

برنامه ریزی آرمانی

Goal Programming

1

آشنایی

◆ بیش از یک هدف

- هدفهای گوناگون (Multi-Objective)
 - با میزان اهمیت گوناگون، یا همسان (Priority matters!)
 - گاهی، مقایسه اهمیت هدفها دشوار (difficult comparison)
- ◆ آمیزه پرتقال و سیب



2

آشنایی

- ◆ مدلسازی هدفهای چندگانه، دانشی جوان ولی پرکاربرد
- ◆ بسیار سودمند در پاسخ به موقعیتهای واقعی در بخش عمومی
- افزایش ارزشآوری / پیامدهای زیست محیطی
 - افزایش تولید انرژی / ریسک انفجار هسته ای
 - افزایش نرخ اشتغال تخت / کاهش انتظار برای عمل قلب
 - افزایش سرانه مصرف ماهی / کاهش انباشت زنده
 - بکارگیری فناوریها نوین / کاهش اشتغال
 - انتخابات الکترونیکی / کاهش اعتماد مردم



3

آشنایی

- ◆ شناخته شده به نام چند هدفی (چند معیاری) (MODM / MADM)
- تئوری مطلوبیت چند ویژگی
 - یافتن حل مطلوب پارتو با برنامه ریزی خطی چند معیاره
 - روشهای جستجوی ابتکاری
 - برنامه ریزی آرمانی

4

برنامه ریزی آرمانی

◆ چارلز و کوپر (A. Charnes & W. W. Cooper)

◆ بر مبنای گسترش برنامه ریزی خطی

- مسئله خطی
- برآوردن هدفهای گوناگون تا حد ممکن!
- در نظر گرفتن محدودیتهای خطی
- اجازه ورود سیستم اولویت بندی برای هدفهای متعارض
- اجازه ورود مفهوم رضایتمندی (satisfying) در برنامه ریزی خطی

Management Models and Industrial Applications of Linear Programming, John Wiley, 1961.

5

آشنایی

◆ هدفهای بلند مدت یک برنامه ریز

1. بیشینه سازی سودهای تخفیفی
2. بیشینه سازی سهم بازار در پایان دوره برنامه ریزی
3. بیشینه سازی سرمایه فیزیکی در پایان دوره برنامه ریزی

◆ ترکیب یا مقایسه مستقیم آنها، ناشدنی

◆ هدفهای متعارض

- نتیجه بهتر برای یکی با قربانی سازی دیگری
- هزینه کمتر در تبلیغات (بازاریابی کمتر) ← اجازه ساخت کارخانه ای دیگر (سرمایه فیزیکی بیشتر) و خرید مواد خام بیشتر (تولید بیشتر)

6

مثال

مدلی برای طراحی برنامه آموزشی در دست است

- x_1 ساعت کار در کلاس
- x_2 ساعت کار در آزمایشگاه
- محدودیت زیر در دست است

$$x_1 + x_2 \leq 100$$

دو گونه محدودیت در برنامه ریزی آرمانی

1. محدودیت سیستم (محدودیت سخت)
 - نباید نادیده گرفته شود
2. محدودیت هدف (محدودیت نرم)
 - شاید نادیده گرفته شود

7

مثال

هر ساعت کار در کلاس

- 12 دقیقه تجربه در گروه
- 19 دقیقه تجربه فردی دانشجو

هر ساعت کار در آزمایشگاه

- 29 دقیقه تجربه در گروه
- 11 دقیقه تجربه فردی دانشجو

کل مدت زمان برنامه $6000 = 60 * 100$ دقیقه

8

مثال

هدفهای طراح

1. هر دانشجو باید تا حد ممکن 25% مدت زمان برنامه را در گروه کار کند
2. هر دانشجو باید یک سوم مدت، تجربه فردی داشته باشد

مدل ریاضی شرطهای طراح

$$12x_1 + 29x_2 \approx 1500 \quad \text{کار در گروه}$$

$$19x_1 + 11x_2 \approx 2000 \quad \text{کار فردی}$$

- نماد \approx به معنی تا حد ممکن
- آیا می توان سیاستی تعریف کرد که دو شرط را به صورت = برآورده کند و محدودیت سیستم را رعایت نماید؟
- چنین حلی وجود ندارد

9

گام نخست

- یک تابع هدف در مدل برنامه ریزی خطی

- در دنیای واقعی، بیش از یک هدف

در ارتباط با چیزهایی غیر از سود یا هزینه
مثلا کمینه سازی آلودگی و بیشینه سازی سود

- برنامه ریزی آرمانی

Goal Programming

10

برنامه ریزی آرمانی

بسیار همانند برنامه ریزی خطی

مدل برنامه ریزی آرمانی، کاملاً خطی است.

ولی دارای بیش از یک هدف

مدلسازی برنامه ریزی آرمانی همانند برنامه ریزی خطی

قابل حل با روش ترسیمی (بستگی دارد!!)

حل با گونه اصلاح شده روش سیمپلکس



11

مدلسازی

$$\text{Max } Z = 4x_1 + 5x_2$$

سود کل

s.to:

$$x_1 + 2x_2 \leq 40$$

ساعت نیروی کار

$$4x_1 + 3x_2 \leq 120$$

کیلوگرم خاک رس

$$x_1, x_2 \geq 0$$

شمار تولید لیوان : x_1

شمار تولید کاسه : x_2

12

مدلسازی: چه باید کرد؟

❖ هدفهای گوناگون (علاوه بر بیشینه سازی سود) به ترتیب اولویت تعریف میگردند.

❖ هر هدف (objective) را یک آرمان (goal) گویند.

❖ شرکت می خواهد تا حد ممکن به دستیابی به هر یک از آرمانها نزدیک شود.

❖ برای مدلسازی، نخست باید محدودیتهای مدل برنامه ریزی خطی را به آرمانهایی تبدیل کرد.

14

هدفهای دیگر به ترتیب اولویت

1. برای پیشگیری از بیکاری، نباید کمتر از 40 ساعت نیروی کار در روز بکار گرفته شود.
2. دستیابی به سود راضی کننده 160 واحد پول در روز
3. برای پیشگیری از خشک شدن گل رس، شرکت نمیخواهد روزانه بیش از 120 کیلو گرم گل رس نگهداری کند.
4. برای کاهش سربار، کمینه سازی اضافه کاری

13

آرمان نیروی کار

فرض کنید:

$$x_1 = 5, \quad x_2 = 10$$

$$(5) + 2(10) + d_1^- - d_1^+ = 40$$

$$25 + d_1^- - d_1^+ = 40$$

$$d_1^- = 40 - 25 = 15$$

$$d_1^+ = 0$$

میزان کم کاری

میزان اضافه کاری

دست کم یکی از متغیرهای انحراف باید برابر با صفر باشد.

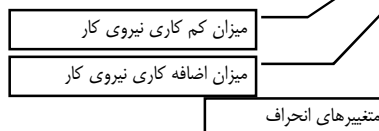
16

آرمان نیروی کار

نخستین آرمان شرکت پیشگیری از کم بهره دهی نیروی کار است (بکارگیری کمتر از 40 ساعت در روز)

بازنویسی محدودیت برنامه ریزی خطی:

$$x_1 + 2x_2 \leq 40 \rightarrow x_1 + 2x_2 + d_1^- - d_1^+ = 40$$



15

آرمان سودآوری

آرمان شرکت به دست آوردن 160 واحد پول سود است.

در مدل برنامه ریزی خطی:

$$Z = 4x_1 + 5x_2$$

فرموله کردن به صورت محدودیت آرمانی:

$$4x_1 + 5x_2 + d_2^- - d_2^+ = 160$$

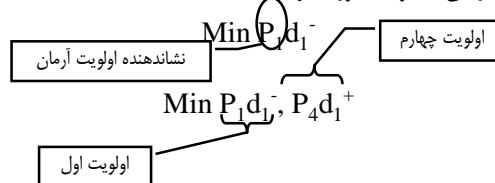
$$\text{Min } P_1 d_1^-, P_2 d_2^-, P_4 d_1^+$$

18

نمایش آرمان نیروی کار

❖ نیاز به تعریف گونه مناسبی از تابع هدف

❖ تابع هدف در برنامه ریزی آرمانی، کمینه سازی انحراف از سطح آرمانی محدودیت مورد نظر است.



17

مدل کامل برنامه ریزی آرمانی

با افزودن سومین آرمان، مدل به صورت زیر کامل میشود:

$$\text{Min } P_1 d_1^-, P_2 d_2^-, P_3 d_3^+, P_4 d_1^+$$

s.to:

$$x_1 + 2x_2 + d_1^- - d_1^+ = 40$$

$$4x_1 + 5x_2 + d_2^- - d_2^+ = 160$$

$$4x_1 + 3x_2 + d_3^- - d_3^+ = 120$$

$$x_1, x_2, d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+, d_3^-, d_3^+ \geq 0$$

تابع هدف جمع جبری نیست زیرا مقیاس هر آرمان متفاوت است.

تابع هدف برنامه ریزی آرمانی فقط بیانگر انحراف از آرمان است که باید تک تک کمینه گردد.

19

شکلهای دیگر محدودیت آرمانی

فرض کنید چهارمین آرمان، داشتن حداکثر 10 ساعت اضافه کار (به جای کمینه سازی آن) باشد.

محدودیت آرمانی نیروی کار به صورت زیر بود:

$$x_1 + 2x_2 + d_1^- - d_1^+ = 40$$

چهارمین آرمان نیازمند داشتن محدودیت آرمانی زیر است:

$$d_1^+ + d_4^- - d_4^+ = 10$$

پس تابع هدف چنین است:

$$\text{Min } P_1 d_1^-, P_2 d_2^-, P_3 d_3^+, P_4 d_4^+$$

20

یک آرمان دیگر

آرمان پنجم: تولید کاسه و لیوان به ترتیب بیشتر از 30 و 20 نباشد (احتمالا جای کافی در انبار نیست).

$$x_1 \leq 30$$

$$x_2 \leq 20$$

پس:

$$x_1 + d_5^- = 30$$

$$x_2 + d_6^- = 20$$

متغیری برای انحراف مثبت تعریف نمی شود، زیرا امکان تولید بیش از 30 و 20 عدد وجود ندارد.

21

یک آرمان دیگر

هدف شرکت، دستیابی به سطوح تولیدی بیان شده (30 و 20) است.

انحراف منفی از هدف بایستی کمینه گردد.

هدف تولیدی لیوان مهمتر است، چونکه سود بیشتری ایجاد می کند.

سود هر فرآورده بیانگر درجه اهمیت آن فرآورده است.

سطح اولویت هر دو فرآورده یکی است (اولویت پنجم).

22

درجه اهمیت آرمان

دو متغیر انحراف منفی باید در تابع هدف کمینه شوند.

$$\text{Min } P_1 d_1^-, P_2 d_2^-, P_3 d_3^+, P_4 d_4^+, 4P_5 d_5^-, 5P_6 d_6^-$$

درجه اهمیت متناسب با سود

کمینه سازی وزن دار (weighted minimization)

23

کمینه سازی وزن دار

$$\text{Min } P_1 d_1^-, P_2 d_2^-, P_3 d_3^+, P_4 d_4^+, 4P_5 d_5^-, 5P_6 d_6^-$$

s.to:

$$x_1 + 2x_2 + d_1^- - d_1^+ = 40$$

$$4x_1 + 5x_2 + d_2^- - d_2^+ = 160$$

$$4x_1 + 3x_2 + d_3^- - d_3^+ = 120$$

$$d_1^+ + d_4^- - d_4^+ = 10$$

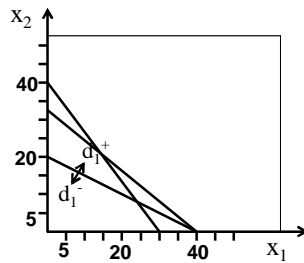
$$x_1 + d_5^- - d_5^+ = 30$$

$$x_2 + d_6^- - d_6^+ = 20$$

$$x_1, x_2, d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+, d_3^-, d_3^+, d_4^-, d_4^+, d_5^-, d_5^+, d_6^-, d_6^+ \geq 0$$

24

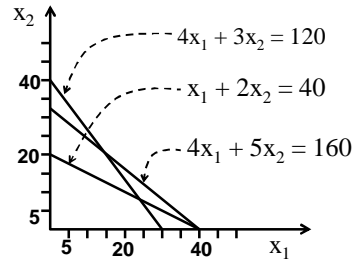
اثر نخستین آرمان



چون هدف کمینه کردن انحراف منفی است پس فضای زیر خط (منطقه انحراف منفی) حذف می گردد.

26

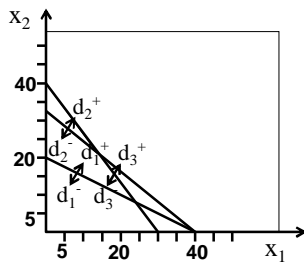
تفسیر گرافیکی برنامه ریزی آرمانی



تلاش برای دستیابی به آرمانهای تابع هدف به ترتیب اولویت

25

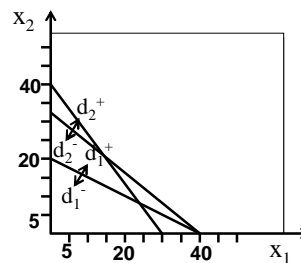
اثر سومین آرمان



چون هدف کمینه کردن انحراف مثبت است پس فضای بالای خط (منطقه انحراف مثبت) حذف می گردد.

28

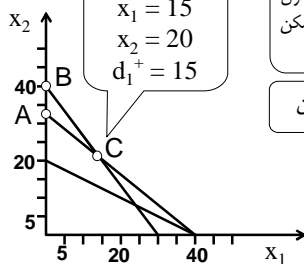
اثر دومین آرمان



چون هدف کمینه کردن انحراف منفی است پس فضای زیر خط (منطقه انحراف منفی) حذف می گردد.

27

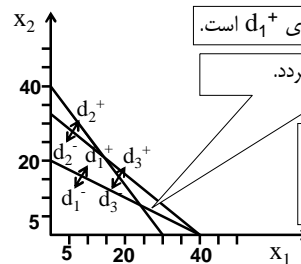
راضی کننده ترین پاسخ مدل



باید پاسخی را یافت که اولویت اول و دوم را برآورده کند و تا حد ممکن به چهارمین آرمان دست یابد! راضی کننده ترین و نه بهین

30

اثر چهارمین آرمان



این آرمان به معنی کمینه سازی d_1^+ است. باید سطح بالای خط حذف گردد.

حذف سطح بالای خط در تضاد با آرمان نخست و دوم است

29

مدل برنامه ریزی آرمانی

$$\text{Min } P_1 d_1^-, P_2 d_2^-, P_3 d_3^+, P_4 d_1^+$$

s.to:

$$x_1 + 2x_2 + d_1^- - d_1^+ = 40$$

$$4x_1 + 5x_2 + d_2^- - d_2^+ = 160$$

$$4x_1 + 3x_2 + d_3^- - d_3^+ = 120$$

$$x_1, x_2, d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+, d_3^-, d_3^+ \geq 0$$

32

روش سیمپلکس بازبینی شده Revised Simplex Method

31

جدول اولیه سیمپلکس بازبینی شده

- در سطر بالا ارزش سطح اولویت متغیرها قرار میگیرد.
- پاسخ موجه اولیه، همیشه، متغیرهای انحراف منفی (d_i^-) به ازای هر یک از محدودیتهاست.
- ارزش سطح اولویت برای هر یک از متغیرهای انحراف منفی در ستون (P_j) قرار میگیرد.
- مقادیر سطرها، همان ضرایب و مقدار سمت راست محدودیتهاست.

34

جدول سیمپلکس بازبینی شده

Pj	BV		P1	P2		P4		P3		RHS
		x1	x2	d ₁ ⁻	d ₂ ⁻	d ₃ ⁻	d ₁ ⁺	d ₂ ⁺	d ₃ ⁺	
P1	d ₁ ⁻	1	2	1	0	0	-1	0	0	40
P2	d ₂ ⁻	4	5	0	1	0	0	-1	0	160
	d ₃ ⁻	4	3	0	0	1	0	0	-1	120
P4		0	0	0	0	0	-P4	0	0	0
P3		0	0	0	0	0	0	-P3	0	0
Zj-Pj	P2	4P2	5P2	0	0	0	0	-P2	0	160P2
	P1	P1	2P1	0	0	0	-P1	0	0	40P1

33

ستون محور

- ستون محور، ستونی است که در سطر اولویت نخست $Z_1 - P_1$ دارای بزرگترین مقدار مثبت باشد.
- اگر در سطر اولویت نخست، عدد مثبت نیست، سطر اولویت دوم بررسی شود.
- برآوردن اولویت نخست، اولویت دوم، ...
- در جدول پیش $2P_1$ بزرگترین عدد مثبت در سطر اولویت نخست است، پس متغیر ورودی، x_1 می باشد.

36

روش سیمپلکس بازبینی شده

- برای یافتن مقدار سطر ($Z_j - P_j$) برای هر ستون:
- (1) ستون P_j در بردار زیر متغیر ستون ضرب میشود.
- بردار حاصل، بردار Z_j است.
- (2) حال ضریب سطر P_j برای متغیر ستون از بردار Z_j کم می شود.
- (3) مقادیر $Z_j - P_j$ براساس اولویت در سطر مربوطه نوشته می شود.

35

سطر محور

♦ سطر محور، سطری است که دارای کوچکترین خارج قسمت مثبت از تقسیم مقادیر سمت راست بر عناصر ستون محور، باشد. (مانند سیمپلکس)

♦ در جدول پیش d_1^- متغیر خروجی است.

37

گامهای سیمپلکس بازبینی شده

1. تهیه جدول اولیه با استفاده از متغیرهای انحراف منفی به عنوان متغیرهای پایه ای آغازین. محاسبه سطرهای $Z_j - P_j$
2. تعیین ستون محور (بزرگترین مقدار مثبت در بالاترین سطح اولویت که هنوز به طور کامل برآورده نشده است).
3. تعیین سطر محور (کوچکترین خارج قسمت ناشی از تقسیم مقادیر سمت راست بر عناصر مثبت ستون محور).

38

گامهای سیمپلکس بازبینی شده

4. محاسبه عناصر سطر جدید محور:

$$\text{مقادیر سطر محور، محور، جدول پیشین} \\ \text{عناصر محور} = \text{سطر محور، محور، جدول پیشین}$$

5. محاسبه عناصر سطرهای جدول جدید:

$$\text{عناصر سطر، محور، جدول پیشین} = \text{عناصر سطر، محور، جدول پیشین} \\ \left[\begin{array}{c} \text{عناصر متناظر در سطر} \\ \text{محور، محور، جدول پیشین} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \text{ضریب متناظر} \\ \text{در ستون محور} \end{array} \right]$$

39

گامهای سیمپلکس بازبینی شده

6. محاسبه سطرهای جدید $Z_j - P_j$
7. آیا پاسخ کنونی راضی کننده ترین پاسخ است؟ (بررسی سطرهای اولویت)
 - اگر هیچ عدد مثبتی در هیچیک از سطوح اولویت نباشد، یا
 - عدد مثبتی وجود دارد که در سطح بالاتر اولویت همان ستون، منفی است
 - پاسخ کنونی، راضی کننده ترین پاسخ است.
 - در غیر اینصورت به گام 2 برگردید.

40

حل مثال: جدول تکرار صفر

Pj	BV		P1	P2		P4		P3		RHS
		x1	d ₁ ⁻	d ₂ ⁻	d ₃ ⁻	d ₁ ⁺	d ₂ ⁺	d ₃ ⁺		
	x ₂	1/2	1	1/2	0	0	-1/2	0	0	20
P2	d ₂ ⁻	3/2	0	-5/2	1	0	5/2	-1	0	60
	d ₃ ⁻	5/2	0	-3/2	0	1	3/2	0	-1	60
Zj-Pj										
	P4	0	0	0	0	-P4	0	0	0	0
	P3	0	0	0	0	0	0	-P3	0	0
	P2	4P2	0	0	0	0	-P2	0	160P2	
	P1	P1	0	0	0	-P1	0	0	40P1	

41

حل مثال: جدول تکرار یک

Pj	BV		P1	P2		P4		P3		RHS
		x1	x2	d ₁ ⁻	d ₂ ⁻	d ₃ ⁻	d ₁ ⁺	d ₂ ⁺	d ₃ ⁺	
	x ₂	1/2	1	1/2	0	0	-1/2	0	0	20
P2	d ₂ ⁻	3/2	0	-5/2	1	0	5/2	-1	0	60
	d ₃ ⁻	5/2	0	-3/2	0	1	3/2	0	-1	60
Zj-Pj										

42

حل مثال: جدول تکرار یک

Pj	BV			P1	P2		P4		P3	
		x1	x2	d1 ⁻	d2 ⁻	d3 ⁻	d1 ⁺	d2 ⁺	d3 ⁺	
	x2	1/2	1	1/2	0	0	-1/2	0	0	20
P2	d2 ⁻	3/2	0	-3/2	1	0	5/2	-1	0	60
	d3 ⁻	5/2	0	-5/2	0	1	3/2	0	-1	60
Zj-Pj	P4	0								
	P3	0								
	P2	3P2/2								
	P1	0								

44

حل مثال: جدول تکرار یک

Pj	BV			P1	P2		P4		P3		RHS
		x1	x2	d1 ⁻	d2 ⁻	d3 ⁻	d1 ⁺	d2 ⁺	d3 ⁺		
	x2	1/2	1	1/2	0	0	-1/2	0	0	20	
P2	d2 ⁻	3/2	0	-5/2	1	0	5/2	-1	0	60	
	d3 ⁻	5/2	0	-3/2	0	1	3/2	0	-1	60	
Zj-Pj											

43

حل مثال: جدول تکرار یک

Pj	BV			P1	P2		P4		P3		RHS
		x1	x2	d1 ⁻	d2 ⁻	d3 ⁻	d1 ⁺	d2 ⁺	d3 ⁺		
	x2	1/2	1	1/2	0	0	-1/2	0	0	20	
	d3 ⁻	5/2	0	-3/2	0	1	3/2	0	-1	60	
Zj-Pj	P4	0	0	0	0	0	-P4	0	0	0	
	P3	0	0	0	0	0	0	0	-P3	0	
	P2	3P2/2	0	-5P2/2	0	0	5P2/2	-P2	0	60P2	
	P1	0	0	-P1	0	0	0	0	0	0	

46

حل مثال: جدول تکرار یک

Pj	BV			P1	P2		P4		P3		RHS
		x1	x2	d1 ⁻	d2 ⁻	d3 ⁻	d1 ⁺	d2 ⁺	d3 ⁺		
	x2	1/2	1	1/2	0	0	-1/2	0	0	20	
P2	d2 ⁻	3/2	0	-5/2	1	0	5/2	-1	0	60	
	d3 ⁻	5/2	0	-3/2	0	1	3/2	0	-1	60	
Zj-Pj	P4	0	0	0	0	0	-P4	0	0	0	
	P3	0	0	0	0	0	0	0	-P3	0	
	P2	3P2/2	0	-5P2/2	0	0	5P2/2	-P2	0	60P2	
	P1	0	0	-P1	0	0	0	0	0	0	

45

حل مثال: جدول تکرار سه

Pj	BV			P1	P2		P4		P3		RHS
		x1	x2	d1 ⁻	d2 ⁻	d3 ⁻	d1 ⁺	d2 ⁺	d3 ⁺		
	x2	0	1	0	1/2	-1/2	0	-1/2	1/2	20	
P4	d1 ⁺	0	0	-1	5/8	-3/8	1	-5/8	3/8	15	
	x1	1	0	0	-3/8	5/8	0	3/8	-5/8	15	
Zj-Pj	P4	0	0	-P4	5P4/8	-3P4/8	0	-5P4/8	3P4/8	15P4	
	P3	0	0	0	0	0	0	0	-P3	0	
	P2	0	0	0	-P2	0	0	0	0	0	
	P1	0	0	-P1	0	0	0	0	0	0	

48

حل مثال: جدول تکرار دو

Pj	BV			P1	P2		P4		P3		RHS
		x1	x2	d1 ⁻	d2 ⁻	d3 ⁻	d1 ⁺	d2 ⁺	d3 ⁺		
	x2	4/5	1	0	1/5	0	0	-1/5	0	32	
P4	d1 ⁺	3/5	0	-1	2/5	0	1	-2/5	0	24	
Zj-Pj	P4	3P4/5	0	-P4	2P4/5	0	0	-2P4/5	0	24P4	
	P3	0	0	0	0	0	0	0	-P3	0	
	P2	0	0	0	-P2	0	0	0	0	0	
	P1	0	0	-P1	0	0	0	0	0	0	

47

تمرین

❖ یک سرمایه گذاری 90000 واحد پول دارد. گزینه های سرمایه گذاری و اطلاعات مربوطه در جدول آمده است. وی دو هدف برای خود دارد:

1. نرخ بازگشت باید حداقل 9 درصد باشد.
2. به دلیل ریسک سرمایه گذاری، حداکثر سرمایه گذاری در سهام کارانبه باید 60% باشد.

❖ با یکارگیری برنامه ریزی آرمانی تعیین نمایید سرمایه گذار به چه میزان در هر گزینه سرمایه گذاری کند.

49

گزینه ها	بهای هر سهم	ROI
سهام کاوانیه	50	6 درصد
کارانبه	1000	10 درصد

50