



تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: یک ۱

عنوان درس: آنالیز ریاضی ۲

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی محض (ارشد)، ریاضی (کاربردی)، ریاضی (محض) (۱۱۱۰۴۱ - ، آمار ۱۱۱۰۸۸)

۱- اگر تابع f بر $[a, b]$ پیوسته و $f^2(x) = \int_a^x f(t) dt$ ، آنگاه ضابطه تابع f کدام است؟

$$\frac{x-a}{2} \quad .۴$$

$$-\frac{x}{2} \quad .۳$$

$$\frac{x}{2} \quad .۲$$

$$\frac{x+a}{2} \quad .۱$$

۲- بر بازه $[a, b]$ کدام گزینه صحیح است؟۱. اگر توابع f و α هر دو صعودی باشند، آنگاه $f \in R(\alpha)$.۲. اگر تابع f پیوسته و تابع α صعودی باشد، آنگاه $f \in R(\alpha)$.۳. اگر توابع f و α در $x_0 \in (a, b]$ از چپ ناپیوسته باشند، آنگاه $f \in R(\alpha)$.۴. اگر تابع f کراندار و α صعودی باشد، آنگاه $f \in R(\alpha)$.۳- کدامیک از توابع زیر بر $[0, 1]$ انتگرال پذیر است؟

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & x \notin Q \\ 0 & x \in Q \end{cases} \quad .۲$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & x = \frac{m}{n} \quad (m, n) = 1 \\ 0 & x \notin Q \end{cases} \quad .۱$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in Q \\ 0 & x \notin Q \end{cases} \quad .۴$$

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in Q \\ -x & x \notin Q \end{cases} \quad .۳$$

۴- مقدار $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{k^2 + n^2}$ برابر است با

$$\ln(1 - \sqrt{2}) \quad .۴$$

$$\ln(1 + \sqrt{2}) \quad .۳$$

$$\frac{\pi}{4} \quad .۲$$

$$-\frac{\pi}{4} \quad .۱$$

۵- اگر توابع f, g بر $[a, b]$ متعلق به $R(\alpha)$ باشند، آنگاه کدام گزینه ممکن است صحیح نباشد؟

$$fg \in R(\alpha) \quad .۲$$

$$fog \in R(\alpha) \quad .۱$$

$$cg \in R(\alpha) \quad c \in R \quad .۴$$

$$f + g \in R(\alpha) \quad .۳$$



تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: آنالیز ریاضی ۲

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی محض (ارشد)، ریاضی (کاربردی)، ریاضی (محض) (۱۱۱۰۴۱ - ، آمار ۱۱۱۰۸۸)

۶- فرض کنید α تابعی صعودی بر $[a, b]$ و بر مجموعه توابع انتگرال پذیر نسبت به α بر این بازه قرار دهیم

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f|^2 d\alpha \right)^{\frac{1}{2}}$$

آنگاه بر این مجموعه کدام گزینه صحیح است؟

$$\|f + g\|_2 \geq \|f\|_2 + \|g\|_2 \quad .1$$

$$\left| \int_a^b fg d\alpha \right| \geq \|f\|_2 \|g\|_2 \quad .2$$

$$\|f + g\|_2 = \|f\|_2 + \|g\|_2 \quad .3$$

$$\left| \int_a^b fg d\alpha \right| \leq \|f\|_2 \|g\|_2 \quad .4$$

۷- کدام انتگرال همگراست؟

$$\int_1^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt[3]{x}} dx \quad .1$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx \quad .2$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x + \sin x} dx \quad .3$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\ln x} \quad .4$$

۸- کدام انتگرال به طور مطلق همگراست؟

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{(x+1)^2} dx \quad .1$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \quad .2$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x+1} dx \quad .3$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x} \quad .4$$

۹- تابع f بر بازه $[a, b]$ با تغییر کراندار است اگر و فقط اگر

۱. f کراندار باشد.
۲. f دارای مشتق کراندار باشد.
۳. f پیوسته باشد.
۴. تفاضل دو تابع صعودی یا دو تابع نزولی باشد.



تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: آنالیز ریاضی ۲

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی محض (ارشد)، ریاضی (کاربردی)، ریاضی (محض) (۱۱۱۰۴۱ - ، آمار ۱۱۱۰۸۸)

-۱۰ اگر f بر $[a, b]$ با تغییر کراندار باشد و

$$V_f(a, b) = \sup\{\sum P \mid P \in \mathcal{P}(a, b)\}$$

$$V(x) = \begin{cases} V_f(a, x) & a < x \leq b \\ 0 & x = a \end{cases}, \quad \text{آنگاه کدام گزینه صحیح}$$

نیست؟

۱. مجموعه نقاط ناپیوستگی f و V در $[a, b]$ یکسان است.۲. V بر $[a, b]$ صعودی و $V - f$ بر $[a, b]$ نزولی است.۳. مجموعه نقاط ناپیوستگی V متناهی یا شمارا است.۴. مجموعه نقاط ناپیوستگی f متناهی یا شمارا است.

$$-۱۱ \quad \text{اگر } f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x^\alpha \cos \frac{1}{x} & 0 < x \leq 1 \end{cases} \text{ کدام عبارت درست است؟}$$

۱. $f, \alpha > 1$ با تغییر کراندار است.۲. اگر $1 < \alpha < 2$ ، f با تغییر کراندار نیست.۳. اگر $\alpha > 2$ ، f با تغییر کراندار نیست.۴. اگر $\alpha \leq 2$ ، f با تغییر کراندار است.

$$-۱۲ \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n \text{ به طور یکنواخت همگراست اگر}$$

۱. $\{A_n\}$ ، $A_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$ به طور یکنواخت کراندار باشد و $\{g_n\}$ همگرای یکنواخت به صفر باشد.۲. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ به طور یکنواخت همگرا و $\{g_n\}$ صعودی باشد.۳. $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ به طور یکنواخت همگرا و $\{g_n\}$ به طور یکنواخت کراندار باشد.۴. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ به طور یکنواخت همگرا و $\{g_n\}$ همگرای یکنواخت به صفر باشد.



تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: آنالیز ریاضی ۲

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی محض (ارشد)، ریاضی (کاربردی)، ریاضی (محض) (۱۱۱۰۴۱ - ، آمار ۱۱۱۰۸۸)

۱۳- در مورد دنباله $\{f_n\}$ با ضابطه $f_n(x) = \frac{\cos nx}{nx}$ بر $(0,1)$ ، کدام گزینه صحیح است؟

۱. نقطه به نقطه به تابع $f = 0$ همگراست.
 ۲. به طور یکنواخت به تابع $f = 0$ همگراست.
 ۳. به طور یکنواخت به تابع $f = 1$ همگراست.
 ۴. همگرایی نقطه به نقطه ندارد.

۱۴- اگر $\{M_n\}$ دنباله ای از اعداد نامنفی باشد به طوری که $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ همگرا و $\{f_n\}$ دنباله ای از توابع باشد که به ازای هر n و

x داشته باشیم $|f_n(x)| < M_n$ ، آنگاه

۱. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ پیوسته است.
 ۲. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ به طور یکنواخت همگراست.
 ۳. $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ به طور یکنواخت همگراست.
 ۴. $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ پیوسته است.

۱۵- اگر دنباله $\{f_n\}$ به طور یکنواخت بر $[a, b]$ به همگرا باشد، آنگاه کدام گزینه صحیح نیست؟

۱. اگر هر f_n پیوسته باشد، آنگاه f پیوسته است.
 ۲. اگر هر f_n مشتقپذیر باشد، آنگاه f مشتقپذیر است و $f'_n \Rightarrow f'$
 ۳. اگر هر f_n انتگرالپذیر باشد، آنگاه f انتگرالپذیر است. $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\alpha = \int f d\alpha$
 ۴. اگر هر f_n کراندار باشد، آنگاه f کراندار است.

۱۶- سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ بر \mathbb{R} چگونه است؟

۱. به طور مطلق و یکنواخت همگراست.
 ۲. فقط به طور مطلق همگراست.
 ۳. فقط به طور یکنواخت همگراست.
 ۴. فقط همگراست.



تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: ۱: یک

عنوان درس: آنالیز ریاضی ۲

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی محض (ارشد)، ریاضی (کاربردی)، ریاضی (محض) (۱۱۱۰۴۱ - ، آمار ۱۱۱۰۸۸)

۱۷- کدام گزینه صحیح است؟

۱. فضای متریک فشرده و F زیر فضای بسته ای از $C(X)$ باشد، F فشرده است اگر و فقط اگر F کراندار و همبسته باشد

۲. X فشرده و $f_n \in C(X)$ دنباله $\{f_n\}$ به طور یکنواخت همگراست اگر و فقط اگر $\{f_n\}$ همبسته باشد.

۳. X فشرده و $f_n \in C(X)$ همبسته است اگر و فقط اگر $\{f_n\}$ به طور یکنواخت کراندار باشد.

۴. دنباله $\{f_n\}$ به طور یکنواخت همگراست اگر و فقط اگر $\{f_n\}$ در $C(X)$ باشد.

۱۸- فرض کنید سری $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ همگرا و $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ بر $(-1, 1)$ در این صورت $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ کدام است؟

۲. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$

۱. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2$

۴. حد ممکن است وجود نداشته باشد.

۳. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{c_n}$

۱۹- شعاع همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ex)^n}{\sqrt{n}}$ برابر است با:

۴. $\frac{1}{e}$

۳. .

۲. $\frac{1}{e}$

۱. e

۲۰- $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n e^{-x}$ کدام است؟

۴. $-\infty$

۳. ∞

۲. ۱

۱. ۰

سوالات تشریحی

نمره ۱.۴۰

۱- ثابت کنید اگر تابع f بر $[a, b]$ صعودی و α بر $[a, b]$ صعودی و پیوسته باشد آنگاه $f \in R(\alpha)$.

نمره ۱.۴۰

۲- فرض کنید $f \geq 0$ و بر $[a, b]$ پیوسته باشد و $\int_a^b f(x) dx = 0$ ، ثابت کنید به ازای هر $f(x) = 0, x \in [a, b]$



تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: آنالیز ریاضی ۲

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی محض (ارشد)، ریاضی (کاربردی)، ریاضی (محض) (۱۱۱۰۴۱ - ، آمار ۱۱۱۰۸۸)

۱.۴۰ نمره

۳- ثابت کنید اگر تابع f بر بازه $[a, b]$ دارای مشتق کراندار باشد، آنگاه f با تغییر کراندار است. با مثالی نشان دهید عکس قضیه برقرار نیست.

۱.۴۰ نمره

۴- اگر فضای متریک فشرده باشد و $A \subseteq C(X)$ یک زیرجبر خود الحاقی باشد و اگر A نقاط X را جدا کند و بر X صفر نشود، آنگاه $\bar{A} = C(X)$

۱.۴۰ نمره

۵- تابع E را بر اعداد مختلط با ضابطه $E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ در نظر بگیرید. نشان دهید اگر $0 < t < 2\pi$ ، آنگاه $E(it) \neq 1$.