)(y-y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)+\frac12(y-y_0)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)$$
$$+\cdots+\frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(x-x_0)^{n-j}(y-y_0)^j\frac{\partial^n f(x_0,y_0)}{\partial x^{n-j}\partial y^j}+R_n(x,y)$$

که $R_n(x,y)$ باقیمانده تیلوری باشد.

$$R_n(x,y)=\frac{1}{(n+1)!}\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}(x-x_0)^{n+1-j}\frac{\partial^{n+1}f}{\partial x^{n+1-j}\partial y^j}f(c_1,c_2)$$

اگر $x_0=0$، $y_0=0$ بسط مک لورن حاصل می‌شود.

بسط مک لورن $f(x,y)=\sin(xy)$ را بیابید.

حل:

$$f_x=y\cos(xy)\quad f_y=x\cos(xy)\quad f_{xx}=-y^2\sin(xy)$$
$$f_{xy}=\cos(xy)-xy\sin(xy)\quad f_{yy}=-x^2\sin(xy)$$

$f_{xxx} = -y^3\cos(xy) \qquad f_{xxy} = -2y\sin(xy) - xy^2\cos(xy)$

$\Rightarrow \sin(x,xy) = \circ + \circ + \circ + \circ + xy + \circ + \cdots$

انتگرال چندگانه:

انتگرال دوگانه:

فرض کنید تابع $f(x,y)$ در ناحیه $D \subseteq \mathbb{R}^2$ معین باشد. ناحیه D را به n قسمت $D_1, D_2, \dots, D_n$ تقسیم می‌کنیم. $D = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$

مساحت هر جزء D_i را $\Delta_i s$ می‌نامیم. در هر جزء D_i نقطه‌ای دلخواه $(x_i,y_i) \in D_i$ را انتخاب می‌کنیم. مجموع زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\,\Delta_i s$$

مجموع فوق را حاصل جمع ریمان می‌نامیم.

حال چنانچه

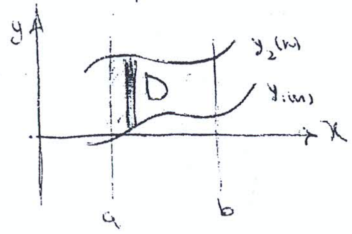
$$\lim_{\max \Delta_i s \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\,\Delta_i s$$

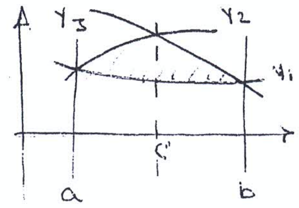
موجود باشد گوییم تابع $f(x,y)$ در D دارای انتگرال دوگانه است و می‌نویسیم:

$$\lim_{\max \Delta_i s \to 0} f(x_i,y_i)\,\Delta_i s = \iint_D f(x,y)\,ds$$

محاسبه انتگرال دوگانه: ناحیه D را در راستای محور y ها منظم نامیم هرگاه:

$$D = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$$

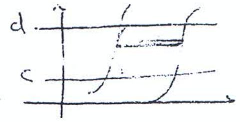




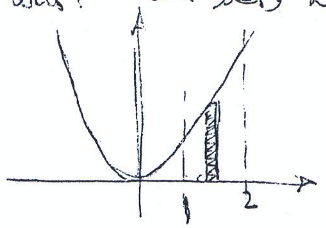
$D = \{(x,y) \mid a \le x \le c,\ y_1 \le y \le y_3\} \cup \{(x,y) \mid c \le x \le b,\ y_1 \le y \le y_2\}$

و ناحیه D را در راستای محور x ها منظم نامیم هرگاه:

$D = \{(x,y) \mid x_1(y) \le x \le x_2(y),\ c \le y \le d\}$



مثال: ناحیه محدود به منحنی $y = x^2$ و خطوط $x=1$ و $x=2$ و محور x ها



$D = \{(x,y) \mid 1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le x^2\}$

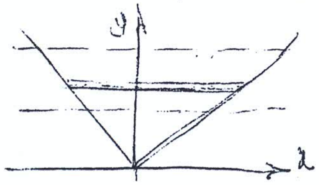
منظم در راستای محور y ها و در راستای محور x ها نامنظم

* دایره در راستای هر دو محور منظم است: $x^2 + y^2 = a^2$

$D = \{(x,y) \mid -a \le x \le a,\ -\sqrt{a^2-x^2} \le y \le \sqrt{a^2-x^2}\}$

$D = \{(x,y) \mid -\sqrt{a^2-y^2} \le x \le \sqrt{a^2-y^2},\ -a \le y \le a\}$

مثال: $y = |x|$ ، $y=2$ و $y=1$



$D = \{(x,y) \mid -y \le x \le y,\ 1 \le y \le 2\}$

فرض کنید D در راستای محور y ها منظم باشد در این صورت:

$$\iint_D f(x,y)\,ds = \int_a^b \int_{y_2(x)}^{y_1(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

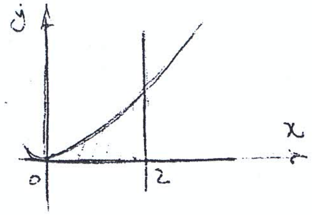
و اگر D در راستای محور x ها منظم باشد در این صورت:

$$\iint_D f(x,y)\,ds = \int_c^d \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

و اگر در راستای هر دو محور منظم باشد آنگاه:

$$\iint_D f(x,y)\,ds=\int_a^b\int_{y_2(x)}^{y_1(x)} f(x,y)\,dx\,dy=\int_c^d\int_{x_2(y)}^{x_1(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

مثال: مطلوبست محاسبه $\iint_D (x^2+y)\,ds$ که D ناحیه محدود به منحنی $y=x^2$ و خطوط $x=0$ و $x=2$ و $y=0$ و محور xها.

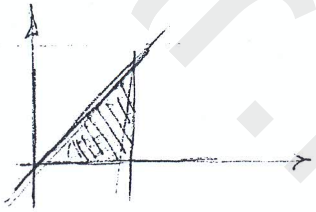


$$D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 2,\ 0\le y\le x^2\}$$
$$=\{(x,y)\mid \sqrt{y}\le x\le 2,\ 0\le y\le 4\}$$

$$\iint_D (x^2+y)\,ds=\int_0^2\int_0^{x^2}(x^2+y)\,dy\,dx=\int_0^2\left(x^2y+\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^{x^2}dx=\int_0^2\left(x^4+\frac{x^4}{2}\right)dx$$

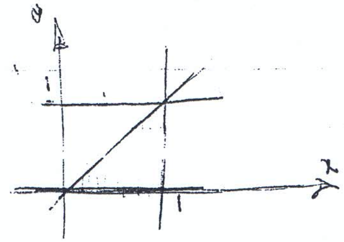
$$\iint_D (x^2+y)\,ds=\int_0^4\int_{\sqrt{y}}^2(x^2+y)\,dx\,dy=\int_0^4\left(\frac{1}{3}x^3+xy\right)\Big|_{\sqrt{y}}^2dy=\int_0^4\left(\frac{8}{3}+2y-\frac{1}{3}y^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{3}{2}}\right)dy$$
$$=\left(\frac{8}{3}y+y^2-\frac{8}{15}y^{\frac{5}{2}}\right)\Big|_0^4=\frac{48}{5}$$

مثال: مطلوبست محاسبه $\iint_D e^{x^2}\,ds$ بین D ناحیه محدود به خطوط $y=x$ ، $x=0$ ، $y=0$ و $x=1$ می باشد.



$$\int_0^1\int_0^x e^{x^2}\,dy\,dx=\int_0^1 xe^{x^2}\,dx=\frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^1=\frac{e}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(e-1)$$

مثال: مطلوبست محاسبه $\int_0^1\int_y^1 e^{x^2}\,dx\,dy$

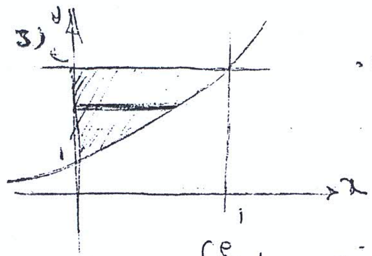


$$\int_0^1\int_0^x e^{x^2}\,dy\,dx=\frac{1}{2}(e-1)$$

مثال: انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

1) $\int_0^1\int_{3y}^3 e^{x^2}\,dx\,dy$ 2) $\int_0^1\int_y^1 e^{\frac{y}{x}}\,dx\,dy$ 3) $\int_0^1\int_{e^x}^e \frac{dy\,dx}{\ln y}$

3)



$0\le x\le 1,\ e^x\le y\le e \Rightarrow 1\le y\le e,\ 0\le x\le \ln y$

$$\int_0^1\int_{e^x}^e\frac{dy\,dx}{\ln y}=\int_1^e\int_0^{\ln y}\frac{dx\,dy}{\ln y}=\int_1^e\left(\frac{x}{\ln y}\right)\Big|_0^{\ln y}dy$$
$$=\int_1^e dy=e-1$$

خواص انتگرال دوگانه:

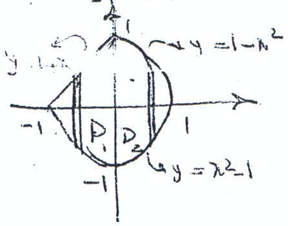
1) $\iint_D ds=S(D)$ مساحت

2) $\iint_D (f(x,y)+\lambda g(x,y))\,ds=\iint_D f(x,y)\,ds+\lambda\iint_D g(x,y)\,ds$

3) جمع پذیری: اگر $D=\bigcup_{i=1}^n D_i$ ، $D_i\bigcap_{i\ne j} D_j=\emptyset$ در این صورت

$$\iint_D f(x,y)\,ds=\iint_{D_1} f(x,y)\,ds+\iint_{D_2} f(x,y)\,ds+\cdots\iint_{D_n} f(x,y)\,ds$$

مساحت ناحیه محدود به منحنی‌های $y = x^2 - 1$ ، $y = 1 - x^2$ ، $y \le 1 + x$ را بیابید. حل:



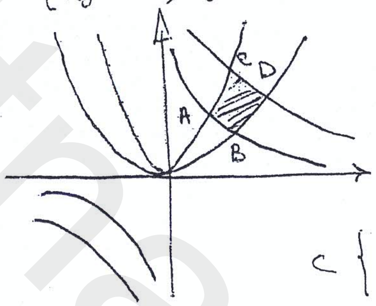
$$\iint_D \ldots - \iint_{D_1} + \iint_{D_2}$$

$$= \int_{-1}^{0}\int_{x^2-1}^{1+x} dy\,dx + \int_{0}^{1}\int_{x^2-1}^{1-x^2} dy\,dx = \int_{-1}^{0}(1 + x - x^2 + 1)\,dx$$

$$+ \int_0^1 (1 - x^2 - x^2 + 1)\,dx = \left(2x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{0} + \left(2x - \frac{2}{3}x^3\right]_0^1 =$$

تمرین: مطلوبست محاسبه مساحت ناحیه محدود به منحنی‌های

$$\begin{cases} xy = 1 \ , \ y = x^2 \\ xy = 2 \ , \ y = 4x^2 \end{cases}$$

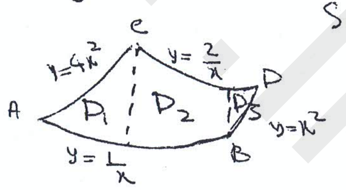


$$A \begin{cases} y = 4x^2 \Rightarrow 4x^3 = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \\ xy = 1 \end{cases}$$

$$B \begin{cases} y = x^2 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = 1 \\ xy = 1 \end{cases}$$

$$C \begin{cases} y = 4x^2 \Rightarrow 4x^3 = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ xy = 2 \end{cases}$$

$$D \begin{cases} y = x^3 \Rightarrow x^3 = 2 \Rightarrow x = \sqrt[3]{2} \\ xy = 2 \end{cases}$$



$$S = \iint dx\,dy = \iint_{D_1} + \iint_{D_2} + \iint_{D_3}$$

$$= \int_{\frac{1}{\sqrt[3]{4}}}^{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}\int_{\frac{1}{x}}^{4x^2} dy\,dx + \int_{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}^{1}\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}} dy\,dx + \int_{1}^{\sqrt[3]{2}}\int_{x^2}^{\frac{2}{x}} dy\,dx$$

$$= \frac{2}{3}\ln 2$$

قضیه: تغییر متغیر در انتگرال دوگانه: فرض کنید $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ نگاشتی باشد که ناحیه D را در دستگاه xy را به ناحیه D' در دستگاه uv تبدیل کند، $u = u(x,y)$ و $v = v(x,y)$

تعریف می‌کنیم:

$$J(x,y) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$J(x,y)$ را ژاکوبین تبدیل می‌نامیم:

$$J(u,v) = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

و همواره: $J(x,y) = \dfrac{1}{J(u,v)}$

مثال: فرض کنید مطلوبست محاسبه $J(x,y)$

$$\begin{cases} u = xy \\ v = \frac{y}{x^2} \end{cases}$$

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{2y}{x^3} & \frac{1}{x^2} \end{vmatrix} = \frac{3y}{x^2} = 3v \Rightarrow J(x,y) = \frac{1}{J(u,v)} = \frac{1}{3v}$$

مثال: $x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

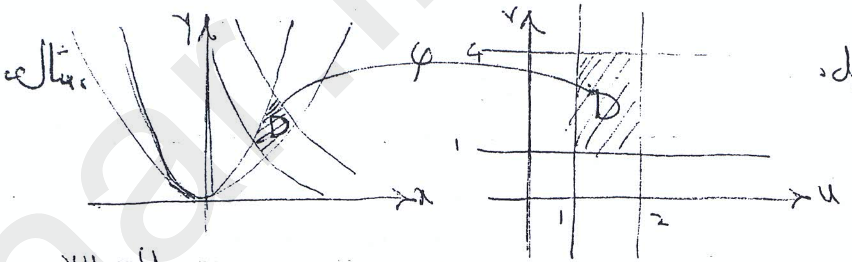
قضیه: فرض کنید $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ، P تبدیلی باشد که ناحیه D در دستگاه xy را به ناحیه D' در دستگاه uv می‌برد و

$u = u(x,y) \quad v = v(x,y)$

و u، v توابعی دیفرانسیل پذیر باشد $J(x,y)\neq 0$
در این صورت:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D'} f(x(u,v),\, y(u,v))\,|J(x,y)|\,dudv$$

مثال: در مثال قبل:



$$\varphi\begin{cases} xy = u \\ \dfrac{y}{x^2} = v \end{cases} \qquad J(x,y) = \frac{1}{3v}$$

$$\iint_D dxdy = \iint_{D'} \frac{1}{3v}\,dudv = \int_1^2\int_1^4 \frac{1}{3v}\,dvdu = \int_1^2 \frac{1}{3}\ln 4\,du = \frac{2}{3}\ln 2$$

مثال: $\iint\limits_{D} \sin(x^2+y^2)\,dxdy$ $\quad D: x^2+y^2\leq 1$

* هرگاه ناحیه انتگرال گیری دایره بود بهترین تبدیل قطبی است.

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

$$\iint\limits_{D:x^2+y^2\leq 1} \sin(x^2+y^2)\,dxdy = \iint\limits_{D:r\leq 1} \sin(r^2)\,r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r\sin(r^2)\,drd\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2}\cos(r^2)\Big]_0^1 = \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2}(\cos 1 - 1)$$

$$= \pi(1-\cos 1)$$

مثال: 1) $\int_0^2\int_0^{2-x} e^{\frac{y-x}{y+x}}\,dydx$ $\qquad$ 2) $\int_0^2\int_0^{2-y} \sin\left(\frac{x-y}{x+y}\right)dxdy$

3) $\iint e^{2x}(3yx^2+y^2)\,dxdy$ $\quad D: y=e^{-x},\ y=2e^{-x},\ y=x^3+1,\ y=x^3+2$

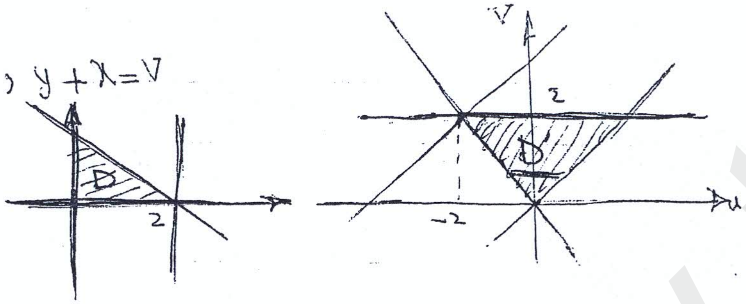
4) $\iint \frac{xy}{(x^2+y^2)^3}\cos\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)dxdy$ $\quad D: x^2-y^2=1,\ x^2-y^2=5,\ x^2+y^2=4,\ x^2+y^2=9$

5) $\iint (x+y)\sin(x^2-y^2)\,dxdy$ $\quad D: x+y=\pi,\ x+y=2\pi,\ x-y=0,\ x-y=\frac{\pi}{2}$

1) $y-x=u$, $y+x=v$

$0\leq x\leq 2$

$0\leq y\leq 2-x$



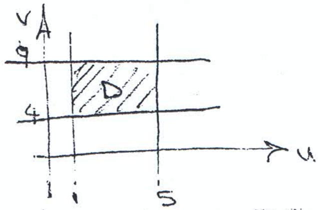
$$\begin{cases} x = \dfrac{v-u}{2} \\ y = \dfrac{u+v}{2} \end{cases} \qquad \begin{matrix} x=0 \Rightarrow u=v & x=2 \Rightarrow u-v=4 \\ y=0 \Rightarrow u=-v & y=2-x \Rightarrow v=2 \end{matrix}$$

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \qquad \iint_D e^{\frac{y-x}{y+x}}\,dxdy = \iint_{D'} e^{\frac{u}{v}}\,\frac{1}{2}\,dudv$$

$$= \int_0^2\int_{-v}^{v} \frac{1}{2}e^{\frac{u}{v}}\,dudv = \int_0^2 \frac{1}{2}ve^{\frac{u}{v}}\Big]_{-v}^{v} dv = \frac{1}{2}\int_0^2 (e^1-e^{-1})\,v\,dv$$

$$= (e^1 - e^{-1}) = 2\sinh(1)$$

$$\begin{cases} x^2-y^2=u \\ x^2+y^2=v \end{cases}$$



$$J(u,v)=\begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 2x & 2y \end{vmatrix}=8xy$$

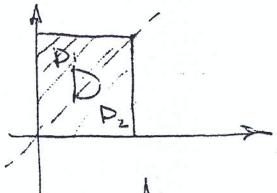
$$J(x,y)=\frac{1}{8xy}$$

$$\iint_D \frac{xy}{(x^2+y^2)^3}\cos\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)dxdy=\iint_{D'} \frac{xy}{v^3}\cos\left(\frac{u}{v}\right)\frac{1}{8xy}\,du\,dv$$

$$=\frac{1}{8}\int_4^9\int_1^5 \frac{1}{v^3}\cos\left(\frac{u}{v}\right)du\,dv=\frac{1}{8}\int_4^9 \frac{1}{v^2}\left(\sin\left(\frac{5}{v}\right)-\sin\frac{1}{v}\right)dv$$

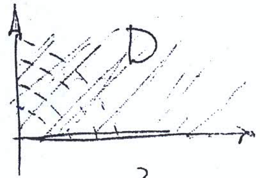
$$=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{5}\cos\left(\frac{5}{9}\right)-\cos\left(\frac{1}{v}\right)\right)\Big]_4^9=\frac{1}{8}\left[\frac{1}{5}\left(\cos\frac{5}{9}-\cos\frac{5}{4}\right)-\cos\frac{1}{9}+\cos\frac{1}{4}\right]$$

مثال: $\iint_{D} |y-x|\,dxdy$ $D:[0,1]\times[0,1]$



$$=\iint_{D_1}(y-x)\,dxdy+\iint_{D_2}(-y+x)\,dxdy$$

مثال: $\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x^2-y^2}dxdy=I$



$$I=\iint_D e^{-r^2}r\,dr\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty re^{-r^2}dr\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^\infty d\theta$$

$$=\frac{\pi}{4}$$

تذکر*

$$I=\int_0^\infty e^{-x^2}dx \Rightarrow I=\int_0^\infty e^{-y^2}dy$$

$$\Rightarrow I^2=\int_0^\infty e^{-x^2}dx\int_0^\infty e^{-y^2}dy=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x^2-y^2}dxdy=\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow I=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

مثال: $\iint_D e^{-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dxdy$ $D:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$

$$\frac{x}{a}=u \quad \frac{y}{b}=v$$

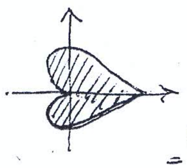
$$J(x,y)=\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix}=ab$$

$$\Rightarrow I=\iint_{D:\,u^2+v^2\le 1} e^{-u^2-v^2}ab\,du\,dv=ab\int_0^{2\pi}\int_0^1 e^{-r^2}r\,dr\,d\theta=\pi ab(1-e^{-1})$$

کاربردهای انتگرال دوگانه:

مساحت:

مثال: مساحت ناحیه محصور به منحنی $r=1+\cos\theta$ را بیابید.



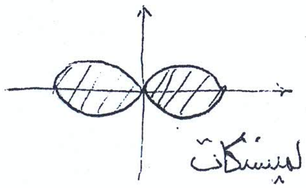
$$S=2\int_0^\pi\int_0^{1+\cos\theta} r\,dr\,d\theta=2\int_0^\pi \frac{1}{2}(1+\cos\theta)^2d\theta$$

$$=\int_0^\pi(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta=\left(\theta+2\sin\theta+\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^\pi$$

$$=\frac{3\pi}{2}$$

مثال: مساحت محصور به منحنی $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$

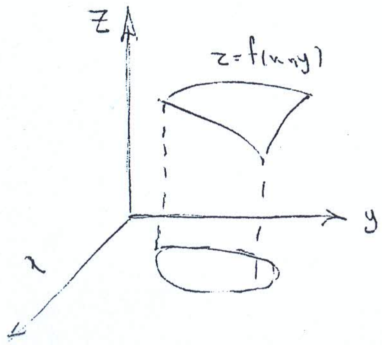
$$r^4=r^2\cos 2\theta \Rightarrow r^2=\cos 2\theta$$



$$S=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} r\,dr\,d\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}\cos 2\theta\,d\theta$$

لمینسکات $\Rightarrow S=\sin 2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=1$

تعیین حجم به کمک انتگرال دوگانه:



فرض کنید تابع $f(x,y)$ در ناحیه D پیوسته و نامنفی باشد. حجم محدود از بالا به رویه $z=f(x,y)$

وازپایین به ناحیه D در صفحه xy وازکنار به استوانه ای متکی به D برابراست با:

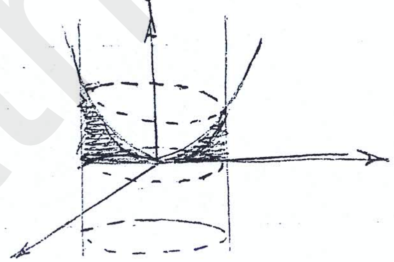
$$V=\iint_D f(x,y)\,dxdy$$

اگرناحیه موردنظر محدودبه ازبالاتوسط سطح $z=f(x,y)$ وازپایین توسط سطح $z=g(x,y)$ باشند آنگاه:

$$V=\iint_D \big(f(x,y)-g(x,y)\big)\,dxdy$$

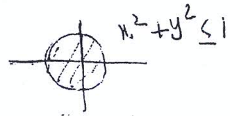
پس D تصویرناحیه موردنظردرصفحه xy است.

مثال: حجم محدودازبالابه سهمی گون $z=x^2+y^2$ وازکناره به استوانه $x^2+y^2=1$ وازپایین به صفحه $z=0$ رابیابید.

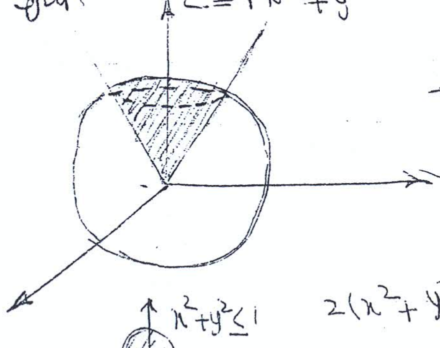


$$V=\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy=\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\cdot r\,dr\,d\theta$$

$$=\frac{\pi}{2}$$

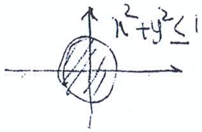


مثال: حجم محدودبه رویه های $x^2+y^2+z^2=2$ ، $z=\sqrt{x^2+y^2}$



$$V=\iint_D \left(\sqrt{2-x^2-y^2}-\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(\sqrt{2-r^2}-r\right) r\,dr\,d\theta$$



$$2(x^2+y^2)=2 \Rightarrow x^2+y^2=1$$

انتگرال سه گانه

انتگرال سه گانه: فرض کنید تابع $f(x,y,z)$ درناحیه G در $\mathbb{R}^3$ معین باشد ناحیه G رابه n قسمت $G_1, G_2, \dots, G_n$ تقسیم می کنیم:

$$G=\bigcup_{i=1}^{n} G_i$$

فرض کنید $\Delta_i V$ حجم جزء G_i باشد. درهرجزء G_i نقطه دلخواه (x_i, y_i, z_i) رادرنظرمی گیریم ومجموع زیررا تشکیل می دهیم:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,\Delta_i V$$

حال اگر

$$\lim_{\max \Delta_i V\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,\Delta_i V$$

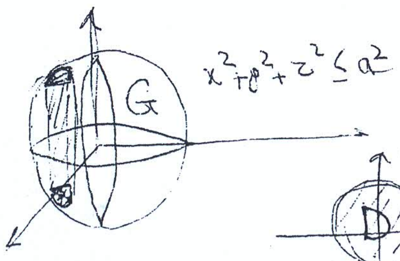
موجودباشد گوییم تابع f درناحیه G دارای انتگرال سه گانه است ومی نویسیم:

$$\iiint_G f(x,y,z)\,dxdydz=\lim_{\max \Delta_i V\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,\Delta_i V$$

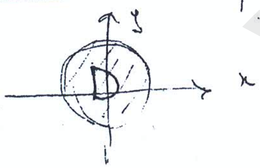
تعریف: ناحیه G رادرراستای محور zها منظم نامیم هرگاه:

$$G=\{(x,y,z)\mid (x,y)\in D,\ z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y)\}$$

پس D تصویر G درصفحه xy است.



$$G=\{(x,y,z) \mid (x,y)\in D,\ -\sqrt{a^2-x^2-y^2}\le z\le \sqrt{a^2-x^2-y^2}\}$$

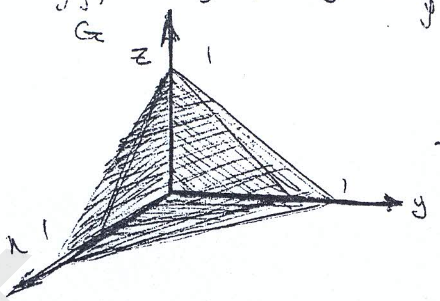


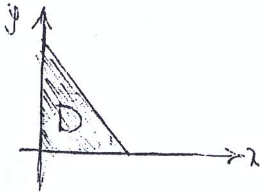
حال فرض کنید ناحیه G در راستای محور zها منظم باشد در این صورت:

$$\iiint_G f(x,y,z)\,dV = \iint_D \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,ds$$

مثال: فرض کنید G ناحیه محدود به صفحه $x+y+z=1$ و صفحات مختصات باشد مطلوبست محاسبه:

$$I=\iiint_G (x+yz)\,dx\,dy\,dz$$





$$G=\{(x,y,z)\mid (x,y)\in D,\ 0\le z\le 1-x-y\}$$

$$I=\iint_D\int_0^{1-x-y}(x+yz)\,dz\,ds=\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y}(x+yz)\,dz\,dy\,dx$$

$$=\int_0^1\int_0^{1-x}\left(x(1-x-y)+\frac{1}{2}y(1-x-y)^2\right)ds=\int_0^1\ldots\ldots$$

تعریف: ناحیه G را در راستای محور yها منظم نامیم هرگاه:

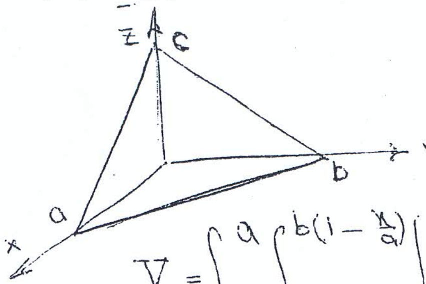
$$G=\{(x,y,z)\mid (x,z)\in D',\ y_1(x,z)\le y\le y_2(x,z)\}$$

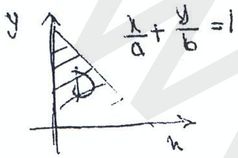
پس D' تصویر G در صفحه xz است.

به طور مشابه منظم بودن در راستای محور xها تعریف می‌شود.

* تذکر: اگر $f(x,y,z)=1$ آنگاه: $\iiint_G dx\,dy\,dz = G$ (حجم)

مثال: حجم ناحیه محدود به صفحه $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ و صفحات مختصات را بیابید.





$$V=\int_0^a\int_0^{b(1-\frac{x}{a})}\int_0^{c(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b})}dz\,dy\,dx=\int_0^a\int_0^{b(1-\frac{x}{a})}c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)dy\,dx=$$

$$=\int_0^a\left(bc\left(1-\frac{x}{a}\right)^2-\frac{1}{2}bc\left(1-\frac{x}{a}\right)^2\right)dx=-\frac{1}{2}bca\left[\frac{1}{3}\left(1-\frac{x}{a}\right)^3\right]_0^a=\frac{1}{6}abc$$

تعریف: فرض کنید $\varphi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ تبدیلی به صورت زیر باشد:

$$\varphi\begin{cases}u=u(x,y,z)\\ v=v(x,y,z)\\ w=w(x,y,z)\end{cases}$$

ژاکوبین تبدیل فوق به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$J(x,y,z)=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}&\frac{\partial x}{\partial v}&\frac{\partial x}{\partial w}\\ \frac{\partial y}{\partial u}&\frac{\partial y}{\partial v}&\frac{\partial y}{\partial w}\\ \frac{\partial z}{\partial u}&\frac{\partial z}{\partial v}&\frac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix}$$

$$J'(u,v,w)=\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}\Rightarrow J(x,y,z)=\frac{1}{J'(u,v,w)}$$

ژاکوبین تبدیل در مختصات استوانه‌ای کروی را بیابید.

مثال: استوانه‌ای

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases} \qquad J(x,y,z) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

$(x,y,z) \sim (r,\theta,z)$

کروی

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta\sin\phi \\ y = \rho\sin\theta\sin\phi \\ z = \rho\cos\phi \end{cases} \qquad J(x,y,z) = \begin{vmatrix} \cos\theta\sin\phi & -\rho\sin\theta\sin\phi & \rho\cos\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \rho\cos\theta\sin\phi & \rho\sin\theta\cos\phi \\ \cos\phi & 0 & -\rho\sin\phi \end{vmatrix}$$

$$J(x,y,z) = \cos\phi\left(-\rho^2\sin^2\theta\sin\phi\cos\phi - \rho^2\cos^2\theta\sin\phi\cos\phi\right)$$
$$-\rho\sin\phi\left(\rho\cos^2\theta\sin^2\phi + \rho\sin^2\theta\sin^2\phi\right) \Rightarrow$$

$$J(x,y,z) = -\rho^2\sin\phi\cos^2\phi - \rho^2\sin^3\phi = -\rho^2\sin\phi$$

تمرین: حجم مخروطی کره را در مختصات دکارتی بیابید.

قضیه تغییر متغیر در انتگرال سه‌گانه: فرض کنید $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ تبدیلی باشد که ناحیه G در دستگاه xyz را به ناحیه G' در دستگاه uvw تبدیل می‌کند

$x = x(u,v,w)$

$y = y(u,v,w)$

$z = z(u,v,w)$

و $J(x,y,z) \neq 0$ در این صورت،

$$\iiint_G f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{G'} f\big(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\big)\,|J(x,y,z)|\,du\,dv\,dw$$

مثال: حجم بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ را بیابید.

$$\iiint dx\,dy\,dz \qquad G: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \le 1$$

فرض کنید:

$$\begin{cases} \frac{x}{a} = u \\ \frac{y}{b} = v \\ \frac{z}{c} = w \end{cases}$$

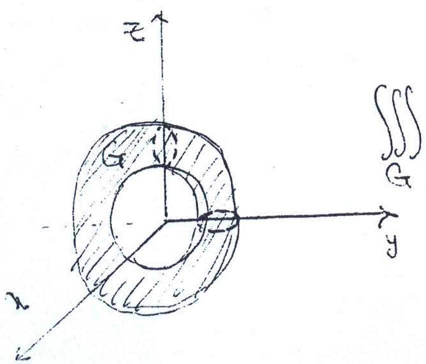
$G \to G': u^2+v^2+w^2 \le 1$

$$J(x,y,z) = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc \qquad \iiint_G dx\,dy\,dz = \iiint_{G'} abc\,du\,dv\,dw$$

$$\begin{cases} u = \rho\sin\phi\cos\theta \\ v = \rho\sin\phi\sin\theta \\ w = \rho\cos\phi \end{cases} \qquad \iiint_G dx\,dy\,dz = abc\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 \rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

$$= 2\pi abc \cdot \frac{1}{3}\int_0^{\pi}\sin\phi\,d\phi = \frac{2\pi}{3}abc\left(-\cos\phi\right)\Big]_0^{\pi}$$
$$= \frac{4}{3}\pi abc$$

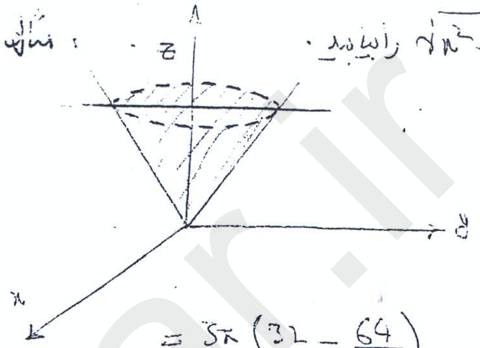
مثال: مطلوب است محاسبه $\iiint_G \sqrt{x^2+y^2}\,dV$ که G محدود به کره‌های $x^2+y^2+z^2=4$ ، $x^2+y^2+z^2=1$



$$\iiint_G \sqrt{x^2+y^2}\,dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_1^{2} \rho^3\sin^2\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{4}(16-1)\sin^2\phi\,d\phi\,d\theta$$

$$= \frac{15}{64}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}\phi - \frac{1}{2}\sin 2\phi\right)\Big|_0^{\pi} d\theta = \frac{15}{4}\pi^2$$

مثال: حجم ناحیه محدود به $\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 4$ را بیابید.



$$\iiint_G dV = \int_0^{2\pi}\int_0^4\int_r^4 r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^4 (4-r)\,r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\left(2r^2 - \frac{1}{3}r^3\right)\Big|_0^4 d\theta$$

$$= 2\pi\left(32 - \frac{64}{3}\right)$$

انتگرال خط:

تابع $F(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$

$F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$P, Q, R: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ را یک میدان برداری می‌نامیم

فرض کنید $r(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$

یک تابع برداری و $\alpha(t)$ قسمتی از هموار در بازه $[t_0, t_1]$ باشد در این صورت $\int_\alpha F.dr$ را انتگرال خط (منحنی الخط) می‌نامیم

به صورت زیر محاسبه می‌کنیم

$$\int_\alpha F.dr = \int_\alpha P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} F(\alpha(t))\cdot\alpha'(t)\,dt = \int_{t_0}^{t_1}\big[P(x(t),y(t),z(t))\,x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))\,y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))\,z'(t)\big]dt$$

$w = \int F.dr$ کار انجام شده است.

مثال: مطلوبست محاسبه $\int_\alpha xz\,dx + yx^2\,dy + z^2\,dz$، α مسیری از منحنی $r(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}$ از نقطه $(0,0,0)$ تا $(2,4,8)$ می‌باشد.

$$w = \int_0^2 [t\cdot t^3\cdot 1 + t^2\cdot t^2\cdot 2t + t^6\cdot 3t^2]\,dt = \frac{32}{5} + \frac{64}{3} + \frac{512}{3}$$

مثال: مطلوبست محاسبه $\int_\alpha xy\,dx + y^2\,dy$ که α:

الف) خطی است که $(0,0)$ را به $(1,1)$ می‌برد.

ب) منحنی $y = x^2$ از $(0,0)$ تا $(1,1)$ است.

ج) منحنی $y = x^3$ " " " " "

الف) $y = x \Rightarrow \alpha(t) = t\vec{i} + t\vec{j}$

$$\int_0^1 (t^2 + t^2)\,dt = \frac{2}{3}$$

$\alpha(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j}$

ب) $\int_0^1 (t^3 + t^4\cdot 2t)\,dt = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$

ج) $\alpha(t) = t\vec{i} + t^3\vec{j}$ $\quad \int_0^1 (t^4 + t^6\cdot 3t^2)\,dt = \frac{1}{5} + \frac{1}{3} = \frac{8}{15}$

مثال: مثال قبل را برای میدان برداری $F = xy\vec{i} + \frac{1}{2}x^2\vec{j}$ حل کنید.

$\int_\alpha xy\,dx + \frac{1}{2}x^2\,dy$: الف) $\int_0^1 (t^2 + \frac{1}{2}t^2)\,dt = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

ب) $\int_0^1 (t^3 + \frac{1}{2}t^2\cdot 2t)\,dt = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

ج) $\int_0^1 (t^4 + \frac{1}{2}t^2\cdot 3t^2)\,dt = \frac{1}{5} + \frac{3}{10} = \frac{1}{2}$

ت) $y=x^n \qquad \alpha(t)=t\vec{i}+t^n\vec{j}$

$$\int_0^1 \left(t^{n+1}+\frac{1}{2}t^2t^{n-1}\right)dt=\frac{1}{n+2}+\frac{n}{2(n+2)}=\frac{1}{2}$$

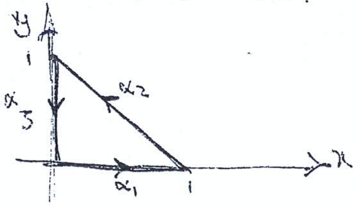
خواص انتگرال خط:

۱) خطی بودن
$$\int_\alpha (F+\lambda G)\,dr=\int_\alpha F\,dr+\lambda\int_\alpha G\,dr$$

۲) اگر $\alpha=\bigcup_{i=1}^{n}\alpha_i$ که انتهای α_i ابتدای α_{i+1} باشد، در این صورت:
$$\int_\alpha F.dr=\int_{\alpha_1}F.dr+\int_{\alpha_2}F.dr+\cdots+\int_{\alpha_n}F.dr$$

۳)
$$\int_{\alpha} F\,dr=-\int_{\overleftarrow{\alpha}} F.dr$$

مثال: مطلوبست محاسبه $\int_\alpha x^2y\,dx+y^3\,dy$ که α مثلث به رئوس $(0,0)$ و $(1,0)$ و $(0,1)$ می‌باشد.

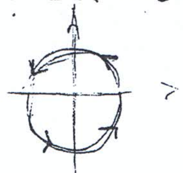


$\alpha=\alpha_1\cup\alpha_2\cup\alpha_3 \qquad \alpha_1(t)=t\vec{i}$

$\alpha_2(t)=t\vec{i}+(1-t)\vec{j} \qquad \alpha_3(t)=t\vec{j}$

$$\int_\alpha F.dr=\int_{\alpha_1}+\int_{\alpha_2}+\int_{\alpha_3}=0+\int_1^0\left(t^2(1-t)-(1-t)^3\right)dt+\int_1^0 t^3\,dt$$
$$=-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{12}$$

مثال: مطلوبست محاسبه انتگرال
$$\int_{\alpha:x^2+y^2=1} x^2\,dx+y^2\,dy$$



$\alpha(t)=\cos t\,\vec{i}+\sin t\,\vec{j}$

$$\int_0^{2\pi}\left(-\cos^2t\,\sin t+\sin^2t\cos t\right)dt=\left(\frac{1}{3}\cos^3t+\frac{1}{3}\sin^3t\right)_0^{2\pi}=0$$

$$\int_{\alpha:x^2+y^2=1} x^2\,dx+(y^2+2x)\,dy=\int_\alpha x^2\,dx+y^2\,dy+\int_\alpha 2x\,dy$$
$$=0+\int_0^{2\pi}2\cos^2t\,dt=\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{2\pi}=2\pi$$

استقلال مسیرها: فرض کنید $F=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}$ یک میدان گرادیان (نگه‌دار) باشد به عبارت دیگر فرم دیفرانسیلی $Pdx+Qdy+Rdz$ دیفرانسیل کامل باشد در این صورت تابعی مانند φ موجود است به طوریکه
$$d\varphi=Pdx+Qdy+Rdz$$

$$\int_\alpha F\,dr=\int_\alpha Pdx+Qdy+Rdz$$
$$=\int_\alpha d\varphi=\varphi(\text{انتها})-\varphi(\text{ابتدا})$$

یعنی اگر دیفرانسیلی $Pdx+Qdy+Rdz$ کامل باشد آن‌گاه مقدار $\int_\alpha F.dr$ تنها به نقاط ابتدا و انتهای مسیر بستگی دارد یعنی مستقل از مسیر است.

انتگرال خط:

$$\int_\alpha F\cdot dr = \int_R P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_{t_0}^{t_1} F(\alpha(t))\cdot \alpha'(t)\,dt$$

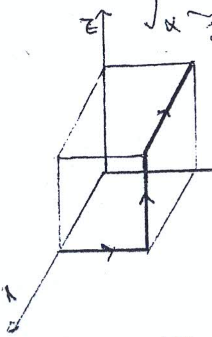
$F = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ $\qquad \alpha(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$

$t \in [t_0, t_1]$

$\int_\alpha F\cdot dr = \varphi(\text{انتها}) - \varphi(\text{ابتدا})$ F میدان گرادیان باشد

مثال: $\int_\alpha \underbrace{e^{yz}}_{P}dx + (\underbrace{xze^{yz}+2y}_{Q})dy + \underbrace{xye^{yz}}_{R}dz$ مطلوبست محاسبه

که α مسیر مشخص شده زیر است:



$\Phi(x,y,z) = xe^{yz} + g(y,z)$

$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = xze^{yz} + \frac{\partial g}{\partial y} = xze^{yz} + 2y \Rightarrow g(y,z) = y^2 + h(z)$

$\Phi = xe^{yz} + y^2 + h(z)$ $\qquad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = xye^{yz} + h'(z) = xye^{yz} \Rightarrow h(z) = c$ ثابت

$P_y = Q_x = ze^{yz}$

$P_z = R_x = ye^{yz}$ در انتگرال خط همیشه این را چک کنید *** دیفرانسیل کامل است

$Q_z = xe^{yz} + xyze^{yz} = R_y$

$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = e^{yz}$ $\qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = xze^{yz} + 2y$ $\qquad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = xye^{yz}$

مثال: $\int_{(1,2,3)}^{(-1,4,5)} yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$ مطلوبست محاسبه $(-1,4,5)$

$P_y = Q_x = z$

$P_z = R_x = y$ دیفرانسیل کامل است

$Q_z = R_y = x$

$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = yz \Rightarrow \varphi = xyz + g(y,z)$ $\qquad \varphi_y = xz + \frac{\partial g}{\partial y} = xz \Rightarrow g_y = 0$

$\Rightarrow g = h(z)$

$\varphi = xyz + h(z) \Rightarrow \varphi_z = xy + h'(z) = xy \Rightarrow h(z) = c$

$\Rightarrow \varphi = xyz + c$

$$\int_{(1,2,3)}^{(-1,4,5)} yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz = \varphi(-1,4,5) - \varphi(1,2,3) = -26$$

*** مربوط به انتگرال سطح ***

D_1 و D_2 و D_3 به ترتیب تصاویر Δ بر صفحات xy و xz و yz می‌باشد.

$\iint_\Delta f(x,y,z)\,d\sigma$

$\Delta: z = g(x,y) \Rightarrow \iint_\Delta f(x,y,z)\,d\sigma = \iint_{D_1} f(x,y,g(x,y))\sqrt{1+g_x^2+g_y^2}\,dx\,dy$

$\Delta: y = g(x,z) \Rightarrow \iint_\Delta f(x,y,z)\,d\sigma = \iint_{D_2} f(x,g(x,z),z)\sqrt{1+g_x^2+g_z^2}\,dx\,dz$

$\Delta: x = g(y,z) \Rightarrow \iint_\Delta f(x,y,z)\,d\sigma = \iint_{D_3} f(g(y,z),y,z)\sqrt{1+g_y^2+g_z^2}\,dy\,dz$

$\Phi(x,y,z) = xe^{yz} + g(y,z) \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = xze^{yz} + \frac{\partial g}{\partial y} = xze^{yz} + 2y$

$\Rightarrow g(y,z) = y^2 + h(z) \Rightarrow \Phi = xe^{yz} + y^2 + h(z)$

$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = xye^{yz} + h'(z) \Rightarrow h(z) = c$ ثابت

$\Phi(x,y,z) = xe^{yz} + y^2 + c \Rightarrow \int \dots = b^2 - a^2$

$\Rightarrow \Phi(x,y,z) = xe^{yz} + y^2 + c \Rightarrow \int e^{yz}dx + (xze^{yz} + 2y)dy + xye^{yz}dz$

$= \Phi(0,b,c) - \Phi(a,0,0) = b^2 - a$

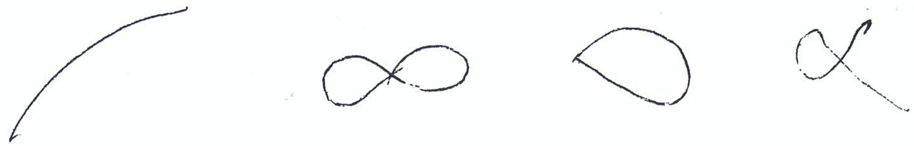
تعریف: منحنی α را ساده نامیم هرگاه یک به یک باشد: $t_1 \neq t_2 \Rightarrow \alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$

(خودش را قطع نکند)

* ممکن است تابع یک به یک نباشد ولی منحنی ساده باشد.

منحنی α را بسته می‌نامیم هرگاه $\alpha(t_0) = \alpha(t_1)$

منحنی را ساده و بسته نامیم هرگاه بجز در ابتدا و انتها خودش را قطع نکند.



ساده	✓	✗	✓	✗
بسته	✗	✓	✓	✗

برای منحنی‌های بسته از نماد $\oint_\alpha F.dr$ استفاده می‌کنیم.

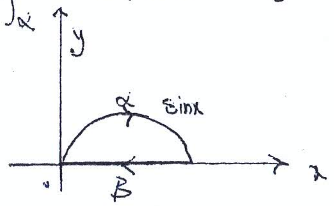
نتیجه: اگر F میدان گرادیان باشد و منحنی α بسته باشد آنگاه $\oint_\alpha F.dr = 0$

مثال: مطلوبست محاسبه $\oint_\alpha e^{yz}dx + xze^{yz}dy + xye^{yz}dz$ که α دایره $x^2+y^2=1$ باشد.

$f = e^{yz}\vec{i} + xze^{yz}\vec{j} + xye^{yz}\vec{k}$ نگهدار است، پس: $\oint_\alpha F.dr = 0$

مثال: مثال قبل را برای منحنی α زیر حل کنید:

$\int_\alpha e^{yz}dx + xzc^{yz}dy + xye^{yz}dz$



راه اول

F نگهدار است $\int_{\alpha \cup B} F.dr = 0$

$\int_\alpha F.dr = -\int_B F.dr = \int_{\overleftarrow{B}} F.dr \qquad B(t) = t\vec{i} \quad 0 \le t \le \pi$

$\int_\alpha F.dr = \int_0^\pi dt = \pi$

راه دوم

$\Phi = xe^{yz} \qquad \int_\alpha F.dr = \Phi(\pi,0,0) - \Phi(0,0,0) = \pi$

مثال: مطلوبست محاسبه که α دایره $x^2+y^2=1$ می‌باشد.

$\oint_\alpha (e^{yz}+y)dx + xze^{yz}dy + (xye^{yz})dz = \oint_\alpha e^{yz}dx + xze^{yz}dy + xye^{yz}dz$

$+ \oint y\,dx$

حل تمرین

$\alpha(t) = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j}$

$$\oint_\alpha F\cdot dr = \int_0^{2\pi} -\sin^2 t\,dt = -\left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{2\pi} = -(\pi) = -\pi$$

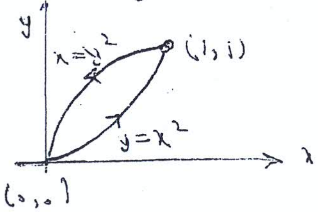
$\Phi = xe^{yz}$ $\quad \int_\alpha F\cdot dr = \Phi(\pi,0,0) - \Phi(0,0,0) = \pi$

قضیه گرین: در $\mathbb{R}^2$ برقرار است:

فرض کنید $F = P(x,y)\,\vec{i} + Q(x,y)\,\vec{j}$ یک میدان برداری باشد و α یک منحنی ساده و بسته در $\mathbb{R}^2$ باشد که α مرز آن است. و فرض کنید که توابع P و Q و مشتقات جزئی آن‌ها در D پیوسته باشند در این صورت:

$$\oint_\alpha P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$$

مثال: قضیه گرین را برای $F = xy\,\vec{i} + y^2\,\vec{j}$ و منحنی α که شامل $y = x^2$ و $x = y^2$ می‌باشد، تحقیق کنید.



سمت چپ: $\oint_\alpha xy\,dx + y^2\,dy = \int_{\alpha_1} + \int_{\alpha_2}$

$\alpha_1(t) = t\,\vec{i} + t^2\,\vec{j}$ ، $\alpha_2(t) = t^2\,\vec{i} + t\,\vec{j}$

$$\Phi_\alpha = \int_0^1 (t^3 + t^4 \cdot 2t)\,dt + \int_1^0 (t^3 \cdot 2t + t^2)\,dt = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{2}{5} - \frac{1}{3} = -\frac{3}{20}$$

سمت راست: $\iint_D (0 - x)\,dx\,dy = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} -x\,dy\,dx = \int_0^1 (-x\sqrt{x} + x^3)\,dx = -\frac{2}{5} + \frac{1}{4} = -\frac{3}{20}$

مثال: $\alpha: x^2 + y^2 = 4$ ، $\oint_\alpha (2y + \sqrt[3]{x^2+1})\,dx + (5x - e^{tg^{-1}y})\,dy$ مطلوبست محاسبه

با روش گرین:

$$\oint_\alpha F\cdot dr = \iint_{D: x^2+y^2\le 4} (5-2)\,dx\,dy = 3S(D) = 12\pi$$

مثال: فرض کنید α منحنی ساده و بسته ای باشد که ناحیه ای به مساحت 10 واحد سطح را محصور کرده است. مطلوبست محاسبه: $\oint_\alpha (x^2 + 4\sin x + y)\,dx + (e^{y^2} + y\,tg^{-1}y + 6x)\,dy$

$$= \iint_D (6-1)\,dx\,dy = 5S(D) = 50$$

محاسبه مساحت به کمک انتگرال خط:

$$\oint_\alpha P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$$

با انتخاب مناسب P و Q به طوری که $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$ باشد مساحت ناحیه D به دست می‌آید: فرض کنید $P = 0$, $Q = x$ پس

$$\oint_\alpha x\,dy = S(D)$$

و یا

$$\oint -y\,dx = S(D)$$

و یا

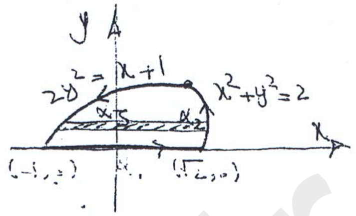
$$\oint_\alpha -\frac{1}{2}y\,dx + \frac{1}{2}x\,dy = S(D)$$

مثال: مطلوبست محاسبه مساحت بیضی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\alpha(t) = a\cos t\,\vec{i} + b\sin t\,\vec{j}$

$$\oint_\alpha x\,dy = \int_0^{2\pi} ab\cos^2 t\,dt = ab\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)_0^{2\pi} = \pi ab$$

مثال: درستی قضیه گرین را برای منحنی زیر تحقیق کنید.



$$\oint_\alpha y^2dx + x^2dy$$

$\alpha = \alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \alpha_3 \qquad \int_\alpha = \int_{\alpha_1} + \int_{\alpha_2} + \int_{\alpha_3}$

$\alpha_1(t) = t\vec{i} \qquad \alpha_2(t) = \sqrt{2}\cos t\,\vec{i} + \sqrt{2}\sin t\,\vec{j} \qquad \alpha_3(t) = (2t^2-1)\vec{i} + t\vec{j}$

$$\int_{\alpha_1} y^2dx + x^2dy = \int_{-1}^{\sqrt{2}} 0 = 0$$

$$\int_{\alpha_2} y^2dx + x^2dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (-2\sqrt{2}\sin^3 t + 2\sqrt{2}\cos^3 t)dt = 2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} -\sin t(1-\cos^2 t)$$
$$+ \cos t(1-\sin^2 t)\,dt = 2\sqrt{2}\left(\cos t - \frac{1}{3}\cos^3 t + \sin t - \frac{1}{3}\sin^3 t\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$= 2 - 2\sqrt{2} - \frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3} + 2 - \frac{1}{3} = 4 - \frac{2}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$\int_{\alpha_3} y^2dx + x^2dy = \int_1^0 (4t^3 + (2t^2-1)^2)dt = -1 - \frac{4}{5} + \frac{4}{3} - 1 = -\frac{22}{15}$$

$$\oint_\alpha y^2dx + x^2dy = 0 + 4 - \frac{2}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{22}{15}$$

$$\xrightarrow{\text{سمت راست قضیه گرین}} \iint_D (2x-2y)\,dxdy = \int_0^1 \int_{2y^2-1}^{\sqrt{2-y^2}} 2(x-y)\,dxdy =$$

$$2\int_0^1 \left(\frac{1}{2}\left[(2-y^2) - (2y^2-1)^2\right] - y\sqrt{2-y^2} + y(2y^2-1)\right)dy$$

$$= 2\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{2}y^2 - 2y^4 + 2y^2 - \frac{1}{2} - y\sqrt{2-y^2} + 2y^3 - y\right)dy$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{2}{5} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3}(2-y^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1\right) = \frac{6}{5} + \frac{2}{3}\left(1 - 2^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$= \frac{6}{5} + \frac{2}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3} = \frac{28}{15} - \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

مثال: مطلوبست محاسبه
$$\oint_\alpha \overbrace{\frac{-y\,dx}{x^2+y^2}}^{P} + \overbrace{\frac{x\,dy}{x^2+y^2}}^{Q}$$

الف) α دایره واحد به مرکز مبدأ و شعاع ۱ می‌باشد.

ب) α دایره‌ای " " مبدأ " " a می‌باشد.

پ) α " " " (2,0) " " 1 " .

ت) α هر " که مبدأ را شامل نمی‌باشد.

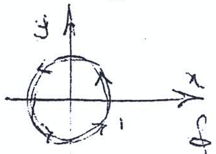
ث) α هر منحنی بسته‌ای که مبدأ را شامل نمی‌باشد.

ج) α هر منحنی ساده و بسته‌ای که مبدأ را شامل باشد.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-x^2-y^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Longrightarrow$ توابع P و Q در (0,0) پیوسته نیستند بنابراین مستقیماً نمی‌توان از قضیه گرین استفاده کرد.

الف)

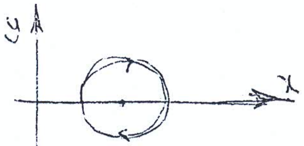


$\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$

$$\oint_\alpha F.dr = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin^2 t}{1} + \frac{\cos^2 t}{1}\right)dt = 2\pi$$

ب) $\alpha(t) = (a\cos t, a\sin t) \Longrightarrow \oint_\alpha F.dr = \int_0^{2\pi}\left(\frac{a^2\sin^2 t}{a^2} + \frac{a^2\cos^2 t}{a^2}\right)dt = 2\pi$

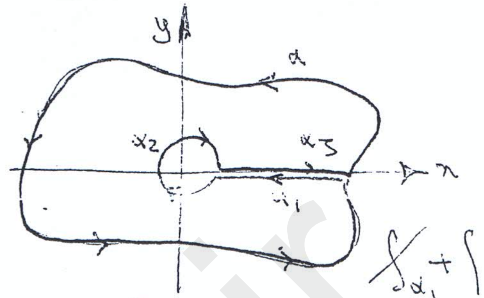
پ)



$\oint_\alpha F.dr = 0$ شرایط قضیه گرین برقرار است.

ت) $\oint F.dr = 0$ انتگرال روی منحنی بسته دیفرانسیل کامل و شرایط قضیه گرین برقرار است.

ث) $\oint F.dr = 0$

ج) 

پس: $\gamma = \alpha \cup \alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \alpha_3$

$\oint_\gamma F\cdot dr = 0$

$\cancel{\int_{\alpha_1}} + \int_{\alpha_2} + \cancel{\int_{\alpha_3}} + \int_\alpha = 0$

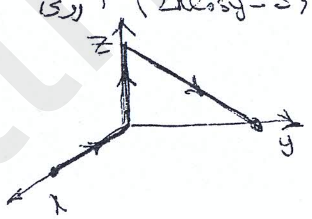
$\Rightarrow \int_\alpha = -\int_{\alpha_2} = -(-2\pi) = 2\pi$

تمرین:

1) فرض کنید $\alpha: 0\le t\le \frac{\pi}{2}$ $\quad r(t) = a\cos t\,\vec{i} + a\sin t\,\vec{j} + \frac{2}{\pi} b t\,\vec{k}$

$F = (e^x\cos y + yz)\vec{i} + (xz - e^x \sin y)\vec{j} + (xy + x)\vec{k}$ مطلوبست محاسبه $\int_\alpha F\cdot dr$

2) کار انجام شده توسط نیروی $F(2x\cos y - 3, -x^2\sin y - z^2, -2yz - 2)$ روی مسیر داده شده زیر را بیابید.



3) $\int_0^1\int_0^{1-x} \sqrt{x+y}\,(y-2x)^2\,dy\,dx$

4) $\int_0^1\int_y^1 e^{x^2}dx\,dy + \int_{-1}^0\int_{-y}^1 e^{x^2}dx\,dy$

5) $\int_0^1\int_{\sqrt[5]{z}}^1\int_0^{\ln 3} \frac{e^{2x}\sin(y^2)}{y^2}\, dx\, dy\, dz$

6) حجم محدود $x^2+y^2-2ay = 0$, $x^2+y^2+z^2 = 4a^2$

7) فرض کنید α قسمتی از منحنی $\tan x = \sin y$, $z = x+y$ از $(0,0,0)$ تا $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4})$ باشد مطلوبست محاسبه:

$\int_\alpha y^5 dx + (5xy^2 + 4y^3\cos^2 z)dy - (y^4 + \sin 2z)\, dz$

8) $\int_0^1\int_{\sqrt{y}}^1 e^{x^3}dx\,dy$

9) $\iint_D |y-\sqrt{x}|\,dx\,dy$ که D ناحیه محدود به $y=1$ و $y=x$ و $x=0$ می‌باشد.

10) مطلوبست محاسبه $\oint_\alpha (x+z)dx + (y+z)dy + \sin z\,dz$ که α مثلثی است که سه ضلع آن محل مشترک صفحه $x+2y+3z=6$ با صفحات مختصات است.

11) $\iiint_G \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)dv$ $\quad G: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$

12) $\int_0^1\int_0^{\cos^{-1} y} e^{\sin x}\,dx\,dy$

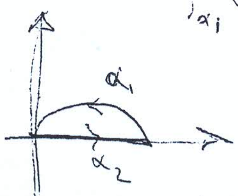
13) $\int_2^4\int_{\sqrt{x}}^2 \sin\left(\frac{\pi x}{2y}\right)dy\,dx + \int_1^2\int_{\sqrt{x}}^x \sin\left(\frac{\pi x}{2y}\right)dy\,dx$

14) $\iint_D |2x-y|\,dx\,dy$ $\quad D: y=2x^2,\ x\ge 0,\ y\le 8$

15) فرض کنید α_1 قسمتی از منحنی $y=\sin x$ $0\le x\le \pi$ و α_2 قسمتی $0\le x\le \pi$ ، $\alpha = \alpha_1\cup\alpha_2$ که در جهت خلاف عقربه‌های ساعت:

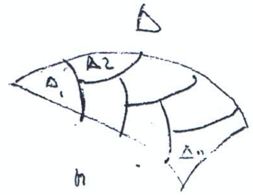
الف) $\oint_{\alpha} (e^x + xy^2)dx + (\cos y^2 + yx^2 + x)dy$

ب) $\int_{\alpha_1}(e^x+y^2x)dx + (\cos y^2 + yx^2 + x)dy$



انتگرال سطح (رویه ای)

انتگرال سطح (رویه ای): فرض کنید Δ یک سطح (رویه) در R^3 باشد و دارای نمایش $z=g(x,y)$ و فرض کنید تابع $f(x,y,z)$ بر سطح Δ معین باشد. سطح Δ را به n قسمت $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ تقسیم می‌کنیم



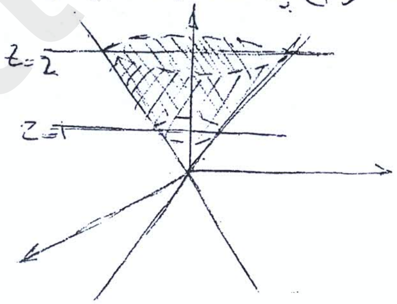
$$\Delta=\bigcup_{i=1}^{n}\Delta_i$$

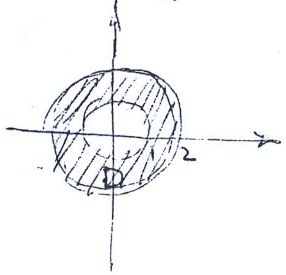
$$\lim_{\max \Delta_i \to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta_i\sigma=\iint_\Delta f(x,y,z)\,ds$$

اگر حد موجود باشد گوئیم تابع f بر سطح Δ دارای انتگرال رویه ای است.

$$\iint_\Delta f(x,y,z)\,d\sigma=\iint_D f(x,y,g(x,y))\sqrt{1+g_x^2+g_y^2}\,dxdy$$

مثال: $\iint_\Delta x^2z^2\,d\sigma$ ، Δ قسمتی از مخروط $x^2+y^2=z^2$ واقع بین $z=1$ ، $z=2$.



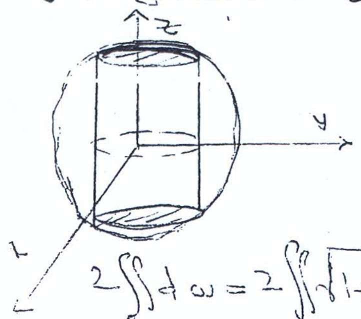


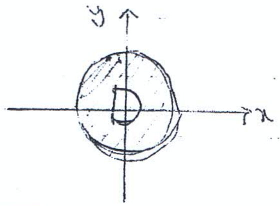
$$\iint_\Delta x^2z^2\,d\sigma=\iint_D x^2(x^2+y^2)\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\,dxdy$$

$$=\iint_D x^2(x^2+y^2)\sqrt{2}\,dxdy=\int_0^{2\pi}\int_1^2 r^4\cos^2\theta\, r\sqrt{2}\,drd\theta=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\frac{63}{6}\cos^2\theta\,d\theta$$

$$=\sqrt{2}\,\frac{63}{6}\left(\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi}=\frac{63\sqrt{2}}{6}\pi$$

مثال: استوانه $x^2+y^2=1$ کره $x^2+y^2+z^2\le 4$ را قطع می‌کند. مساحت سطح حاصل را بیابید.





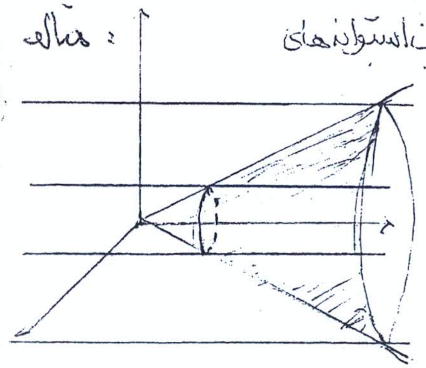
$$z=\sqrt{4-x^2-y^2}=g(x,y)$$

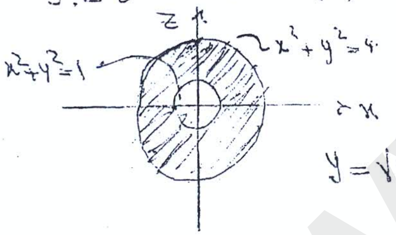
$$2\iint_\Delta d\sigma=2\iint_D\sqrt{1+\frac{x^2}{4-x^2-y^2}+\frac{y^2}{4-x^2-y^2}}\,dxdy=2\iint_D\frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\,dxdy$$

$$=2\int_0^{2\pi}\int_0^1\frac{2}{\sqrt{4-r^2}}\,r\,drd\theta=2\int_0^{2\pi}\left(-2\sqrt{4-r^2}\right]_0^1 d\theta=4\int_0^{2\pi}(2-\sqrt{3})\,d\theta$$

$$=8\pi(2-\sqrt{3})$$

مثال: مساحت سطح قسمتی از مخروط $y=\sqrt{x^2+z^2}$ بین استوانه‌های $x^2+z^2=4$ ، $x^2+z^2=1$ را بیابید.





$$y=\sqrt{x^2+z^2}=g(x,z)$$

$$\iint_\Delta d\sigma=\iint_D\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+z^2}+\frac{z^2}{x^2+z^2}}\,dxdz=\sqrt{2}\iint_D dxdz=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_1^2 r\,drd\theta$$

$$=3\pi\sqrt{3}$$

hamednafisi@gmail.com

3) $$\operatorname{Curl}(\vec{\nabla} f)=\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla} f)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ f_x & f_y & f_z\end{vmatrix}=$$

$$=(f_{yz}-f_{zy})\vec{i}-(f_{xz}-f_{zx})\vec{j}+(f_{xy}-f_{yx})\vec{k}=0$$

4) f یک تابع سه متغیره

$$\nabla(\operatorname{div}\vec{F})=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{F})=\nabla^2 F$$

(ثابت $\nabla\cdot(\nabla F)=\nabla^2 F$ ، $\nabla^2 F$ را عملگر لاپلاس می‌نامیم $\nabla^2 f=f_{xx}+f_{yy}+f_{zz}$

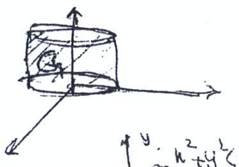
مثال: فرض کنید $F=xe^{z}\vec{i}+yx^2\vec{j}+(x^2+yz)\vec{k}$ مطلوبست محاسبه $\operatorname{div}F$, $\operatorname{Curl}F$:

$$\operatorname{div}F=\vec{\nabla}\cdot\vec{F}=e^{z}+x^2+y$$

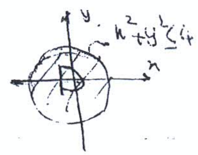
$$\operatorname{Curl}F=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ xe^{z} & yx^2 & x^2+yz\end{vmatrix}=(z-0)\vec{i}-(2x-xe^{z})\vec{j}+(2xy-0)\vec{k}$$

مثال: فرض کنید $F=4x\vec{i}+(-2y^2)\vec{j}+z^2\vec{k}$ یک میدان برداری باشد و G ناحیه‌ای در $\mathbb{R}^3$ محصور به $x^2+y^2=4$ ، $z=0$ و $z=3$ باشد. مطلوبست محاسبه: $\iiint_G \operatorname{div}F\,dv$

$$\operatorname{div}F=4-4y+2z \qquad \iiint_G (4-4y+2z)\,dv$$



$$=\iint_D\int_0^3(4-4y+2z)\,dz\,dx\,dy=\iint_D(12-12y+9)\,dx\,dy$$



$$=\int_0^{2\pi}\int_0^2(21-12r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\left(\frac{21}{2}r^2-4r^3\sin\theta\right)\Big|_0^2\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}(42-32\sin\theta)\,d\theta=84\pi$$