



سری سوال: یک ۱

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۷۰ تشریحی: ۵۰

تعداد سوالات: تستی: ۲۵ تشریحی: ۴

عنوان درس: نظریه معادلات دیفرانسیل

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (کاربردی)، ریاضی (محض) (۱۱۱۱۰۵۱) -، ریاضیات و کاربردها ۱۱۱۱۴۳۳

۱- کدامیک از عبارتهای زیر در مورد نگاشتها برقرار است؟

۱. نگاشت  $T$  از فضای باناخ  $B$  به فضای باناخ  $A$  فشرده است در صورتیکه به ازای هر مجموعه  $S$  از  $B$ ، مجموعه  $\{Tx: x \in S\}$  فشرده باشد

۲. نگاشت  $T$  از فضای باناخ  $B$  به فضای باناخ  $A$  فشرده است در صورتیکه به ازای هر مجموعه کراندار  $S$  از  $B$ ، مجموعه  $\{Tx: x \in S\}$  فشرده باشد

۳. نگاشت  $T$  از فضای باناخ  $B$  به فضای باناخ  $A$  فشرده است در صورتیکه به ازای هر مجموعه  $S$  از  $B$ ، بستار مجموعه  $\{Tx: x \in S\}$  فشرده باشد

۴. نگاشت  $T$  از فضای باناخ  $B$  به فضای باناخ  $A$  فشرده است در صورتیکه به ازای هر مجموعه کراندار  $S$  از  $B$ ، بستار مجموعه  $\{Tx: x \in S\}$  فشرده باشد

-۲

در مورد مسئله با مقدار اولیه  $u' = \sqrt[4]{u}, u(0) = 0$  کدام گزینه درست است؟

۱. همه جمله های دنباله تقریبهای متوالی توابع صفرند و لذا این دنباله به تابع صفر همگراست

۲. دنباله تقریبهای متوالی توابع به  $t^4$  همگراست

۳. مسئله جواب یگانه دارد

۴. تابع  $u^4$  در شرط لپشیتز صدق می کند

-۳ فرض کنید مسئله با مقدار اولیه  $u' = g(t, x), u(t) = u$  داشته باشیم. فرض کنید  $J = [t, t + a]$  باشد در اینصورت

تابع بالایی نسبت به مسئله می نامیم در صورتیکه  $v(t) \in C[J, R]$

۱. در صورتیکه روی  $J$  وجود داشته باشد و در نامعادله دیفرانسیلی  $v'_+(t) < g(t, v(t))$  صدق کند

۲. در صورتیکه روی  $J$  وجود داشته باشد و در نامعادله دیفرانسیلی  $v'_+(t) > g(t, v(t))$  صدق کند

۳. در صورتیکه روی  $J$  وجود داشته باشد و در نامعادله دیفرانسیلی  $v'_-(t) > g(t, v(t))$  صدق کند

۴. در صورتیکه روی  $J$  وجود داشته باشد و در نامعادله دیفرانسیلی  $v'_-(t) < g(t, v(t))$  صدق کند

تعداد سوالات: تستی: ۲۵ تشریحی: ۴

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۷۰ تشریحی: ۵۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: نظریه معادلات دیفرانسیل

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (کاربردی)، ریاضی (محض) (۱۱۱۰۵۱ - ، ریاضیات و کاربردها ۱۱۱۴۳۳)

۴- کرانه‌های بالا و پایین جواب مسئله  $u' = u^2 - t, u(0) = 1$  به ترتیب عبارتند از

۲.  $w(t) = 1-t, v(t) = \frac{1}{t+1}$

۱.  $w(t) = 1-t, v(t) = 1+t$

۴.  $v(t) = 1+t$  و  $w(t) = \frac{1}{1-t}$

۳.  $w(t) = (1-t)^2, v(t) = t+1$

۵- فرض کنید  $f(t)$  تابعی پیوسته و  $v(t)$  تابعی پیوسته و نامنفی بر بازه  $[t_0, t_0 + a]$  باشند. اگر تابعی پیوسته چون  $u(t)$

دارای ویژگی  $u(t) \leq f(t) + \int_{t_0}^t u(s)v(s)ds$  باشد آنگاه

۲.  $u(t) \leq f(t) + \int_{t_0}^t v(s) \exp\left[\int_s^t v(t)dt\right] ds$

۱.  $u(t) \leq \int_{t_0}^t f(s)v(s) \exp\left[\int_s^t v(t)dt\right] ds$

۴.  $u(t) \leq f(t) \exp\left[\int_{t_0}^t v(s) ds\right]$

۳.  $u(t) \leq f(t) + \int_{t_0}^t f(s)v(s) \exp\left[\int_s^t v(t)dt\right] ds$

۶- فرض کنید  $u_n(t)$  - امین تقریب متوالی جواب معادله با شرایط اولیه  $u' = 1 + u^2, u(0) = 0$  باشد. در اینصورت  $u_7(t)$  کدام گزینه است؟

۴.  $t$

۳.  $t + \frac{1}{3}t^3$

۲.  $\frac{1}{3}t$

۱.  $\frac{1}{3}t^3$

۷- ماتریس  $A(t)$  در شکل برداری معادله  $4u''' + 3u'' + 2u' + u = 0$  کدام گزینه می باشد؟

۴.  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

۳.  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -3 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

۲.  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

۱.  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

تعداد سوالات: تستی: ۲۵ تشریحی: ۴

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۷۰ تشریحی: ۵۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: نظریه معادلات دیفرانسیل

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (کاربردی)، ریاضی (محض) (۱۱۱۰۵۱ - ، ریاضیات و کاربردها ۱۱۱۴۳۳)

۸- ماتریس  $T$  مربوط به ماتریس  $\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -9 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$  کدام گزینه می باشد؟

۱.  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  .۱  
 ۲.  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  .۲  
 ۳.  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  .۳  
 ۴.  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  .۴

۹- فرض کنید معادله مرتبه  $n$  بصورت  $L(D)y = y^{(n)} + a_n y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$  باشد کدامیک از گزینه های زیر صحیح است؟

۱. اگر قسمت حقیقی تمام ریشههای چند جمله ای مشخصه  $L(\lambda)$  که چندگانگی آنها یک است صفر باشد آنگاه جواب معادله فوق کراندار است

۲. اگر قسمت حقیقی تمام ریشههای چند جمله ای مشخصه  $L(\lambda)$  منفی باشد آنگاه به ازای جواب داده شده  $y(t)$  این معادله، اعدادی مثبت مانند  $\alpha, M$  وجود دارند بطوریکه  $|y(t)| \leq M e^{-\alpha t}$

۳. اگر قسمت حقیقی تمام ریشههای چند جمله ای مشخصه  $L(\lambda)$  که چندگانگی آنها از یک بزرگتر است مثبت باشد آنگاه جواب معادله فوق کراندار است

۴. اگر قسمت حقیقی تمام ریشههای چند جمله ای مشخصه  $L(\lambda)$  که چندگانگی آنها از یک بزرگتر است صفر باشد آنگاه جواب معادله فوق کراندار است

۱۰- شرایط هوروتیز برای چند جمله ای  $\lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3$  عبارت است از

۱.  $a_1, a_2, a_3 \geq 0, a_1 a_2 - a_3 \geq 0$  .۱

۲.  $a_1, a_2, a_3 < 0, a_1 a_2 - a_3 \geq 0$  .۲

۳.  $a_1, a_2, a_3 \geq 0, a_1 a_2 - a_3 = 0$  .۳

۴.  $a_1, a_2, a_3 \geq 0, a_1 a_2 - a_3 < 0$  .۴

۱۱- چند جمله ای مشخصه  $y^{(3)} + 2y'' + ay' + 3y = 0$  پایدار است در صورتیکه

۱.  $a = 1$  .۱  
 ۲.  $a < 1$  .۲  
 ۳.  $a > \frac{2}{3}$  .۳  
 ۴.  $a > \frac{3}{2}$  .۴



سری سوال: ۱ یک

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۷۰ تشریحی: ۵۰

تعداد سوالات: تستی: ۲۵ تشریحی: ۴

عنوان درس: نظریه معادلات دیفرانسیل

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (کاربردی)، ریاضی (محض) (۱۱۱۰۵۱ - ، ریاضیات و کاربردها ۱۱۱۴۳۳)

$$X' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -10 & -11 & -5 \end{bmatrix} X$$

برای دستگاه معادلات کدام عبارت برقرار نمی باشد؟

۱. ماتریس دستگاه پایدار است

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|X(t)\| = 0$$

برای جواب دستگاه داریم

۳. چند جمله ای مشخصه آن  $\lambda^3 - 3\lambda^2 - 2\lambda + 4$  می باشد.

۴. قسمت‌های حقیقی ریشه های چند جمله ای مشخصه دستگاه منفی است

۱۳- فرض کنید جوابهای دستگاه  $y' = A(t)y$  کراندار باشند در اینصورت حداقل کدام شرط کفایت تا تمام جوابهای دستگاه  $z' = (A(t) + B(t))z$  کراندار باشد؟

$$\int_0^{\infty} \|B(t)\| dt < \infty \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} Tr(A(s)) ds = 0$$

و

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} Tr(A(s)) ds > 0 \quad \int_0^{\infty} \|B(t)\| dt < \infty$$

و

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} Tr(A(s)) ds > 0$$

۱۴- فرض کنید قسمت‌های حقیقی مقادیر ویژه ماتریس  $A$  منفی باشد جوابهای دستگاه  $y' = Ay + f(t, y)$  وقتی  $t \rightarrow \infty$  به صفر میل می کند به شرط اینکه

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) = 0 \quad \int_0^{\infty} \alpha(t) dt < \infty$$

و  $[0, \infty]$  روی  $\alpha$  مثبت و پیوسته و  $\|f(t, x)\| \leq \alpha(t)\|x\|$  به ازای تابع پیوسته و مثبت  $\alpha$  روی  $[0, \infty]$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) \neq 0 \quad \int_0^{\infty} \alpha(t) dt < \infty$$

و  $[0, \infty]$  روی  $\alpha$  مثبت و پیوسته و  $\|f(t, x)\| \leq \alpha(t)\|x\|$  به ازای تابع پیوسته و مثبت  $\alpha$  روی  $[0, \infty]$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) = 0 \quad \int_0^{\infty} \alpha(t) dt < \infty$$

و  $[0, \infty]$  روی  $\alpha$  مثبت و پیوسته و  $\|f(t, x)\| \leq \alpha(t)\|x\|$  به ازای تابع پیوسته و مثبت  $\alpha$  روی  $[0, \infty]$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) \neq 0 \quad \int_0^{\infty} \alpha(t) dt < \infty$$

و  $[0, \infty]$  روی  $\alpha$  مثبت و پیوسته و  $\|f(t, x)\| \leq \alpha(t)\|x\|$  به ازای تابع پیوسته و مثبت  $\alpha$  روی  $[0, \infty]$



تعداد سوالات: تستی: ۲۵ تشریحی: ۴

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۷۰ تشریحی: ۵۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: نظریه معادلات دیفرانسیل

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (کاربردی)، ریاضی (محض) ۱۱۱۰۵۱ -، ریاضیات و کاربردها ۱۱۱۴۳۳

۱۵- فرض کنید معادله دیفرانسیلی با شرط اولیه  $x' = f(t, x), x(t_0) = x_0$  داده شده باشد. جواب این معادله پایدار مجانبی است در صورتیکه

$$\exists \delta > 0; \|\bar{x} - x\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_0\| = 0 \quad .1$$

$$\exists \delta > 0; \|\bar{x} - x\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_0\| = 0 \quad .2$$

جواب پایدار بوده و

$$\exists \delta > 0; \|\bar{x} - x\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_0\| \neq 0 \quad .3$$

$$\exists \delta > 0; \|\bar{x} - x\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_0\| \neq 0 \quad .4$$

و جواب پایدار

۱۶- فرض کنید معادله دیفرانسیلی با شرط اولیه  $x' = f(t, x), x(t_0) = x_0$  داده شده باشد. کدام عبارت زیر درست نمی باشد؟

۱. در صورتیکه دستگاه خودگردان و دستگاه متناوب باشد اگر هر جواب ثابت  $x(t)$  پایدار باشد آنگاه یکنواخت - پایدار است

۲. جواب  $x(t)$  یکنواخت - پایدار است آنگاه پایدار است

۳. در صورتیکه دستگاه خودگردان و دستگاه متناوب باشد اگر هر جواب ثابت  $x(t)$  مجانباً پایدار باشد آنگاه مجانباً یکنواخت - پایدار است

۴. جواب  $x(t)$  پایدار است آنگاه یکنواخت - پایدار است

۱۷- برای دستگاه  $x' = Ax$  که  $A$  ماتریس ثابتی است آنگاه کدام گزینه در مورد جواب  $x(t)$  از این دستگاه درست است؟

۱. پایدار است در صورتیکه کراندار باشد

۲. اگر قسمتهای حقیقی مقادیر ویژه ماتریس  $A$  صفر باشد آنگاه جواب مجانباً پایدار است

۳. اگر مجانباً پایدار باشد آنگاه مجانباً یکنواخت پایدار است

۴. اگر قسمتهای حقیقی مقادیر ویژه ماتریس  $A$  مثبت باشد آنگاه جواب مجانباً پایدار است

۱۸- برای دستگاه  $x' = Ax$  که  $A$  ماتریس ثابتی است، نقطه  $(0,0)$  گره ناسره است در صورتیکه

۱. مقادیر ویژه  $A$  غیر صفر و هم علامت باشند

۲. مقادیر ویژه  $A$  غیر صفر و مختلف علامت باشند

۳. مقادیر ویژه  $A$  صفر باشند

۴. یکی از مقادیر ویژه  $A$  غیر صفر و دیگری صفر باشد

تعداد سوالات: تستی: ۲۵ تشریحی: ۴

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۷۰ تشریحی: ۵۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: نظریه معادلات دیفرانسیل

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (کاربردی)، ریاضی (محض) (۱۱۱۰۵۱ - ، ریاضیات و کاربردها ۱۱۱۴۳۳)

$$-۱۹ \quad x' = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix} x$$

برای دستگاه نقطه بحرانی  $(0,0)$  ...

۰۱. پایدار است      ۰۲. ناپایدار است      ۰۳. مجانبا پایدار است      ۰۴. زینی است

$$-۲۰ \quad x' = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & -۳ \end{bmatrix} x$$

نقطه  $(0,0)$  برای دستگاه از کدام نوع می باشد؟

۰۱. گره سره      ۰۲. مجانبا ناپایدار      ۰۳. زینی      ۰۴. کانون پایدار و مجانبا پایدار

-۲۱ نابرابری کوشی - شوارتز برای دو تابع حقیقی پیوسته  $f(t), g(t)$  بر  $[a, b]$ ، عبارت است از

$$۰۱. \int_a^b f(t)g(t)dt \leq \int_a^b f^2(t)dt \int_a^b g^2(t)dt$$

$$۰۲. \left( \int_a^b f(t)g(t)dt \right)^2 \leq \int_a^b f^2(t)dt \int_a^b g^2(t)dt$$

$$۰۳. \int_a^b f(t)g(t)dt \leq \int_a^b f(t)dt \int_a^b g(t)dt$$

$$۰۴. \int_a^b f(t)g(t)dt \leq \sqrt{\int_a^b f^2(t)dt} \sqrt{\int_a^b g^2(t)dt}$$

-۲۲ اگر  $u$  تابعی پیوسته بر بازه  $(0, \infty)$  باشد کدام گزینه برقرار است؟

۰۱. اگر نرمهای  $u$  و  $u'$  کراندار باشند آنگاه نرم  $u''$  کراندار است  
 ۰۲. اگر نرم  $u''$  کراندار باشند آنگاه نرم  $u'$  کراندار است  
 ۰۳. اگر نرمهای  $u$  و  $u''$  کراندار باشند آنگاه نرم  $u'$  کراندار است  
 ۰۴. اگر  $u$  و  $u'$  به  $L^2[0, \infty)$  متعلق باشند آنگاه  $u''$  به  $L^2[0, \infty)$  تعلق دارد

-۲۳ کدامیک از معادلات زیر نوسانی می باشند؟

۰۱.  $u'' + \frac{1}{t^2}u = 0$   
 ۰۲.  $u''' - u'' + u' - u = 0$   
 ۰۳.  $u'' + \varphi(t)u = 0$ ، به شرط اینکه به ازای هر  $t$ ،  $\varphi(t) \geq m > 0$   
 ۰۴.  $u'' + (1 + \varphi(t))u = 0$



سری سوال: ۱ یک

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۷۰ تشریحی: ۵۰

تعداد سوالات: تستی: ۲۵ تشریحی: ۴

عنوان درس: نظریه معادلات دیفرانسیل

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (کاربردی)، ریاضی (محض) (۱۱۱۰۵۱ - ، ریاضیات و کاربردها ۱۱۱۴۳۳)

۲۴- از توابع زیر کدام نیمه معین مثبت می باشند؟

$$1. \quad V(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + (x_2 + x_3)^2 \quad \text{در فضای } R^3$$

$$2. \quad V(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 \quad \text{در صفحه } R^3$$

$$3. \quad V(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{x_1^2 + 1} + x_2^2 \quad \text{در صفحه } R^2$$

$$4. \quad V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - (x_1^4 + x_2^4) \quad \text{داخل دایره واحد}$$

$$25- \quad \begin{cases} x_1' = -6x_1 - \frac{1}{4}x_1x_2^2 \\ x_2' = 4x_1 - \frac{1}{6}x_2 \end{cases} \quad \text{برای دستگاه}$$

با انتخاب تابع  $V(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 3x_2^2$  کدام گزینه درست است؟

۱. تابع  $V^*$  نیمه معین منفی است و جواب صفر دستگاه پایدار است۲. تابع  $V^*$  معین منفی است و جواب صفر دستگاه مجانباً نمایی پایدار است۳. تابع  $V^*$  نیمه معین مثبت است و جواب صفر دستگاه مجانباً نمایی پایدار است۴. تابع  $V^*$  معین منفی است و جواب صفر دستگاه پایدار است

### سوالات تشریحی

۱.۷۵ نمره

۱- اگر توابع  $g(t), h(t)$  روی بازه  $[t, t+a]$  که در آن  $a$  عددی ثابت و مثبت است، پیوسته باشند ثابت کنید مسئله با مقادیر اولیه زیر یک جواب یگانه بر بازه دارد.

$$u'' + g(t)u' + h(t)u = 0$$

$$u(t_0) = u_0, \quad u'(t_0) = u_1$$

۱.۷۵ نمره

۲- جواب دستگاه ناهمگن مرتبه اول زیر را بیابید

$$\begin{cases} x_1' = 3x_1 - x_2 + 1 \\ x_2' = 4x_1 - x_2 + t \end{cases}$$

۱.۷۵ نمره

۳- نشان دهید جواب معادله  $u' = (6t \sin t - 2t)u$  مجانباً پایدار است ولی یکنواخت - پایدار نمی باشد.



تعداد سوالات: تستی: ۲۵ تشریحی: ۴

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۷۰ تشریحی: ۵۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: نظریه معادلات دیفرانسیل

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (کاربردی)، ریاضی (محض) (۱۱۱۰۵۱ - ، ریاضیات و کاربردها ۱۱۱۴۳۳)

نمره ۱،۷۵

۴- فرض کنید تمام جوابهای معادله  $u' + a(t)u = 0$  روی  $[0, \infty)$  کراندار باشند. ثابت کنید تمام جوابهای معادله

$u' + (a(t) + b(t))u = 0$  نیز با شرط  $\int_0^{\infty} |b(t)| dt < \infty$  روی  $[0, \infty)$  کراندارند.