نظریه بازیها
Game Theory

آشنایی

- ساختار مفهومی مدلهای بهینه سازی
  - یک تصمیم گیرنده
  - نبود رقیب
- اما، در جهان پیرامونی، شمار زیاد تصمیم‌گیرندگان
  - بیشتر در رقابت با هم
  - هر رقیب در پی بهترین دستاورد
- موقعیت تصمیم‌گیری رقابتی
  - نظریه بازیها
  - متفاوت با روشهای پیشین، اما، همانند در اصول بنیادین

بازی، بازی، بازی ...

- نظریه بازی (Game Theory) یک روش ریاضی برای تجزیه و تحلیل کنش راهبردی بین یک گروه از بازیگران عقلایی که به شیوه‌ای راهبردی رفتار می‌کنند
- کاربردها
  - مدیریت
  - سیاست
  - سیاست
  - ...

مسئله زندانی (prisoner dilemma)

- دو نفر در دو سلول جداگانه متهم به بزهکاری هستند. البته، مدارک کافی در دست نیست. به متهمان گفته شده است:
  - اگر هیچکدام اعتراف نکنند، هر دو به یک ماه زندان محکوم می‌شوند.
  - اگر هر دو اعتراف کنند، هر دو به شش ماه زندان محکوم می‌شوند.
  - اگر یکی اعتراف کند و دیگری خیر، اعتراف کننده آزاد و آن یکی به 9 ماه زندان محکوم می‌شود.

زندانی 2

		سکوت	اعتراف
زندانی 1	سکوت	-1 , -1	-9 , 0
	اعتراف	0 , -9	-6 , -6

سکه بازی

- هر یک از بازیگران یک سکه دارد.
- دو بازیگر باید همزمان یک روی سکه خود را نشان دهند
- هر دو بازیگر قانون بازی را می‌دانند:
  - اگر هر دو سکه هم رو (هر شیر یا هر دو خط) باشد، بازیگر 2 سکه بازیگر یک را برمی‌دارد.
  - در غیراینصورت، بازیگر 1 سکه بازیگر 2 را برمی‌دارد.

بازیگر 2

		شیر	خط
بازیگر 1	شیر	-1 , 1	1 , -1
	خط	1 , -1	-1 , 1

بازی، بازی، بازی ...

- دست کم دو بازیگر
  - هر بازیگر تهیه نقشه بازی برای برد خود
  - چندین روش ریاضی برای یاری رسانی به تصمیم گیرنده
- گونه‌هایی از موقعیتهای بازی
  - بر مبنای شمار بازیگران (*players*)
    1. دو بازیگر (*two-person game*)
    2. چند بازیگر (*n-person game*)
  - بر مبنای دستاورد بازی (*outcome*)
    1. بازی با مجموع صفر (*zero-sum*)
    2. بازی با مجموع غیر صفر (*non-zero-sum*)

بازی دو نفره با مجموع صفر

- پرکاربردترین
  - مذاکره صنفی سندیکای کارگری با مدیریت
  - دو ارتش در یک رزمایش
  - دو سیاستمدار چالشگر بر سر یک لایحه
  - دو شرکت رقیب بر سر سهم بازار
  - پیمانکاری در حال مذاکره با یک سازمان بر سر قرارداد یک پروژه

بازی دو نفره با مجموع صفر : مثال

- ورزشکاری حرفه ای در حال مذاکره در باره قرارداد خود با باشگاه است. دستاوردهای گوناگون این موقعیت بازی در جدول خلاصه شده است.

راهبردهای ورزشکار	راهبردهای باشگاه		
	A	B	C
1	50	35	30
2	60	40	20

Payoff Table

جدول دریافتی (payoff table)

- بازیگری که در پی بیشینه سازی دریافتی است در سمت چپ،
  - بازیگر آفندگر (offensive player)
- بازیگری که در پی کمینه سازی دریافتی است در بالا،
  - بازیگر پدافندگر (defensive player)
- فرض بر شناخته بودن جدول دریافتی برای هر دو
- راهبرد (strategy) : عملی که بازیگر پی می‌گیرد.
  - چندین راهبرد، ولی گزینش تنها یکی
- هر عنصر جدول، برد آفندگر و باخت پدافندگر (ارزش بازی)
- بازی با مجموع صفر : برابری برد و باخت
- هدف از بازی : انتخاب بهترین راهبرد ممکن برای هر بازیگر
- بهترین راهبرد برای هر بازیگر ← راهبرد بهینه

راهبردهای ورزشکار	راهبردهای باشگاه		
	A	B	C
1	50	35	30
2	60	40	20

یک راهبرد خالص (pure strategy)

- هر بازیکن تنها یک راهبرد بهینه دارد
- ارزش بازی برای هر دو بازیکن یکسان است
- قابل حل با معیار تصمیم کم‌بیشینه (minimax criterion)
  - هر بازیگر بیشینه زیانهای ممکن را کمینه می کند
  - بازیگر آفندگر بیش‌کمینه (maximin) دریافتی را انتخاب می کند
  - بازیگر پدافندگر کم‌بیشینه (minimax) دریافتی را انتخاب می کند
- ورزشکار راهبرد بیش‌کمینه و باشگاه راهبرد کم‌بیشینه
  - هر دو تصمیم همزمان (simultaneous)

بازی دو نفره با مجموع صفر : مثال

- ورزشکار، کمترین دریافتی برای راهبردها را تعیین می کند
- بیشینه این مقادیر، تعیین کننده راهبرد بهینه
  - اگر راهبرد ورزشکار، 1 باشد ← باشگاه راهبرد C
  - اگر راهبرد ورزشکار، 2 باشد ← باشگاه راهبرد C

راهبردهای ورزشکار	راهبردهای باشگاه			
	A	B	C	
1	50	35	30	⇨ Min{50, 35, 30} = 30
2	60	40	20	⇨ Min{60, 40, 20} = 20

⇨ Max{30, 20} = 30

بازی دو نفره با مجموع صفر : مثال

- باشگاه، بیشترین دریافتی برای راهبردها را تعیین می کند
- کمینه این مقادیر، تعیین کننده راهبرد بهینه

راهبردهای ورزشکار	راهبردهای باشگاه		
	A	B	C
1	50	35	30
2	60	40	20

⇨ Max{50, 60} = 60

⇨ Max{35, 40} = 40 ⇨ Min{60, 40, 30} = 30

⇨ Max{30, 20} = 30

راهبرد چیره (dominant strategy)

- راهبردی که در مقایسه با دریافتی همانند برای دیگر راهبردها، دریافتی آن همیشه بهترین دریافتی باشد.
  - برای باشگاه راهبرد C ، بهترین دریافتی به ازای هر راهبرد ورزشکار
- کارآمدترین شیوه تصمیم گیری، یافتن راهبرد چیره
- هر دو بازیگر دارای ارزش بازی یکسان ← بازی راهبرد خالص
- ارزش یکسان ← نقطه تعادل (equilibrium point)
- نقطه تعادل ← نقطه زینی (saddle point)

راهبردهای ورزشکار	راهبردهای باشگاه		
	A	B	$\boxed{C}$
1	50	35	30
2	60	40	20

بازی راهبرد خالص

- پیامد راهبرد کم‌بیشینه، راهبرد بهینه برای هر دو بازیکن
  - تا زمانیکه تصمیم گیری هر دو از همین راهبرد باشد
  - اگر هر دو عقلایی باشند، راهبرد آنان همین است
- اگر نقطه تعادل باشد ← تعیین راهبرد بهینه آسان
- اگر راهبرد خالص نباشد ← بازی راهبرد ترکیبی

راهبرد ترکیبی (mixed strategy)

- انتخاب یک راهبرد بهینه از سوی هر یکی از بازیکنان
- نبود نقطه تعادل با معیار بیش‌کمینه و کم‌بیشینه
- مثال

شرکت 1	شرکت 2		
	A	B	C
1	9	7	2
2	11	8	4
3	4	1	7

درصد افزایش یا کاهش در سهم بازار شرکت 1

راهبرد ترکیبی (mixed strategy)

- برای شرکت 1
  - راهبرد 2 بر راهبرد 1 چیره است
    - حذف راهبرد 1
- برای شرکت 2
  - راهبرد B بر راهبرد A چیره است
    - حذف راهبرد A

شرکت 1	شرکت 2		
	~~A~~	B	C
~~1~~	~~9~~	~~7~~	~~2~~
2	~~11~~	8	4
3	~~4~~	1	7

راهبرد ترکیبی (mixed strategy)

$7 \neq 4$ ← نبود نقطه تعادل

شرکت 1	شرکت 2	
	B	C
2	8	4
3	1	7

راهبرد شرکت 1 maximin
Max{4, 1} = 4 → 2

راهبرد شرکت 2 minimax
Min{8, 7} = 7 → C

راهبرد ترکیبی (mixed strategy)

- نبود نقطه تعادل
- شرکت 1 بیشینه سازی سهم بازار با راهبرد 2
- شرکت 2 کمینه سازی سهم بازار شرکت 1 با راهبرد C
- همینکه شرکت 1 بداند شرکت 2، C را برگزیده، برای افزایش سهم بازار خود، راهبرد 3 را برمی‌گزیند.
- چرخه بی پایان
- راهکار چیست؟
  - دریافتی / زیان مورد انتظار
  - برنامه ریزی خطی

شرکت 1	شرکت 2	
	B	C
2	8	$\boxed{4}$
3	1	7

دریافتی و زیان مورد انتظار

- بر مبنای اصل تعیین راهبردهایی که هر بازیگر می‌تواند دریافتی/زیان مورد انتظار خود را بیشینه/کمینه کند

	شرکت 1	شرکت 2	
		[redacted]	C
p	2	[redacted]	4
1-p	3	[redacted]	7

- بدون توجه به انتخاب رقیب
  - بی تفاوت نسبت به تصمیم رقیب
- محاسبه دریافتی مورد انتظار برای شرکت 1
  - فرض می کند شرکت 2 راهبرد B را برگزیند
  - تصمیم شرکت 1 ، به احتمال p راهبرد 2 و به احتمال -p [redacted]
  - پس اگر شرکت 2 راهبرد B برگزیند، دریافتی مورد انتظار [redacted]

EV(B)= 8p + 1(1-p) = 1 + 7p

دریافتی و زیان مورد انتظار

- حال اگر، شرکت 2 راهبرد C را برگزیند
  - دریافتی مورد انتظار شرکت 1 :

EV(C)= 4p + 7(1-p) = 7 – 3p

- اگر شرکت 1 نسبت به تصمیم شرکت 2 بی‌تفاوت باشد و با توجه بازی با جمع صفر، باید:

EV(B)=EV(C) = 1 + 7p = 7 – 3p   احتمال بکارگیری راهبرد 2

10p = 6 → p = 6/10 = 0.6   درصدی از زمان که راهبرد 2 بکار می رود

- میزان دریافتی مورد انتظار شرکت 1 :

EG(2:B) = 0.6(8) + 0.4(1) = 5.2

دریافتی و زیان مورد انتظار

شرکت 1	شرکت 2 q	1-q
	B	C
2	8	4
3	1	7

- اینک برای شرکت 2:
  - اگر شرکت 1 راهبرد 2 را برگزیند

EV(2)= 8q + 4(1-q) = 4 + 4q

  - اگر شرکت 1 راهبرد 3 را برگزیند

EV(3)= 1q + 7(1-q) = 7 – 6q

- پس داریم:

EV(2)=EV(3)= 4 + 4q = 7 – 6q

10q = 3 → q = 3/10 = 0.3

EG(1:2) = 0.3(8) + 0.7(4) = 5.2

دریافتی و زیان مورد انتظار

- جمع بندی
  - شرکت 1:
    - راهبرد 2 ← 60% مواقع
    - راهبرد 3 ← 40% مواقع
  - شرکت 2:
    - راهبرد B ← 30% مواقع
    - راهبرد C ← 70% مواقع
  - نقطه تعادل 5.2 برای هر دو بازیگر
  - پیامد بهتر برای هر بازیگر نسبت به دریافتی کم‌بیشینه

حل ترسیمی

- ارزش بازی زیر را به دست آورید:
  - جدول برد بازیگر سطر (A)
- حذف b2 در برابر b1

	b1	b2	b3	b4
a1	1	~~2~~	-3	7
a2	2	~~5~~	4	-6

	b1	b3	b4
a1	1	-3	7
a2	2	4	-6

- MaxiMin = -3
- MiniMax = 2
- ارزش بازی : -3 < v < 2
  - راهبرد ترکیبی

	b1	b3	b4	min
a1	1	-3	7	-3
a2	2	4	-6	-6
max	2	4	7	

حل ترسیمی

- با بکارگیری وزنهای راهبردهای بازیگر A ، خواهیم داشت:

$Eb1(A) = 1p_1 + 2p_2$

$Eb2(A) = -3p_1 + 4p_2$

$Eb3(A) = 7p_1 - 6p_2$

	b1	b3	b4	min
a1	1	-3	7	-3
a2	2	4	-6	-6
max	2	4	7	

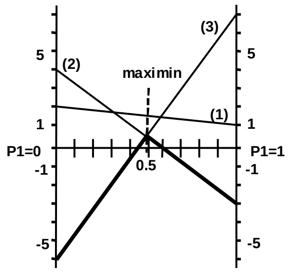
حل ترسیمی

◈ با بکارگیری وزنهای راهبردهای بازیگر A ، خواهیم داشت:

$Eb1(A) = 1p_1 + 2p_2$ (1)

$Eb2(A) = -3p_1 + 4p_2$ (2)

$Eb3(A) = 7p_1 - 6p_2$ (3)



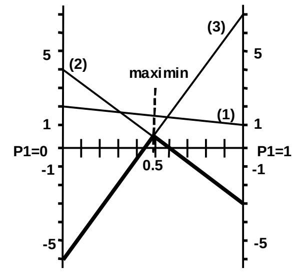
حل ترسیمی

In MaxiMin : (2) = (3)

$$\begin{cases} -3p1+4p2=7p1-6p2 \\ p1+p2=1 \end{cases}$$

$$p1=p2=0.5$$

$$V^* = -3p1+4p2 = -3(0.5)+4(0.5) = 0.5$$



تمرین

◈ جدول زیر باخت بازیگر A است. ارزش بازی را با روش ترسیمی به دست آورید:

	b1	b2	b3
a1	1	2	5
a2	8	4	7
a3	-1	5	-6

تمرین :: حل

◈ جدول زیر باخت بازیگر A است. ارزش بازی را با روش ترسیمی به دست آورید:

◈ نخست یافتن ارزش بازی

	b1	b2	b3
a1	1	2	5
a2	8	4	7
a3	-1	5	-6

	b1	b2	b3	max
a1	1	2	5	5
a2	8	4	7	8
a3	-1	5	-6	5
min	-1	2	-6	

Minimax = 5

Maximin = 2

بنابراین : $2 < V < 5$

تمرین :: حل

	b1	b2	b3
a1	1	2	5
~~a2~~	~~8~~	~~4~~	~~7~~
a3	-1	5	-6

		b1	b2	b3
p1	a1	1	2	5
p3	a3	-1	5	-6

◈ جدول زیر باخت بازیگر A است.

◈a2 در برابر a1 حذف می‌شود.

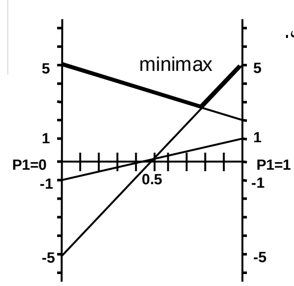
Eb1(A) = p1 – p3

Eb2(A) = 2p1 + 5p3

Eb3(A) = 5p1 - 6p3

p3 = 1 – p1

تمرین :: حل



◈ جدول زیر باخت بازیگر A است.

◈a2 در برابر a1 حذف می‌شود.

Eb1(A) = p1 – p3

Eb2(A) = 2p1 + 5p3

Eb3(A) = 5p1 - 6p3

$$\begin{cases} 2p1+5p3=5p1-6p3 \\ p1+p3=1 \end{cases}$$

$$p_1^* = 11/14, p_3^* = 3/14, p_2^* = 0$$

$$V^* = 2.643$$

حل به کمک برنامه ریزی خطی

- دشواری حل با افزایش اندازه مسئله،
- شیوه پیشین ناتوان از حل مسائلی با بیش از دو راهبرد،
- فرض: جدول دریافتی بازی پیش
- هر راهبرد بازیگر ورزشکار x_1 و x_2
- فقط یک راهبرد $\sum_{i=1}^{2} x_1 + x_2 = 1, \quad x_i \geq 0$
- بازیگر دوم انتظار دریافت

راهبردهای ورزشکار	راهبردهای باشگاه		
	A	B	C
1	50	35	30
2	60	40	20

$$50x_1 + 60x_2$$
$$35x_1 + 40x_2$$
$$30x_1 + 20x_2$$

حل به کمک برنامه ریزی خطی

- فرض برای هر x_i، v کمترین مقدار دریافتی باشد، پس
- در این مثال v مثبت است
  - چون همه درایه ها مثبت
- اگر یکی از درایه ها منفی باشد
- عدد ثابت k به همه افزوده شود
  - k برابر با قدر مطلق کوچکترین عنصر ماتریس 1+

$$50x_1 + 60x_2 \geq v$$
$$35x_1 + 40x_2 \geq v$$
$$30x_1 + 20x_2 \geq v$$

حل به کمک برنامه ریزی خطی

- حال اگر همه راهبردها را بر v تقسیم کنیم، داریم:

$$\frac{x_1}{v} \geq 0, \frac{x_2}{v} \geq 0$$

- پس

$$50\frac{x_1}{v} + 60\frac{x_2}{v} \geq 1$$
$$35\frac{x_1}{v} + 40\frac{x_2}{v} \geq 1$$
$$30\frac{x_1}{v} + 20\frac{x_2}{v} \geq 1$$

$$\frac{x_1}{v} + \frac{x_2}{v} = \frac{1}{v}$$

- بازیگر ورزشکار در پی بیشینه سازی v (کمینه سازی $1/v$)

حل به کمک برنامه ریزی خطی

- حال برای سادگی، تغییر متغییر می دهیم:

$$y_1 = \frac{x_1}{v}, \quad y_2 = \frac{x_2}{v}, \quad Z = \frac{1}{v}$$

- پس، داریم:

$$\min Z = y_1 + y_2$$
$$50y_1 + 60y_2 \geq 1$$
$$35y_1 + 40y_2 \geq 1$$
$$30y_1 + 20y_2 \geq 1$$
$$y_1, y_2 \geq 0$$

مدل کلی برنامه ریزی خطی

- اگر جدول دریافتی در دست باشد:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

دریافتی از راهبرد دوم بازیگر سطر و راهبرد نخست بازیگر ستون

- اگر یک درایه منفی باشد، $a_{ij} + k, k = |\min\{a_{ij}\}| + 1$

مدل کلی برنامه ریزی خطی

- اگر $x_1, x_2, \ldots, x_n$ درصد توزیع احتمال بازیگر سطر
- اگر $y_1, y_2, \ldots, y_m$ درصد توزیع احتمال بازیگر ستون
- اگر v ، کمترین دستاورد بازیگر سطر باشد، داریم:

$$a_{11}\frac{x_1}{v} + a_{21}\frac{x_2}{v} + \cdots + a_{m1}\frac{x_m}{v} \geq 1$$
$$a_{12}\frac{x_1}{v} + a_{22}\frac{x_2}{v} + \cdots + a_{m2}\frac{x_m}{v} \geq 1$$
$$\vdots$$
$$a_{1n}\frac{x_1}{v} + a_{2n}\frac{x_2}{v} + \cdots + a_{mn}\frac{x_m}{v} \geq 1$$
$$\frac{x_1}{v} + \frac{x_2}{v} + \cdots + \frac{x_m}{v} = \frac{1}{v}$$

مدل کلی برنامه ریزی خطی

◈اگر $y_i = x_i / v$ ، آنگاه

$$\max v = \min \frac{1}{v} = \min\{y_1, \cdots, y_n\}$$

◈پس داریم:

$$\max Z = y_1 + y_2 + \cdots + y_m$$
$$a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + \cdots + a_{m1} y_m \geq 1$$
$$\vdots$$
$$a_{1n} y_1 + a_{2n} y_2 + \cdots + a_{mn} y_m \geq 1$$
$$y_1, y_2, \cdots, y_m \geq 0$$

مثال

◈جدول دریافتی یک بازی در دست است:

	1	2	3
1	3	-1	-3
2	-3	3	-1
3	-4	-3	3

◈برخی درایه‌ها منفی

- k = |-4| + 1 = 5

◈پس برای بازیگر ستون داریم:

	1	2	3
1	8	4	2
2	2	8	4
3	1	2	8

$$\max Z = y_1 + y_2 + y_3$$
$$8y_1 + 4y_2 + 2y_3 \leq 1$$
$$2y_1 + 8y_2 + 4y_3 \leq 1$$
$$y_1 + 2y_2 + 8y_3 \leq 1$$
$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

مثال

◈جدول نهایی

مقادیر بهینه x_i

BV	Z	y_1	y_2	y_3	s_1	s_2	s_3	RHS
Z	1	0	0	0	5/49	11/196	1/14	45/196
y_1	0	1	0	0	-1/7	-1/14	0	1/14
y_2	0	0	1	0	-3/98	31/196	-1/14	11/196
y_3	0	0	0	1	-1/98	-3/98	1/7	5/49

مقادیر بهینه y_j

$$v^* = \frac{1}{Z} - k = \frac{196}{45} - 5 = \frac{-29}{45}$$

$$q_1^* = \frac{y_1}{Z} = \frac{1/14}{45/196} = \frac{14}{45}$$

$$q_2^* = \frac{11}{45}$$

$$q_3^* = \frac{20}{45}$$

تمرین

◈ جدول زیر بیانگر برد بازیگر A است. ارزش بازی را به دست آورید:

	b1	B2	b3
a1	1	3	3
a2	4	0	4
a3	5	5	-1

	b1	B2	b3	min
a1	1	3	3	1
a2	4	0	4	0
a3	5	5	-1	-1
max	5	5	3	

◈ maximin = 1

◈ minimax = 3

◈ نبود نقطه زینی

◈ افزودن K = 2

تمرین :: حل

◈ مدل LP برای بازیگر B

		q1	q2	q3
		b1	B2	b3
p1	a1	1	3	3
p2	a2	4	0	4
p3	a3	5	5	-1

$$Max\ \ Z = y_1 + y_2 + y_3$$
$$y_1 + 3y_2 + 3y_3 \leq 1$$
$$4y_1 + 0y_2 + 4y_3 \leq 1$$
$$5y_1 + 5y_2 - y_3 \leq 1$$
$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

تمرین :: حل

مقادیر بهینه x_i

	y1	y2	y3	s1	s2	s3	RHS
Z	0	0	0	0.214	0.107	0.071	0.392
y3	0	0	1	0.178	0.089	-0.071	0.16
y1	1	0	0	-0.178	0.161	0.107	0.089
y2	0	1	0	0.213	-0.143	0.072	0.143

تمرین :: حل

- پاسخ نهایی

$$V^* = 1/Z = 1/0.392$$

$$q_1^* = \frac{y_1^*}{Z} = \frac{0.089}{0.392} = 0.227$$ مدت زمانی که بازیگر B راهبرد b1 را برمی‌گزیند

$$q_2^* = \frac{y_2^*}{Z} = \frac{0.149}{0.392} = 0.365$$ مدت زمانی که بازیگر B راهبرد b2 را برمی‌گزیند

$$q_3^* = \frac{y_3^*}{Z} = \frac{0.16}{0.392} = 0.408$$ مدت زمانی که بازیگر B راهبرد b3 را برمی‌گزیند

$$x_1^* = 0.214, x_2^* = 0.107, x_3^* 0.071$$

$$p_1^* = \frac{0.214}{0.392} = 0.546, p_2^* = 0.273, p_3^* = 0.181$$