

## برنامه‌ریزی شبکه Network Programming

### مسئله شبکه

- ◆ آمیزه‌ای از گره‌ها (nodes) و مسیرهای پیوند دهنده (edges)
- ◆ یک گره مبدأ (source)
- ◆ یک گره مقصد (destination)
- ◆ کاربردهای بیشمار در مدیریت
  - شبکه راه‌ها، راه آهن، خطوط پروازی
  - شبکه لوله کشی آب، گاز، پساب
  - شبکه‌های رایانه‌ای، بوردهای مدار چاپی، قطعات الکترونیکی

2

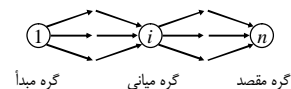
### برخی شبکه‌های فیزیکی

کاربرد	گردها	شاخه‌ها	جریان
سیستم ارتباطی	سونیچینگ، رایانه، تجهیزات مخابراتی، ماهواره	کابل، فیبر نوری، پیوندهای میکروویو	پیامهای صوتی، داده، پیام ویدئویی
سیستم هیدرولیک	ایستگاه پمپاژ، سد، دریاچه	خط لوله	آب، گاز، نفت، روغن هیدرولیک
مدار یکپارچه رایانه	پردازنده، دروازه، رجیستری	سیم	جریان الکتریکی
سیستم مکانیکی	بست	فنر، میل، تیر	گرما، انرژی
سیستم ترابری	تقاطع، فرودگاه، ایستگاه قطار	شاهره، مسیر هوایی، راه آهن	مسافر، پرواز، خودرو، اپراتورها

3

### مسئله شبکه

- ◆ گذر جریان از یک گره  $i$  به یک گره  $j$  از طریق مسیر  $ij$
- ◆ قانون ماندگاری جریان
  - برابری کل جریان ورودی با کل جریان خروجی یک گره میانی
- ◆ مثبت بودن خالص جریان خروجی از گره مبدأ
- ◆ مثبت بودن خالص جریان ورودی به گره مقصد



4

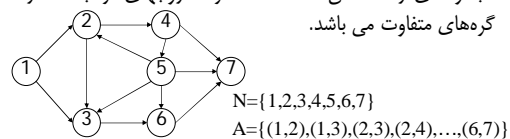
### الگوریتمهای شبکه

- ◆ مسئله کوتاهترین مسیر (SPP)
  - یافتن کوتاهترین مسیر بین مبدأ و مقصد
- ◆ مسئله کوتاهترین درخت پوشش دهنده (SST)
  - یافتن کوتاهترین مسیر پیوند دهنده گره‌ها
- ◆ مسئله بیشینه جریان (MFP)
  - یافتن بیشینه جریان قابل عبور از مسیرهای پیوند دهنده مبدأ و مقصد

5

### گراف و شبکه جهت دار (directed graph / Network)

- ◆ گراف جهت دار  $G = (N, A)$  دارای مجموعه‌ای از  $N$  گره و مجموعه‌ای از  $A$  کمان است که عناصر  $A$  زوجهای مرتب شده از گره‌های متفاوت می باشد.



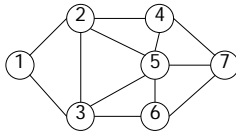
- ◆ شبکه جهت دار، یک گراف جهت دار است که به گره‌ها و یا کمان‌های آن ارزشهای عددی تخصیص داده شده باشد.

6

### گراف و شبکه بدون جهت (undirected graph / Network)

گراف بدون جهت، گرافی است که کمان های آن بدون جهت باشد.

هر کمان پیوند دهنده گره  $i$  و گره  $j$  به صورت  $(i,j)$  یا  $(j,i)$  نوشته می شود.



گراف بدون جهت همانند خیابان دو سویه و گراف جهت دار همانند خیابان یک سویه است.

7

### سر (head) و دم (Tail)

یک کمان جهت دار  $(i,j)$  دارای دو انتهای  $i$  و  $j$  است.

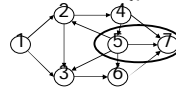
گره  $i$  به عنوان دم و گره  $j$  به عنوان سر  $(i,j)$

کمان  $(i,j)$  از گره  $i$  شروع و در گره  $j$  به پایان می رسد.

کمان  $(i,j)$  برای گره های  $i$  و  $j$ ، رخ داده (incident) است.

کمان  $(i,j)$  کمان بیرون رونده یا خروجی (outgoing) گره  $i$ ، و وارد شونده یا ورودی (incoming) گره  $j$

هر گاه یک کمان  $(i,j) \in A$  می گوئیم گره  $j$  به گروه  $i$  همسایه است.



8

### درجه گره (degree of the node)

درجه ورودی (indegree) گره  $i$ ، شمار کمانهای ورودی به  $i$  است.

درجه خروجی (outdegree) گره  $i$ ، شمار کمانهای خروجی از  $i$  است،  $|A(i)|$

درجه گره  $i$  برابر با جمع درجه ورودی و درجه خروجی است.

جمع درجه ورودی همه گره ها با جمع درجه خروجی همه گره ها برابر است

جمع درجه ورودی همه کمانها برابر با شمار کمانهای شبکه است.

9

### همسایگی / همجواری (adjacency)

لیست کمانهای همسایه (arc adjacency list) یک گره

$A(i)$  مجموعه شاخه های شروع شده از گره  $i$

$$A(i) = \{(i,j) \in A : j \in N\}$$

لیست گره های همسایه  $i$ ،  $A(i)$ ، مجموعه گره های همسایه گره  $i$  است، یعنی: -

$$A(i) = \{j \in N : (i,j) \in A\}$$

در گرافی با  $m$  کمان داریم: -

$$\sum_{i \in N} |A(i)| = m$$

10

### زیرگراف (subgraph)

گراف  $G'=(N',A')$  زیرگراف  $G=(N,A)$  است اگر

$$N' \subseteq N \text{ و } A' \subseteq A$$

گراف  $G'=(N',A')$  زیرگراف  $G=(N,A)$  ایجاد شده به وسیله  $N'$  است، اگر که  $A'$  دربرگیرنده هر کمان از  $A$  باشد که دو انتهای آن در  $N'$  است.

گراف  $G'=(N',A')$  زیرگراف پوشش دهنده  $G=(N,A)$  است اگر که

$$N'=N \text{ و } A' \subseteq A$$

11

### راه رفتن (walk)

یک راه رفتن در یک گراف جهت دار  $G=(N,A)$ ، زیرگرافی از  $G$  است که دربرگیرنده توالی

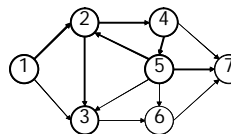
$$i_1-a_1-i_2-a_2-\dots-i_{r-1}-a_{r-1}-i_r$$

خاصیت زیر را برآورد:

به ازای هر  $1 \leq k \leq r-1$

$$a_k=(i_k, i_{k+1}) \in A$$

$$a_k=(i_{k+1}, i_k) \in A$$



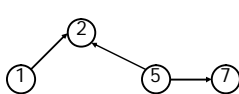
walk1 : 1-2-5-7

walk2 : 1-2-4-5-2-3

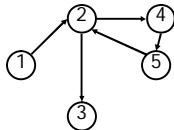
12

## راه رفتن جهت دار (directed walk)

♦ راه رفتن جهت دار، گونه‌ای راه رفتن است که برای هر دو گره پی در پی  $i_k$  و  $i_{k+1}$  در راه رفتن،  $(i_k, i_{k+1}) \in A$ .



not directed

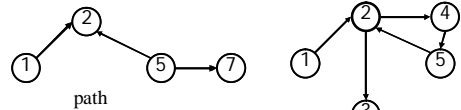


directed

13

## مسیر (path)

♦ مسیر، یک راه رفتن بدون گره تکراری است.



path

♦ کمانهای پیشرو (forward arcs)

■ کمان  $(i, j)$  که مسیر،  $i$  را پیش از  $j$  ببیند

♦ کمانهای پسرو (backward arcs)

■ کمان  $(i, j)$  که مسیر،  $j$  را پیش از  $i$  ببیند

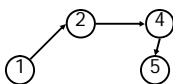
14

## مسیر جهت دار

♦ یک راه رفتن جهت دار بدون تکرار گره‌ها

♦ در مسیر جهت دار، کمان پسرو وجود ندارد.

♦ قابل تعریف در رایانه با تعریف شاخص پیشنیاز  $pred(j)$  برای هر گره  $j$  در مسیر



$$pred(2) = 1$$

$$pred(4) = 2$$

$$pred(5) = 4$$

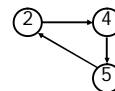
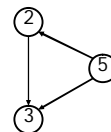
$$pred(1) = 0 \Rightarrow \text{گره 1 شروع مسیر است}$$

15

## چرخه (cycle)

♦ چرخه، یک مسیر  $i_1-i_2-\dots-i_r$  است که دارای کمان  $(i_r, i_1)$  یا  $(i_1, i_r)$  باشد.

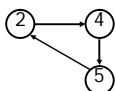
■ پس  $i_1-i_2-\dots-i_r-i_1$  یک چرخه است.



16

## چرخه جهت دار

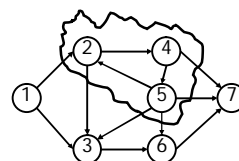
♦ یک مسیر جهت دار  $i_1-i_2-\dots-i_r$  که دارای کمان  $(i_r, i_1)$  باشد.



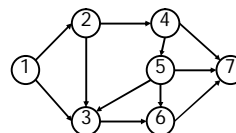
17

## شبکه ناچرخه ای (Acyclic Network)

♦ گراف / شبکه‌ای که هیچگونه چرخه‌ای در آن نباشد.



cyclic graph



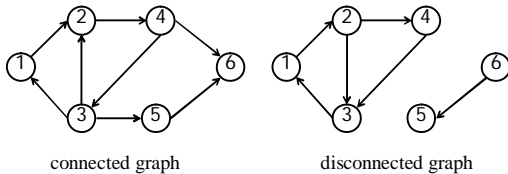
acyclic graph

18

### همبندی (connectivity)

♦ دو گره  $i$  و  $j$  را همبند گویند اگر گراف دارای دست کم یک مسیر از  $i$  به  $j$  باشد.

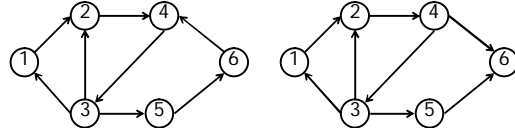
♦ گراف همبند، گرافی است که هر جفت گره آن همبند باشد.



19

### همبندی کامل (strong connectivity)

♦ یک گراف همبند، کاملاً همبند است اگر دارای دست کم یک مسیر جهت دار از هر گره به هر گره دیگر باشد.



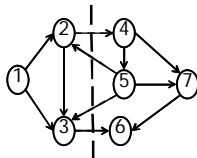
20

### برش (cut)

♦ یک برش، افراز از مجموعه گره‌های  $N$  به دو بخش  $S$  و  $S'$  است.

♦ هر برش، مجموعه‌ای از کمان را تعریف می‌کند که یک انتهای آن در  $S$  و انتهای آن در  $S'$  است.

■ هر برش با  $[S, S']$  نشان داده می‌شود.



$$S = \{1, 2, 3\}$$

$$S' = \{4, 5, 6, 7\}$$

$$cut = \{(2, 4), (5, 2), (5, 3), (3, 6)\}$$

21

### درخت (tree)

♦ یک درخت، گرافی همبند است که هیچ چرخه‌ای نداشته باشد.

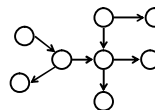
■ یکی از مهمترین مفاهیم تئوریک در نظریه گرافها

♦ سه ویژگی درخت:

■ درختی با  $n$  گره دارای دقیقاً  $n-1$  کمان است.

■ درخت دارای دست کم دو برگ (گره) است.

■ هر دو گره یک درخت با یک مسیر یکتا همبندند.

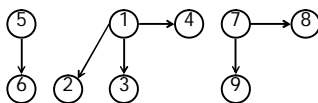


22

### جنگل (forest)

♦ یک جنگل، گرافی است که هیچ چرخه‌ای ندارد.

♦ یک جنگل، مجموعه‌ای از درخت‌هاست.

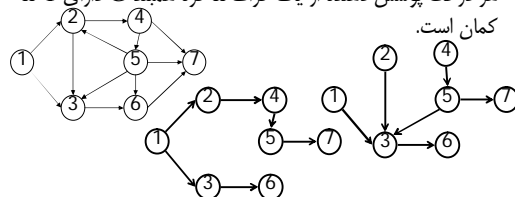


23

### درخت پوششی دهنده (spanning tree)

♦ درخت  $T$  یک درخت پوششی دهنده برای گراف  $G$  است اگر  $T$  یک زیرگراف پوششی برای  $G$  باشد.

♦ هر درخت پوششی دهنده از یک گراف  $n$  گره همبند  $G$  دارای  $n-1$  کمان است.



24

## واژه شناسی

- شبکه (network)
  - گرافی که بر روی آن جریان وجود دارد
- گره چشمه / منبع (source node)
  - گره‌ای در شبکه که همه کمان‌های پیونددار به آن دارای جهت خروجی باشد
  - زاینده جریان در شبکه
- گره چاه (sink node)
  - گره‌ای در شبکه که همه کمان‌های پیونددار به آن دارای جهت ورودی باشد
  - جذب کننده جریان شبکه

27

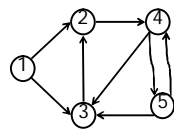
## ماتریس رخداد گره - کمان

بیانگر یک شبکه به شکل ماتریسی  $n \times m$

$n$  ردیف برای گره‌ها

$m$  ستون برای کمانهای  $(i,j)$

عنصر ستون  $(i,j)$  دارای  $+1$  در سطر  $i$  و  $-1$  در ستون  $j$



	(1,2)	(1,3)	(2,4)	(3,2)	(4,3)	(4,5)	(5,3)	(5,4)
1	1	1	0	0	0	0	0	0
2	-1	0	1	-1	0	0	0	0
3	0	-1	0	1	-1	0	-1	0
4	0	0	-1	0	1	1	0	-1
5	0	0	0	0	0	-1	1	1

28

## برنامه ریزی خطی شبکه

- بنداشتهای مورد نیاز
  - میزان جریان در شاخه‌ها تابعی خطی است
  - جریان در شبکه گسسته است
- شکل کلی مدل شبکه
  - اگر  $i$  مقصد باشد
  - جریان از  $i$  به  $j$ :  $x_{ij}$
  - هزینه یک واحد جریان از  $i$  به  $j$ :  $c_{ij}$
  - شمار محدودیتها برابر با شمار گره‌ها
  - شمار متغیرهای تصمیم
  - ضریب متغیرهای تصمیم

$$\min Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} - \sum_{j=1}^n x_{ji} = 1$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} - \sum_{j=1}^n x_{ji} = 0$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} - \sum_{j=1}^n x_{ji} = -1$$

$$x_{ij} \geq 0$$

29

## برنامه ریزی خطی شبکه

$$\min Z = cx$$

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

شکل ماتریسی مدل

$c, x$  و  $b$  بردار

$A$  ماتریس اسپارس (شمار زیادی عنصر صفر)

$$\min Z = [c_{11} \ c_{12} \ \dots \ c_{mn}] \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i=j \\ 0 & \text{if } i \neq j \\ -1 & \text{if } i=j \end{cases} \quad b_i = \begin{cases} 1 & \text{if } i=1 \\ 0 & \text{if } i \neq 1 \end{cases}$$

30

## مسئله کوتاهترین مسیر Shortest Path Problem

31

## مسئله کوتاهترین مسیر : آشنایی

- مهمترین در جریان در شبکه
  - معمولاً فرستادن هر چه تندتر، ارزاتر، مطمئن تر چیزهایی بین دو نقطه مورد نظر
  - به آسانی دارای حل کارآ
  - ساده ترین و پرکاربردترین و سرآغاز بررسی مدل‌های پیچیده تر شبکه
  - معمولاً زیرمسئله‌هایی در حل دیگر مدل‌های شبکه

32

## مسئله کوتاهترین مسیر

روش نشانه گذاری (label-setting Algorithm)

1. گره 1 را با برچسب دائمی  $[0, S]$  نشانه گذاری کنید  
-  $S$  گره پیشین، 0 میزان فاصله از گره 1 تا گره کنونی
2. همه برچسبهای موقت که به طور مستقیم از گره کنونی قابل دسترس هستند را مشخص کنید.
3. برچسبی ضمنی با کمترین مسافت را یافته و آن را دائمی کنید. اگر همه گرهها دارای برچسب دائمی است، به گام 5 برو

آریانزاد، میر بهادرقلی؛ سجادی، سید جعفر؛ تحقیق در عملیات 2؛ انتشارات دانشگاه علم و صنعت؛ 1381

34

## مسئله کوتاهترین مسیر : بنداشتها

- ♦ درازای همه کمانها عدد صحیح است.
- ♦ شبکه در برگیرنده مسیری جهت دار از گره آغاز (s) به هر گره دیگر شبکه است.
- ♦ هیچ چرخه منفی (چرخه جهت دار با درازای منفی) نیست.
- ♦ شبکه جهت دار است.

33

## مسئله کوتاهترین مسیر

♦ اگر  $n$  گره،  $n-1$  گام

♦ فرض  $c_{ij} > 0$

♦ نشانه دائم : کوتاهترین مسیر از گره 1 تا گره کنونی

♦ نشانه موقت : نشانه تخصیصی فرایند حل (به جز گره 1)

♦ نشانه  $[d, s]$

■  $d$  بیانگر فاصله از گره 1 تا گره کنونی

■  $s$  شمار گره پیشین در مسیر

36

## مسئله کوتاهترین مسیر

4. همه گرههایی که به گره جدید دائمی پیوند دارند را یافته و برچسب موقت آن را به صورت زیر تعیین کنید:

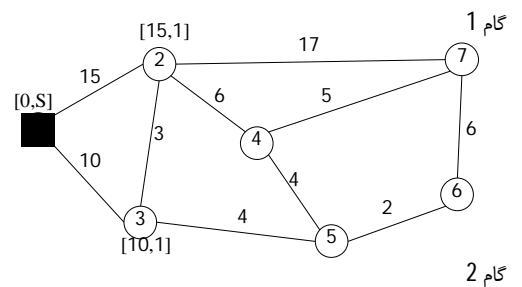
1. اگر همه گرهها دارای برچسب موقت اند مجموع مسافت همه برچسبهای جدید و مسافت گره دائم جدید تا گره مورد نظر را محاسبه کنید. اگر این مجموع از مجموع کنونی برای گره کوچکتر است، مقدار جدید را جایگزین کنید. برچسب را به هنگام کنید. به گام 3 بروید.

2. اگر گره غیردائم برچسب موقت ندارد، یک برچسب موقت بسازید و مقدار آن را با استفاده از گره دائم جدید و با در نظر گرفتن فاصله مستقیم گره مورد بررسی تا آن گره را محاسبه کنید و به گام 3 بروید.

5. دنباله برچسبهای دائمی بیانگر حل بهین مسئله است.  
Dijkstra's Algorithm

35

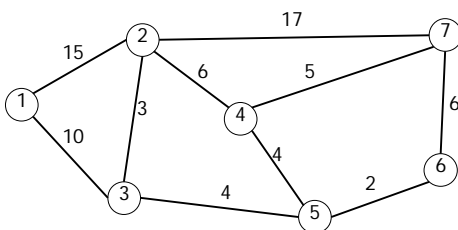
## حل مثال



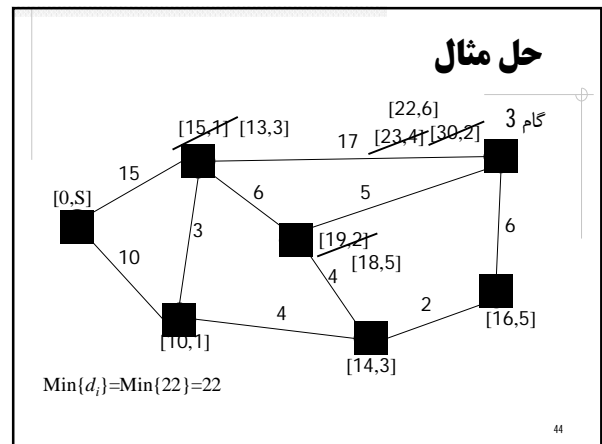
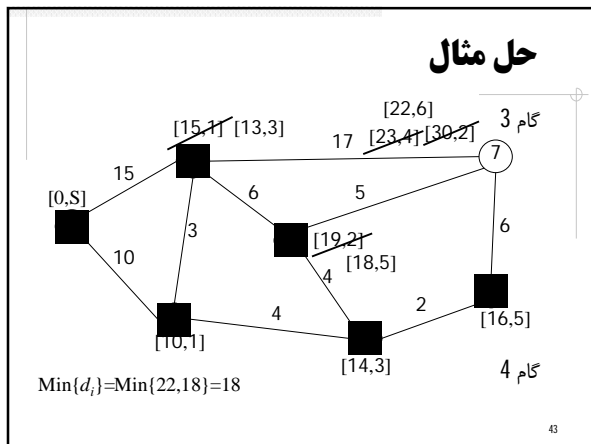
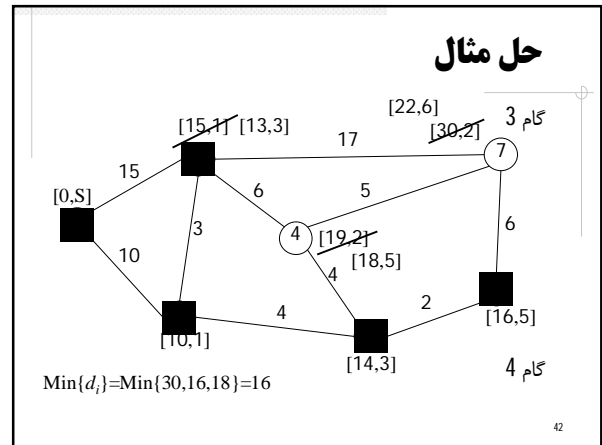
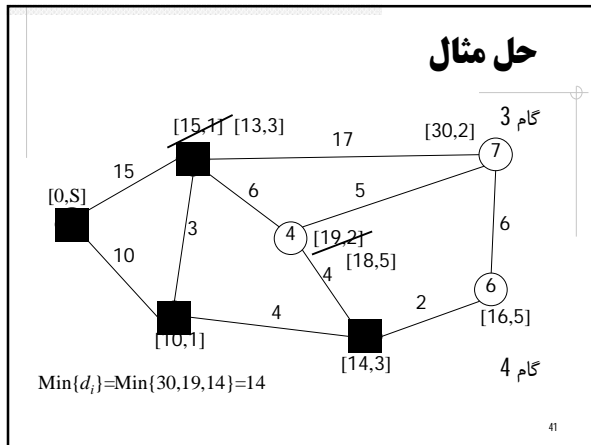
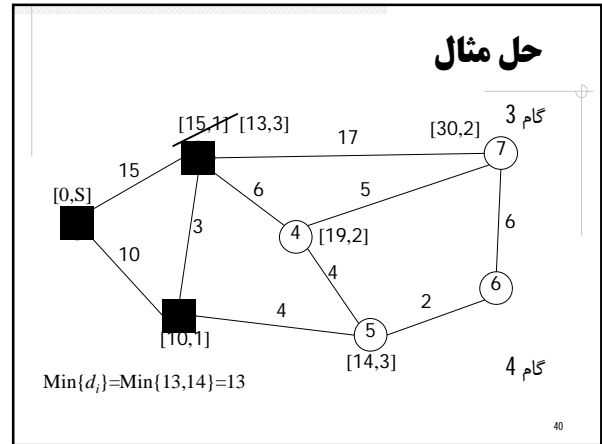
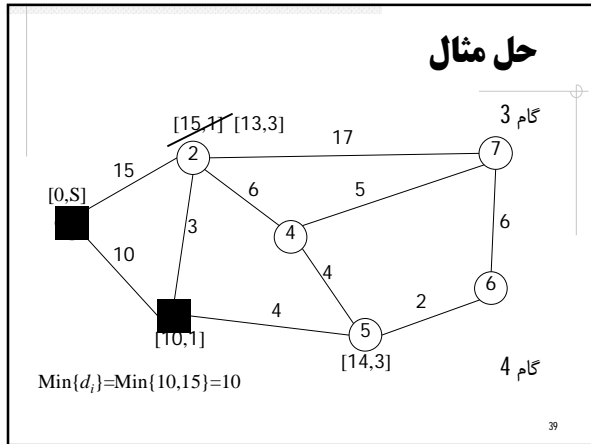
38

## مسئله کوتاهترین مسیر :: مثال

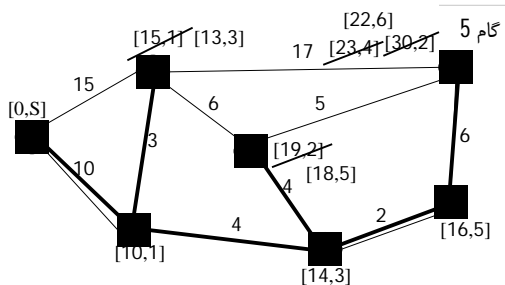
♦ برای شبکه زیر کوتاهترین مسیر از گره 1 تا گره 7 را بیابید:



37

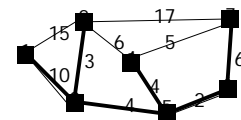


### حل مثال



### حل مثال

مسافت	کوتاهترین مسیر	گره
13	1-3-2	2
10	1-3	3
18	1-3-5-4	4
14	1-3-5	5
16	1-3-5-6	6
22	1-3-5-6-7	7



46

### مثال کاربردی

♦ بایک تازگی خودرویی نو به بهای 12000 تومان خریده است. هزینه نگهداری خودرو در طول سال به سن خودرو در آغاز سال بستگی دارد (جدول 1). برای پیشگیری از هزینه بالای نگهداری خودرو، بایک ممکن است خودرو را دست دوم فروخته و خودرویی نو بخرد. بهای فروش خودرو دست دوم به سن خودرو در زمان فروش بستگی دارد (جدول 2). برای ساده سازی محاسبه ها، فرض کنیم که بهای خرید یک خودرو نو در هر زمان همان 12000 تومان است. هدف بایک کمینه سازی هزینه خالص (بهای فروش دست دوم - هزینه نگهداری + هزینه خرید نو) طی پنجسال آینده است. مسئله را به صورت یک مسئله کوتاهترین مدلسازی کنید.



48

### مثال کاربردی

سن خودرو	بهای فروش دست دوم	سن خودرو	هزینه نگهداری سالیانه
1	9000	0	2000
2	6000	1	4000
3	2000	2	5000
4	1000	3	9000
5	0	4	12000

49

### مسئله کوله پشتی بر روی شبکه

- ♦ دانشجویی (!) خواهان سفر پیاده از بوشهر به زادگاه
- ♦ دارای یک کوله پشتی با گنجایش  $W$  کیلوگرم
- ♦ برداشتن مجموعه ای از بین  $P = \{i, i=1, \dots, p\}$  چیز
- ♦ هر قلم  $i$  دارای وزن  $w_i$  و مطلوبیت  $u_i$
- ♦ هدف بیشینه سازی مطلوبیت در سفر با توجه به محدودیت گنجایش وزنی کوله پشتی



53

### مسئله کوله پشتی بر روی شبکه

- ♦ یک مسئله طولانی ترین مسیر بر روی شبکه ناچرخه ای
- حل یا برنامه ریزی پویا
- ♦ تبدیل به مسئله کوتاهترین مسیر
- شبکه دارای  $p$  لایه متناظر با مجموعه  $P$
- 2 لایه متناظر با گره مبدأ و گره مقصد
- لایه متناظر با قلم  $i$ ام دارای  $W+1$  گره  $i^0, i^1, i^2, \dots, i^W$
- هر گره  $i^k$  بیانگر اقلام 1, 2, ...,  $i$  به میزان  $k$  گنجایش کوله پشتی
- هر گره  $i^k$  دارای حداکثر دو کمان خروجی
  - چشم پوشی از قلم  $i+1$
  - انتخاب قلم  $i+1$  به شرط آنکه  $k + w_{i+1} \leq W$

54



## مسئله کوله پشتی بر روی شبکه

- گره مبدأ دارای دو کمان خروجی
    - $(s, l^0)$  : چشم پوشی از قلم 1
    - $(s, l^{w_1})$  : انتخاب قلم 1 با وزن  $w_1$
  - پیوند دادن همه گره‌های لایه  $p$  به گره  $t$  با کماتهایی با مطلوبیت صفر
  - ◆ هر حل شدنی بیانگر مسیری جهت دار از  $s$  به  $t$
  - ◆ تبدیل طولانی ترین مسیر به کوتاهترین مسیر
- $$C_{ij} = -U_{ij}$$
- اگر طولانی ترین مسیر دارای چرخه ای با طول مثبت باشد، کوتاهترین مسیر همگانشت دارای چرخهای با طول منفی، حل نشدنی با الگوریتم کوتاهترین مسیر

55

## مسئله کوله پشتی بر روی شبکه : مثال

◆ فرض کنید  
 $W = 6$

j	1	2	3	4
uj	40	15	20	10
wj	4	2	3	1

56