برنامه ریزی صفر و یک

برنامه ریزی صفر و یک چیست؟

Binary Integer Programming (BIP)

- گونه ای ویژه از برنامه ریزی عدد صحیح
- متغییر تصمیم دو ارزشی (صفر یا یک)

LP → ILP → BIP

- نیازمند الگوریتمی ویژه برای حل

$$x_j \in \{0,1\}$$

کاربردهای برنامه ریزی صفر و یک

- متغییرهای دو به دو ناسازگار
  - اگر حداکثر یکی از متغییرهای یک مجموعه Mتایی باید انتخاب شود

$$\sum_{j \in M} x_j \le 1$$

- متغییرهای این یا آن
  - اگر تنها یکی از متغییرهای یک مجموعه Mتایی بتواند انتخاب شود.

$$\sum_{j \in M} x_j = 1$$

کاربردهای برنامه ریزی صفر و یک

- متغییرهای وابسته
  - اگر x_k تنها در صورتی انتخاب شود که x_j هم انتخاب شود،
  - تصمیم گیری در مورد x_k مشروط به تصمیم در باره x_j است

$$x_k \le x_j$$

IF ($x_j = 0$) THEN
$x_k = 0$
ENDIF

- یا

$$x_k - x_j \le 0$$

کاربردهای برنامه ریزی صفر و یک

- هزینه ثابت
  - تولید یک محصول (x_j) نیازمند راه اندازی یک خط تولید
  - هزینه خرید و راه اندازی (k_j) هزینه ثابت (فقط در صورت راه اندازی)
  - هدف کمینه سازی تابع هزینه کل

$$\min Z = \ldots + k_j y_j + c_j x_j$$

x_j هزینه تولید هر واحد

- تعریف محدودیت وابسته زیر

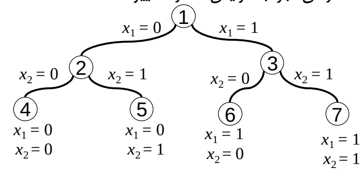
متغییر تصمیم راه اندازی خط

$$x_j \le U_j y_j$$

حداکثر تولید x_j

حل برنامه ریزی 0 - 1

- قابل حل با بررسی همه ترکیبهای ممکن از ارزش متغییرها
  - روش شمارش صریح (Explicit Enumeration)
  - نیازمند 2^n بررسی
  - افزایش شگرف مدت زمان اجرا با افزایش شمار متغییرها



الگوریتم شمارش ضمنی Implicit Enumeration

- بالاس (Balas) در 1967
- راه حلی برای کاهش شمار جستجوها
- شناخته شده به نام الگوریتم جمعی
- شکل استاندارد

$$\max Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j \qquad (where\ C_j \leq 0)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

$$x_j = 0 \ \vee \ 1$$

استانداردسازی

- اگر محدودیت $\geq$ باشد، در 1- ضرب شود
- اگر $C_j > 0$ ، تغییر متغییر $y_j = 1 - x_j$
- اگر تابع هدف min، در 1- ضرب تا به صورت max
- اگر محدودیت = باشد، تبدیل به دو محدودیت $\geq$ و $\leq$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \end{cases}$$

استانداردسازی

- شیوه پیشین، افزایش شمار محدودیتها به 2m
- m+1 محدودیت

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j = b_1 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j = b_2 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j = b_m \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \leq b_1 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j \leq b_2 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j \leq b_m \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \end{cases}$$

یک مثال

- مسئله 0 – 1 زیر را استاندارد کنید:

$$\max Z = \boxed{2x_1} - x_2 \boxed{+5x_3} - 3x_4 \boxed{+4x_5} - 8x_6$$

$$3x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 4x_5 + 2x_6 \leq 6$$

$$-x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 2x_5 - x_6 \boxed{\geq 0}$$

$$x_j = 0 \ \vee \ 1$$

$$x_1 = 1 - y_1 \qquad x_2 = y_2$$

$$x_3 = 1 - y_3 \qquad x_4 = y_4$$

$$x_5 = 1 - y_5 \qquad x_6 = y_6$$

یک مثال

$$-(1 - y_1) + y_2 - 2(1 - y_3) + 4y_4 - 2(1 - y_5) - y_6 \geq 0$$

$$1 - y_1 - y_2 + 2 - 2y_3 - 4y_4 + 2 - 2y_5 + y_6 \leq 0$$

$$-y_1 - y_2 - 2y_3 - 4y_4 - 2y_5 + y_6 \leq -5$$

- مدل استاندارد

$$\max Z = 2y_1 - y_2 - 5y_3 - 3y_4 + 4y_5 - 8y_6 + 11$$

$$-3y_1 - 2y_2 - 7y_3 - 5y_4 - 4y_5 + 2y_6 \leq -8$$

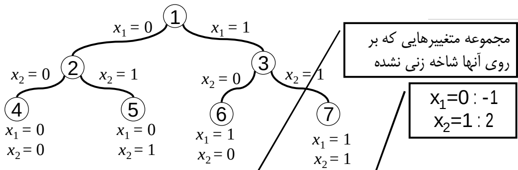
$$-y_1 - y_2 - 2y_3 - 4y_4 - 2y_5 + y_6 \leq -5$$

$$y_j = 0 \ \vee \ 1$$

حل مسئله استاندارد 0 – 1

- همانند شاخه و کران
- چون همه $C_j \leq 0$ و تابع هدف max ، پس $\max Z = 0$
  - به شرط نبود عدد ثابت در تابع هدف
- چند اصطلاح
  - حل جزیی (partial solution)
    - برخی متغییرهای تصمیم مقدار (0 یا 1) داشته باشد
  - متغییرهای ثابت (fixed variables)
    - متغییرهایی که در حل جزیی به آنها مقدار تخصیص داده شود
  - متغییرهای آزاد (free variables)
    - متغییرهایی که در حل جزیی به آنها مقدار تخصیص نداده شود
    - بر روی آنها شاخه زنی انجام نگرفته و تصمیمی برای 0 یا 1 بودن آنها گرفته نشده

حل مسئله استاندارد 0 – 1



متغیر ثابت	متغیر آزاد	حل جزیی	گره
x_1	F(1)	$P_2(-1)$	2
x_1	F(1)	$P_3(1)$	3
x_1,x_2	F(φ)	$P_5(-1,2)$	5
x_1,x_2	F(φ)	$P_7(1,2)$	7

ضابطه های شاخه زنی در روش بالاس

1. متغیر آزادی که در همه محدودیتهای دارای متغیر کمکی منفی، ضریب آن مثبت است برای شاخه زنی انتخاب نشود
   - افزودن این متغیرها به حل جزیی نمی تواند ناموجه بودن را بهتر کند
2. اگر C_j برای متغیر آزاد X_j رابطه زیر را برآورد، آن متغیر برای شاخه زنی انتخاب نشود.

تابع هدف بر اساس جواب جزیی مربوطه

$$Z + C_j \leq Z_L$$

   - این ضابطه فقط با بدست آوردن یک جواب موجه Z_L بررسی می شود
3. اگر متغیر آزادی با (1) و (2) کنار نرفت، متغیری که قدر مطلق مجموع مقادیر منفی متغیرهای کمکی را کمینه می کند انتخاب شود.

$$V_j = \sum_{j=1}^{n} \min(0, S_i - a_{ij})$$

ضابطه های به ژرفا رسیدن

1. مقدار تابع هدف گره کمتر از Z_L باشد.
   - اگر تابع هدف با Z_L برابر باشد ← شاید بهینه چند گانه
2. نرسیدن به جواب موجه معادل با رابطه زیر:

| مجموع ضرایب منفی متغیرهای آزاد مربوط به محدودیت i ام | < | S_i - مربوط به هر گره |

3. نبود متغیر آزاد
4. دستیابی به یک جواب موجه

گامهای الگوریتم شمارش ضمنی بالاس

1. استاندارد سازی مدل
2. تعریف یک حد پایینی Z_L با کمک جواب موجه.
   - اگر چنین حدی نبود، $Z_L = -\infty$ ، (همه متغیرها آزادند)
3. انتخاب متغیر شاخه زنی. (با کمک ضابطه های انتخاب)
4. محاسبه تابع هدف، حل جزیی، متغیرهای آزاد، متغیرهای ثابت. اگر جواب موجه بهتر از Z_L باشد، جایگزین Z_L شود.
5. بررسی ضابطه ژرفا
6. اگر هیچ جواب جزیی نیست، ایست کنید. در غیر اینصورت به گام 3 بروید.

مثال

◈مسئله زیر داده شده است.

$$\max Z = -8x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 7x_4 - 5x_5$$
$$3x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 - 3x_5 \geq 2$$
$$5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 \geq 4$$
$$x_j = 0 \vee 1$$

حل مثال

◈گام 1: استاندارد سازی محدودیتها و افزودن متغیرهای کمکی

$$\max Z = -8x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 7x_4 - 5x_5$$
$$-3x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 + S_1 = -2$$
$$-5x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 + S_2 = -4$$
$$x_j = 0 \vee 1$$

◈گام 2: همه متغیرها آزاد با مقدار صفر، متغیرهای کمکی منفی و نبود حل موجه، پس $Z_L = -\infty$

◈گام 3: انتخاب متغیر شاخه زنی.

- با توجه به ضابطه 1 x_5 انتخاب نمی شود (دارای ضریب مثبت در محدودیتهاست، به بهبود حل کمکی نمی کند)
- چون $Z_L=-\infty$، ضابطه 2 قابل کاربرد نیست

حل مثال

■ بررسی ضابطه 3:

$$V_1 = \min\{0, S_1 - a_{11}\} + \min\{0, S_2 - a_{21}\} = \min\{0, -2-(-3)\} + \min\{0, -4-(-5)\} = 0$$

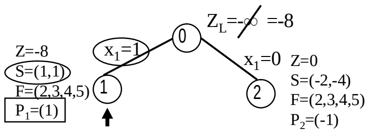
$$V_2 = \min\{0, -2-(-3)\} + \min\{0, -4-(-3)\} = -1$$

$$V_3 = \min\{0, -2-(-1)\} + \min\{0, -4-(-2)\} = -5$$

$$V_4 = \min\{0, -2-(2)\} + \min\{0, -4-(-1)\} = -7$$

$$\begin{aligned} \max Z &= -8x_1 - 2x_2 - 4x_3 - \nu x_4 - 5x_5 \\ -3x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 + S_1 &= -2 \\ -5x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 + S_2 &= -4 \\ x_j &= 0 \vee 1 \end{aligned}$$

◆ چون $\min |V_i| = V_1$ ، پس شاخه زنی بر روی x_1



حل مثال

■ گام 4: چون مقادیر $S_i > 0$ ، مقدار Z_L به 8- افزایش می یابد. در این گره متغییرهای 2، 3، 4، 5 آزادندو جواب جزیی دارای مقدار 1 برای x_1 است.

■ گام 5: رسیدن به ژرفا در گره 1. بررسی ضابطه ژرفا برای گره 2.

◆ ضابطه 1) مقدار Z برابر با صفر، و کمتر از Z_L=-8 نیست. پس به ژرفا نرسیده است.

◆ ضابطه 2) بررسی امکان یافتن حل موجه برای گره 2

■ پس گره 2 به ژرفا نرسید.

$$|-3| \not< |-2|$$

$$|-3 + (-2) + (-1)| \not< |-4|$$

ضریب x_2 در محدودیت 1

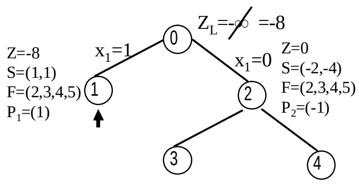
مقدار کمکی محدودیت 1

مجموع ضرایب x_2، x_3، و x_4

حل مثال

■ ضابطه 3 و 4) چون هم متغییر آزاد داریم و هم جواب گره موجه نیست، این گره به ژرفا نرسیده است.

■ شاخه زنی بعدی بر روی همین گره



حل را ادامه دهید

حل مثال

■ ضابطه 3 و 4) چون هم متغییر آزاد داریم و هم جواب گره موجه نیست، این گره به ژرفا نرسیده است.

■ شاخه زنی بعدی بر روی همین گره 2 ← رفتن به گام 3

◈گام 3:

■ ضابطه 1) کنار گذاشتن x_5 $\quad 0 + (-2) \not\leq -8 \quad Z_2 + C_2 \leq Z_L$

■ بررسی ضابطه 2 برای متغیرهای آزاد 2، 3، و 4

$$Z_2 + C_3 \leq Z_L \qquad 0 + (-4) \not\leq -8$$

$$Z_2 + C_4 \leq Z_L \qquad 0 + (-7) \not\leq -8$$

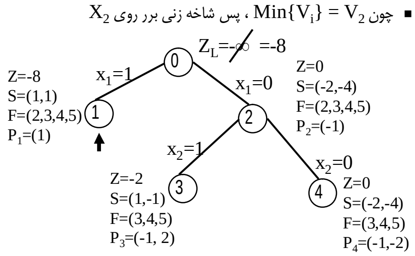
همگی رد،
هیچ متغییر آزادی را
نمی توان کنار گذاشت.

حل مثال

❖ محاسبه V_j ها

■ $V_2 = -1, \ V_3 = -5, \ V_4 = -7$

■ چون $\mathrm{Min}\{V_i\} = V_2$ ، پس شاخه زنی برر روی X_2



حل مثال

◈گام 4: محاسبه جواب مدل در هر گره،

■ جواب هر دو گره ناموجه، پس نبود تغییر در Z_L

◈گام 5: بررسی ژرفا

■ ضابطه 1)

◆ مقدار تابع هدف گره 3 کمتر از Z_L نیست ← ژرفا نیست

◆ مقدار تابع هدف گره 4 کمتر از Z_L نیست ← ژرفا نیست

■ ضابطه 2)

◆ گره 3: فقط $S_2 < 0$ ، پس فقط بررسی محدودیت دوم

◆ گره 4: $S_1, S_2 < 0$ ، بررسی هر دو محدودیت

برآورده شدن ضابطه برای گره 4 :: رسیدن به ژرفا

$$|-2-1| \not< |-1|$$

$$|0| < |-2|$$

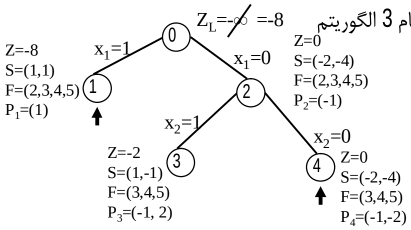
$$|-2-1| < |-4|$$

حل مثال

◈گره 4 به ژرفا

◈گره 3 همچنان فعال :: شاخه زنی بر روی گره 3

◈برگشت به گام 3 الگوریتم

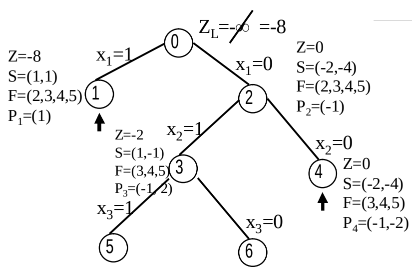


حل مثال

◈گام 3:

- F_3 =(3,4,5) ،
- بکارگیری ضابطه 1 :: کنار گذاشتن X_5
- نبود جواب موجه :: بکارنگرفتن ضابطه 2
- بکارگیری ضابطه 3 :: محاسبه V_3 و V_4 :: انتخاب V_3 :: انتخاب X_3 و شاخه زنی بر روی X_3

حل مثال



حل مثال

Z=-6
S=(0, 1)
F=(4,5)
P_5=(-1, 2,3)

Z=-2
S=(1,-1)
F=(4,5)
P_6=(-1,-2,-3)

- گام 4: محاسبه جوابها
  - فقط گره 5 موجه
  - $Z_5 < Z_L$ :: جایگزینی با Z_L ← Z_L = -6
- گام 5: بررسی ژرفا
  - گره 5 :: پاسخ موجه ← طبق ضابطه 4 رسیدن به ژرفا
  - گره 6 ::
    - ضابطه 1 :: $Z_6 > Z_L$ ← ژرفا نیست
    - ضابطه 2 :: S_6=(1,-1) ← بررسی محدودیت دوم
    - ضابطه 3 :: F_6=(4,5) ← ژرفا نیست
    - ضابطه 4 :: پاسخ موجه نیست ← ژرفا نیست

$|-1| \not< |-1|$ ← ژرفا نیست

حل مثال

◈گام 6: بررسی شاخه زنی بر روی گره 6

- ضابطه 1: X_5 کنار گذاشته می شود
- ضابطه 2 : تنها متغییر آزاد باقیمانده X_4
  - شرط برقرار است ← کنارگذاشتن X_4
  - نبود متغییر آزاد برای شاخه زنی
  - ایست

$$Z_6 = -2$$
$$Z_6 + C_4 \le Z_L$$
$$-2 + (-7) \le -6$$

◈پاسخ بهینه مدل

- در گره 5

$$X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 1, X_4 = 0, X_5 = 0$$
$$Z = -6$$