



تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: یک ۱

عنوان درس: جبر، مبانی جبر

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی محض (ارشد)، ریاضی (کاربردی)، ریاضی (محض) (۱۱۱۰۳۷ -)، ریاضی محض (آنالیز)، ریاضی محض (جبر)، ریاضیات و کاربردها، علوم کامپیوتر ۱۱۱۳۲۵

۱- عمل دوتایی  $*$  را روی اعداد حقیقی به صورت  $x * y = x + y - xy$  در نظر بگیرید. در این صورت:

۱. عمل  $*$  جایجایی نیست.
۲. عمل  $*$  شرکت پذیر نیست.
۳. عمل  $*$  جایجایی است اما شرکت پذیر نیست.
۴. عمل  $*$  جایجایی و شرکت پذیر است.

۲- کدام یک از مجموعه های زیر تحت عمل داده شده یک گروه است؟

۱. مجموعه  $p(X)$  (زیرمجموعه های  $X$ ) تحت عمل تفاضل متقارن  $\Delta$ .
۲. مجموعه ماتریس های معکوس پذیر  $2 \times 2$  با درایه های حقیقی تحت عمل ضرب ماتریس ها.
۳. مجموعه اعداد صحیح تحت عمل  $a * b = a - b$ .
۴. مجموعه  $\{1, -1\}$  تحت عمل ضرب اعداد صحیح.

۳- کدام گزینه در مورد آبلی بودن یک گروه درست است؟

۱. اگر برای هر دو عنصر  $a, b$  در گروه  $G$ ،  $(ab)^2 = a^2b^2$  آنگاه  $G$  غیرآبلی است.
۲. اگر هر عنصر گروه  $G$  برابر معکوس خود باشد آنگاه  $G$  آبلی است.
۳. اگر  $G = \{e, a, b, c\}$  یک گروه و  $e$  عضو همانی آن باشد آنگاه  $G$  غیرآبلی است.
۴.  $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, b, d \in R, ad \neq 0 \right\}$  تحت ضرب ماتریس ها یک گروه آبلی است.

۴- کدام یک از گروه های زیر غیرآبلی است؟

۱. مجموعه اعداد صحیح  $Z$  با عمل جمع.
۲. مجموعه اعداد ناصفر  $R$  با عمل ضرب.
۳. مجموعه عناصر ناصفر  $Q$  با عمل ضرب.
۴.  $S_3$ .

۵- کدام عبارت در مورد گروه  $G$  درست است؟

۱. اگر  $a$  عنصری از مرتبه ۵ در گروه  $G$  باشد آنگاه  $a^{18} = e$ .
۲. اگر  $a$  عنصری از مرتبه ۱۲ در گروه  $G$  باشد آنگاه  $o(a^9) = 4$ .
۳. اگر  $G$  از مرتبه متناهی و  $a, b \in G$  آنگاه مرتبه  $ab$  متناهی است.
۴. اگر  $a$  عنصری از مرتبه ۷ در گروه  $G$  باشد آنگاه  $o(a^5) = 14$ .



تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: جبر، مبانی جبر

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی محض (ارشد)، ریاضی (کاربردی)، ریاضی (محض) (۱۱۱۰۳۷ -)، ریاضی محض (آنالیز)، ریاضی محض (جبر)، ریاضیات و کاربردها، علوم کامپیوتر ۱۱۱۳۲۵

۶- اگر  $G = \langle a \rangle$  گروه دوری از مرتبه ۲۶ باشد آنگاه

$$o(a^6) = 26 \quad ۱.$$

۲. گروه  $G$  دارای ۱۲ مولد می باشد.۳. گروه  $G$  آبلی نیست.۴.  $a^{13}$  گروه  $G$  را تولید می کند.

۷- کدام یک از گروه های زیر دوری است؟

$$Z_{10} \times Z_7 \times Z_{15} \quad ۱. \quad Z_{20} \times Z_9 \times Z_{35} \quad ۲. \quad Z_4 \times Z_{16} \times Z_{35} \quad ۳. \quad Z_4 \times Z_9 \times Z_{35} \quad ۴.$$

۸- کدام یک از جایگشت های زیر زوج است؟

$$(1 \ 2 \ 3) \quad ۱. \quad (1 \ 2 \ 3) \quad ۲. \quad (2 \ 3 \ 4)(4 \ 5) \quad ۳. \quad (1 \ 2 \ 3 \ 4) \quad ۴.$$

۹- گروه  $(Z_{10}, \oplus)$  و زیر گروه  $H = \langle 2 \rangle$  از آن را در نظر بگیرید. اندیس  $H$  در  $Z_{10}$  کدام است؟

$$۵ \quad ۱. \quad ۲ \quad ۲. \quad ۱ \quad ۳. \quad ۱۰ \quad ۴.$$

۱۰- فرض کنید  $H, K$  زیرگروه های متناهی گروه  $G$  باشند به طوری که  $(|H|, |K|) = 1$ . در این صورت:

$$H \cap K = \{e\} \quad ۱. \quad HK \text{ یک زیرگروه است.} \quad ۲.$$

$$HK = KH \quad ۳. \quad HK = G \quad ۴.$$

۱۱- کدام یک از گزاره های زیر در مورد گروه  $G$  درست نیست؟۱. اگر  $G$  آبلی باشد آنگاه هر زیرگروه  $G$  نرمال است.۲. اگر  $H$  زیرگروهی از  $G$  باشد به طوری که  $|G:H| = 2$  آنگاه  $H \triangleleft G$ .۳. اگر هر زیرگروه  $G$  نرمال باشد آنگاه  $G$  آبلی است.۴. اگر  $H \triangleleft G, K \triangleleft G$  آنگاه  $H \cap K \triangleleft G$ .۱۲- فرض کنید  $\rho: G \rightarrow H$  یک همسانی باشد. کدام گزینه درست است؟۱. اگر  $H$  آبلی و  $\rho$  نیز پوشا باشد آنگاه  $G$  آبلی است.۲. اگر  $\rho$  پوشا و  $G$  آبلی باشد آنگاه  $H$  نیز آبلی است.۳. اگر  $H$  دوری و  $\rho$  همسانی پوشا باشد آنگاه  $G$  نیز دوری است.

$$Z(G) \cong Z(H) \quad ۴. \text{ همواره}$$



تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: جبر، مبانی جبر

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی محض (ارشد)، ریاضی (کاربردی)، ریاضی (محض) (۱۱۱۱۰۳۷ - ، ریاضی محض (آنالیز)، ریاضی محض (جبر)، ریاضیات و کاربردها، علوم کامپیوتر ۱۱۱۱۳۲۵

۱۳- اگر  $\rho: Gl(2, R) \rightarrow (R - \{0\}, \cdot)$  با ضابطه  $\rho\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = ad - bc$  باشد، در این صورت:

۱.  $Ker(\rho) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid ad - bc = 0 \right\}$  .۲  $\frac{G}{Ker\rho} \cong (R, \cdot)$  پوشا است و  $\rho$

۳. ۴.  $\rho$  پوشا و یک به یک است.

۳.  $Ker(\rho) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid ad - bc = 1 \right\} = Sl(2, R)$

۱۴- فرض کنید  $G = \frac{Z/12Z}{3Z/12Z}$ . در این صورت  $G$  چند عضو دارد و با کدام گروه یکرخت است؟

۱. بی شمار عضو و با  $Z$  یکرخت است.  
 ۲. سه عضو و با  $Z_3$  یکرخت است.  
 ۳. دوازده عضو و با  $Z_{12}$  یکرخت است.  
 ۴. چهار عضو و با  $Z_4$  یکرخت است.

۱۵-  $\frac{4Z+6Z}{8Z}$  با کدام یک از گروه های زیر یکرخت است؟

۱.  $Z_2$  .۲  $Z_4$  .۳  $Z_2 \times Z_4$  .۴  $Z_8$

۱۶- در حلقه ی  $Z_8$  عناصر پوچ توان کدام اند؟

۱.  $\overline{4, 7}$  .۲  $\overline{4, 6}$  .۳  $\overline{4, 5}$  .۴  $\overline{2, 5}$

۱۷- کدام یک از گزینه های زیر میدان است؟

۱.  $\frac{Z}{8Z}$  .۲  $(Z_p, \oplus, \odot)$  (که در آن  $p$  یک عدد اول است).  
 ۳.  $\frac{2Z}{12Z}$  .۴  $(Z, +, \cdot)$

۱۸- فرض کنید  $\rho: G \rightarrow H$  یک یکسانی گروه ها باشد، کدام یک از گزاره های زیر درست نیست؟

۱.  $G = H$  .۲  $o(G) = O(H)$  .۳ به ازای هر  $x \in G$  و هر عدد صحیح  $n$ ،  $\rho(x^n) = [\rho(x)]^n$  .۴ به ازای هر  $x \in G$  داریم  $o(x) = o(\rho(x))$ .



تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: جبر، مبانی جبر

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی محض (ارشد)، ریاضی (کاربردی)، ریاضی (محض) (۱۱۱۱۰۳۷ -)، ریاضی محض (آنالیز)، ریاضی محض (جبر)، ریاضیات و کاربردها، علوم کامپیوتر ۱۱۱۱۳۲۵

۱۹- فرض کنید  $R, S$  حلقه هایی با عضو یکه بوده و  $\rho: R \rightarrow S$  یک همسانی حلقه باشد. کدام یک از روابط زیر درست نیست؟

۱. اگر  $\rho$  پوشا باشد آنگاه  $\rho(1_R) = 1_S$ .

۲. اگر  $S$  یک حلقه بخشی باشد و  $\rho(1_R) \neq 0$  آنگاه  $\rho(1_R) = 1_S$ .

۳. اگر  $S$  یک قلمرو صحیح باشد و  $\rho(1_R) = 1_S$  آنگاه  $\rho(1_R) = 1_S$ .

۴. اگر  $\rho$  یک به یک باشد آنگاه  $\rho(1_R) = 1_S$ .

۲۰- مشخصه میدان های  $Q, Z_p$  به ترتیب برابر است با:

۱.  $0, 0$

۲.  $0, p$

۳.  $1, p$

۴.  $p, 0$

### سوالات تشریحی

۱.۴۰ نمره

۱- ثابت کنید در یک حلقه تعویض پذیر  $R$  با عنصر یکه، ایده آل  $I$  اول است اگر و تنها اگر  $\frac{R}{I}$  یک قلمرو صحیح باشد.

۱.۴۰ نمره

۲- فرض کنید  $G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$ . نشان دهید:  
الف) اگر به ازای هر  $1 \leq i \leq n$  داشته باشیم  $g_i \in G_i$  دارای رتبه متناهی باشد، آنگاه  $o((g_1, g_2, \dots, g_n))$  کوچکترین مضرب مشترک  $o(g_1), \dots, o(g_n)$  است.  
ب) اگر هر  $G_i$  یک گروه دوری باشد آنگاه  $G$  دوری است اگر و تنها اگر به ازای هر  $i \neq j$ ،  $|G_i|$  و  $|G_j|$  نسبت به هم اول باشند.

۱.۴۰ نمره

۳- تمام همسانی ها از  $(Z, +, \cdot)$  به خودش را مشخص کنید.

۱.۴۰ نمره

۴- فرض کنید  $n$  یک عدد صحیح مثبت و  $G$  یک گروه دوری از مرتبه  $n$  باشد در این صورت:  $G \cong (Z_n, \oplus)$  و در نتیجه هر دو زیرگروه دوری از مرتبه  $n$  با یکدیگر یکسان هستند.

۱.۴۰ نمره

۵- فرض کنید  $H, K$  دو زیرگروه از گروه متناهی  $G$  باشند، ثابت کنید  $|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}$ .