

مسئله کوچکترین درخت پوشش دهنده Minimum Spanning Tree

Hillier, Hillier; *Introduction to Management Science: A Modeling and Case Studies Approach with Spreadsheets*; McGraw Hill, 2003.

2

برنامه‌ریزی شبکه Network Programming

کوچکترین مسیر / کوچکترین درخت پوشش دهنده ؟؟!!

1. در SPP کمانها جهت دارند، در MST بدون جهت
 - شاید نامهم از نگاه SPP
 - اما یافتن کوچکترین درخت پوشش دهنده بر روی یک شبکه جهت دار با مسیرهای جهت دار بسیار دشوار
2. تفاوت کامل در هدف
 - در MST هزینه هر کمان فقط یکبار شمارش می شود
 - در SPP شمارش چند باره هزینه برخی کمانها
 - به شمار مسیرهای آغاز شونده از ریشه و گذرنده از کمان

4

مسئله کوچکترین درخت پوشش دهنده

- یک درخت پوشش دهنده T از گراف G یک زیرگراف همبند ناچرخه ای است.
- هر درخت پوشش دهنده در G دارای $n-1$ کمان است.
- بر روی $G=(N, A)$ با n گره و m کمان و طول / هزینه c_{ij} برای هر کمان $(i,j) \in A$
- در پی یافتن کوچکترین درخت پوشش دهنده با کمترین طول / هزینه



3

کوچکترین درخت پوشش دهنده : الگوریتم پریم

1. تعیین $S=0$ و $S'=N$
2. انتخاب یک گره دلخواه. آن را به نزدیکترین گره همسایه پیوند دهید. (این دو گره را همبند (S) گویند، دیگر گره ها ناهمبندند)
3. نزدیکترین گره ناهمبند به فهرست گره های همبند را انتخاب کنید. گره جدید را به فهرست گره های همبند بیافزایید.
 - اگر بیش از یک گره نزدیک وجود داشت، یکی را به دلخواه انتخاب کنید.
4. اگر همه گره ها همبندند ($S=N$)، ایست کنید. در غیراینصورت به گام 3 بروید.

6

مسئله کوچکترین درخت پوشش دهنده : الگوریتم حل

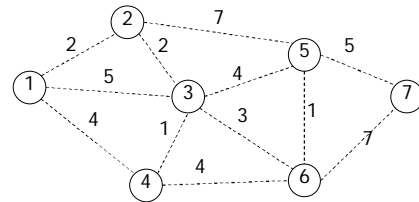
- الگوریتم کروسکال (Kruskal's Algorithm)
- بر پایه شرط بهینگی مسیر
- الگوریتم پریم (Prim's Algorithm)
- بر پایه شرط بهینگی برش
- الگوریتم سلین (Sollin's Algorithm)
- آمیزه دو الگوریتم پیشین



5

الگوریتم پریم : مثال

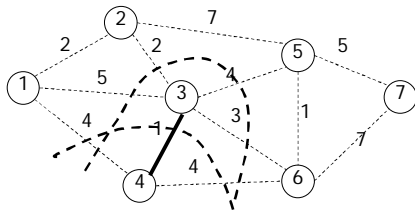
* برای شبکه فیبر نوری زیر بهترین شیوه کابل بندی که هزینه مبادله داده ها بین هر دو نقطه را کمینه نماید بیابید.



7

حل مثال

گام 1



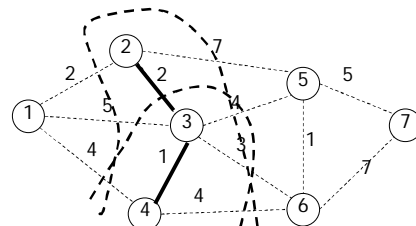
Min Links = {3-4, 5-6} = {1}

گره های ناهمبند	گره های همبند
7, 6, 5, 2, 1	4 و 3

8

حل مثال

گام 2



Links (3) = {3-1, 3-2, 3-5, 3-6} = {5, 2, 4, 3} = 2

Links (4) = {4-1, 4-6} = {4, 4} = 4

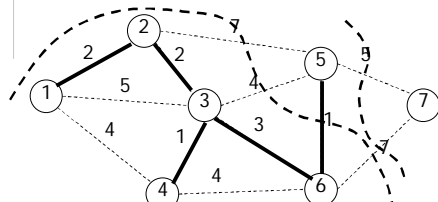
Min Link = {4, 2} = 2

گره های ناهمبند	گره های همبند
7, 6, 5, 1	2, 4, 3

9

حل مثال

گام 2



Links (2) = {2-5} = {7} = 7

Links (3) = {3-5} = {4} = 4

Links (6) = {6-5, 6-7} = {1, 7} = 1

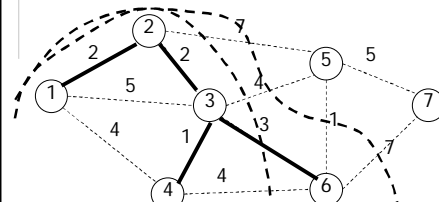
Min Link = {7, 4, 1} = 1

گره های ناهمبند	گره های همبند
7	5, 6, 1, 2, 4, 3

12

حل مثال

گام 2



Links (2) = {2-5} = {7} = 7

Links (3) = {3-5, 3-6} = {4, 3} = 3

Links (4) = {4-6} = {4} = 4

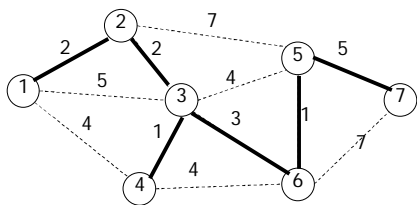
Min Link = {7, 3, 4} = 3

گره های ناهمبند	گره های همبند
7, 5	6, 1, 2, 4, 3

11

حل مثال

گام 3

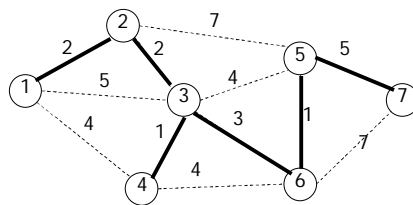


هزینه کل کابل بندی $14 = 5 + 1 + 3 + 1 + 2 + 2$

14

حل مثال

گام 2



Links (5) = {3-7} = {5} = 5

Links (6) = {6-7} = {7} = 7

Min Link = {5,7} = 5

گره های ناهمبند	گره های همبند
پوچ	7, 5, 6, 1, 2, 4, 3

13

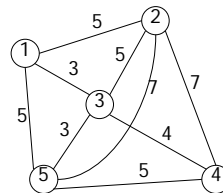
کوچکترین درخت پوشش دهنده : الگوریتم کروسکال

1. مرتب سازی ناکاهشی همه کمانها بر پایه C_{ij}
2. تعریف LIST مجموعه کمانهای انتخاب شده درخت
■ در آغاز پوچ (LIST = \emptyset)
3. بررسی تک تک کمانهای مرتب شده
■ آیا افزودن کمان به LIST، چرخه می سازد؟
• اگر خیر، افزودن کمان به LIST
• اگر آری، کنار گذاشتن کمان
4. اگر $|LIST| = n-1$ ، پایان، وگرنه به 3 برو
5. کمانهای LIST کوچکترین درخت پوشش دهنده است.

16

تمرین

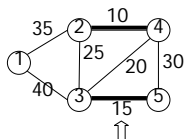
برای شبکه زیر، کوچکترین درخت پوشش دهنده را بیابید:



15

الگوریتم کروسکال : مثال

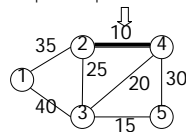
- * $n = 5$
- * $(2,4), \boxed{(3,5)}, (3,4), (2,3), (4,5), (2,1), (3,1)$
- * $LIST = \{(2,4)\}$
- * $|LIST| = 1 < n-1$



18

الگوریتم کروسکال : مثال

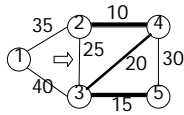
- * $n = 5$
- * $\boxed{(2,4)}, (3,5), (3,4), (2,3), (4,5), (2,1), (3,1)$
- * $LIST = \emptyset$
- * $|LIST| = 0 < n-1$



17

الگوریتم کروسکال : مثال

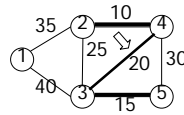
- * $n = 5$
- * $(2,4), (3,5), (3,4), \boxed{(2,3)}, (4,5), (2,1), (3,1)$
- * $LIST = \{(2,4), (3,5), (3,4)\}$
- * $|LIST| = 3 < n-1$



20

الگوریتم کروسکال : مثال

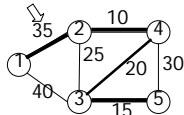
- * $n = 5$
- * $(2,4), (3,5), \boxed{(3,4)}, (2,3), (4,5), (2,1), (3,1)$
- * $LIST = \{(2,4), (3,5)\}$
- * $|LIST| = 2 < n-1$



19

الگوریتم کروسکال : مثال

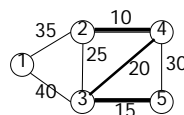
- * $n = 5$
- * $(2,4), (3,5), (3,4), (2,3), (4,5), \boxed{(2,1)}, (3,1)$
- * $LIST = \{(2,4), (3,5), (3,4)\}$
- * $|LIST| = 3 < n-1$



22

الگوریتم کروسکال : مثال

- * $n = 5$
- * $(2,4), (3,5), (3,4), (2,3), \boxed{(4,5)}, (2,1), (3,1)$
- * $LIST = \{(2,4), (3,5), (3,4)\}$
- * $|LIST| = 3 < n-1$



21

کوچکترین درخت پوشش دهنده : الگوریتم سلین

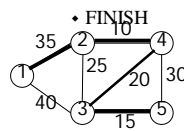
- * نگهداری مجموعه ای از درختان N_1, N_2, \dots
 - درختان مستقل اند
 - هر درخت دارای شماری گره است
- * هر بار کمانهایی با کمترین C_{ij} به یک درخت می افزاید
- * منطق الگوریتم بر پایه دو عملگر
 - یافتن نزدیکترین همسایه هر درخت
 - پیوندزنی درختان



24

الگوریتم کروسکال : مثال

- * $n = 5$
- * $(2,4), (3,5), (3,4), (2,3), (4,5), (2,1), (3,1)$
- * $LIST = \{(2,4), (3,5), (3,4), (2,1)\}$
- * $|LIST| = 4 = n-1$



23

کوچکترین درخت پوشش دهنده : الگوریتم سلین

• پیوندزنی (i_k, j_k) merge

■ درونداها دو گره i_k و j_k

■ اگر دو گره بر روی دو درخت N_p و N_k است

• پیوند زنی دو درخت $N_k \oplus N_p = N_n$

26

کوچکترین درخت پوشش دهنده : الگوریتم سلین

• نزدیکترین همسایه (N_k, i_k, j_k) nearest-neighbor

■ درونداها درخت N_k

• فهرستی از گره های درخت N_k

■ بررسی کمانهای (i_k, j_k) دارای فقط یک گره در N_k

• همه کمانهای دارای یک گره در N_k فهرست می شوند

■ انتخاب کمانی (i_k, j_k) با کمترین هزینه

$$C_{ik,jk} = \min\{c_{ij} : (i,j) \in A, i \in N_k, j \notin N_k\}$$

25

الگوریتم سلین : مثال

• $n = 5$

• $N_1=\{1\}, N_2=\{2\}, N_3=\{3\}, N_4=\{4\}, N_5=\{5\}$

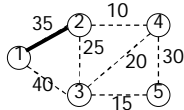
• $T^* = \varnothing$

• $|T^*| = 0 < n-1$

• برای N_1

$$nn(N_1, i_1, j_1) =$$

$$\min\{35, 40\} = 35$$



28

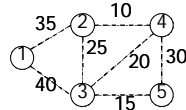
الگوریتم سلین : مثال

• $n = 5$

• $N_1=\{1\}, N_2=\{2\}, N_3=\{3\}, N_4=\{4\}, N_5=\{5\}$

• $T^* = \varnothing$

• $|T^*| = 0 < n-1$



27

الگوریتم سلین : مثال

• $n = 5$

• $N_1=\{1\}, N_2=\{2\}, N_3=\{3\}, N_4=\{4\}, N_5=\{5\}$

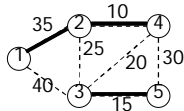
• $T^* = \varnothing$

• $|T^*| = 0 < n-1$

• برای N_3

$$nn(N_3, i_3, j_3) =$$

$$\min\{40, 25, 20, 15\} = 15$$



30

الگوریتم سلین : مثال

• $n = 5$

• $N_1=\{1\}, N_2=\{2\}, N_3=\{3\}, N_4=\{4\}, N_5=\{5\}$

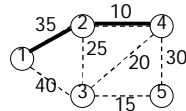
• $T^* = \varnothing$

• $|T^*| = 0 < n-1$

• برای N_2

$$nn(N_2, i_2, j_2) =$$

$$\min\{10, 25, 35\} = 10$$



29

الگوریتم سلین : مثال

* $n = 5$

* $N_1 = \{1\}, N_2 = \{2\}, N_3 = \{3\}, N_4 = \{4\}, N_5 = \{5\}$

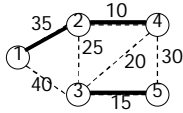
* $T^* = \varnothing$

* $|T^*| = 0 < n-1$

• برای N_5

$nn(N_5, i_5, j_5) =$

$\min\{15, 30\} = 15$



32

الگوریتم سلین : مثال

* $n = 5$

* $N_1 = \{1\}, N_2 = \{2\}, N_3 = \{3\}, N_4 = \{4\}, N_5 = \{5\}$

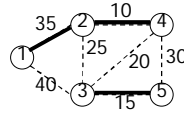
* $T^* = \varnothing$

* $|T^*| = 0 < n-1$

• برای N_4

$nn(N_4, i_4, j_4) =$

$\min\{10, 20, 30\} = 10$



31

الگوریتم سلین : مثال

* $n = 5$

* $N_{12} = \{1,2\}, N_{35} = \{3,5\}, N_4 = \{4\}$

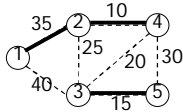
* $T^* = \{(1,2), (3,5)\}$

* $|T^*| = 2 < n-1$

• بررسی پیوندزنی
• برای N_3

• گره های 3 و 5 متعلق به N_5 و N_3

• پیوندزنی N_5 و N_3



34

الگوریتم سلین : مثال

* $n = 5$

* $N_{12} = \{1,2\}, N_3 = \{3\}, N_4 = \{4\}, N_5 = \{5\}$

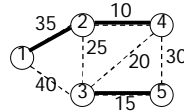
* $T^* = \{(1,2)\}$

* $|T^*| = 1 < n-1$

• بررسی پیوندزنی
• برای N_1

• گره های 2 متعلق به N_2 و N_1

• پیوندزنی N_2 و N_1



33

الگوریتم سلین : مثال

* $n = 5$

* $N_{124} = \{1,2,4\}, N_{35} = \{3,5\}$

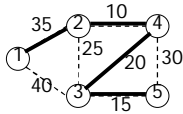
* $T^* = \{(1,2), (3,5), (2,4)\}$

* $|T^*| = 3 < n-1$

• برای N_{124}

$nn(N_{124}, i_3, j_3) =$

$\min\{40, 25, 20, 30\} = 20$



36

الگوریتم سلین : مثال

* $n = 5$

* $N_{124} = \{1,2,4\}, N_{35} = \{3,5\}$

* $T^* = \{(1,2), (3,5), (2,4)\}$

* $|T^*| = 3 < n-1$

• بررسی پیوندزنی
• برای N_4

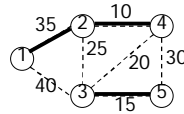
• گره های 2 متعلق به N_4 و N_{12}

• پیوندزنی N_4 و N_{12}

• برای N_{124}

• گره مشترکی با N_{35} ندارد

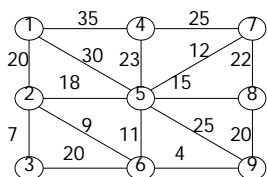
• پایان پیوندزنی



35

تمرین

* با بکارگیری هر سه الگوریتم، کوچکترین درخت پوشش دهنده بر روی شبکه زیر را بیابید. آیا پاسخها یکی است؟



38

الگوریتم سلین : مثال

$$n = 5$$

$$N_{124} = \{1, 2, 4\}, N_{35} = \{3, 5\}$$

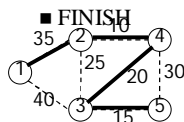
$$T^* = \{(1,2), (3,5), (2,4), (3,4)\}$$

• برای N_{124}

$$|T^*| = 4 = n - 1$$

$$nn(N_{124}, i_3, j_3) =$$

$$\min\{40, 25, 20, 30\} = 20$$



37

مثال

7	6	5	4	3	2	1	
-	-	-	-	5	2	-	1
-	-	-	-	2	-	2	2
-	3	4	1	-	2	5	3
-	4	-	-	1	-	4	4
5	1	-	-	4	7	-	5
7	-	1	4	3	-	-	6
-	7	5	-	-	-	-	7

40

حل MST با بکارگیری ماتریس هزینه

1. تهیه جدولی از هزینه های گره i به گره j که عنصر ij آن هزینه جریان از i به j است (ماتریس C_{ij} ها)
2. یافتن و نشانه دار کردن کمترین C_{ij} در جدول. حذف ستون i و j از جدول. نشانه گذاری کردن سطرها i و j .
3. اگر همه ستونها حذف شده اند، ایست کن. در غیر اینصورت یافتن کمترین C_{ij} در سطرها i نشانه دار به شرط آنکه ستون آن حذف نشده باشد. به گام 2 برو.

39

مثال

Min (3) $C_{ij}=2$

Min (4) $C_{ij}=4$

7	6	5	4	3	2	1	
-	-	-	-	5	2	-	1
-	-	-	-	2	-	2	2
-	3	4	①	-	②	5	3 ←
-	④	-	-	1	-	④	4 ←
5	1	-	-	4	7	-	5
7	-	1	4	3	-	-	6
-	7	5	-	-	-	-	7

42

مثال

Min $C_{ij}=1$

7	6	5	4	3	2	1	
-	-	-	-	5	2	-	1
-	-	-	-	2	-	2	2
-	3	4	①	-	2	5	3 ←
-	4	-	-	①	-	4	4 ←
5	①	-	-	4	7	-	5
7	-	①	4	3	-	-	6
-	7	5	-	-	-	-	7

41

Min (3) $C_{ij}=3$
Min (4) $C_{ij}=4$ Min (2) $C_{ij}=2$

مثال

7	6	5	4	3	2	1	
-	-	-	-	5	2	-	1
-	-	-	-	2	-	(2)	2 ←
-	(3)	4	(1)	-	(2)	5	3 ←
-	(4)	-	-	1	-	(4)	4 ←
5	1	-	-	4	7	-	5
7	-	1	4	3	-	-	6
-	7	5	-	-	-	-	7

44

Min (3) $C_{ij}=2$
Min (4) $C_{ij}=4$

مثال

7	6	5	4	3	2	1	
-	-	-	-	5	2	-	1
-	-	-	-	2	-	2	2 ←
-	3	4	(1)	-	(2)	5	3 ←
-	4	-	-	1	-	4	4 ←
5	1	-	-	4	7	-	5
7	-	1	4	3	-	-	6
-	7	5	-	-	-	-	7

43

Min (3) $C_{ij}=4$
Min (6) $C_{ij}=1$

مثال

7	6	5	4	3	2	1	
-	-	-	-	5	2	-	1 ←
-	-	-	-	2	-	(2)	2 ←
-	(3)	(4)	(1)	-	(2)	5	3 ←
-	4	-	-	1	-	4	4 ←
5	1	-	-	4	7	-	5
7	-	(1)	4	3	-	-	6 ←
-	7	5	-	-	-	-	7

46

Min (3) $C_{ij}=3$
Min (4) $C_{ij}=4$

مثال

7	6	5	4	3	2	1	
-	-	-	-	5	2	-	1 ←
-	-	-	-	2	-	(2)	2 ←
-	(3)	4	(1)	-	(2)	5	3 ←
-	(4)	-	-	1	-	4	4 ←
5	1	-	-	4	7	-	5
7	-	1	4	3	-	-	6
-	7	5	-	-	-	-	7

45

نبود ستون آزاد :: ایست

کل هزینه $14 = 5 + 1 + 3 + 1 + 2 + 2 =$

مثال

7	6	5	4	3	2	1	
-	-	-	-	5	2	-	1 ←
-	-	-	-	2	-	(2)	2 ←
-	(3)	4	(1)	-	(2)	5	3 ←
-	4	-	-	1	-	4	4 ←
(5)	1	-	-	4	7	-	5 ←
7	-	(1)	4	3	-	-	6 ←
-	7	5	-	-	-	-	7

48

Min (5) $C_{ij}=5$
Min (6) $C_{ij}=7$

مثال

7	6	5	4	3	2	1	
-	-	-	-	5	2	-	1 ←
-	-	-	-	2	-	(2)	2 ←
-	(3)	4	(1)	-	(2)	5	3 ←
-	4	-	-	1	-	4	4 ←
(5)	1	-	-	4	7	-	5 ←
(7)	-	(1)	4	3	-	-	6 ←
-	7	5	-	-	-	-	7

47

تمرین

❖ بانک پولجو در پی نصب سامانه ارتباطی بین شعبه ها و ساختمان مرکزی با استفاده از خطوط ویژه تلفن است. نیازی به پیوند مستقیم همه شعبه ها به ساختمان مرکزی نیست بلکه میتوان از ارتباط غیرمستقیم از طریق دیگر شعبه ها استفاده کرد. اما لازم است که هر شعبه در مسیری به ساختمان مرکزی پیوند داشته باشد. هزینه ارتباطی بر روی خط ویژه، 100 تومان به ازای هر متر فاصله است. فاصله برآورد شده خطوط ویژه بین شعبه ها در جدول آمده است.

❖ بانک پولجو مایل است شما تعیین نمایید کدام شعبه ها به طور مستقیم به هم پیوند داشته باشند تا هر شعبه بتواند، مستقیم یا غیر مستقیم، به ساختمان مرکزی پیوند داشته باشد، به شرط آنکه کل هزینه ارتباطی کمینه گردد.

تمرین :: ادامه

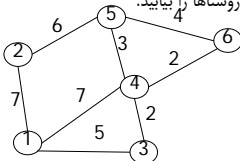
شعبه	فاصله بین دو شعبه بانک پولجو (کیلومتر)					
	مرکزی	شعبه 1	شعبه 2	شعبه 3	شعبه 4	شعبه 5
مرکزی	-	190	70	115	270	160
شعبه 1	190	-	100	110	215	50
شعبه 2	70	100	-	140	120	220
شعبه 3	115	110	140	-	175	80
شعبه 4	270	215	120	175	-	310
شعبه 5	160	50	220	80	310	-

50

49

تمرین

❖ شبکه زیر نشان دهنده، مسیرهای گذر بین شهر دیر (گره 1) و چند روستای آن است. کوتاهترین مسیر از دیر به روستاها را بیابید.



❖ شبکه بالا بیانگر شش برزن و گذرهای شدنی بین آنها در شهر دیر است. اگر شهردار بخواهد بین برزنها خط تراموا راه اندازی کند. کوچکترین شبکه تراموا که این شش برزن را پوشش دهد کدام است؟

52

کوچکترین درخت پوشش دهنده : مدل برنامه ریزی خطی

❖ گراف $G=(N, A)$ در دست است

❖ $S \subseteq N$

❖ مجموعه کمتهایی که دو سر آن در S است.

$$\text{Min } \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}$$

Subject to:

$$\sum_{(i,j) \in A} x_{ij} = n - 1$$

$$\sum_{(i,j) \in A(S)} x_{ij} \leq |S| - 1 \quad \text{for any set of nodes}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}$$

51

مسئله بیشینه جریان

❖ یک شبکه گنجایش دار $G=(N, A)$

■ گنجایش عدد صحیح نامنفی u_{ij} برای هر کمان $(i,j) \in A$

■ فرض اینکه $U = \max \{u_{ij} : (i,j) \in A\}$

❖ مجموعه کمتهای برونرو هر گره i

$$A(i) = \{(i,k) : (i,k) \in A\}$$

❖ شبکه دارای یک گره سرچشمه جریان $(s), (1)$

❖ شبکه دارای یک گره چاه جریان $(n), (t)$

54

مسئله بیشینه جریان

Maximum Flow Problem (MFP)

53

مسئله بیشینه جریان

مسئله یافتن بیشینه کل میزان جریان بر روی شبکه در یک واحد زمان

■ نفت خام، گاز، داده، بار، پول نقد، پیامک، سیگنال، آمد و شد، ...

■ محدودیت گنجایش (u_{ij}) بر روی میزان جریان در هر واحد زمان بر روی هر کمان (x_{ij})

■ قطر لوله، جریان نفت خام را در یک سیستم توزیع محدود می کند

55

مسئله بیشینه جریان

■ ظرفیت جریان برای هر گره ها تعیین نشده است.

■ باید برای هر گره، به جزء سرچشمه و چاه، رابطه توازن وجود داشته باشد:

جریان خروجی از گره = جریان ورودی به گره

■ اگر گره 1 گره سرچشمه و گره n گره چاه باشد، داریم: $Max V$

$$\sum_j x_{ij} = \begin{cases} V & \text{if } i = 1 \\ V & \text{if } i = n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

جریان بر روی کمان ij در واحد زمان

ظرفیت بر روی کمان ij در واحد زمان

جریان خروجی از گره i

جریان ورودی به گره i

$0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}$

56

ظرفیت جریان

$$u_{31} = 0, u_{13} = 6$$

■ برای هر مسیر $k \dots j \dots i$ میزان جریان موجه است اگر:

■ بر روی هیچ کمان مسیر میزان جریان بیش از ظرفیت کمان نباشد

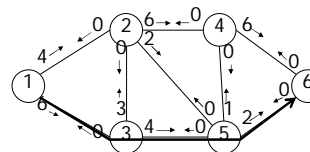
■ به جز گره های 1 و n ، شرط توازن برقرار باشد.

■ در مسیر 1, 3, 5, 6:

■ 1 واحد جریان موجه است.

■ بیشینه جریان مسیر؟

■ u_{56} تنگنای جریان مسیر



57

الگوریتم بیشینه جریان

■ یافتن تنگنای جریان در هر مسیر از 1 تا n

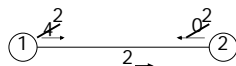
■ بررسی چندین مسیر آزمایشی

■ بازبینی جریانهای آزمایشی برای افزایش کل جریان بر روی شبکه

■ رویه کلی در تخصیص جریان به یک کمان:

■ کاستن از ظرفیت در جهت جریان به میزان جریان تخصیصی

■ افزایش ظرفیت در خلاف جریان به میزان جریان تخصیصی



58

الگوریتم بیشینه جریان

1. مسیری از منبع به مقصد بیابید که دارای ظرفیت مثبت باشد.

• با توجه به همه کمانهای مسیر، کمینه ظرفیتها در جهت جریان باید مثبت باشد.

• اگر چنین مسیری در دسترس نیست، پاسخ بهینه یافته شد.

2. فرض کنید C_{min} بیانگر کمینه ظرفیت همه کمانهای مسیر انتخابی در گام 1 باشد.

• جریان کنونی در شبکه را با فرستادن یک جریان اضافی C_{min} بر روی مسیر انتخابی، افزایش دهید.

3. برای مسیر انتخابی، ظرفیت هر کمان را به میزان C_{min} در جهت جریان کاهش دهید. در جهت خلاف جریان بر روی مسیر ظرفیت کمانها را به میزان C_{min} بیافزایید.

59

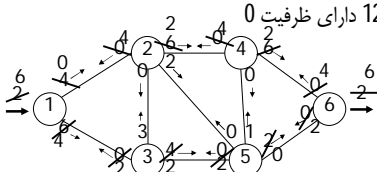
مثال

■ مسیر ۱, ۳, ۵, ۶: $C_{min} = \min\{6, 4, 2\} = 2 \leftarrow$

■ $V = 2$ ، کمان 56 دارای ظرفیت 0

■ مسیر ۱, ۲, ۴, ۶: $C_{min} = \min\{4, 6, 6\} = 4 \leftarrow$

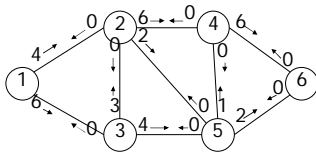
■ $V = 6$ ، کمان 12 دارای ظرفیت 0



60

مثال

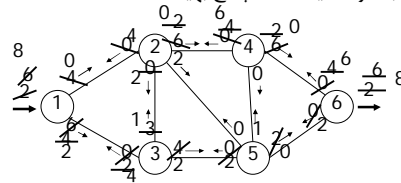
- * $x_{12} = 4, x_{13} = 4, x_{32} = 2, x_{35} = 2, x_{24} = 6$
- * $x_{56} = 2, x_{46} = 6$
- * $V = 8$



62

مثال

- * مسیر $C_{\min} = \min\{4, 3, 2, 2\} = 2 \leftarrow ۱, ۳, ۲, ۴, ۶$
- * $V = 8$, کمان 12, کمان 24, و کمان 46 دارای ظرفیت 0
- * هیچ مسیری به گره 6 نیست \leftarrow پاسخ بهینه است.



61

شبکه باقیمانده (Residual Network)

- * مفهومی کلیدی در الگوریتمهای بیشینه جریان
- * با داشتن جریان X , ظرفیت باقیمانده r_{ij} یک کمان (i, j) , معادل بیشینه جریان مازادی است که می توان با استفاده از کمانهای (i, j) و (j, i) از i به j فرستاد.
- * ظرفیت باقیمانده دارای دو عنصر است:
- $u_{ij} - x_{ij}$ ظرفیت استفاده نشده کمان (i, j)
- جریان کنونی x_{ji} از کمان (j, i)
- * در صورت لغو آن، افزایش جریان از i به j

66

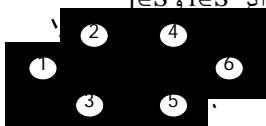
تمرین

- * پوبشر دارای r نفر شهروند R_1, R_2, \dots, R_r است. q تا باشگاه C_1, C_2, \dots, C_q و p تا حزب P_1, P_2, \dots, P_p دارد. هر شهروند عضو حداقل یک باشگاه و دقیقاً یک حزب است. هر باشگاه باید یکی از اعضاها را برای نمایندگی شورای شهر نامزد کند. بنابراین شمار
- اعضاء شورا که متعلق به حزب P_k باشد حداکثر u_k است. آیا ممکن است شورایی داشت که شرط توازن را داشته باشد؟
- * فرض کنید $r=7, q=4, p=3$ باشد.

63

برش چشمه - چاه (s-t cut)

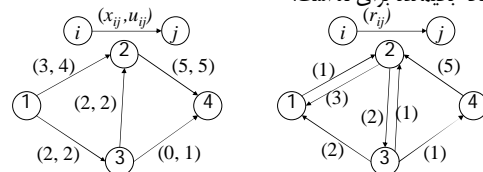
- * افزایش گره ها به دو زیر مجموعه S و $S' = N - S$
- مجموعه ای از کمانها که یک سر آنها در S و سر دیگر در S'
- * برش s-t، مجموعه ای از کمانها که $s \in S$ و $t \in S'$
- * کمان (i, j) یک کمان پیشرو است اگر $i \in S$ و $j \in S'$
- * کمان (i, j) یک کمان پسرو است اگر $i \in S'$ و $j \in S$
- $(S, S') = \{(1, 2), (3, 4), (5, 6)\}$
- $(S', S) = \{(2, 3), (4, 5)\}$



68

شبکه باقیمانده (Residual Network)

- پس: $r_{ij} = u_{ij} - x_{ij} + x_{ji}$
- * شبکه $G(X)$ که دارای کمانهایی با ظرفیت باقیمانده مثبت باشد، شبکه باقیمانده برای X است.



67

ظرفیت باقیمانده برش s-t

ظرفیت باقیمانده $r[S, S']$ یک برش s-t، مجموع ظرفیتهای باقیمانده کمانهای پیشرو در برش است:

$$r[S, S'] = \sum_{(i,j) \in (S, S')} r_{ij}$$

70

ظرفیت یک برش s-t cut

ظرفیت $u[S, S']$ یک s-t cut، مجموع ظرفیت کمانهای پیشرو در برش

$$u[S, S'] = \sum_{(i,j) \in (S, S')} u_{ij}$$

■ حد بالای بیشینه جریان از S به S'

■ کمترین برش (Minimum Cut)

■ برشی دارای کمترین ظرفیت در بین همه برشهای s-t

69

الگوریتم بیشترین جریان – کمترین برش

MFMC :: Max Flow – Min Cut

■ بهترین کاربرد در شبکه های جهت دار

■ برش (cut)

■ افراز شبکه به دو بخش C_1 و C_n

■ افراز C_1 : ابرگره شامل گره 1 و گره های دارای پیوند با گره 1

■ افراز C_n : ابرگره شامل گره n و گره های خارج از C_1

■ ظرفیت برش (cut capacity)

■ مجموع جریان از C_1 به C_n

■ بیشینه جریان شبکه با کمترین ظرفیت برشها برابر است.

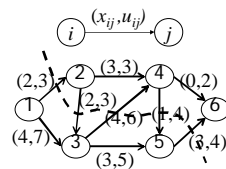
72

تمرین

■ برای برش s-t زیر بیابید:

■ $u[S, S']$

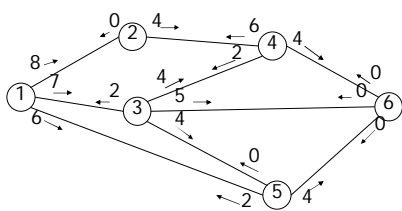
■ $r[S, S']$



71

تمرین

■ برای شبکه زیر با روش MFMC، میزان V را بیابید:

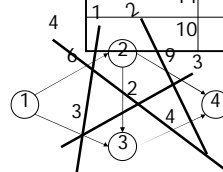


74

الگوریتم بیشترین جریان – کمترین برش

ظرفیت برش	C_n	C_1	برش
9	4 3 2	1	1
13	4	3 2 1	2
14	4 3	2 1	3
10	4 2	3 1	4

$$V = \min\{9, 13, 14, 10\} = 9$$



73