سلام

جزوه‌ای که پیش رو دارید، خلاصه‌ای از درس الکترومغناطیس است که به منظور جمع‌بندی مطالب و نظم بخشیدن به آموخته‌های شما عزیزان تهیه شده است. با توجه به اثر جادویی! خلاصه‌نویسی، توصیه می‌کنم زمان مناسبی را برای مرور این جزوه اختصاص دهید.

با آرزوی موفقیت روزافزون شما

علی عبدالعالی

در جدول ذیل دروس به سرفصلهای مهم آن طبقه بندی شده و مشخص شده است که در هر سال از هر مبحث چند تست سوال شده است و دانشجوی محترم می تواند زمان باقیمانده تا کنکور را با توجه به اهمیت مباحث مدیریت نماید.

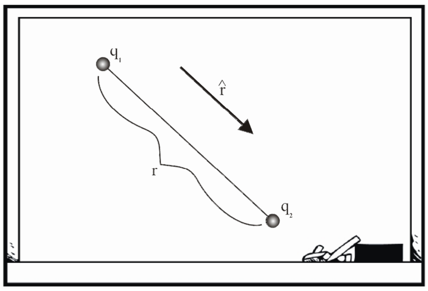
رشته: مهندسی برق		درس: الکترومغناطیس						
ردیف	مبحث	۱۳۸۵	۱۳۸۶	۱۳۸۷	۱۳۸۸	۱۳۸۹	مجموع	نسبت از
		تعداد تست	تعداد تست	تعداد تست	تعداد تست	تعداد تست	۵ سال	کل
1	قانون کولمب	1	0	0	0	1	2	3%
2	پتانسیل الکتریکی	2	1	1	2	3	9	12%
3	دو قطبی الکتریکی	0	0	1	2	1	4	5%
4	شار الکتریکی	0	0	0	0	0	0	0%
5	قانون گاوس	1	2	0	1	0	4	5%
6	انرژی الکتریکی	0	0	1	2	0	3	4%
7	گشتاور الکتریکی	0	0	0	0	0	0	0%
8	معادله خطوط میدان الکتریکی	0	0	0	0	0	0	0%
9	هادی ها در میدان الکتریکی	0	1	1	0	0	2	3%
10	عایق ها در میدان الکتریکی	2	2	1	0	0	5	7%
11	ظرفیت خازن	0	0	2	0	1	3	4%
12	جریان الکتریکی و رسانندگی	0	0	0	0	0	0	0%
13	مقاومت الکتریکی	2	1	1	0	0	4	5%
14	تئوری تصویر	1	1	1	1	0	4	5%
15	معادله لاپلاس و پواسون	0	0	0	0	1	1	1%
16	شرایط مرزی در الکتریسیته ساکن	0	0	1	0	0	1	1%
17	انرژی الکتریکی در خازن ها	0	0	0	0	0	0	0%
18	نیروی الکتریکی	0	0	0	0	0	0	0%
19	محاسبه ی نیرو و گشتاور با استفاده از انرژی در الکتریسیته ساکن	0	0	0	0	0	0	0%
20	قانون بیوساوار	3	1	0	0	0	4	5%
21	قانون آمپر	0	0	0	0	1	1	1%
22	شار مغناطیسی	0	1	0	0	0	1	1%
23	پتانسیل مغناطیسی برداری	0	0	0	0	3	3	4%
24	پتانسیل مغناطیسی اسکالر	0	0	0	1	0	1	1%
25	دو قطبی مغناطیسی	0	0	0	1	0	1	1%
26	نیروی مغناطیسی	0	2	2	0	0	4	5%
27	گشتاورمغناطیسی	0	0	1	0	0	1	1%
28	انرژی مغناطیسی	1	0	0	1	2	4	5%
29	محاسبه ی نیرو و گشتاور با استفاده از انرژی در مغناطیس	0	0	0	0	0	0	0%
30	ماده ی مغناطیسی	1	0	0	2	0	3	4%
31	شرایط مرزی در مغناطیس	0	3	1	0	0	4	5%
32	ضریب خودالقائی	0	0	1	0	0	1	1%
33	ضریب القای متقابل	1	0	0	0	1	2	3%
34	قانون القای فارادی	0	0	0	2	0	2	3%
35	مدار مغناطیسی	0	0	0	0	1	1	1%
	جمع	15	15	15	15	15	75	100%

فصل دوم: قانون کولن و میدان الکتریکی

تو این فصل سه تا بحث داشتیم:

۱) قانون کولن ۲) میدان الکتریکی ۳) خطوط میدان الکتریکی

قانون کولن می‌فرمود:



$$F_{12} = F_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

جهت چی؟

نپرسین دیگه استاد، وقتی
$$\begin{cases} 0 < q_1q_2 & \leftarrow \text{جهت در راستای دافعه} \\ 0 > q_1q_2 & \leftarrow \text{جهت در راستای جاذبه} \end{cases}$$

آفرین، سعی می‌کنیم تا جای ممکن جهت را با  تعیین کنیم.

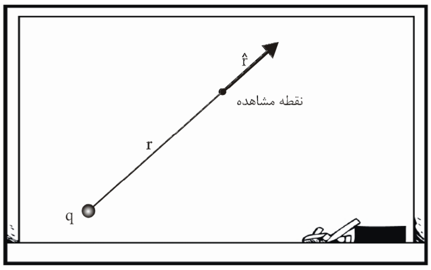
نقطهٔ کور، نقطه‌ای بود که اگر باری در آن‌جا می‌گذاشتیم، هیچ نیرویی به آن وارد نمی‌شد.

۱ـ دو بار همنام: نقطه‌ای بود که بین دو بار $\leftarrow$ $\frac{q_1}{x^2}=\frac{q_2}{(r-x)^2}$

۲ـ دو بار غیرهم‌نام: نقطه کور خارج فاصله بین دو بار $\leftarrow$ $\frac{q_1}{x^2}=\frac{q_2}{(r+x)^2}$

مفهوم میدان[1]

$$\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q}$$



$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

میدان الکتریکی ناشی از بارهای گسسته:

$$\vec{E}=\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2}\hat{r}$$

و یادمون هست که این $\sum$ ، همان جمع برداری است.

میدان الکتریکی ناشی از بارهای پیوسته:

۱ـ خطی $\vec{E}=\int\frac{\rho_\ell d\ell}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$

۲ـ سطحی $\vec{E}=\int\frac{\rho_s ds}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$

۱ـ رجوع شود به کتاب الکترومغناطیس مهندسی

۱ـ خطی $\vec{E} = \int \frac{\rho_\ell d\ell}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$

۲ـ سطحی $\vec{E} = \int \frac{\rho_s ds}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$

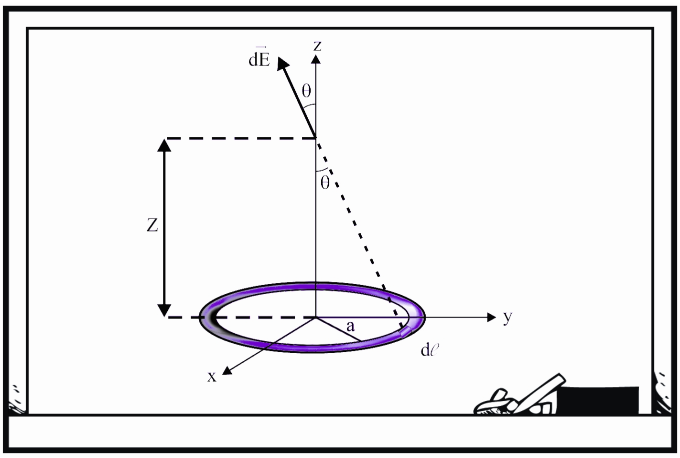
۳ـ حجمی $\vec{E} = \int \frac{\rho_v dv}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$

راستی، اگه دوست داشتی اون فرمول کله‌گنده هم به خاطر بسپار!

$$\vec{E} = \int \frac{dq\left(\vec{r}-\vec{r}'\right)}{4\pi\varepsilon_0\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}$$

کل بحث میدان همین بود ولی توصیه می‌کنم این چند تا فرمول هم به یاد داشته باشید، حتماً به درد می‌خورد.

۱ـ حلقه به شعاع a و چگالی بار خطی ρ_ℓ:



$$\vec{E}=\frac{\rho_{\ell} a\cdot z}{2\varepsilon_0\left(a^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot\hat{z}$$

میدان دیسک رو هم می‌تونی بگی:

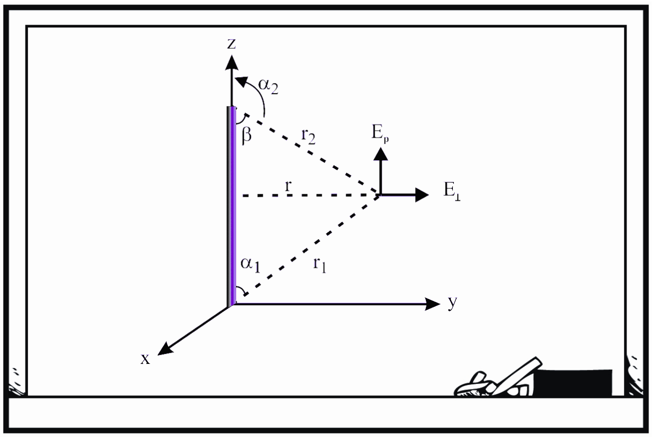
ترجیح می‌دهم حفظ نکنم. همین فرمول بالایی رو دارم با یک کم زحمت به نتیجه دلخواهم می‌رسم.

چه جوری؟

اینجوری...

$$\vec{E}=\int \frac{\rho_s r\cdot z}{2\varepsilon_0\left(r^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}dr=\frac{\rho_s z}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{|z|}-\frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}}\right]\hat{z}$$

۲ـ میدان ناشی از میله‌ای محدود با چگالی ρ_{ℓ} در فاصله عمودی r :



$$\vec{E} = \underbrace{\frac{\rho_\ell}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(\cos\alpha_1 + \cos\beta\right)\hat{r}}_{\text{مؤلفه عمود بر محور میله}} + \underbrace{\frac{\rho_\ell}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)\hat{z}}_{\text{مؤلفه موازی با محور میله}}$$

میدان ناشی از میله نامحدود و میله از یک طرف نامحدود... با یک کم بازی با این فرمول به دست می‌آوریم:

۳ـ میدان ناشی از صفحه نامحدود:

$$\vec{E} = \left|\frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\right|\hat{n}$$

خطوط میدان الکتریکی: جهت حرکت بار الکتریکی در میدان $\vec{E}$ را مشخص می‌کرد.

دکارتی:

$$\frac{dy}{E_y} = \frac{dx}{E_x} = \frac{dz}{E_z}$$

استوانه‌ای:

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{r\,d\varphi}{E_\varphi} = \frac{dz}{E_z}$$

کروی:

$$\frac{dR}{E_R} = \frac{R\,d\theta}{E_\theta} = \frac{R\sin\theta\,d\varphi}{E_\varphi}$$

واسه یافتن جهت میدان برای هر نوع باری (خطی، سطحی، حجمی) و یا توزیعی (پیوسته یا گسسته)، نگاه می‌کنیم، ببینیم میدان ناشی از این  بارها در چه راستاهایی، هم را خنثی و در چه راستاهایی هم را تقویت می‌کنند، فی‌الواقع جهت

را نه از روی محاسبه، بلکه آن را پیش از محاسبه به دست می‌یاریم و میدان را فقط در همان راستا محاسبه می‌کنیم و از انجام کار اضافی می‌پرهیزیم.

در محاسبه اندازه هم، تصویر یک  میدان ناشی از یک  بار (خطی، سطحی، حجمی) را در جهتی که قبلاً به دست آوردیم، به دست می‌یاریم. و روی آن انتگرال می‌گیریم.[2]

البته در بسیاری مسایل اندازهٔ این مورچه میدان‌ها را حفظیم و فقط کافی است در بازه‌ای روی آن انتگرال بگیریم. برای نمونه مثال ۱۱ فصل ۲ را، یه بار دیگه بخون.

چگالی جریان‌ها برحسب بار به صورت زیر بیان می‌شود:

$$I = \rho_{\ell} \times v$$

$$\vec{J}_s = \rho_s \times \vec{v} = \rho_s \times r\vec{\omega}$$

$$J_v = \rho_v \times \vec{v} = \rho_v \times r\vec{\omega}$$

2ـ اون‌هایی که فهمیدند و به یاد آوردن، خوش به حالشون، بقیه برای درک بهتر مثال‌های ۲ و ۳ و... فصل۲ را دوباره بازخوانی کنند.

فصل سوم: قانون گاوس

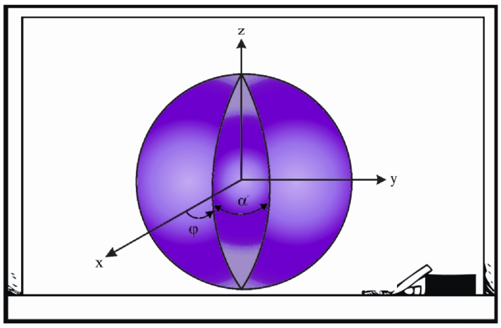

تو این فصل با آقای گاوس و قانونش و روابط حسنهٔ ایشان با میدان الکتریکی آشنا شدیم.

گاوس عزیز می‌گفتند: «همیشه، همیشه و همیشه، شار الکتریکی گذرنده از هر سطح بسته‌ای، سطح بسته‌ای[1]، برابر است با جمع جبری، جبری، بارهای داخل آن سطح همیشه بسته» یعنی:

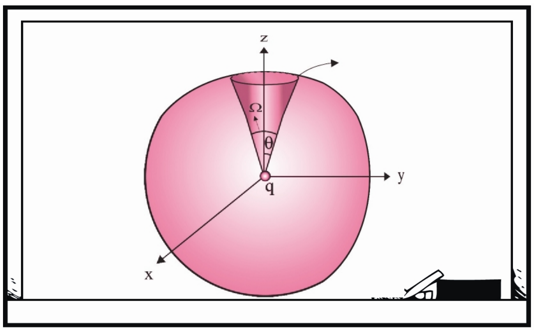
$$\varphi = \int \vec{D} \cdot \vec{ds} = Q_{in}$$


و یاد گرفتیم چگونه حتی شار سطوحی که می‌توانند قسمتی از سطوح بسته‌ای باشند، هم با شعبده‌بازی‌هایی به نام تقارن، قاچ و عرقچین ... به دست بیاوریم.


فقط جهت یادآوری کوچولو:



$$\varphi_{\text{قاچ}} = \varphi_{\text{کل کره}} \times \frac{\alpha}{2\pi}$$ (البته به شرط تقارن)



---

[1] این اشتباه تایپی نیست، بلکه برای تأکید است!

$$\varphi_{\text{عرقچین}} = \frac{q}{2}\left(1-\cos\theta\right)$$

با مهربونی‌های گاوس و داشتن تقارن کروی دیدیم:

$$\vec{E} = \frac{Q_{in}}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{R}$$

و در تقارن استوانه‌ای:

$$\vec{E} = \frac{Q_{in}}{2\pi r h\varepsilon_0}\hat{r}$$

فی‌الواقع، گاوس مهربون را دور زده و به روابط سهل‌الوصل فوق برای دستیابی به میدان رسیدیم.

بالفرض برای کره‌ای به شعاع a و چگالی بار حجمی ρ_v:

$$\vec{E}_{\text{درون کره}} = \frac{\rho_v}{3\varepsilon_0}R\,\hat{R}$$

$$\vec{E}_{\text{بیرون کره}} = \frac{\rho_v a^3}{3\varepsilon_0 R^2}\cdot\hat{R}$$

واسه استوانه طویل با چگالی بار $\rho_v\left(\frac{c}{m^3}\right)$ و شعاع a هم، روابط این‌گونه بود:

$$\vec{E}_{\text{درون}} = \frac{\rho_v r}{2\varepsilon_0}\hat{r}$$

$$\vec{E}_{\text{بیرون}} = \frac{\rho_v a^2}{2\varepsilon_0 r}\hat{r}$$

در انتهای فصل به رابطه‌ای رسیدیم که من خیلی بی‌دلیل، ازش خوشم میاد. (فرم نقطه‌ای قانون گاوس)

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_{\underset{\text{حجمی}}{v}}$$

فصل چهارم: پتانسیل الکتریکی

مفهوم پتانسیل الکتریکی[1]...

به دو طریق برحسب شرایط می‌توانیم پتانسیل را محاسبه کنیم.

۱ـ on path integration (در حضور میدان)

$$v = \int \vec{E} \cdot \vec{d\ell}$$

۲ـ on source Integration (در حضور بار)

$$v = \int_{\underset{\text{خطی}}{\ell},\ \underset{\text{سطحی}}{s},\ \underset{\text{حجمی}}{v}} \frac{\overset{\rho_\ell d\ell,\ \rho_s ds,\ \rho_v dv}{dq}}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

یادتون نره که انتگرال اولی، انتگرال‌گیری روی مسیر است و ازآنجاکه میدان پایستار بود، مسیر انتگرال‌گیری اهمیت نداشت و در انتگرال دوم، بازه انتگرال فقط محدوده بار را شامل می‌شود و ربطی به موقعیت نقطهٔ مشاهده ندارد و انتخاب هر یک از این دو فرمول بسته به شرایط مسئله است.

و از اینجا به بعد هر چی فرمول ببینیم نتیجهٔ مستقیم یا غیرمستقیم همین دو فرمول است. مثلاً:

۱ـ پتانسیل نقطه‌ای به فاصله R از بار q :

$$v = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

۲ـ پتانسیل ناشی از بارهای گسسته:

$$v = \underset{\text{جمع جبری}}{\sum} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$$

۳ـ پتانسیل ناشی از بارهای پیوسته:

$$v = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

۱ـ رجوع شود به همان‌جا که با مفهوم میدان الکتریکی آشنا شدید.

جهت چی؟

استاد بازم !! پتانسیل که جهت نداره.

و برای محاسبه میدان به وسیله پتانسیل:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} v$$

و صد البته بهتر است در جاهایی که جهت میدان را می‌دانیم از $E = -\frac{dv}{d\ell}$ استفاده می‌کنیم.

گرادیان همان مشتق جهتی است که بر سر یک اسکالر عمل کرد و نتیجه‌اش بردار است و برابر است با:

گرادیان:

۱ـ دکارتی:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z}$$

۲ـ استوانه‌ای:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r}\hat{r} + \frac{\partial}{r\,\partial \varphi}\hat{\varphi} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z}$$

۳ـ کروی:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial R}\hat{R} + \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\hat{\varphi}$$

در صورت هم‌راستا بودن $\vec{E}$ با $\overrightarrow{d\ell}$:

$$\vec{E} = -\left.\frac{dv}{d\ell}\right|_{max} \times \hat{\ell}$$

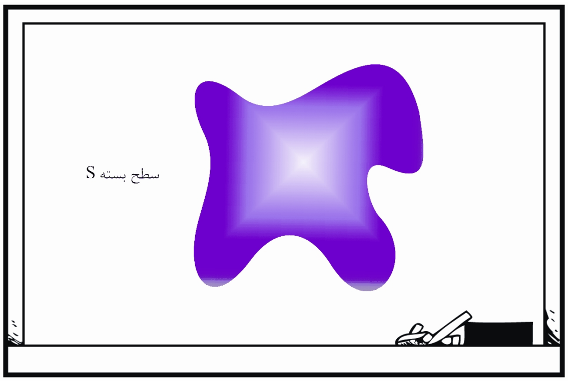
هر گاه دیورژانس، کرل و گرادیان بر سر عبارت ثابت بیایند حاصل صفر است.

راستی!

من می‌گم! پتانسیل موجودی برون‌گرا، میدان موجودی درون‌گراست.

میدان برای یافتن هویت خود، همیشه به بارهای داخل نگاه می‌کند و پتانسیل به بیرون خود.

بیاین یک مقدار در مورد شکل زیر حرف بزنیم. که البته هیچ باری داخل آن نیست و تمامی نقاط دارای پتانسیل معلوم v_0 می‌باشند.



۱ـ پتانسیل تمام نقاط داخل سطح یکسان است. چون میدان داخل سطح بسته، صفر است.

$$v_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot \overrightarrow{d\ell} \quad \to \quad v_{AB} = 0 \quad \to \quad v_A = v_B$$

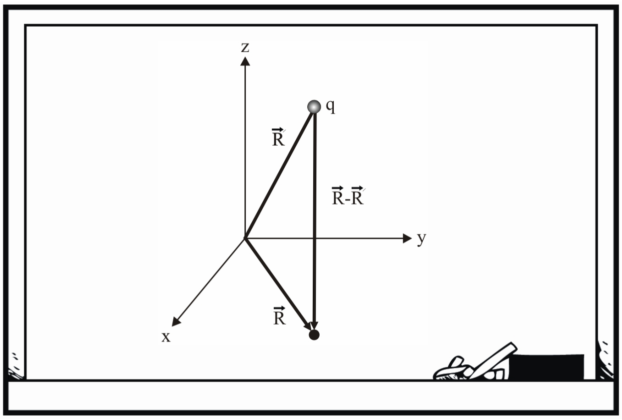
۲ـ یا میدان بر سطح عمود است یا مقدار آن صفر است.

$$v_{AB} = 0 = \int \vec{E} \cdot \overrightarrow{d\ell}$$

$$\vec{E} \cdot \overrightarrow{d\ell} = 0 \quad \to \quad \begin{cases} E = 0 \\ E \perp \ell \end{cases}$$

$$v_0 \;\text{در مبدأ} = \frac{\text{کل پتانسیل روی سطح کره}}{\text{سطح کره}}$$

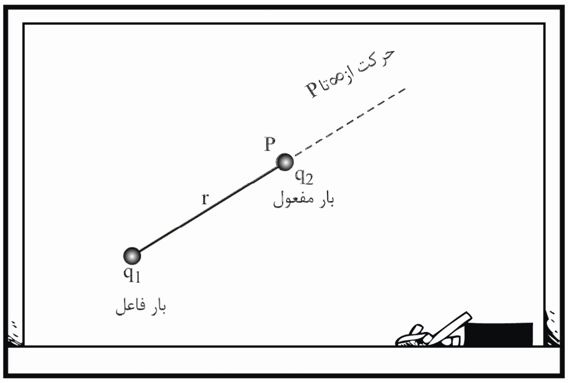
در ضمن فرمول پتانسیل را گاهی چنین هم می‌نویسند:



$$v = \frac{q}{4a\varepsilon_0 \left| \vec{R} - \vec{R}' \right|}$$

فصل پنجم: انرژی الکتریکی

برای انتقال بار q از نقطه‌ای به نقطه‌ای دیگر، کار انجام می‌شود. این کار به صورت انرژی پتانسیل الکتریکی در سیستم ذخیره می‌شود، در بیانی دیگر، اختلاف پتانسیل بین دو نقطه کار لازم برای جابه‌جایی واحد بار مثبت است، به عبارت فرمولی:



$$v = \frac{w}{q} \quad \rightarrow \quad w = q_2 v_1 = \frac{q_2 q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}$$

q_2 بار مفعول و q_1 فاعل است.

انرژی یعنی پتانسیل ناشی از بار فاعل (یعنی q_1) در محل بار مفعول (یعنی q_2) × خود بار مفعول (یعنی q_2)

با دانستن این نکته طلایی که انرژی ذخیره شده توسط یک سیستم در کل فضا، همان انرژی لازم برای ساخت این سیستم است، انرژی سیستم‌های گسسته و پیوسته از این قرار می‌شوند:

۱ـ سیستم‌های گسسته:

$$w = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i v_i \quad \text{یا} \quad w = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}$$

این فرموله می‌گه، این انرژی برابر با کار لازم جهت گردآوری همهٔ این بارها کنار یکدیگر است.

یه مثال کوچولو می‌زنیم واسه اون‌ها که دچار آلزایمر زودرس هستند... ولی نه، پشیمون شدم، مثال۴ فصل پنجم را یک‌بار، نه دوبار بخونین.

اگر سیستمی به هر علتی یک یا چند تا از بارهاشو از دست بده، Δw برابر می‌شود با:

$$\Delta w = q \sum_{i=1}^{N-1} v$$

حالتی از بقیه بارها   از دست رفته یا حتی اضافه شده

قبل از اینکه بیماری نکته‌گویی دوستمون بیشتر از این حاد شود، اینجوری می‌گوییم که، کار لازم برای ایجاد هرگونه تغییری در سیستم اعم از دست رفتن قسمتی از بار یا کم و زیاد شدن فاصلهٔ بارها و... می‌شود:

$$\Delta w = w_{\text{بعد از تغییر سیستم}} - w_{\text{قبل از تغییر سیستم}}$$

۲ـ انرژی سیستم‌های پیوسته:

$$w = \frac{1}{2}\int \rho_\ell v\, d\ell \quad \text{یا} \quad w = \frac{1}{2}\int \rho_s v\, ds \quad \text{یا} \quad w = \frac{1}{2}\int \rho_v v\, dv$$

v، پتانسیل در محل  بار «خطی، سطحی یا حجمی» است.

محاسبهٔ انرژی از این طریق، انرژی مربوط به کل فضا را می‌دهد، برای به دست آوردن انرژی قسمتی از فضا، از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$w = \int_{\text{هر حجم از فضا}} U_e\, dv$$

U_e چگالی انرژی الکتریکی است و برابر است با:

$$U_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 |E|^2 = \frac{1}{2}\frac{|D|^2}{\varepsilon_0}$$


اگر U_e یکنواخت بود می‌توان به سادگی خوردن 

چنین گفت:

$$W = U_e \times \underset{\text{حجم مورد نظر}}{\underset{\downarrow}{V}}$$


انرژی در تمام فضا ذخیره می‌شود و انرژی ذخیره شده در کل فضا باید مستقل از r باشد.

فصل ششم: هادی‌ها و جریان الکتریکی

هادی ماده‌ای است سرشار از الکترون آزاد، که این الکترون‌های آزاد در حضور میدان $\vec{E}$، حرکت منظمی می‌یابند، به این حرکت منظم جریان می‌گویند.

۱ـ چگالی جریان ثابت: $I = \vec{J} \cdot \vec{S}$

۲ـ چگالی جریان غیرثابت: $I = \int_S \vec{J} \cdot \overrightarrow{ds}$

همیشه به یادمون می‌مونه که چگالی جریان برداری و خود جریان اسکالر است.

چگالی جریان $(\vec{J})$ به دو عامل بستگی داشت:

۱ـ زور میدان $(\vec{E})$

۲ـ جنس محیط (σ) یا همان ضریب هدایت الکتریکی رسانا

$I = \vec{J} \cdot \vec{S}$

$\vec{J} = \sigma \vec{E}$

در صفحهٔ ۲۰۵ کتاب الکترومغناطیس، بعد از یک کم فرمول‌بازی به معادلهٔ زیر رسیدیم:

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t} \quad , \quad \tau = \frac{\varepsilon}{\sigma}$$

این معادله می‌گفت که در اثر گذشت زمان چه بلایی بر سر چگالی بار حجمی می‌آمد.

در هادی کامل: $\sigma \to \infty \quad \Rightarrow \quad \tau = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho = 0$

در عایق کامل: $\sigma \to 0 \quad \Rightarrow \quad \tau = \infty \quad \Rightarrow \quad \rho = cte$

یک‌سری از ویژگی‌های هادی کامل عبارت است از:

۱ـ $\sigma \to \infty \quad \Rightarrow \quad R = 0$ (یعنی مقاومتش صفره)

۲ـ هم‌پتانسیل بودن تمام نقاط هادی

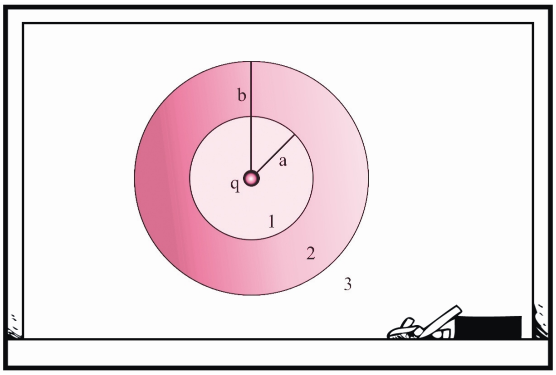
۳ـ میدان بر سطح هادی عمود است و $E_n = \dfrac{\rho_s}{\varepsilon_0}$

۴ـ میدان داخل هادی صفر است.

۵ـ ....(برای یادگیری بهتر، به کتاب رجوع کن)

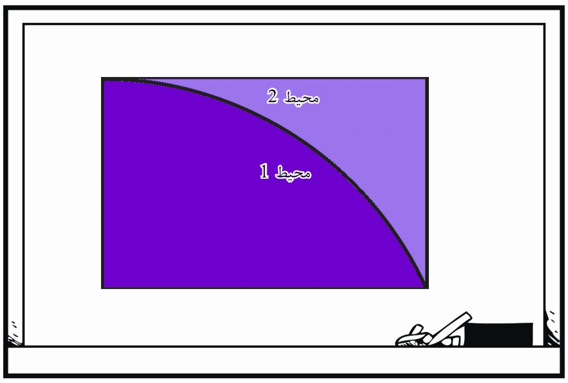
در مرزها پتانسیل پیوسته است ولی میدان می‌تواند، گسسته باشد.

در مثال۲ فصل ششم دیدیم که میدان در جایی که محیط عایق بود به راحتی از گاوس قابل توجیه بود ولی در جایی که به هادی می‌رسیدیم و میدان داخل جناب هادی را می‌خواستیم بدون هیچ زحمتی میدان صفر می‌شد و از دو طریق صفر شدن میدان را توجیه کردیم.



نوبتی هم که باشه، نوبت معشوقهٔ مهندس فهیم، یعنی «شرایط مرزی» است!

اگر بین دو محیط ۱ و ۲ مرز داشته باشیم.



$$\begin{cases} E_{t_1} = E_{t_2} \\ D_{n_2} - D_{n_1} = \rho_s \end{cases}$$

اندیس t : مؤلفه مماسی

اندیس n : مؤلفه عمودی

ρ_s: چگالی بارهای آزاد روی سطح

یک‌بار دیگه این شرایط رو در حالت‌های مختلف بررسی می‌کنیم.

۱ـ مرز هادی (محیط ۱) ـ هوا (محیط ۲)

میدان داخل هادی همیشه = صفر ←

$$E_{t_1} = E_{t_2} = 0$$

$$D_{n_2} - D_{n_1} = \rho_s \xrightarrow{D_{n_1}=0} D_{n_2} = \rho_s$$

و لذا اینجاست که به نتیجهٔ زیبای زیر در نزدیکی آقاهادی می‌رسیم:

$$E_n = \frac{\rho_s}{\varepsilon_0}$$

و یک نتیجهٔ زیبای دیگر باز در مجاورت هادی عزیز:

$$U_e = \frac{\rho_s^2}{\varepsilon_0}$$

۲ـ مرز هادی (محیط ۱) ـ هادی (محیط ۲)

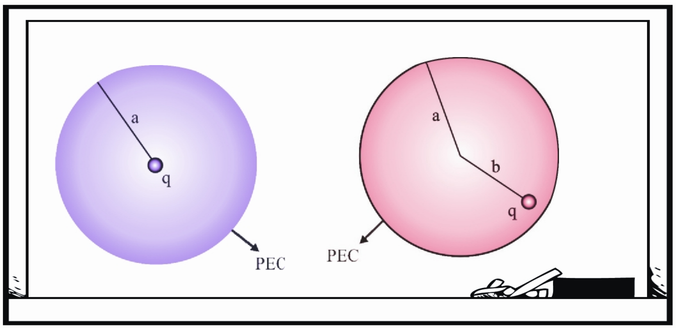
$$\begin{cases} E_{t_1} = E_{t_2} = 0 \\ D_{n_1} - D_{n_2} = \rho_s = 0 \end{cases}$$

۳ـ مرز عایق (محیط ۱) ـ عایق (محیط ۲)

$$E_{n_1} = E_{n_2}$$

$$D_{n_2} - D_{n_1} = \rho_s \xrightarrow[\rho_s=0]{\text{محیط عایق}} D_{n_1} = D_{n_2}$$

طبق شرایط مرزی، میدان ناشی از دو سیستم زیر در نقطه‌ای بیرون کره هادی یکی است.

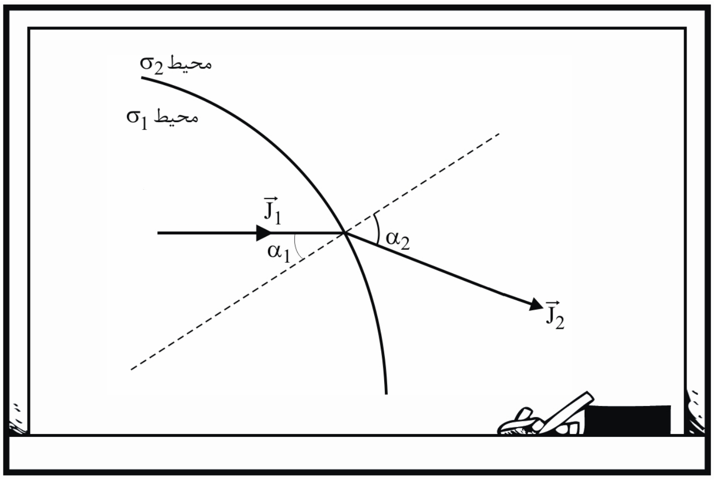


یعنی فرقی نمی‌کند، این بار در کجای سطح بسته قرار گرفته باشد. در هر صورت میدان هر دو سیستم یکی است.

پس در این مسایل برای محاسبه میدان، بار در هر کجا که بود، به ما مربوط نیست. ما میدان ناشی از بار در مرکز کره را به دست میاریم.

شرایط مرزی چگالی جریان هم از این قرارند:

$$\begin{cases} J_{1n} = J_{2n} \\ \dfrac{J_{1t}}{\sigma_1} = \dfrac{J_{2t}}{\sigma_2} \end{cases}$$



$$\frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\left(=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)$$

مقاومت

مقاومت یک ماده تابعی است از:

۱ـ هندسه ماده
۲ـ جنس ماده

و دیگر هیچ...

جز مواردی محدود، برای محاسبه R از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$R=\int_{\ell}\frac{d\ell}{\int_{s}\sigma ds}$$

راستای جریان

سطح عمود بر جریان

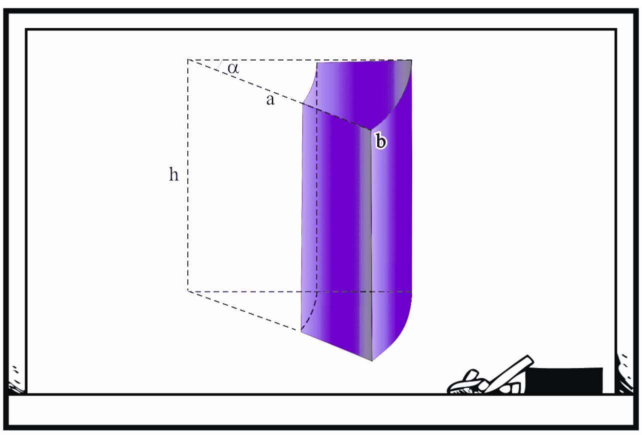
و در صورتی که:

۱ـ سطح مقطع در طول مسیر یکنواخت باشد.
۲ـ σ یکنواخت باشد.

این فرمول به ظاهر ساده در رد گزینه، گاهی بسیار کارآمد است. (مثلاً $\sigma\to\infty \Leftarrow R=0$)

$$R=\frac{\ell}{\sigma S}$$

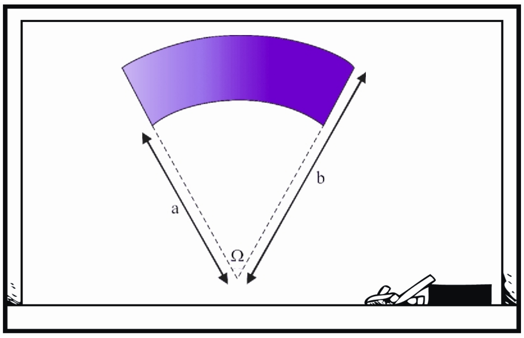
مقاومت بین دو سطح استوانه در یک قطاع با زاویه مرکزی α :



$$R=\frac{1}{\sigma h\alpha}\ln\frac{b}{a}$$

و اگر استوانه کامل باشد؛ $\alpha = 2\pi$ می‌گردد.

مقاومت بین دو سطح کروی با زاویه فضایی Ω :



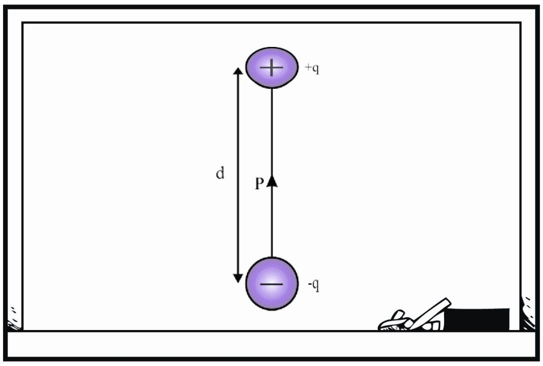
$$R = \frac{1}{\Omega\sigma}\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right]$$

اگر گره‌ها کامل باشد:

$$R = \frac{1}{4\pi\sigma}\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right]$$

فصل هفتم: مواد عایق «دی‌الکتریک»

دو بار هم‌اندازه و مختلف‌العلامة $\pm q$ را که در فاصله d از هم قرار داشته باشند، دوقطبی می‌نامند و بردار گشتاور دوقطبی با رابطه $\vec{p}=q\vec{d}$ تعریف می‌شود.



اگر یک ماده عایق که سر شار از دوقطبی‌هاست، در یک میدان الکتریکی خارجی قرار بگیرد، این میدان باعث می‌شود که دوقطبی‌های ساده، همگی در یک جهت منظم شوندو در این صورت میدان برآیند این دوقطبی، دیگر قابل ملاحظه می‌شود.

ثابت شد که هر عایقی را می‌توان با یک توزیع حجمی بار ρ_b (چگالی بار مقید حجمی) و یک توزیع سطحی بار ρ_{sb} (چگالی بار مقید سطحی) مدل کرد، به طوری که:

$$\rho_{sb}=\vec{\rho}\cdot\hat{n}$$

$\hat{n}$: بردار یکهٔ عمود بر سطح عایق به طرف خارج

$$\rho_b=-\vec{\nabla}\cdot\vec{p}$$

دوقطبی (دی‌الکتریک) و میدان

رابطهٔ زیر را که خاطرتون هست؛

$$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{p}$$

چند تا نکته مهم توی این رابطه بود:

۱ـ چگالی شار الکتریکی فقط و فقط، وابسته به بارهای آزاده و کاری به بارهای مقید ندارد.

۲ـ اما میدان الکتریکی وابسته به هر نوع بار (آزاد و مقید) است.

نتیجهٔ اخلاقی: در عایق‌ها گاوس را برای عایق به کار می‌بریم تا نیازی به محاسبهٔ بارهای مقید نباشد.

$\vec{p}$ به دو چیز وابسته است:

۱ـ جنس محیط $\left(X_e\right)$

۲ـ زور میدان حاکم $\left(\vec{E}\right)$

$$\vec{p} = \varepsilon_0 x_e \vec{E}$$

$$\vec{p} = \varepsilon_0 \left(\varepsilon_r - 1\right) \vec{E}$$

$$\vec{p} = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \vec{D}$$

این قصه را یاد داشته باشین که وقتی $\vec{p}$ را با دو بار مقید مدل کردیم، دیگر محیط ما ε_r نیست.

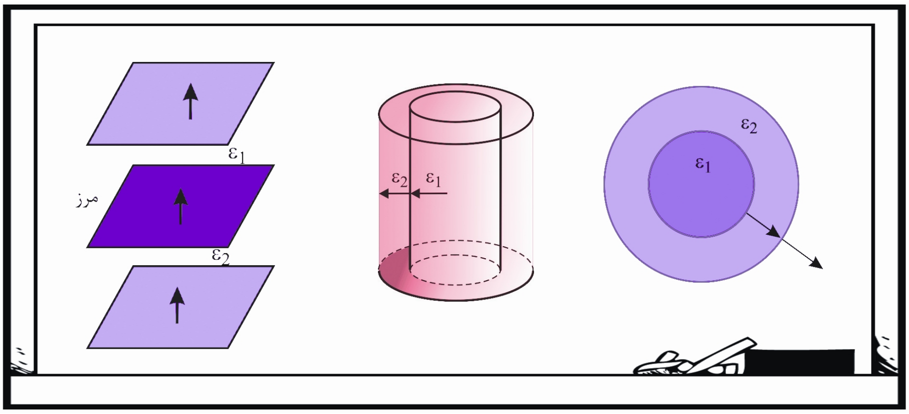
شرایط مرزی برای عایق‌ها هم، مانند گذشته است.

$$\begin{cases} E_{t_1} = E_{t_2} \\ D_{n_1} = D_{n_2} = \rho_s \end{cases}$$

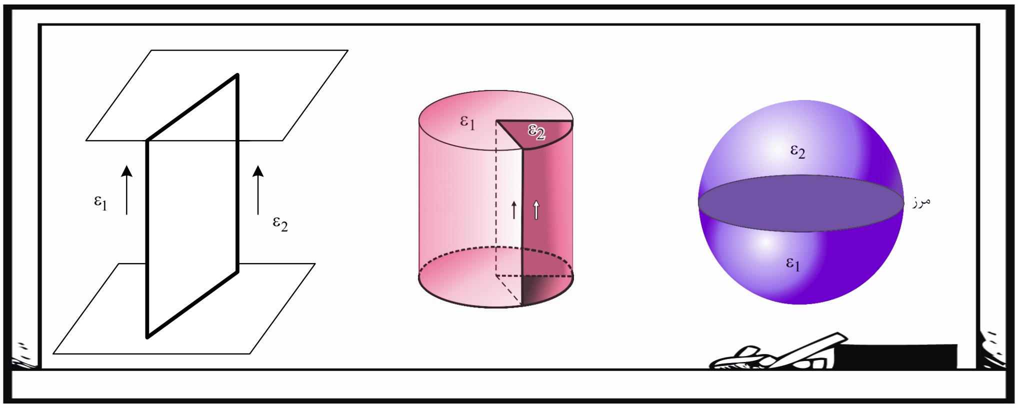
اگر هر دو محیط هم عایق کامل باشند آنگاه چون $\rho_s = 0 \quad \Leftarrow \quad D_{n_1} = D_{n_2}$

آن نکته‌ای که برای شرایط مرزی توی این بخش خیلی خیلی حائز اهمیت است؛ اینه:

(با شرط اینکه محیط‌های ما عایق ـ عایق باشند)

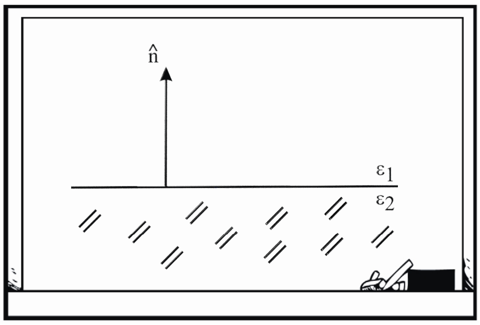


اگه میدان عمود بر مرز باشد $\Leftarrow$ $D_{n_1}=D_{n_2}$ $\Leftarrow$ $\varepsilon_1\vec{E}_1=\varepsilon_2\vec{E}_1$ $\Leftarrow$ برای حل مسئه از $\vec{D}$ می‌آغازیم. $(D_1=D_2)$



اگه میدان با مرز موازی است $\Leftarrow$ $E_{t_1}=E_{t_2}$ $\Leftarrow$ $\frac{\vec{D}_1}{\varepsilon_1}=\frac{\vec{D}_2}{\varepsilon_2}$ $\Leftarrow$ برای حل مسئله از $\vec{E}$ می‌آغازیم. $(E_1=E_2)$

شرط مرزی مربوط به $\vec{P}$ را هم من دوست دارم، به خاطر داشته باشم (ترجیحاً) که اینجوریه:



$$p_{n_2}-p_{n_1}=\rho_{sb}$$

و دقت کنین که در اینجا ρ_{sb} چگالی بارهای مقید سطحی است.

فصل هشتم: خازن

نسبت بار به ولتاژ کمیتی است ثابت که فقط وابسته به شکل خازن و جنس عایق آن است، که به آن ظرفیت خازن می‌گویند.

$$(\text{فاراد}) \leftarrow C = \frac{Q \nearrow (\text{کولن})}{V \searrow (\text{ولت})}$$

برای محاسبه ظرفیت هر خازنی می‌توان از فرمول زیر استفاده کرد:

$$\frac{1}{C} = \int_{u_1} \frac{du_1}{\int_{u_2}\int_{u_3} \frac{\varepsilon \overbrace{h_2 h_3 du_2 du_3}^{ds}}{h_1}}$$

h_iها ضرایب متریک و u_iها محورهای یکه هر دستگاه مختصاتی می‌توانند باشند.

یا در حالت جزئی‌تر:

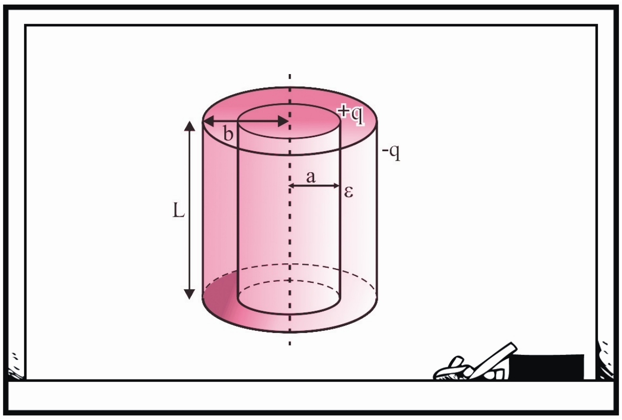
$$\frac{1}{C} = \int_{\text{راستای جریان}} \frac{d\ell}{\int\int_{\text{سطح عمود بر جریان}} \varepsilon\, ds}$$

فرمول‌هایی را که برای مقاومت تخت، استوانه‌ای و کروی به دست آورید که به یاد دارید، حال با علم بر این نکته که $RC = \tau = \frac{\varepsilon}{\sigma}$ همان روابط برای خازن‌های آن‌ها نیز کارآمد است.

ظرفیت خازن مسطح، یعنی خازنی که اولاً مساحت صفحات هادی، برابر است و ثانیاً صفحات کاملاً با هم موازی‌اند و ثالثاً (شکل۳) محیط عایقی بین دو هادی «همگن» باشد، چنین است:

$$C = \frac{\varepsilon A}{d}$$

و برای خازن استوانه‌ای:

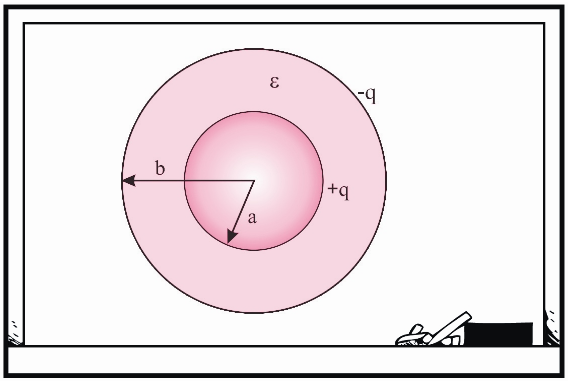


$$C = \frac{2\pi\varepsilon\ell}{\ln\frac{b}{a}}$$

و اگر به جای استوانه، قطاعی از آن باشد:

$$C = \frac{\alpha\varepsilon\ell}{\ln\frac{b}{a}}$$

و در خازن کروی:



$$C = \frac{4\pi\varepsilon}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$$

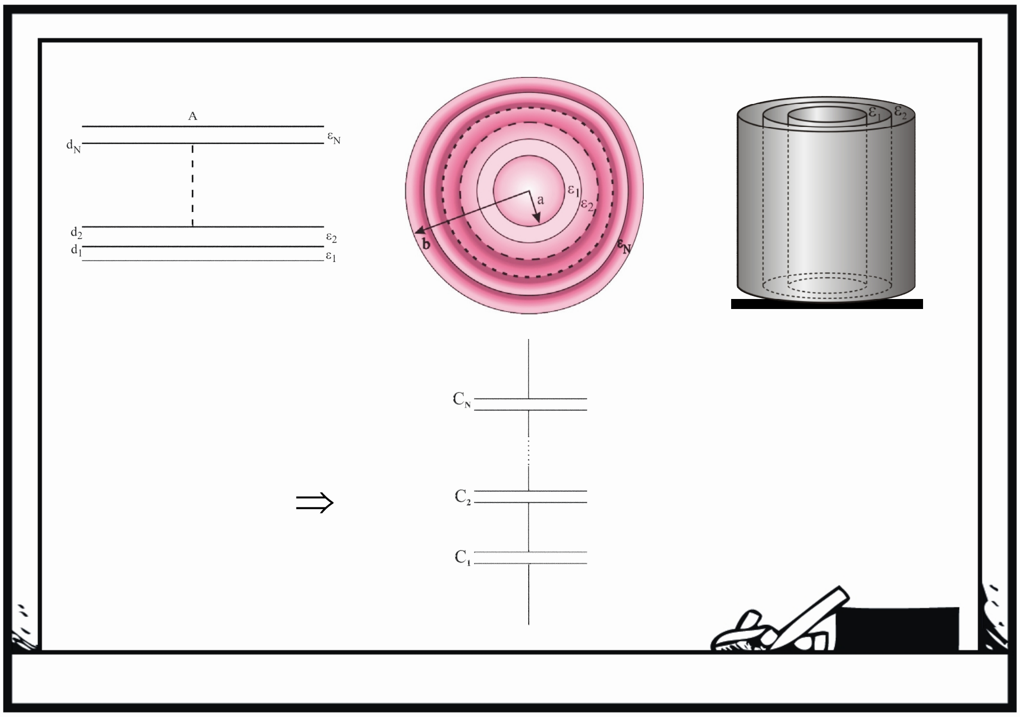
و در صورتی که قطاعی از کره باشد:

$$C = \frac{\Omega\varepsilon}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$$

در تست‌ها به سوء استفاده‌ایی که از رابطه خازن مسطح، می‌شود استفاده کرد، دقت کنین:

$$\begin{cases} \text{if} \quad A\uparrow \Rightarrow C\uparrow \\ \text{if} \quad d\uparrow \Rightarrow C\downarrow \\ \text{if} \quad d\to 0 \Rightarrow C\to\infty \end{cases}$$

بدون شرح...



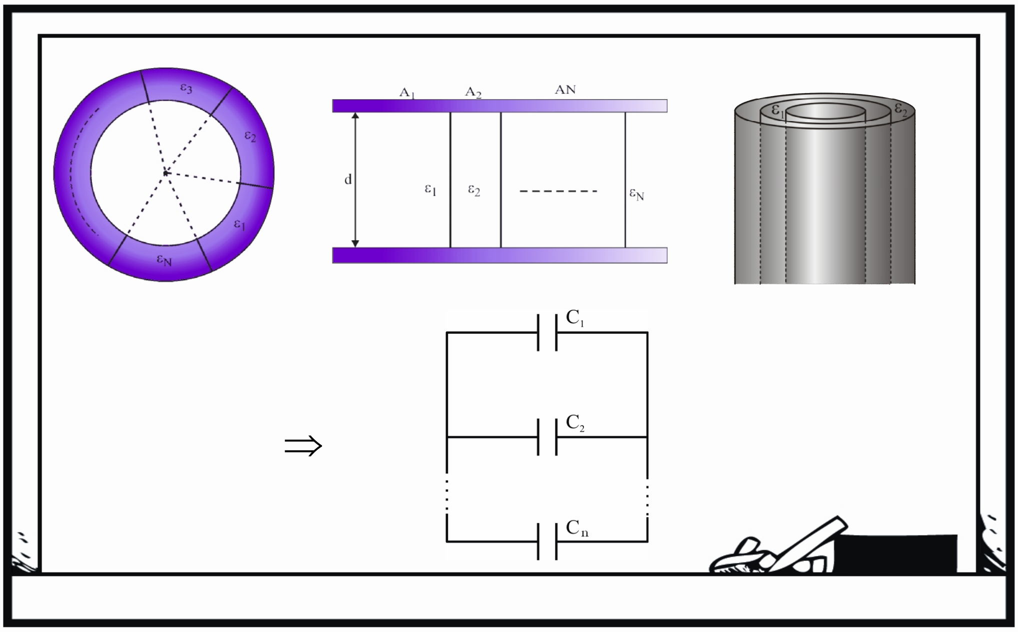
برای خازن‌های گسسته:

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\cdots+\frac{1}{C_n}$$

برای خازن‌های پیوسته:

$$\frac{1}{C}=\int_{\ell}\frac{d\ell}{\int_{s}\varepsilon\, ds}$$

در اینجا میدان $\perp$ مرز به عبارت دیگر جوشن $\|$ مرز



برای خازن‌های گسسته:

$$C = C_1 + C_2 + \cdots + C_N$$

برای خازن‌های پیوسته:

$$C = \int dC$$

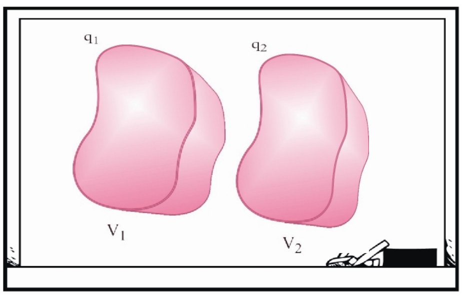
راستی برای انرژی خازن؛ در مسایل ولتاژ ثابت:

$$w = \frac{1}{2} C V^2$$

و در مسایل بار ثابت:

$$w = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

دوستداران جناب ماکسول، ماتریس زیر متعلق به جناب ماکسول می‌باشد:



$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{12} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

$C_{12} = C_{21}$، یعنی اثر متقابل هادی‌ها روی یکدیگر یکسان است.

می‌تونید برای آشنایی بیشتر، تست۵ فصل هشتم را مطالعه کنین (البته اگر تا به حال این کار را نکردین!)

رسیدیم به دوقطبی، این آفریده خارق‌العاده پروردگار هستی. رابطه میدانش را حتماً حفظ کنین:

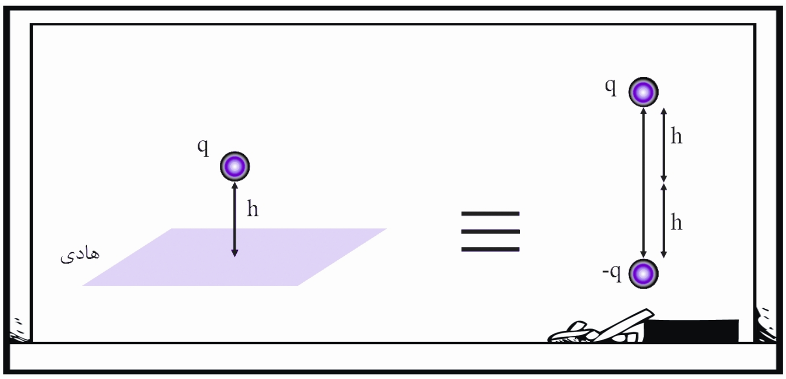
$$\vec{E} = \frac{qd}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\left[2\cos\theta\hat{R} + \sin\theta\hat{\theta}\right]$$

فصل نهم: تئوری تصویر

هدف والای تئوری تصویر، ارضای شرایط مرزی است. یعنی  در روی سطح رسانا، فقط مؤلفهٔ عمودی میدان داشته باشیم  پتانسیل درون هادی صفر شود و هر جا که نام و نشانی از یک صفحهٔ رسانای زمین شده یا کره رسانا و... می‌آید به یاد تئوری تصویر بیافتید و به جای دست و پنجه نرم کردن با یک مسئلهٔ بی سرانجام، به لطف تئوری تصویر، مسئله‌ای بسیار ساده و دل‌نشین را حل کنید.

من شکل‌ها رو پا تخته می‌کشم، برداشت و تفسیر با خودتون.

الف)



به جای q هم می‌تواند هر باری با هر شکل و شمایلی باشد.

q– نماینده تام‌الاختیار صفحهٔ هادی است و برای محاسبهٔ نیرو، انرژی و... بین بار و صفحه هادی دیگر نیازی به وجود صفحه هادی با تمام مشکلات آن نیست.

برای محاسبه نیرو:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{4h^2}$$

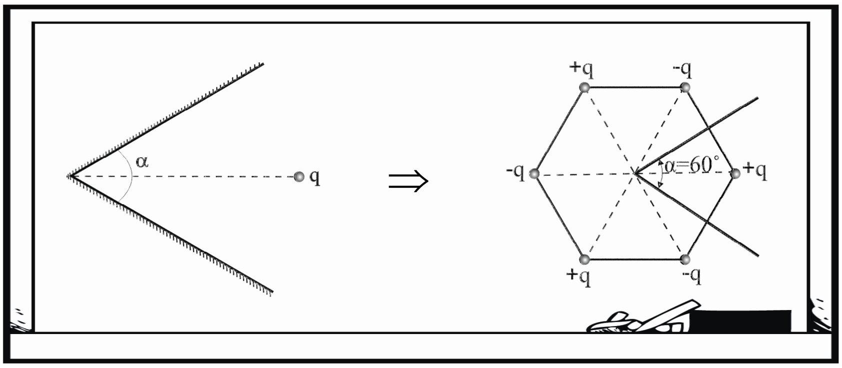
و انرژی ذخیره شده در فضا:

$$w = \frac{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i v_i}{2} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{4a\varepsilon_0}\,\frac{q^2}{2h}$$

کسانی که هنوز فلسفه $\frac{1}{2}$ را نمی‌دانند، برای کسب اطلاعات بیشتر به کتاب الکترومغناطیس رجوع کند. (ص۳۱۲)

برای هادی با صفحات متقاطع هم:

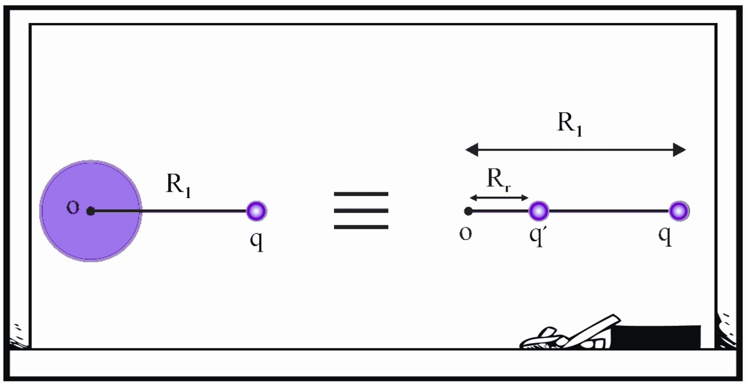
$$\text{تعداد تصویر} = \frac{360}{\alpha} - 1$$



و انرژی ذخیره شده توسط اون مثلاً برای حالت صفحات با زاویه $60°$ ماجرا از این قرار است:

$$w_e = \frac{1}{2}\sum_{in=1}^{4}\frac{q_i v_i}{6}$$

ب)



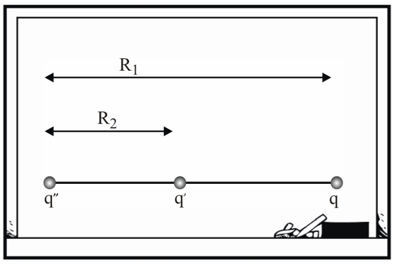
$$\begin{cases} q' = -q\dfrac{a}{R_1} \\ R_2 = \dfrac{a^2}{R_1} \end{cases}$$

به جای بار نقطه‌ای q ، اگر:

۱ـ کره به مرکز کره هادی (یا بخشی از آن)
۲ـ حلقه‌ای به مرکز کره هادی (یا بخشی از آن)
۳ـ پاره‌خط در امتداد شعاع کره هادی

قرار بگیرند، باز هم، تصویرشان مانند خودشان است.

و اگر کره به پتانسیل v_0 وصل بود:

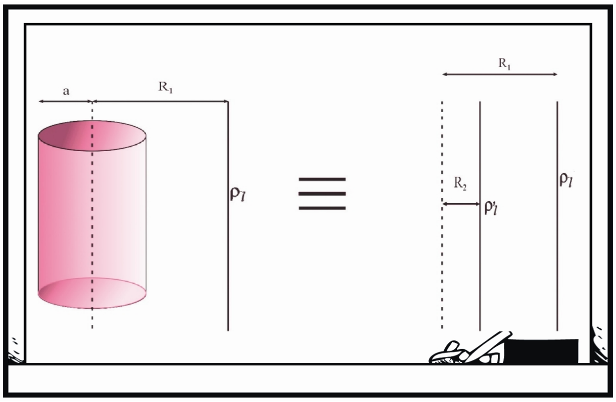


$$q'' = 4\pi\varepsilon_0 a v_0$$

و اگر کره با بار Q ایزوله بود:

$$q'' = Q - q'$$

ج)



$$\begin{cases} \rho_\ell = -\rho'_\ell \\ R_2 = \dfrac{a^2}{R_1} \end{cases}$$

اگر مسئله:

با اندازه بار تصویر کار داشت ← می‌رویم سراغ $q' = -q\dfrac{a}{R_1}$

با شکل بار تصویر کار داشت ← می‌رویم سراغ $R_2 = \dfrac{a^2}{R_1}$

فصل دهم: معادلات لاپلاس و پواسون

معادله پواسون:

$$\nabla^2 v = -\frac{\rho_v}{\varepsilon}$$

اگر در محیطی بار آزاد نداشته باشیم: $(\rho_v = 0)$ و این معادله مختص جناب لاپلاس است.

به لطف لاپلاس و پواسن می‌توان میدان خیلی از محیط‌هایی را که با روش‌های معمول قابل حل نیست، به دست آورد، البته به شرطی که محیط همگن باشد.

با داشتن شرایط مرزی جواب یکتایی برای این معادلات به دست می‌آید.

لاپلاسین در دستگاه‌های:

دکارتی:

$$\nabla^2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

استوانه‌ای:

$$\nabla^2 v = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

کروی:

$$\nabla^2 v = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial v}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial v}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{R^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}$$

همان‌طور که قبلاً گفتم، سعی کنین، سر جلسه کنکور به جای حل این معادلات راه‌های دیگری استفاده کنین؛ مثلاً:

۱ـ آشنایی با تیپ پاسخ

۲ـ صدق کردن پاسخ در معادله لاپلاس

۳ـ ارضای شرایط مرزی

۴ـ استفاده از امدادهای غیبی و...

در مسایلی که از طریق معادله لاپلاس یا پواسن حل می‌شوند با توجه به خواست مسئله طی مراحل زیر الزامی است.

حل: $\nabla^2 v = 0$ و یافتن v $\Leftarrow$ $\vec{E} = -\vec{\nabla} v$ و جستن $\vec{E}$ $\Leftarrow$ دریابیدن ρ_s با توجه به:

$D_{n_2} - D_{n_1} = \rho_s \quad , \quad D_{n_1} = 0$ (درون هادی)

$\Leftarrow$ محاسبه $Q = \int_s \rho_s ds$ $\Leftarrow$ درنهایت محاسبه ظرفیت خازن یا مقاومت $\left(RC = \frac{\varepsilon}{\sigma} , C = \frac{Q}{v}\right)$

هر چند برای رسیدن به C و R راه خیلی بهتری بلدیم و تا وقتی چیزی به سرمان اصابت نکرده، از این راه به دنبال R و C نمی‌گردیم.

$$\frac{1}{C} = \int \frac{du_1}{\int \frac{\varepsilon_0 h_2 h_3 du_2 du_3}{h_1}}$$

$$R = \int \frac{du_1}{\int \frac{\sigma h_2 h_3 du_2 du_3}{h_1}}$$

احیاناً اگه با u ها و h ها، کاملاً آشنا نیستین به صفحهٔ ۳۶۷ کتاب الکترومغناطیس مراجعه کنین.

چون به تفضیل معادلات لاپلاس تک‌متغیره در کتاب، بیان شده‌اند از بیان مجدد صرف‌نظر می‌کنیم و به خلاصه‌ای بسیار کوتاه، اکتفا می‌کنیم.

در دستگاه دکارتی؛ وقتی پتانسیل فقط تابعی از z است؛ یعنی:

$$\nabla^2 v = 0 \quad \to \quad \frac{d^2 v}{dz^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad v = Az + B$$

A و B با توجه به شرایط مرزی تعیین می‌شوند.

در دستگاه دکارتی x و y و z با هم فرق نمی‌کنند.

دستگاه استوانه‌ای:

پتانسیل فقط تابعی از r :

$$v = A\ln r + B$$

پتانسیل فقط تابعی از φ:

$$v = A\varphi + B$$

دستگاه کروی:

پتانسیل فقط تابعی از R :

$$v = \frac{A}{R} + B$$

پتانسیل فقط تابعی از θ:

$$v = A\ln\left(\tan\frac{\theta}{2}\right) + B$$

پتانسیل تابع z در دستگاه استوانه‌ای مانند z در دستگاه دکارتی است و پتانسیل تابع φ دو کروی مانند، پتانسیل در استوانه‌ای است.

برای لاپلاس دو متغیره:

در دستگاه دکارتی:

$$v = \left(A\sin\alpha x + B\cos\alpha x\right)\left(Ce^{\alpha y} + De^{-\alpha y}\right)$$

در دستگاه استوانه‌ای:

$$v = \left[AR^{x} + BR^{-x}\right]\left(C\sin k\varphi + D\cos x\varphi\right)$$

در دستگاه کروی:

$$v = \left[AR^{n} + BR^{-(n+1)}\right]p_n\left(\cos\theta\right)$$

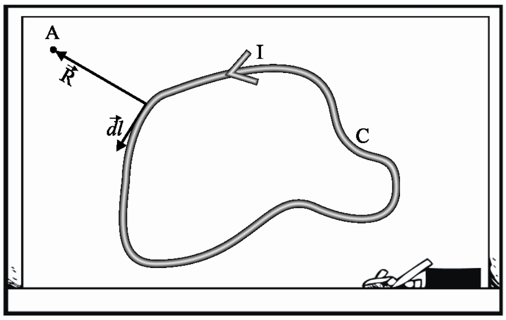
فصل یازدهم: میدان مغناطیس ساکن

به دنیای مغناطیس سلام می‌کنیم و بی‌هیچ حرف اضافه‌ای وارد این دنیای آشنا می‌شویم.

منشأ میدان مغناطیسی جریان است و این میدان، بر جریان نیرو وارد می‌کند.

خوبی از اینجا به بعد کتاب الکترومغناطیس این است که بین این بخش‌ها و بخش‌های قبلی یک جور دوگانی برقرار است.

قانون بیوساوار دوگان قانون کولن:



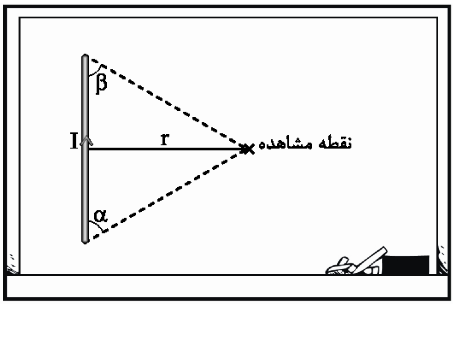
میدان مغناطیسی $\vec{H}$:

۱ـ توزیع خطی جریان: $$\vec{H} = \int_C \frac{I\,\vec{d\ell} \times \hat{R}}{4\pi R^2}$$

۲ـ توزیع سطحی جریان: $$\vec{H} = \int_s \frac{\vec{J}_s \times \hat{R}}{4\pi R^2} ds$$

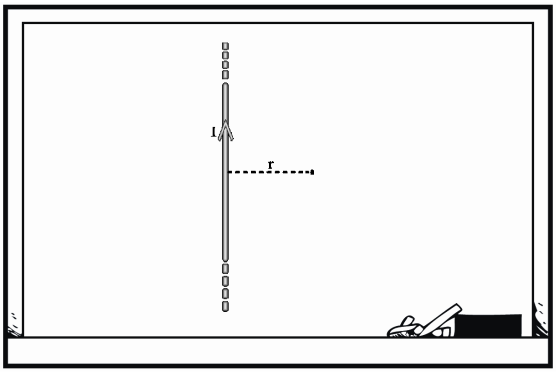
۳ـ توزیع حجمی جریان: $$\vec{H} = \int_v \frac{\vec{J}_v \times \hat{R}}{4\pi R^2} dv$$

این چند تا فرمول را حتماً حفظ باشین، اگر نیستین!!!!



$$H = \frac{I}{4\pi r}\left[\cos\alpha + \cos\beta\right]$$

میدان ناشی از نیم‌خط، خط و... هم به سادگی از روی این فرمول به دست می‌آید. مثلاً برای سیم طویل:

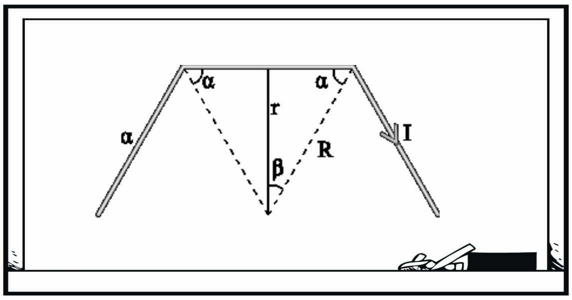


$$H = \frac{I}{2\pi r}$$

اگر نقطهٔ مشاهده در امتداد سیم جریان باشد:

$$H = 0$$

میدان مغناطیسی در مرکز N ضلعی منتظم:



$$H = \frac{NI}{2\pi R}\tan\left(\frac{\pi}{N}\right)$$

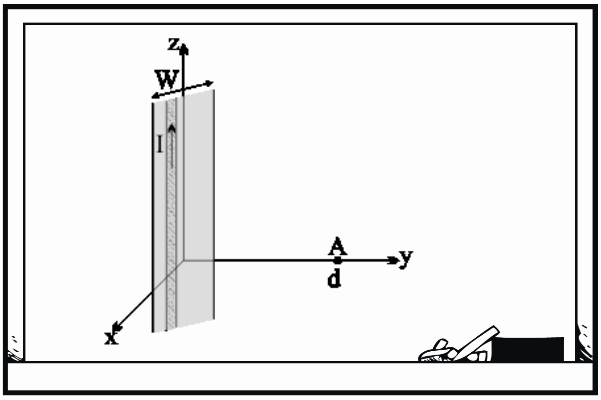
میدان مغناطیسی روی محور یک حلقه جریان به شعاع a

$$H = \frac{Ia^2}{2r^3}\left(\hat{z}\right)$$

میدان در مرکز حلقه:

$$H = \frac{I}{2a} = \frac{\text{جریان}}{\text{قطر}}$$

میدان برای صفحه به عرض w و با چگالی جریان J_o و طول ∞ در نقطه A ، روی عمودمنصف آن:



$$H = \frac{J_o}{\pi} \tan^{-1} \frac{w}{2d}$$

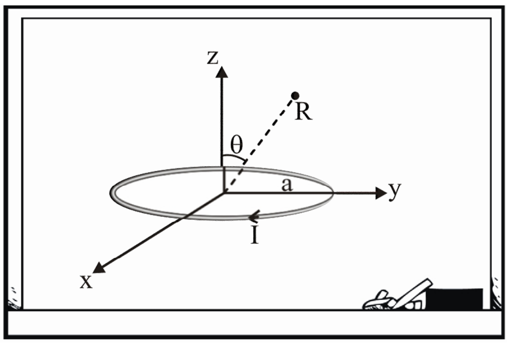
و برای صفحه با ابعاد بی‌نهایت:

$$H = \frac{1}{2} J_s$$

در کتاب الکترومغناطیس کلی مثال داشتیم که به خوبی چگونگی بازی با این فرمول‌ها را نشان می‌دادند.

با یادگیری چگونگی استفاده بهینه از این فرمول‌ها، می‌تونید امیدوار باشین به اکثر سؤالات زمینی! بدون نیاز به استفادهٔ مستقیم قانون بیوساوار به راحتی جواب‌گو باشین.[۱]

میدان برای دوقطبی مغناطیسی از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:



۱ـ استاد تولد 70 سالگی‌شان را بزودی جشن می‌گیرند!

$$H=\frac{\pi a^2 I}{4\pi R^3}\left[2\cos\theta\hat{R}+\sin\theta\hat{\theta}\right]\quad,\quad m=I\pi a^2$$

(m : ممان دوقطبی مغناطیسی)

چگالی شار مغناطیسی دوگان چگالی شار الکتریکی است و برابر است با:

$$\vec{B}=\mu\vec{H}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \varphi=\vec{B}\cdot\vec{S} \quad \Leftarrow & \text{۱ـ } \vec{B} \text{ یکنواخت} \\ \varphi=\int \vec{B}\cdot\overrightarrow{ds} \quad \Leftarrow & \text{۲ـ } \vec{B} \text{ غیریکنواخت} \end{array}\right\}$$

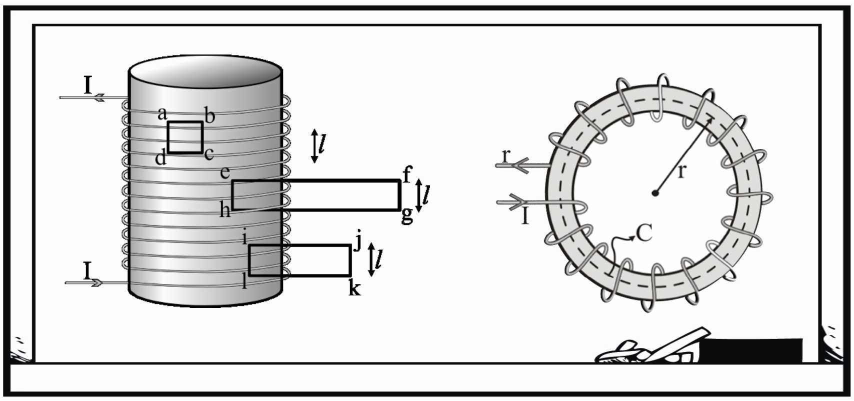
قانون آمپر، دوگان قانون گاوس است:

$$\oint_C \vec{H}\cdot\overrightarrow{d\ell}=\sum_{\text{جبری}} I_{in}$$

و وقتی $\vec{H}$ ثابت باشد هنگامی که تقارن محوری یا استوانه‌ای داریم:

$$H=\frac{\sum I_{in}}{2\pi r}$$

ابزارهایی مانند سونولوئید، پیچه، چنبره، قابلیت ذخیره‌سازی انرژی مغناطیسی را دارند و داریم:



میدان درون ایشان:

$$\left.\begin{array}{ll} \vec{H}=nI\hat{z} \quad \Leftarrow & \text{۱ـ سونولوئید} \\ \vec{H}=\frac{NI}{2a}\hat{z} \quad \Leftarrow & \text{۲ـ پیچه} \\ \vec{H}=\frac{NI}{2\pi r}\hat{\varphi} \quad \Leftarrow & \text{۳ـ چنبره} \end{array}\right\}$$

N : تعداد دور سیم‌پیچ است.

با ا جازه استاد سخن آخر رو من می‌گم، در محاسبهٔ میدان، جهت را با قانون دست راست تعیین می‌کنیم و مثل آنچه در الکتریسیته برای محاسبهٔ میدان انجام می‌دادیم، در اینجا هم اندازه میدان را فقط در راستایی که میدان حضور دارد، محاسبه می‌کنیم.

فصل دوازدهم: نیرو و گشتاور مغناطیسی

میدان مغناطیسی

میدان مغناطیسی به بار متحرک نیرو وارد می‌کند، و چنین است ماجرا:

$$\vec{F}_m = q\vec{v}\times\vec{B}$$

میدان مغناطیسی جهت سرعت ذره را تغییر می‌دهد ولی اندازه سرعت را نه.

نیروی وارد بر:

۱ـ سیم حامل جریان

$$\vec{F} = \int_{\ell} I\overrightarrow{d\ell}\times\vec{B}$$

۲ـ صفحه حامل جریان

$$\vec{F} = \int_{s} \vec{J}_s\times\vec{B}\,ds$$

۳ـ توزیع جریان حجمی

$$\vec{F} = \int_{v} \vec{J}_v\times\vec{B}\,dv$$

و اگر میدان یکنواخت باشد:

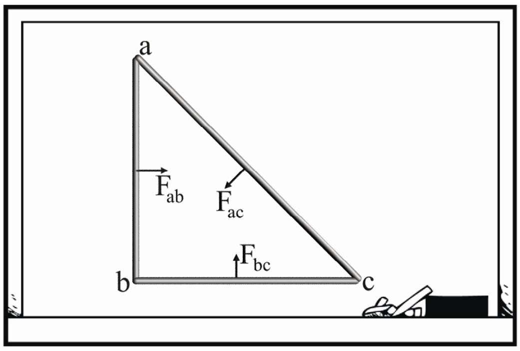
$$\vec{F} = I\vec{L}\times\vec{B}$$

$$F = BIL\sin\theta$$

I : جریان مفعول

$\vec{L}$: طول سیم مفعول

$\vec{B}$: میدان فاعل در محل مفعول



در سیستم‌هایی مانند شکل فوق، برآیند نیروی وارد شده در جهت جاذبه یا دافعه است. (یعنی راستای آن نیرو، عمود بر سیم طویل مستقیم است) و نزدیک‌ترین سیم به سیم مستقیم تعیین‌کننده جاذبه یا دافعه بودن، است.

در هادی کامل مغناطیسی $(\text{PMC})\ \mu \to \infty$ است و اگر یک سیم حامل جریان I در مجاورت یک صفحهٔ PMC قرار بگیرد، تصویرش به صورت یک سیم است که جریانش عیناً با همان جهت و اندازه است.

در این مسایل هم‌جهت را با قانون دست راست تعیین می‌کنیم.

گشتاور مغناطیسی

گشتاور مغناطیسی از رابطه به دست می‌آید:

$$\vec{\tau} = \vec{F} \times \vec{d}$$

$\vec{F}$: نیرو

$\vec{d}$: بازوی گشتاور

$$\vec{\tau} = Ia\vec{B} \times \vec{d} \quad \Rightarrow \quad \vec{\tau} = I\underset{\substack{\downarrow \\ \text{در جهت نرمال سطح}}}{\vec{S}} \times \vec{B}$$

$$\vec{m} = Is\hat{n}$$

$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}$$

$\vec{m}$: ممان مغناطیسی حلقه

$\hat{n}$: بردار نرمال عمود بر سطح

اگر $\vec{B}$ ثابت نباشد:

$$\vec{\tau} = \int d\vec{m} \times \vec{B}$$

می‌رسیم به تعیین جهت گشتاور:

۱ـ بلدین $\Leftarrow$ آفرین !
۲ـ بلد نیستین $\Leftarrow$ به کتاب رجوع کنین!

علت اینکه، اینقدر اصرار دارم، قبل از تعیین اندازه یک پارامتر، جهت را تعیین کنید، برای این است که در خیلی از تست‌ها، فقط با تعیین جهت به جواب درست می‌رسید.

فصل سیزدهم: پتانسیل مغناطیسی

پتانسیل مغناطیسی

گاهی به جای محاسبهٔ مستقیم $\vec{B}$ از رابطهٔ بیوساوار، ابتدا بردار پتانسیل مغناطیسی را حساب کرده و سپس از ایشان کرل می‌گیریم، یعنی:

$$\vec{A} = \int_C \frac{\mu_0 I \overrightarrow{d\ell}}{4\pi R} = \int_s \frac{\mu_0 \vec{J}_s}{4\pi R} ds = \int_v \frac{\mu_0 \vec{J}_v dv}{4\pi R} \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

بردار $\vec{A}$ و I یا $\vec{J}_s$ یا $\vec{J}_v$ هم‌جهت‌اند.

کرل هم از خاندان مشتق است و روابط آن برای سه دستگاه دکارتی، استوانه‌ای و کروی از این قرار است:

در دستگاه دکارتی:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{z}$$

در دستگاه استوانه‌ای:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\varphi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_r & rA_\varphi & A_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \hat{r} + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \hat{\varphi} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r A_\varphi}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right) \hat{z}$$

و بالاخره در دستگاه کروی:

$$\vec{\nabla}\times\vec{A}=\frac{1}{R^{2}\sin\theta}\begin{vmatrix}\hat{R} & R\hat{\theta} & R\sin\theta\hat{\varphi}\\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi}\\ A_R & RA_\theta & R\sin\theta A_\varphi\end{vmatrix}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{A}=\frac{1}{R\sin\theta}\left(\frac{\partial A_\varphi\sin\theta}{\partial\theta}-\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\hat{R}+\frac{1}{R}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_R}{\partial\varphi}-\frac{\partial RA_\varphi}{\partial R}\right)\hat{\theta}+\frac{1}{R}\left(\frac{\partial RA_\theta}{\partial R}-\frac{\partial RA_R}{\partial\theta}\right)\hat{\varphi}$$

در شرح حال قضیه استوکس همین بس که:

$$\oint\vec{A}\cdot\vec{d\ell}=\int_s\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)\cdot\vec{ds}$$

از دریچه دید آقای استوکس به قانون آمپر می‌نگریم و یکی از قوانین جناب ماکسول را مشاهده می‌کنیم:

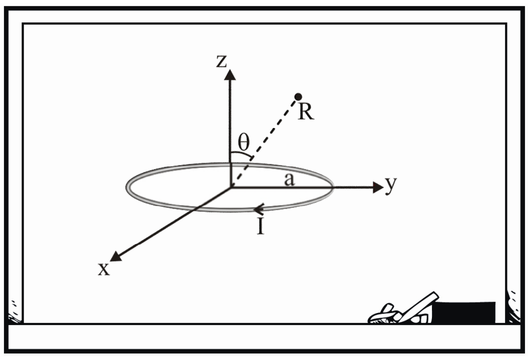
$$\vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{J}$$

و مفهوم فیزیکی این قانون، این است که منبع برداری میدان مغناطیسی $\vec{J}$ است. از طرفی:

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times A\right)=0 \quad\rightarrow\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$$

و این یعنی میدان مغناطیسی منبع اسکالر تولیدکننده ندارد.

پتانسیل برداری دوقطبی مغناطیسی در ناحیه دور از رابطه زیر به دست می‌آید: (این رابطه را به خاطر بسپارید.)



$$\vec{A}=\frac{\mu_0 \vec{m}\times\vec{R}}{4\pi R^2}$$

$$A=\frac{\mu_0 I s \sin\theta}{4\pi R^2}$$

پتانسیل اسکالر مغناطیسی

با قرار دادن $\vec{J}=0$ به رابطه زیر می‌رسیم:

$$\text{if}\quad \vec{J}=0 \quad\Rightarrow\quad \vec{\nabla}\times\vec{H}=0 \quad\Rightarrow\quad \vec{H}=-\vec{\nabla}\underset{\downarrow}{v_m}$$

پتانسیل اسکالر مغناطیسی

$$v_{mA}-v_{mB}=\int_A^B \vec{H}\cdot\overrightarrow{d\ell}$$

یادمون باشه  $\nabla^2 v_m = 0$  $\vec{H}$ پایستار نیست.

فصل چهاردهم: مواد مغناطیسی و شرایط مرزی در مغناطیس

مواد مغناطیسی و بردار مغناطیس‌شدگی

مانند بحث الکتریسیته، می‌توان ماده مغناطیسی را به  انداخته و به جای آن از دو جریان مقید زیر استفاده می‌کنیم:

چگالی جریان مقید حجمی:

$$\vec{J}_m = \vec{\nabla} \times \vec{M}$$

چگالی جریان مقید سطحی:

$$\vec{J}_{ms} = \vec{M} \times \hat{n}$$

با این کار، دیگر فضای حل مسئله با μ نیست و خیلی شیرین، فضای آزاد یا هوایا همان μ_0 می‌شود.

در خیلی از مسایل، بدون جسارت به ساحت $\vec{M}$ عزیز می‌توان مسئله را حلید. آن هم با کشف روابط بین $\vec{M}$، $\vec{H}$ و $\vec{B}$. این‌گونه:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad \text{یا} \quad \vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H} \quad \text{یا} \quad \vec{B} = \mu_0\left(\vec{H} + \vec{M}\right)$$

$$\vec{M} = \underbrace{Xm}_{\text{ضریب حساسیت مغناطیسی}}\vec{H}$$

$$\vec{B} = \mu_0\left(1 + X_m\right)\vec{H} \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = \mu_0\mu_r\vec{H} = \mu\vec{H}$$

یا درنهایت:

$$\vec{M} = \left(\mu_r - 1\right)\vec{H} = \frac{\mu_r - 1}{\mu_0\mu_r}\vec{B}$$

در محیط‌هایی که طراح مهربان رفتار می‌کند، می‌توان $\mu_r = 1$ را گذاشت، $\leftarrow$ $\vec{M} = 0$ باید بشود. ☺

کل جریان مقید، صفر است.

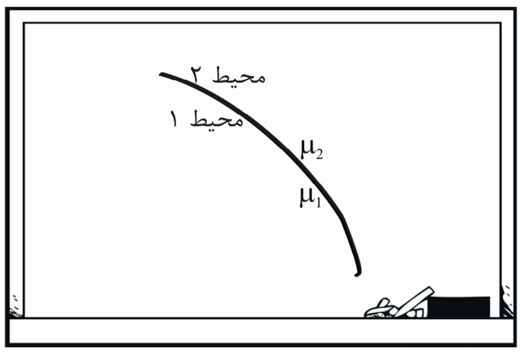
در ضمن هرجا $\vec{J}_{\text{آزاد}} = 0$ داشتیم می‌گوییم $\vec{H} = 0$

[1] ......، اما خوشحالیم که اینجا اشتباه کردی، وقتی $\vec{J}_{\text{آزاد}} = 0$ است، تنها نتیجه‌ای که می‌گیریم این است که $\vec{\nabla}\times\vec{H} = 0$ است و لاغیر.

شرایط مرزی در مغناطیس:

[2] ......

در اینجا هم دو تا قانون داریم که همیشه برقرارند.



$$\hat{n}\times\left(\vec{H}_2-\vec{H}_1\right)=\vec{J}_s$$

$\hat{n}$: بردار نرمال سطح به سمت محیط۲

۱ـ سانسور!

۲ـ به علت هوش و در پی آن بی‌هوش شدن استاد، دانشجو ادارهٔ کلاس را تا اطلاع ثانوی به عهده می‌گیرد.

اگر $\vec{J}_s$ در راستای عمود بر $\vec{H}_1$ و $\vec{H}_2$ باشد:

$$\left| H_{t_1} - H_{t_2} \right| = J_s \qquad \left(\text{if } J_s = 0 \text{ then } H_{t1} = H_{t2}\right)$$

قانون دوم هم اینجوریه:

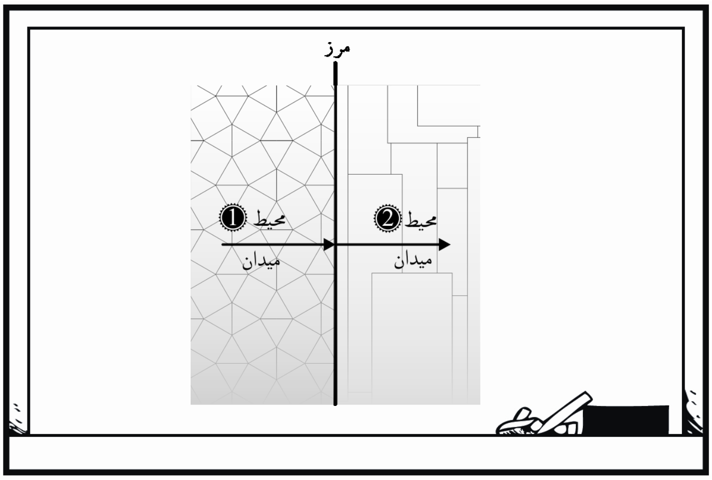
$$B_{n_1} = B_{n_2}$$

چگالی شرایط مغناطیسی در دو محیط پیوسته است.

به شرط اینکه در مرز مشترک دو ماده مغناطیسی، جریان سطحی آزاد وجود نداشته باشد، آنگاه:

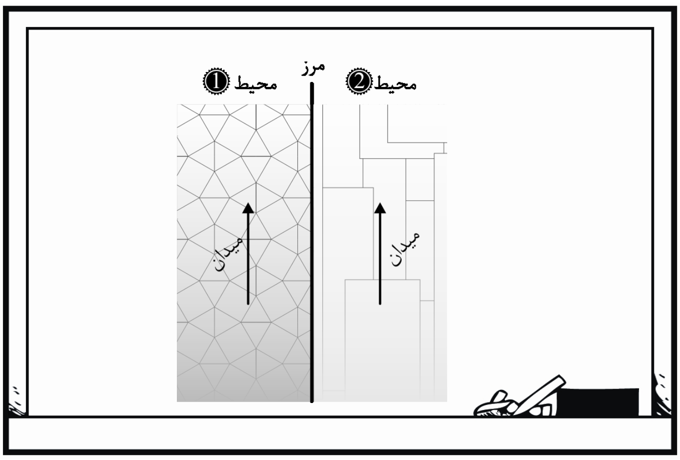
$$\frac{\tan\theta_2}{\tan\theta_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

بنگرین...



در اینصورت:

$$\vec{B}_1 = \vec{B}_2 \quad \Rightarrow \quad \mu_1 \vec{H}_1 = \mu_2 \vec{H}_2$$



و در اینصورت:

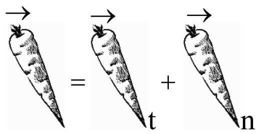
$$\vec{H}_1 = \vec{H}_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\vec{B}_1}{\mu_1} = \frac{\vec{B}_2}{\mu_2}$$

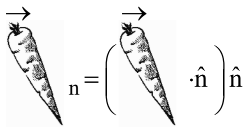
نکتهٔ آخر...

$$\hat{n} \times \left(\vec{M}_2 - \vec{M}_1\right) = \vec{J}_{sb}$$

$\hat{n}$: بردار نرمال سطح به سمت محیط۲

 [1]





[1] استاد بعد از به هوش آمدن، پانتومیم‌هایی اجرا می‌کنند که مفهوم آن چنین است...

فصل پانزدهم: ضریب خودالقایی و القای متقابل و انرژی

ضریب خودالقایی و القای متقابل

برای شار مغناطیسی این یار دیرینه ما رابطه اینچنین است:

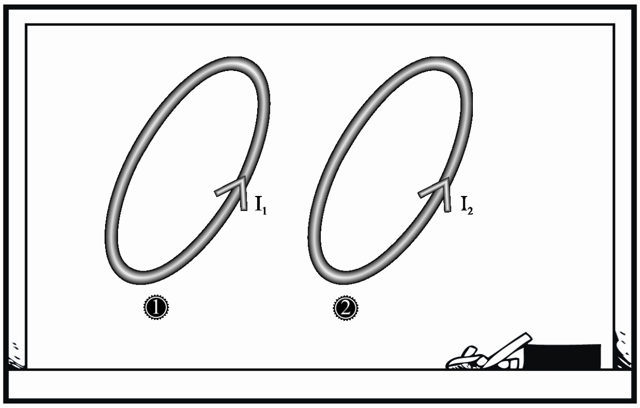
۱ـ $\vec{B}$ یکنواخت: $\varphi = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS\cos\alpha$

۲ـ $\vec{B}$ متغیر: $\varphi = \int_s \vec{B} \cdot \vec{ds}$

۳ـ s بسیار کوچک: $\varphi = Bs\cos\alpha$

و اگر مسئله شامل N حلقه باشد:

$$\varphi = NBs\cos\alpha = N\int_s \vec{B} \cdot \vec{ds}$$



ضریب خودالقایی:

$$l=\frac{\varphi_{11}}{L_1}$$

φ_{11}: شار ناشی از I_1 در مدار خودش

ضریب القای متقابل:

$$M=\frac{\varphi_{21}}{I_1}$$

φ_{21}: شار ناشی از I_1 در مدار دیگری

I_1 را از همان ابتدا، یک در نظر می‌گیریم که کار اضافی انجام ندهیم.

انرژی در میدان مغناطیسی

با توجه به عنایات نظام حاکم (دوگانی) بر الکتریسیته و مغناطیس داریم:

$$U_m=\frac{1}{2}\mu|H|^2=\frac{1}{2}\frac{|B|^2}{\mu}$$

U_m، چگالی حجمی انرژی مغناطیسی بوده و واحد آن $\left(\frac{j}{m^3}\right)$ است.

اگر میدان مغناطیسی ثابت یا حجم مورد نظر بسیار کوچک باشد، آنگاه رابطه ساده‌تر می‌شه:

$$w_m=U_m\times v$$

و اگه میدان متغیر باشد:

$$w_m=\int_v U_m dv$$

این رابطه هم که بیش از n بار دیده‌ایم:

$$w_m=\frac{1}{2}LI^2$$


این رابطه هم $n-1$ بار دیده‌اید:

$$w_m = \frac{1}{2}L_1 I_1^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2 + M I_1 I_2$$


علاقه‌مندان به سریال‌های 90 قسمتی بدانند $U_m = \frac{1}{2}\mu\left|H^2\right| = \frac{|B|^2}{2\mu}$ و سپس یافتن w_m و بالاخره، هم‌ارز قرار دادن با رابطه بالا، سریال در اوج زیبایی خود به پایان می‌رسد[1]...

نیرو در میدان مغناطیس


بدانید:

$$F = \frac{dw}{d\ell} \quad , \quad w = \int \vec{F}\cdot\vec{d\ell}$$

$$\vec{F} = \begin{cases} \vec{\nabla}M & \text{جریان ثابت} \\ -\vec{\nabla}M & \text{فشار ثابت} \end{cases}$$


در مسایلی که القای متقابل مطرح باشد:

$$F = I_1 I_2 \left(\frac{\partial M}{\partial \ell}\right)$$


و نیروی وارد بر سطح مشترک دو محیط را هم می‌توان از تفاضل چگالی انرژی مغناطیسی چنین به دست آورد:

$$\underbrace{\text{نیروی وارد بر واحد سطح}}_{\text{سطح عمود بر جریان}} = U_{m_1} - U_{m_2}$$

۱ـ برداشت آزاد!

فصل شانزدهم: قانون القای فارادی

تغییر شار مغناطیسی ایجاد نیروی محرکه الکتریکی می‌کند؛

همچون باتری الکتریکی : $\text{emf} = \varepsilon = \dfrac{-\Delta\varphi}{\Delta t} = -\dfrac{d\varphi}{dt}$

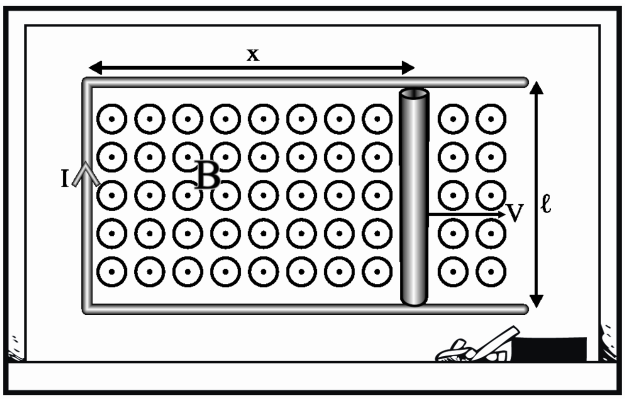
نیروی محرکه القایی متوسط ($\dfrac{-\Delta\varphi}{\Delta t}$) — نیروی محرکه القایی لحظه‌ای ($-\dfrac{d\varphi}{dt}$)

$$i = \frac{\varepsilon}{R}$$

$$\varphi = Bs\cos\alpha$$

پارامترهای قابل تغییر برای ایجاد $\varepsilon \Leftarrow \left.\begin{array}{l} B \\ s \\ \alpha \end{array}\right\}$

α : زاویه بین $\vec{B}$ و $\vec{n}$ (نرمال سطح)



در حالت $\vec{B}$ ثابت: $\varepsilon = \vec{\ell}\cdot\left(\vec{v}\times\vec{B}\right) = Bv\ell\sin\theta$

در حالت $\vec{B}$ متغیر: $\varepsilon = \int_{\ell}\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\cdot\overrightarrow{d\ell}$

θ : زاویه بین $\vec{B}$ و $\vec{v}$ است.

می‌توان این‌گونه جمع‌بندی کرد:

$$\varepsilon = \overbrace{\int_{\ell} \left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\cdot\overrightarrow{d\ell}}^{\text{القای حرکتی}} + \overbrace{\int -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\overrightarrow{ds}}^{\text{القای انتقالی}}$$

در کل برای محاسبه نیروی محرکه القایی ε در یک مسئله، شار مغناطیسی و رابطه‌اش را درک کنیم، و بعد می‌گوییم

که $\varepsilon = -\frac{d\varphi}{dt}$، حالا با توجه به نوع تکون خوردن (از تغییر شار یا تغییرات زمانی و...) نیرو محرکه را حساب کنیم.

راستی استاد، دلم می‌خواست یه تشکر ویژه از شما داشته باشیم به خاطر روش حل از آخر، چون نه تنها توی درس

مغناطیس خیلی باهاش، کیف کردم بلکه خیلی جاهای دیگه مثل مدار، کنترل و حتی توی زندگی شخصیم، واسم خیلی کاربرد داشت.

این که بدونیم چی می‌خواهیم و با توجه به خواسته‌مان قدم برداریم، بسیار مطلوب است.

....

از صمیم قلب براتون آرزوی موفقیت دارم.