تحقیق درعملیات ۲

www.ieun.ir

فلسفه آموزش

- آموزش یک فرایند چالشی و زمان مند است که در آن دانشجو با تلاش، پشتکار و مشارکت فعال و با همیاری آموزش دهنده، مفاهیم، نظریه ها، تکنیک ها، و چارچوب علمی درس را فرا می گیرد. برایند این فرایند افزایش دانش و توان افزایی در بکارگیری دانش است.
- دانشجو (student) کیست؟
  - Student : person who is studying at a university
  - دانش + جو : کسی که در پی دانش است
- درس (course) چیست؟
- آموزش دهنده (lecturer) کیست؟

گام نخست

- **هدف**
  - آشنایی دانشجویان با مفاهیم و روشهای پژوهش عملیاتی و بکارگیری آنها در تصمیم گیریهای سازمانی

سرخط درس

- برنامه ریزی عدد صحیح (Integer Linear Programming)
- برنامه ریزی پویا قطعی (Dynamic Programming)
- تجزیه و تحلیل شبکه (Networks)
- نظریه بازیها (Game Theory)
- نرم افزار LINDO، LINGO، Excel

منابع درسی

- آریانژاد، سجادی، تحقیق در عملیات 2، انتشارات دانشگاه علم و صنعت، 1381
- مهرگان، پژوهش عملیاتی، انتشارات نشرکتاب دانشگاهی، مرکزفرهنگی سالکان، 1374
- Winston, Operation Research: Applications and Algorithm, PWS-Kent.
- F.S. Hillier, M.S. Hillier, Introduction to Management Science – A Modeling and Case Studies Approach with Spreadsheets, 2nd Ed., McGraw Hill, 2003 (Chapter 8).
- Ahuja, Magnati, Orin, Network Flows, 1993.

ارزشیابی

کوئیز و تمرین	%5
میان نیمسالی	%35
پروژه	%10
پایان نیمسالی	%50

برنامه ریزی عدد صحیح

Integer Linear Programming (ILP)

8

آشنایی با برنامه ریزی عدد صحیح

- مسئله برنامه ریزی خطی عدد صحیح، که در آن برخی یا همه متغییرهای تصمیم، عدد صحیح نامنفی است.
  - غیرواقعی بودن مقدار اعشاری در بسیاری از مسائل واقعی
  - متغییرهای دو وضعیتی
- مدلسازی واقعی تر مسائل دنیای واقعی
- دشواری در حل

9

گونه های مسئله ILP

- برنامه ریزی خالص عدد صحیح
  - همه متغییرهای تصمیم صحیح
- برنامه ریزی مختلط عدد صحیح
  - برخی متغییرهای تصمیم صحیح
- برنامه ریزی صفر و یک
  - همه متغییرهای تصمیم دو وضعیتی

10

مدل برنامه ریزی خطی (LP)

- مدل LP

$$\max\{c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n\}$$ ← تابع هدف

subject to:

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n\le b_1$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n\le b_2$$ ← محدودیتها
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n\le b_m$$
$$x_j\ge 0\ (j=1,\ldots,n)$$ ← محدودیت متغییرها

- شکل ماتریسی

$$\max c^Tx$$
$$Ax\le b$$
$$x\ge 0$$

where:
x, c: n-vector
A: m,n-matrix
b: m-vector

11

مثال برنامه ریزی خطی

$$\max\ \{x_1+x_2\}$$
subject to:
$$2x_1+x_2\le 4$$
$$3x_1+4x_2\le 12$$
$$x_j\ge 0\ (j=1,2)$$

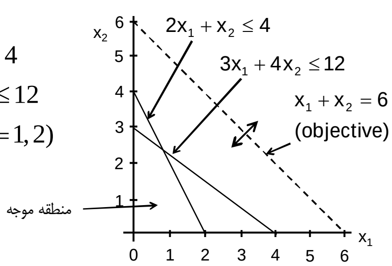
یا

$$\max \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$
subject to :
$$\begin{bmatrix}2&1\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\le\begin{bmatrix}4\\12\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\ge\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

12

حل مسئله برنامه ریزی خطی : ترسیمی

$$\max\ \{x_1+x_2\}$$
subject to:
$$2x_1+x_2\le 4$$
$$3x_1+4x_2\le 12$$
$$x_j\ge 0\ (j=1,2)$$



13

حل مسئله برنامه ریزی خطی

- شیوه های حل
  - روش سیمپلکس (دوگان)
  - روشهای کارآ (مانند الگوریتم کارمارکار)
- بسته های نرم افزاری
  - LINDO
  - LINGO
  - CPLEX
  - XPRESS-MP
- نرم افزارهای مدلسازی
  - AIMMS
  - AMPL

14

مدل برنامه ریزی عدد صحیح : حل ترسیمی

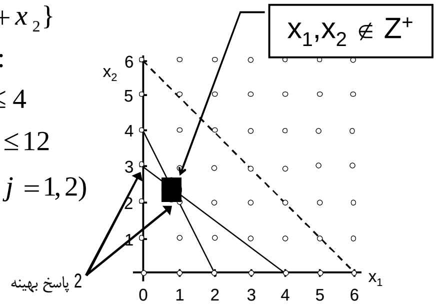
$$\max \ \{x_1 + x_2\}$$

subject to:

$$2x_1 + x_2 \le 4$$

$$3x_1 + 4x_2 \le 12$$

$$x_j \in Z^+ \ (j = 1, 2)$$



15

حل ILP: گرد کردن حل LP

- پیشگیری از هرزرفت وقت
- گرد کردن پاسخ کسری LP
  - با شمار زیاد متغییر، شاید بد نباشد
  - گاهی پاسخ ناشدنی است!

16

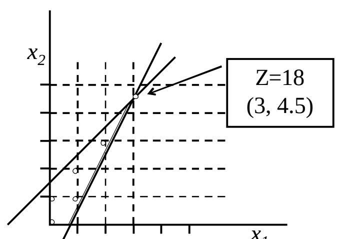
حل ILP: گرد کردن حل LP

$$\max Z = 3x_1 + 2x_2$$

$$-x_1 + x_2 \le \frac{3}{2}$$

$$2x_1 - x_2 \le \frac{3}{2}$$

$$x_1, x_2 \ge 0 \ \wedge \ \text{int}$$



- پنج پاسخ صحیح (2,3), (1,2), (1,1), (0,1), (0,0)
- پاسخ با گرد کردن (3,5) (3,4) ولی ناشدنی!

17

الگوریتمهای حل ILP

- در نگاه نخست، حل ILP ساده تر از LP است
  - چون؛ به جای بینهایت نقطه، شماری نقطه صحیح
- اما، در LP جستجوی مرزی
  - فقط نقاط فرین (گوشه ای)
- ولی در ILP جستجوی درونی
  - همه نقاط صحیح
- نبود روشی کارآ همانند سیمپلکس برای ILP
- دو الگوریتم
  - شاخه و کران
  - صفحه برش

18

الگوریتم شاخه و کران
Branch and Bound

19

الگوریتم شاخه و کران Branch and Bound Algorithm

- یک رویکرد خرد کن، پیروز شو ! (divide-and-conquer)
- به وسیله Land و Doing در 1960
- رویه محاسباتی به وسیله Dakin در 1965
- هر ILP در واقع یک LP است
  - با محدویتهایی افزودنی برای صحیح بودن متغییرها
  - منطقه موجه ILP بخشی از منطقه موجه LP است
  - بنابراین همواره $Z^*_{ILP} \le Z^*_{LP}$

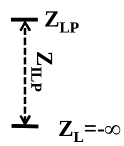
20

الگوریتم شاخه و کران

- یک رویه جستجوی پی در پی
  - تقسیم منطقه موجه به منطقه های کوچکتر
  - بررسی امکان پاسخ در منطقه های کوچکتر
  - منطقه موجه کوچکتر بیانگر یک مسئله فرعی
- حل یک ILP
  - حل پی در پی شماری مسئله فرعی

21

الگوریتم شاخه و کران ؛ مسئله دو متغییره



- حل مسئله بدون توجه به شرط صحیح بودن
- یافتن پاسخ بهینه مدل RLP
- اگر پاسخ RLP، عدد صحیح است، آنگاه پایان.
  - اگر نه، ∞- بدترین مقدار تابع هدف ILP است
  - این حد پایین است، Z_L
  - بهترین مقدار تابع هدف ILP ، همان Z_{LP}
- هر گاه در فرایند حل، پاسخ موجه صحیح بهتر یافت شد، جایگزین مقدار Z_L می شود
- در هر گام، تقسیم منطقه موجه با افزودن یک محدودیت جدید
  - با کمک متغییر شاخه زنی

22

الگوریتم شاخه و کران ؛ مسئله دو متغییره

- با انتخاب x_j برای شاخه زنی
  - یک مسئله فرعی با افزودن محدودیت $x_j < L_j$
  - یک مسئله فرعی با افزودن محدودیت $x_j \ge L_j + 1$
- مقدار ثابت L_j : بزرگترین عدد صحیحی که از مقدار بهینه x_j^* کوچکتر است.
- x_j^* از پاسخ بهینه مسئله LP اولیه به دست می آید.

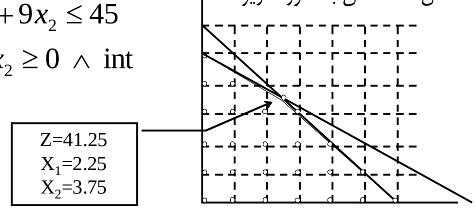
23

الگوریتم شاخه و کران ؛ مسئله دو متغییره

- مسئله زیر داده شده است:

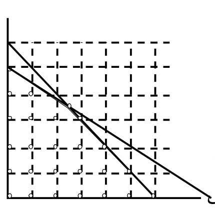
$$\max Z = 5x_1 + 8x_2$$
$$x_1 + x_2 \le 6$$
$$5x_1 + 9x_2 \le 45$$
$$x_1, x_2 \ge 0 \ \wedge \ \text{int}$$

- حل RLP آن به صورت زیر است



24

الگوریتم شاخه و کران ؛ مسئله دو متغییره



- چند نکته
  - پاسخ RLP موجه نیست
    - هر چند که بهینه است !
  - فقط 25 نقطه صحیح موجه
  - مقدار Z^*_{LP} ، بیشینه مقدار Z^*_{ILP} است
- انتخاب یکی از دو متغیر برای شاخه زنی
  - اگر x_2=3.75 انتخاب شود
    - تمامی نقاط با x_2 بین 3 و 4 ناپذیرفتنی برای x_2 است
    - حذف این دامنه، هیچ مقدار صحیحی از x_2 را ازبین نمی برد

25 الگوریتم شاخه و کران : مسئله دو متغییره

- تعریف دو محدودیت جدید

$X_2 = 3.75$

$x_2 \le 3$

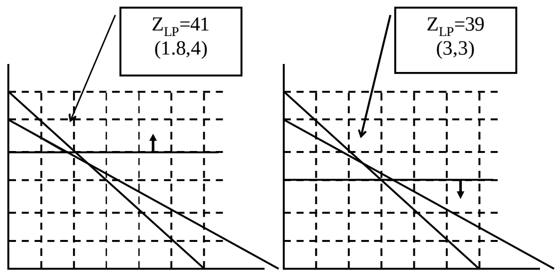
$x_2 \ge 3+1 = 4$

- تقسیم منطقه موجه به دو قسمت (L=3)
- دو مسئله فرعی P_1 و P_2 خواهیم داشت

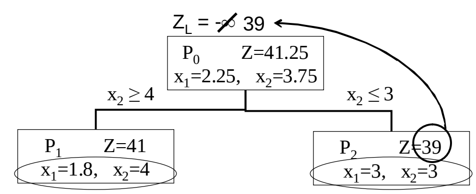
$$\begin{aligned} &\max Z = 5x_1 + 8x_2 \\ &x_1 + x_2 \le 6 \\ &5x_1 + 9x_2 \le 45 \\ &x_2 \le 3 \\ &x_1, x_2 \ge 0 \ \wedge\ \text{int} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\max Z = 5x_1 + 8x_2 \\ &x_1 + x_2 \le 6 \\ &5x_1 + 9x_2 \le 45 \\ &x_2 \ge 4 \\ &x_1, x_2 \ge 0 \ \wedge\ \text{int} \end{aligned}$$

26 الگوریتم شاخه و کران : مسئله دو متغییره



27 الگوریتم شاخه و کران : مسئله دو متغییره



28 گامهای الگوریتم شاخه و کران

1. حل مسئله بدون توجه به محدودیت صحیح بودن متغییرها (RLP)
   - اگر پاسخ RLP عدد صحیح باشد توقف کنید، و گرنه به گام 2 برو.
2. اگر تابع هدف Max باشد، تخصیص $-\infty$ به Z_L
3. شاخه زنی
   - انتخاب یک متغییر غیر صحیح برای شاخه زنی (دو محدودیت جدید)

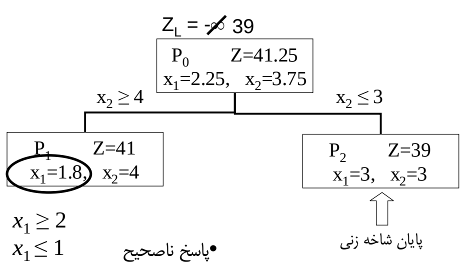
$x_j \ge \|x_j\|+1 \quad , \quad x_j \le \|x_j\|$

4. کران یابی
   - حل مسئله های فرعی گام 3
   - تعیین بهترین مقدار تابع هدف دو مسئله فرعی به عنوان Z_L جدید

29 گامهای الگوریتم شاخه و کران

5. ژرفا یابی (fathomed)
   - الف) همه متغیرها صحیح شوند (پاسخ شدنی صحیح)
   - ب) نبود پاسخ شدنی برای مسئله فرعی شاخه
   - پ) مقدار Z شاخه بدتر از Z_L باشد.
6. آزمون توقف
   - اگر همه شاخه ها به ژرفا برسند، توقف کنید
   - انتخاب مسئله ای که تابع هدف آن با بهترین Z_L برابر است
   - پاسخ این مسئله فرعی، پاسخ بهینه مسئله اصلی است
   - در غیر اینصورت به گام 3 برو

30 الگوریتم شاخه و کران : مسئله دو متغییره



$x_1 \ge 2$

$x_1 \le 1$

- پاسخ ناصحیح
- نرسیدن به ژرفا
- ادامه الگوریتم و شاخه زنی بر روی x_1

31

الگوریتم شاخه و کران : مسئله دو متغییره

- دو مسئله فرعی جدید
- P_3

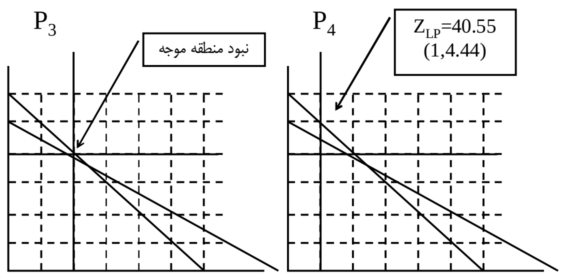
$$\max Z = 5x_1 + 8x_2$$
$$x_1 + x_2 \le 6$$
$$5x_1 + 9x_2 \le 45$$
$$x_2 \ge 4$$
$$x_1 \ge 2$$
$$x_1, x_2 \ge 0 \ \wedge \ \text{int}$$

- P_4

$$\max Z = 5x_1 + 8x_2$$
$$x_1 + x_2 \le 6$$
$$5x_1 + 9x_2 \le 45$$
$$x_2 \ge 4$$
$$x_1 \le 1$$
$$x_1, x_2 \ge 0 \ \wedge \ \text{int}$$

32

الگوریتم شاخه و کران : مسئله دو متغییره



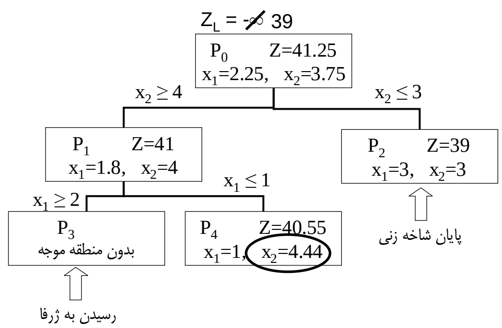
33

الگوریتم شاخه و کران : مسئله دو متغییره

- تفسیر شاخه زنی پیش
  - رسیدن به ژرفا در P_3
  - پاسخ P_4 غیر صحیح، پس Z_L تغییر نمی کند
  - شاخه زنی بر روی x_2 در P_4

34

الگوریتم شاخه و کران : مسئله دو متغییره



35

الگوریتم شاخه و کران : مسئله دو متغییره

- دو مسئله فرعی جدید
- P_5

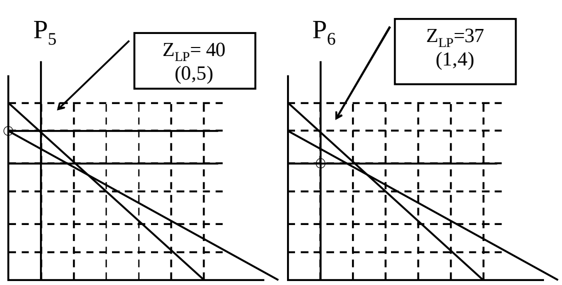
$$\max Z = 5x_1 + 8x_2$$
$$x_1 + x_2 \le 6$$
$$5x_1 + 9x_2 \le 45$$
$$x_2 \ge 4$$
$$x_1 \le 1$$
$$x_2 \ge 5$$
$$x_1, x_2 \ge 0 \ \wedge \ \text{int}$$

- P_6

$$\max Z = 5x_1 + 8x_2$$
$$x_1 + x_2 \le 6$$
$$5x_1 + 9x_2 \le 45$$
$$x_2 \ge 4$$
$$x_1 \le 1$$
$$x_2 \le 4$$
$$x_1, x_2 \ge 0 \ \wedge \ \text{int}$$

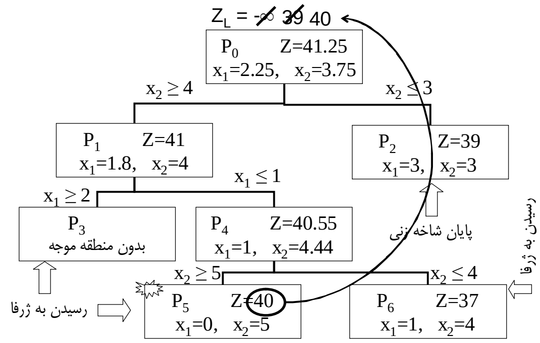
36

الگوریتم شاخه و کران : مسئله دو متغییره



37

الگوریتم شاخه و کران : مسئله دو متغییره



38

تمرین

- مدل زیر را با روش ترسیمی حل کنید:

$$\max Z = 3x_1 + 5x_2$$
$$2x_1 + 4x_2 \leq 24$$
$$x_1 \leq 8$$
$$2x_2 \leq 10$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \quad \wedge \quad \text{int}$$

39

الگوریتم شاخه و کران : مسئله دو متغییره

- روش حل سیمپلکس
  - هر شاخه زنی به معنی یک محدودیت جدید
  - بکارگیری سیمپلکس در حل P_0 و مسائل فرعی
  - بسیار زمانبر
- روش حل تحلیل حساسیت
  - بکارگیری سیمپلکس در حل P_0
  - افزودن محدیت اضافی به مدل
  - بکارگیری روش تحلیل حساسیت (RS) برای حل مسئله فرعی
  - کاهش شگرف زمان حل، همچنان زمانبر در مسائل واقعی

40

الگوریتم شاخه و کران : مسئله دو متغییره

- روش تغییر متغییر
  - هر محدودیت شاخه زنی یک محدودیت کران دار است
  - با تغییر متغییر و بدون نیاز به حل مسائل فرعی جدید، و با ثابت ماندن شمار محدودیتها قابل حل است
- برای محدودیتهایی به شکل $x_j \leq u_j$ در جدول نهایی مسئله پیش به صورت زیر تغییر متغییر می دهیم:

$$x_j = u_j - y_j$$

- برای محدودیتهایی به شکل $x_j \geq l_j$ تغییر متغییر در جدول نهایی مسئله پیش به صورت زیر است:

$$x_j = l_j + y_j$$

41

الگوریتم شاخه و کران : روش تغییر متغییر

- چگونگی انتخاب شاخه زنی
  - قاعده بهترین کران (the best bound rule)
    - انتخاب مسئله ای با بهترین کران (بهترین مقدار تابع هدف)
    - شاید شانس بیشتری برای دستیابی به پاسخ بهین
    - شاید کاهش شمار تکرارهای مورد نیاز
  - قاعده جدیدترین کران (the newest bound rule)
    - انتخاب آخرین مسئله فرعی
    - به شرط اینکه به ژرفا نرسیده باشد

42

الگوریتم شاخه و کران : روش تغییر متغییر : مثال

$$\max Z = 5x_1 + 8x_2$$
$$x_1 + x_2 \leq 6$$
$$5x_1 + 9x_2 \leq 45$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \ \wedge \ \text{int}$$

$P_0 : Z_L = -\infty$

BV	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
Z	0	0	5/4	¾	41.25
x_1	1	0	9/4	-1/4	2.25
x_2	0	1	-5/4	¼	3.75

الگوریتم شاخه و کران : روش تغییر متغییر : مثال

- پاسخ بهینه ولی نا موجه
- شاخه زنی بر روی x_2

$x_2 \geq 4 \qquad x_2 \leq 3$

- تغییر متغیر

$x_2 = 4 + y_2 \qquad x_2 = 3 - y_2$

- اعمال تغییر متغیر در جدول P_0 و حل دو مسئله فرعی با سیمپلکس دوگان (ثانویه)
- ادامه کار تا دستیابی به پاسخ بهینه صحیح

الگوریتم شاخه و کران : روش تغییر متغییر : مثال

$P_0 \quad Z_L = -\infty$
$Z = 41.25 \; x_1 = 2.25, \; x_2 = 3.75$

$x_2 \geq 4 : x_2 = 4 + y_2$

BV	x_1	y_2	s_1	s_2	RHS
Z	0	0	5/4	¾	41.25
x_1	1	0	9/4	-1/4	9/4
y_2	0	1	-5/4	¼	-1/4

$x_2 \leq 3 : x_2 = 3 - y_2$

BV	x_1	y_2	s_1	s_2	RHS
Z	0	0	5/4	¾	41.25
x_1	1	0	9/4	-1/4	9/4
y_2	0	1	5/4	-1/4	-3/4

الگوریتم شاخه و کران : روش تغییر متغییر : مثال

P_2 : رسیدن به ژرفا
تغییر مقدار Z_L به 39

BV	x_1	y_2	s_1	s_2	RHS
Z	0	3	5	0	39
x_1	1	0	1	0	3
s_2	0	-4	-5	1	3

P_2: Z=39, $x_1 = 3$, y_2=0
$x_2 = 3 - y_2 = 3$

P_1 : نرسیدن به ژرفا
شاخه زنی

BV	x_1	y_2	s_1	s_2	RHS
Z	0	1	0	1	41
x_1	1	9/5	0	1/5	9/5
s_1	0	-4/5	1	-1/5	1/5

P_1: Z=41, $x_1 = 9/5$, y_2=0
$x_2 = 4 + y_2 = 4$

$P_3: x_1 \geq 2 \rightarrow x_1 = 2 + y_1 \qquad P_4: x_1 \leq 1 \rightarrow x_1 = 1 - y_1$

الگوریتم شاخه و کران : روش تغییر متغییر : مثال

P_3

$P_3: x_1 \geq 2 \rightarrow x_1 = 2 + y_1$

BV	x_1	y_2	s_1	s_2	RHS
Z	0	1	0	1	41
x_1	1	9/5	0	1/5	9/5
s_1	0	-4/5	1	-1/5	1/5

BV	y_1	y_2	s_1	s_2	RHS
Z	0	1	0	1	41
y_1	1	9/5	0	1/5	-1/5
s_1	0	-4/5	1	-1/5	1/5

- نبود متغییر ورودی
- نبود پاسخ موجه
- دستیابی به ژرفا

الگوریتم شاخه و کران : روش تغییر متغییر : مثال

P_4

$P_4: x_1 \leq 1 \rightarrow x_1 = 1 - y_1$

BV	x_1	y_2	s_1	s_2	RHS
Z	0	1	0	1	41
x_1	1	9/5	0	1/5	9/5
s_1	0	-4/5	1	-1/5	1/5

BV	y_1	y_2	s_1	s_2	RHS
Z	0	1	0	1	41
y_1	1	-9/5	0	-1/5	-4/5
s_1	0	-4/5	1	-1/5	1/5

ادامه حل با شما

الگوریتم شاخه و کران : روش تغییر متغییر : مثال

$P_0 \quad Z_L = -\infty$
$Z = 41.25 \; x_1 = 2.25, \; x_2 = 3.75$

$x_2 \geq 4$:
$P_1 \quad Z_L = -\infty$
$Z = 41 \quad x_1 = 9/5, \; x_2 = 4$

$x_2 \leq 3$:
$P_2 \quad Z_L = 41$
$Z = 41 \quad x_1 = 3, \; x_2 = 3$

$x_1 \geq 2$:
$P_3 \quad Z_L = 41$
نبود پاسخ شدنی (موجه)

$x_1 \leq 1$:
P_4
?

چگونگی عملکرد بهتر الگوریتم

1. رایانه سریعتر
2. بهینه یابی سریعتر برنامه ریزی خطی
3. Z_{LP} کوچکتر
4. Z_{IP} بزرگتر
5. شاخه زنی بهبود یافته
6. برنامه خطی کوچکتر

53

تمرین : با روش شاخه و کران حل کنید.

$$\begin{aligned} &Max\{4x_1+2x_2\}\\ &s.to:\\ &3x_1+2x_3\le 45\\ &4x_1+5x_2\le 25\\ &3x_2\le 30\\ &x_1,x_2\in \mathbf{Z}^+ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &Max\{4x_1+2x_2+5x_3\}\\ &s.to:\\ &x_1+4x_3\le 30\\ &3x_1+x_2+2x_3\le 45\\ &x_1\in \mathbf{R}, x_2,x_3\in \mathbf{Z}^+ \end{aligned}$$

54

الگوریتم صفحه برش
Cutting Plane

55

الگوریتم صفحه برش

- معرفی به وسیله گوموری در 1958
- ویژه مسئله خالص عدد صحیح (PIP)
- بر پایه حل سیمپلکس (دوگان)
- افزودن محدودیت برش
  - برش بخشی از منطقه موجه
  - نبود حل صحیح در منطقه برش خورده
  - صحیح شدن یک متغییر با انجام برش
- هیچ مقدار عدد صحیح و موجه از منطقه بریده نمی شود
- کاهش پی در پی تابع هدف با پاسخ صحیح هر برش

56

الگوریتم صفحه برش

- در پاسخ بهینه LP :

متغییرهای پایه

BV	Z	w_1	…	w_j	…	w_n	v_1	…	v_i	…	v_m	RHS
Z	1	z_1-c_1	…	z_1-c_1	…	z_1-c_1	0	…	0	…	0	Y_0
v_1	0	a_{11}	…	a_{1j}	…	a_{1m}	1	…	0	…	0	b_1
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
v_i	0	a_{i1}	…	a_{ij}	…	a_{in}	0	…	1	…	0	b_i
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
v_m	0	a_{m1}	…	a_{mj}	…	a_{mn}	0	…	0	…	1	b_m

متغییرهای غیرپایه

معادله i ام جدول:

$$a_{i1}w_1+\ldots+a_{ij}w_j+\ldots+a_{in}w_n+v_i=b_i \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}w_j+v_i=b_i \quad (1)$$

57

الگوریتم صفحه برش

- هر عدد a_{ij} و b_i حاصل جمع دو عدد صحیح و کسری است:

$$b_i=\|b_i\|+\lfloor b_i\rfloor \quad , \quad a_{ij}=\|a_{ij}\|+\lfloor a_{ij}\rfloor$$

$$\lfloor b_i\rfloor=b_i-\|b_i\|$$

- مثال:

b_i	$\|b_i\|$	$\lfloor b_i\rfloor$
5 1/4	5	5 ¼ - 5 = 1/4
-3 3/4	-4	-3 ¾ - (-4) = 1/4
-2	-2	-2 – (-2) = 0
-3/5	-1	-3/5 – (-1) = 2/5

بخش کسری همواره نامنفی

$$0\le\lfloor b_i\rfloor<1$$

الگوریتم صفحه برش

- برای انتخاب محدودیت برش گوموری سطری با بزرگترین مقدار کسری سمت راست

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j + v_i = b_i$$

- سطر منبع : سطر انتخابی برای برش گوموری

$$\sum_{j=1}^{n} \left\{ \|a_{ij}\| + \lfloor a_{ij} \rfloor \right\} w_j + v_i = \|b_i\| + \lfloor b_i \rfloor$$

- تعریف برش گوموری

$$-\sum_{j=1}^{n} \lfloor a_{ij} \rfloor w_j + sg_i \le -\lfloor b_i \rfloor$$

الگوریتم صفحه برش : گامها

1. تبدیل ضرایب و مقدار سمت راست محدودیتها به عدد صحیح
   - ضرب کردن محدودیت کوچکترین مضرب مشترک مخرج کسرها
2. حل با روش سیمپلکس در حالت RLP
   - اگر پاسخ بهینه عدد صحیح : توقف
   - اگر پاسخ ناموجه : مسئله بدون پاسخ
   - در غیراینصورت به گام 3
3. انتخاب متغییر پایه با مقدار غیرصحیح و تعریف محدودیت برش
4. افزودن محدودیت برش به جدول نهایی مسئله اصلی
   - حل با روش سیمپلکس ثانویه
   - برو به گام 3

الگوریتم صفحه برش : مثال

- برای مسئله و جدول نهایی زیر، مقدار صحیح متغییرها را تعیین کنید.

$$\min Z = x_1 - 2x_2$$
$$2x_1 + x_2 \le 5$$
$$-4x_1 + 4x_2 \le 5$$
$$x_1, x_2 \ge 0 \ \wedge \ \text{int}$$

$$\left\lfloor 2\frac{1}{2} \right\rfloor \ge \left\lfloor 1\frac{1}{4} \right\rfloor$$

BV	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
Z	1	0	0	1/3	5/12	15/4
x_1	0	1	0	1/3	-1/12	1 ¼
x_2	0	0	1	1/3	1/6	2 ½

منبع

الگوریتم صفحه برش : مثال

- سطر منبع

$$x_2 + \frac{1}{3}s_1 + \frac{1}{6}s_2 = 2\frac{1}{2}$$

V_2 W_1 W_2

- محدودیت برش
  - V در محدودیت برش وجود ندارد

$$-\frac{1}{3}s_1 - \frac{1}{6}s_2 + sg_1 = -\frac{1}{2}$$

- افزودن محدودیت برش به جدول نهایی

الگوریتم صفحه برش : مثال

BV	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	sg_1	RHS
Z	1	0	0	1/3	5/12	0	15/4
x_1	0	1	0	1/3	-1/12	0	1 ¼
x_2	0	0	1	1/3	1/6	0	2 ½
sg_1	0	0	0	-1/3	-1/6	1	-1/2

- جدول غیر موجه است
- بکارگیری سیمپلکس ثانویه

الگوریتم صفحه برش : مثال

- جدول پس از نخستین برش

BV	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	sg_1	RHS
Z	1	0	0	0	1/4	1	13/4
x_1	0	1	0	0	-1/4	1	¾
x_2	0	0	1	0	0	1	2
s_1	0	0	0	1	1/2	-3	3/2

منبع

- پاسخ همچنان ناصحیح
  - برش بر روی x_1
  - محدودیت برش
    - x_1 پایه، s_1 و sg_1 غیرپایه، پس محدودیت برش:

$$x_1 - \frac{1}{4}s_2 + sg_1 = \frac{3}{4}$$

$$-\frac{3}{4}s_2 + sg_2 = -\frac{3}{4}$$

الگوریتم صفحه برش : مثال

- افزودن برش دوم به جدول نهایی پیشین

BV	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	sg_1	sg_2	RHS
Z	1	0	0	0	1/4	1	0	13/4
x_1	0	1	0	0	-1/4	1	0	¾
x_2	0	0	1	0	0	1	0	2
s_1	0	0	0	1	1/2	-3	0	3/2
sg_2	0	0	0	0	-3/4	0	1	-3/4

- جدول ناموجه
  - بکارگیری سیمپلکس ثانویه

الگوریتم صفحه برش : مثال

- جدول پس از برش دوم

BV	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	sg_1	sg_2	RHS
Z	1	0	0	0	0	1	1/3	3
x_1	0	1	0	0	0	1	-1/3	1
x_2	0	0	1	0	0	1	0	2
s_1	0	0	0	1	0	-3	2/3	1
s_2	0	0	0	0	1	0	-4/3	1

- جدول بهینه و موجه صحیح

الگوریتم برش : نمایش ترسیمی

- ترسیم محدودیت برش بر اساس متغییرهای تصمیم (x_1, x_2)
  - در برشها، متغییرهای پایه (V_i) حذف می شوند

$$2x_1 + x_2 \le 5 \;\Rightarrow\; 2x_1 + x_2 + s_1 = 5 \;\Rightarrow\; \boxed{s_1 = 5 - 2x_1 - x_2}$$

$$-4x_1 + 4x_2 \le 5 \;\Rightarrow\; -4x_1 + 4x_2 + s_2 = 5 \;\Rightarrow\; \boxed{s_2 = 5 + 4x_1 - 4x_2}$$

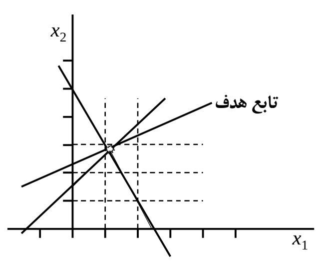
- قرار دادن s_1 و s_2 در محدودیت برش اول

$$-\frac{1}{3}s_1 - \frac{1}{6}s_2 \le -\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; x_2 \le 2$$

- در دومین برش

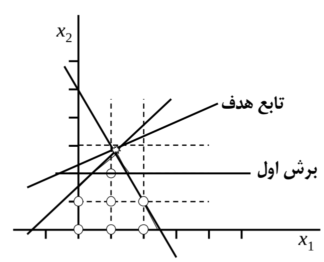
$$-\frac{3}{4}s_2 \le -\frac{3}{4} \;\Rightarrow\; -3x_1 + 3x_2 \le 3$$

الگوریتم برش : نمایش ترسیمی



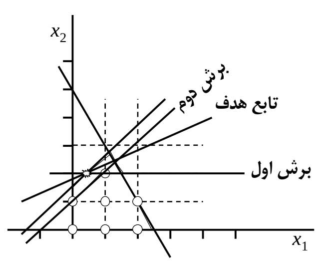
$x_1 = 5/4$
$x_2 = 5/2$
$Z = 15/4$

الگوریتم برش : نمایش ترسیمی



$x_1 = 5/4$
$x_2 = 2$
$Z = 13/4$

الگوریتم برش : نمایش ترسیمی



$x_1 = 1$
$x_2 = 2$
$Z = 3$

تمرین : با الگوریتم برش گوموری حل کنید.

$$
\begin{aligned}
&Max\ \{4x_1 + 2x_2\} \\
&s.to: \\
&3x_1 + 2x_3 \leq 45 \\
&4x_1 + 5x_2 \leq 25 \\
&3x_2 \leq 30 \\
&x_1, x_2 \in \mathbf{Z}^+
\end{aligned}
$$

الگوریتم برش همگی عدد صحیح
All Integer Cut

برش اولیه همگی عدد صحیح

- شیوه برش بر مبنای حل ثانویه
  - همه جدولها تا جدول نهایی هر برش دارای مقدار غیر عدد صحیح
  - به همین شیوه تا پاسخ بهینه عدد صحیح مسئله
  - نبود پاسخ بهینه صحیح در صورت ایست اجرای الگوریتم !!
- برش اولیه همگی عدد صحیح (*a primal all integer cut*)
  - پاسخ همه تکرارها عدد صحیح
- دو شرط برای بکارگیری الگوریتم
  - صحیح بودن همه ضرایب متغییرهای تصمیم (a_{ij}) جدول ابتدایی
  - صحیح بودن مقدار سمت راست (b_i) جدول ابتدایی

برش اولیه همگی عدد صحیح

- اگر b_i مقدار سمت راست، x_k متغییر ورودی، تعیین متغییر خروجی

$$\min\left\{\frac{b_i}{a_{ik}}\right\} = \frac{b_r}{a_{rk}} \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

- چون $a_{ik} \in Z$ پس $a_{ik} \geq 1$
- اگر $a_{rk} = 1$ ، آنگاه بکارگیری رویه معمول سیمپلکس
- اگر $a_{rk} > 1$ ، افزودن برش زیر

$$\sum_j \left\|\frac{a_{rj}}{a_{rk}}\right\| x_j + s_i = \left\|\frac{b_r}{a_{rk}}\right\|$$

متغییر کمکی نامنفی صحیح

متغییر غیر پایه

برش اولیه همگی عدد صحیح

$$\sum_j \left\|\frac{a_{rj}}{a_{rk}}\right\| x_j + s_i = \left\|\frac{b_r}{a_{rk}}\right\|$$

- چون $a_{rk} / a_{rk} = 1$ ، پس عنصر محور یک می شود.
  - در نتیجه، عددهای جدول صحیح می مانند.

برش اولیه همگی عدد صحیح : گامها

1. با جدول ابتدایی که همه عددها صحیح باشد، شروع کنید.
2. اگر جدول بهینه است: توقف کنید.
   - اگر نه به گام 3 بروید.
3. متغییر غیرپایه ورودی را x_k انتخاب کنید.
   - متغییر خروجی را تعیین کنید.
   - اگر $a_{rk}=1$ ادامه روش معمول سیمپلکس
   - وگرنه، معادله برش را تعریف کنید.
   - معادله برش را به جدول نهایی بیافزایید
   - به گام 2 بروید.

79

برش اولیه همگی عدد صحیح : مثال

- مسئله زیر داده شده است:

$\max Z = x_1 + 4x_2$
$5x_1 + 7x_2 \le 21$
$-x_1 + 3x_2 \le 8$
$x_1, x_2 \ge 0 \quad \wedge \quad \text{int}$

- $a_{rk} = 3 > 1$
- بکارگیری برش

BV	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
Z	1	-1	-4	0	0	0
s_1	0	5	7	1	0	21
s_2	0	-1	3	0	1	8

80

برش اولیه همگی عدد صحیح : مثال

- سطر منبع

$-x_1 + 3x_2 + s_2 = 8$

- معادله برش

$-\left\|\frac{1}{3}\right\|x_1 + \left\|\frac{3}{3}\right\|x_2 + s_3 = \left\|\frac{8}{3}\right\| \quad \vee \quad -x_1 + x_2 + s_3 = 2$

- افزودن محدودیت اولین برش

BV	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	RHS
Z	1	-1	-4	0	0	0	0
s_1	0	5	7	1	0	0	21
s_2	0	-1	3	0	1	0	8
s_3	0	-1	1	0	0	1	2

$a_{rk} = 1$

بکارگیری سیمپلکس

81

برش اولیه همگی عدد صحیح : مثال

- در نتیجه داریم:

BV	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	RHS
Z	1	-5	0	0	0	4	8
s_1	0	12	0	1	0	-7	7
s_2	0	2	0	0	1	-3	2
x_2	0	-1	1	0	0	1	2

- $a_{11} = 12$ ، دومین برش به صورت زیر است
- سطر منبع

$12x_1 + s_1 - 7S_3 = 7$

- محدودیت برش

$-\left\|\frac{12}{12}\right\|x_1 + \left\|\frac{-7}{12}\right\|S_3 + S_4 = \left\|\frac{7}{12}\right\|$

$\vee \quad x_1 - S_3 + S_4 = 0$

82

برش اولیه همگی عدد صحیح : مثال

- در نتیجه داریم:

BV	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	RHS
Z	1	-5	0	0	0	4	0	8
s_1	0	12	0	1	0	-7	0	7
s_2	0	2	0	0	1	-3	0	2
x_2	0	-1	1	0	0	1	0	2
s_4	0	1	0	0	0	-1	1	0

83

برش اولیه همگی عدد صحیح : مثال

- در سومین برش داریم:

BV	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	RHS
Z	1	0	0	0	0	-1	5	8
s_1	0	0	0	1	0	5	-12	7
s_2	0	0	0	0	1	-1	-2	2
x_2	0	0	1	0	0	0	1	2
x_1	0	1	0	0	0	-1	1	0

- سطر منبع

$s_1 + 5s_2 - 12s_4 = 7$

- محدودیت برش

$-\left\|\frac{5}{5}\right\|s_3 + \left\|\frac{-12}{5}\right\|S_4 + S_5 = \left\|\frac{7}{5}\right\| \quad \vee \quad S_3 + 3S_4 + S_5 = 1$

84

برش اولیه همگی عدد صحیح : مثال

- با افزودن محدودیت سومین برش داریم:

BV	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	RHS
Z	1	0	0	0	0	-1	5	0	8
s_1	0	0	0	1	0	5	-12	0	7
s_2	0	0	0	0	1	-1	-2	0	2
x_2	0	0	1	0	0	0	1	0	2
x_1	0	1	0	0	0	-1	1	0	0
s_5	0	0	0	0	0	1	-3	1	1

85

برش اولیه همگی عدد صحیح : مثال

- در نتیجه داریم:

BV	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	RHS
Z	1	0	0	0	0	0	2	1	9
s_1	0	0	0	1	0	0	3	-5	2
s_2	0	0	0	0	1	0	-5	1	3
$\boxed{x_2}$	0	0	1	0	0	0	1	0	$\boxed{2}$
$\boxed{x_1}$	0	1	0	0	0	0	-2	1	$\boxed{1}$
s_3	0	0	0	0	0	1	-4	1	1

- پاسخ بهینه و عدد صحیح

86

برش اولیه همگی عدد صحیح : جمع بندی

- هر تکرار، پاسخ عدد صحیح
- با ایست الگوریتم، پاسخ صحیح در هر تکرار

$Z = 0$, $x_1=0$, $x_2=0$

↓

$Z = 8$, $x_1=0$, $x_2=2$

↓

$Z = 8$, $x_1=0$, $x_2=2$

↓

$Z = 8$, $x_1=0$, $x_2=2$

↓

$Z = 9$, $x_1=1$, $x_2=2$

87

برنامه ریزی آمیخته عدد صحیح
Mixed Integer Programming

88

برنامه ریزی آمیخته عدد صحیح

Mixed Integer Programming (MIP)

- برخی و نه همه متغییرها صحیح
- بکارگیری الگوریتم شاخه و کران
  - قابل کاربرد در مسائل خالص و مختلط
  - شاخه زنی فقط بر روی متغییرهای صحیح
- بکارگیری الگوریتم صفحه برشی
  - به وسیله گوموری در 1960
  - بر مبنای مسائل خالص عدد صحیح

89

الگوریتم برش برای مسائل آمیخته

- معادله زیر برای یک LP با مقدار غیر عدد صحیح نوشته شده است:

$$V_i = \{\lVert b_i \rVert + \lfloor b_i \rfloor\} - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} W_j$$

- یا

$$V_i - \lVert b_i \rVert = \lfloor b_i \rfloor - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} W_j$$

  - W_j می تواند دارای مقدار غیر عدد صحیح باشد
  - a_{ij} مقداری مثبت یا منفی
  - برای اینکه V_i صحیح باشد یکی از دو شرط زیر لازم است:

$$V_i \le \lVert b_i \rVert \qquad\qquad V_i \ge \lVert b_i \rVert + 1$$

90

الگوریتم برش برای مسائل آمیخته

- شرط صحیح بودن V_i هم ارز با شرطهای زیر است:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} W_j \ge \lfloor b_i \rfloor \qquad\qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} W_j \le \lfloor b_i \rfloor - 1$$

- حال اگر ضریب متغییر غیر پایه W_j را تفکیک کنیم:

$$a_{ij}^{+} = \begin{cases} a_{ij} & \text{if } a_{ij} \ge 0 \\ 0 & otherwise \end{cases} \qquad\qquad a_{ij}^{-} = \begin{cases} 0 & \text{if } a_{ij} \ge 0 \\ a_{ij} & otherwise \end{cases}$$

- شرط صحیح بودن را می توان بازنویسی کرد:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{+} W_j \ge \lfloor b_i \rfloor \qquad\qquad \left(\frac{\lfloor b_i \rfloor}{\lfloor b_i \rfloor - 1}\right) \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{-} W_j \ge \lfloor b_i \rfloor$$

91

الگوریتم برش برای مسائل آمیخته

- با معرفی متغییر گوموری Sg_i معادله برش آمیخته تعریف می شود:

$$Sg_i - \left\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{+} W_j + \left(\frac{\lfloor b_i \rfloor}{\lfloor b_i \rfloor - 1}\right)\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{-} W_j\right\} = -\lfloor b_i \rfloor$$

- چون $Sg_i \ge 0$ و $W_j = 0$ پس:

$$Sg_i = -\lfloor b_i \rfloor$$

- ادامه حل با سیمپلکس ثانویه

92

الگوریتم برش برای مسائل آمیخته : مثال

- مدل و جدول بهین RLP زیر در دست است. با روش برش آن را حل کنید.

$$\max Z = 7x_1 + 9x_2$$
$$-x_1 + 3x_2 \le 6$$
$$7x_1 + x_2 \le 35$$
$$x_1, x_2 \ge 0, \quad x_1 \text{ int}$$

$$x1 - \frac{1}{22}s1 + \frac{3}{22}s2 = (4 + \frac{1}{2})$$

BV	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
Z	0	0	28/11	15/11	63
x_2	0	1	7/22	1/22	7/2
x_1	1	0	-1/22	3/22	9/2

93

الگوریتم برش برای مسائل آمیخته : مثال

- پس داریم:

$$x1 - \frac{1}{22}s1 + \frac{3}{22}s2 = (4 + \frac{1}{2})$$

$$a_{ij}^{+} = \left\{\frac{3}{22}\right\}, \quad a_{ij}^{-} = \left\{\frac{1}{22}\right\}, \quad \lfloor b_1 \rfloor = \frac{1}{2}$$

- بنابراین، برش آمیخته

$$Sg_1 - \left\{\frac{3}{22}S_2 + \left(\frac{1/2}{(1/2)-1}\right)(-\frac{1}{22})S_1\right\} = -\frac{1}{2}$$

- یا

$$Sg_1 - \frac{1}{22}S_1 - \frac{3}{22}S_2 = -\frac{1}{2}$$

- معادله را به جدول بهین می افزاییم.

94

الگوریتم برش برای مسائل آمیخته : مثال

- پس داریم:

BV	x_1	x_2	s_1	s_2	Sg_1	RHS
Z	0	0	28/11	15/11	0	63
x_2	0	1	7/22	1/22	0	7/2
x_1	1	0	-1/22	3/22	0	-1/2
Sg_1	0	0	1/3	-3/22	1	-1/2

- ادامه با سیمپلکس ثانویه

95

الگوریتم برش برای مسائل آمیخته : مثال

- پس داریم:

BV	x_1	x_2	s_1	s_2	Sg_1	RHS
Z	0	0	23/11	0	10	58
x_2	0	1	10/33	0	-1/3	10/3
x_1	1	0	-1/11	0	1	4
S_2	0	0	1/3	-1	-22/3	11/3

- پاسخ بهینه و موجه
  - x_1 تنها متغییر عدد صحیح

96

تمرین کلاسی

- مدل زیر و جدول نهایی آن داده شده است. با بکارگیری الگوریتم مناسب پاسخ بهینه را، اگر وجود دارد، به دست آورید.

$$\max Z = 4x_1 + 2x_2$$
$$2x_1 + 4x_2 \le 8$$
$$3x_1 + x_2 \le 6$$
$$x_1, x_2 \ge 0, \quad x_1 \text{ int}$$

BV	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
Z	0	0	28/11	15/11	63
x_2	0	1	7/22	1/22	7/2
x_1	1	0	-1/22	3/22	9/2

97

تمرین

- فرمانده زیردریایی یونس نیروی دریایی ایران مایل است بداند که چه تعداد از سه نوع موشک را در زیردریایی بارگذاری نماید. وزن و قدرت جنگی (در مقیاس مقایسه ای 0 تا 20) هر یک از آنها در جدول زیر داده شده است. اگر زیردریایی بتواند حداکثر 26 تن موشک با خود حمل نماید، تعیین نمایید که از هر موشک چه تعداد در زیردریایی بار شود تا توان رزمی آن بیشینه گردد؟

موشک	توان رزمی	وزن (تن)
تندر	10	3
آذرخش	15	4
سمندر	17	5

مروری بر تئوری بهینه سازی

99

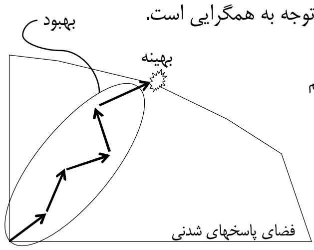
بهبود / بهترین / بهینه !!؟

- بهبود (*improvement*)
  - نسبی و مقایسه ای
- بهترین (*best*)
  - کمّی ولی قضاوتی
- بهینه (*optimum*)
  - اندازه گیری کمّی و تحلیل ریاضی
  - دقیق
  - بهینه سازی (*optimization*)
    1. جستجوی بهبود
    2. برای رسیدن به بهینه

100

از بهبود تا بهینه

- حلهای پی در پی به سوی نقطه بهینه همگرا است.
- فرایند "بهبود" به سوی "هدف بهینه" همگرایی دارد.
- در رویه های بهینه سازی توجه به همگرایی است.
  - آیا به بهینه می رسد؟
  - فراموشی عملکرد الگوریتم



101

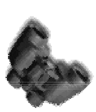
الگوریتمهای بهینه یابی

- مقایسه الگوریتمهای بهینه یابی
  - همگرایی
    - آیا به پاسخ مورد نظر می رسد؟
  - کارآیی
    - با چه تعداد عملیات؟

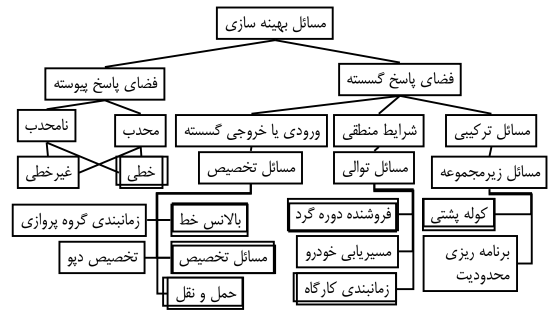
102

الگوریتمهای بهینه یابی

- هدف رویه های جستجو
  1. یافتن پاسخ شدنی
  2. بهینه سازی
     - یافتن پاسخی در همسایگی پاسخ بهینه
  3. شبه بهینه سازی (ابتکاری)
     - بهینه سازی نزدیک : یافتن پاسخی شدنی در فاصله تعیین شده از پاسخ بهینه
     - بهینه سازی تقریبی : یافتن پاسخی شدنی در نزدیکی پاسخ بهینه با احتمال بالا



مسائل بهینه سازی



رویه های حل