برنامه‌ریزی پویا
Dynamic Programming

ازایتالیا تا هیمالیا

- ماکیاولی و آیین شهریاری
  - divide and conquer !
- پیتزا خوری
  - make it bite size !
- کنفوسیسوس
  - یک سفر هزار فرسنگی، با گام نخست آغاز می‌گردد!

- **اما، چرا ؟؟**

2

باز هم شبکه !!؟

- تجزیه و تحلیل شبکه در هر *مرحله* برای یافتن کوتاهترین مسیر بر روی شبکه
  - یافتن کوتاهترین مسیر از بین چندین مسیر از گره کنونی به یک گره دیگر تا دستیابی به آخرین گره
- فرایند تجزیه و تحلیل شبکه در مرحله‌های پی در پی
  - نه اینکه همه با هم

3

برنامه‌ریزی پویا چیست؟

- ریچارد بلمن ۱۹۵۷
- رویکردی چند مرحله‌ای برای حل مسئله
  - بکارگیری دیگر تکنیکها در فرایند حل
- مسئله‌هایی با تصمیم‌گیریهای پی در پی و چندین مرحله
- تبدیل مسئله‌ای با چندین مرحله به مجموعه‌ای از مسئله‌های تک مرحله‌ای
  - هر مرحله شامل یک یا شمار کمی متغییر تصمیم
- آغاز حل با یک مرحله
  - بررسی راه کارهای مختلف
  - توجه به اثرهای تجمعی تصمیمهای بهینه مراحل مختلف
- یافتن پاسخ بهینه بر اساس تمامی مراحل

4

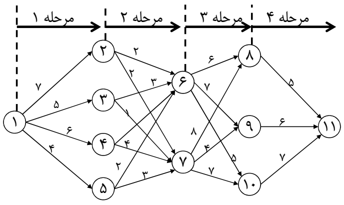
برنامه‌ریزی پویا چیست؟

- مانند تکنیک‌های بهینه سازی
  - نیازمند نمایش مدل ریاضی
  - تعریف شفاف از متغییرهای تصمیم، محدودیتها، پارامترها
- اما، نبود یک الگوریتم یکسان و استاندارد
  - ارائه روشی کلی برای حل مسئله
  - هر مسئله نیازمند فرموله کردن ویژه خود
  - نیازی به خطی بودن روابط بین متغییرها نیست
  - توانمند در حل مسئله‌های خطی، غیرخطی، احتمالی، غیراحتمالی، متغییرهای پیوسته، متغییرهای عدد صحیح

5

مسئله کوتاهترین مسیر (SPP)

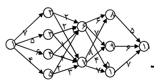
- بسیار نام‌آور در شبکه
- هدف، یافتن کوتاهترین مسیر بین گره آغازین و گره پایانی



6

مسئله کوتاهترین مسیر (SPP)

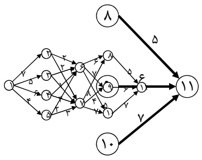
- تقسیم طول سفر به چهار مرحله (stage)
  - مرحله ۱: سفر از شهر ۱، به یکی از شهرهای ۲، ۳، ۴، یا ۵
  - مرحله ۲: ادامه سفر از مقصد پیشین به یکی از شهرهای ۶ یا ۷
  - مرحله ۳: ادامه از مقصد پیشین به یکی از شهرهای ۸، ۹، یا ۱۰
  - مرحله ۴: رسیدن به مقصد نهایی (شهر ۱۱)
- هر مرحله یک مسئله فرعی
- حل پسرو ($backward$)
  - تصمیم گیرنده خود را در آخرین مرحله فرض می‌کند
  - در یکی از شهرهای ۸، ۹، یا ۱۰



7

مسئله کوتاهترین مسیر (SPP)

- در مرحله ۴: سه وضعیت یا حالت (state)
- بهترین تصمیم مرحله ۴
  - اگر در وضعیت ۸ باشد، رفتن به ۱۱
  - اگر در وضعیت ۹ باشد، رفتن به ۱۱
  - اگر در وضعیت ۱۰ باشد، رفتن به ۱۱
- سه اصطلاح مهم
  - مرحله : نماد n
  - حالت : نماد S
  - متغییر تصمیم : نماد x_n



8

مسئله کوتاهترین مسیر (SPP)

- X_n: مقصد در مرحله n
- پس اگر تصمیم گیرنده در مرحله ۴ در شهر ۸ باشد داریم:

$$n = 4,\ S = 8,\ x_4 = 11$$

- سه حالت در مرحله ۴

$$S = 8, S = 9, S = 11$$

- حالت (وضعیت)
  - گره‌هایی که تصمیم گیرنده در هر مرحله می‌تواند (یا احتمال دارد) در آن قرار گیرد

9

مسئله کوتاهترین مسیر (SPP)

- تابع هدف مسئله

$$Min\ Z = \sum_{n=1}^{4} C\,(S, X_n)$$

- $C(S,x_n)$: مسافتی (هزینه‌ای) که تصمیم گیرنده در صورت بودن در گره S باید برای رسیدن به گره X_n بپیماید
- در واقع هزینه گزینش گزینه تصمیم X_n، در مرحله n، در صورت بودن در وضعیت S است.

10

مسئله کوتاهترین مسیر (SPP)

- جدول محاسبه‌های مرحله ۴

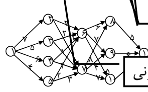
$n=4$

S \ x_4	۱۱ (متغییر تصمیم)	$f_4^*(S)$ (کوتاهترین مسافت)	X^*_4 (بهترین تصمیم)
۸	۵	۵	۱۱
۹	۶	۶	۱۱
۱۰	۷	۷	۱۱

بهترین تصمیم برای حالت کنونی

کوتاهترین مسافت از حالت کنونی به مقصد نهایی

مسافتی که باید از حالت به مقصد نهایی پیموده شود



حالتهای ممکن مرحله کنونی

11

مسئله کوتاهترین مسیر (SPP)

- جدول محاسبه‌های مرحله ۳
  - ترکیبی از دو مرحله ۳ و مرحله ۴
  - سفر از این مرحله با توجه به حالتهای مختلف این مرحله و تصمیمهای بهینه مرحله ۴
  - مجموع مسافت از هر حالت مرحله ۳ تا مقصد نهایی برابر با مسافت طی شده در این مرحله به اضافه حداقل مسافت مرحله ۴ (ستون $f_4^*(S)$)
  - مثلاً اگر n=3، S=6، و x_3=9 باشد داریم

مسافت مرحله بعد + مسافت این مرحله = مسافت تا مقصد نهایی

12

مسئله کوتاهترین مسیر (SPP)

به طور کلی

$$\left(\begin{array}{c}\text{مجموع مسافت از}\\ S=6 \text{ در } n=3 \text{ به}\\ \text{مقصد نهایی}\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c}\text{مسافت از}\\ S=6 \text{ تا}\\ x_3=9\end{array}\right) + \left(\begin{array}{c}\text{حداقل مسافت}\\ \text{از } x_3=9 \text{ تا}\\ \text{مقصد نهایی}\end{array}\right)$$

تابع بازده (return function)

$$\underbrace{f_n(S, x_n)}_{\text{مجموع کل مسافت از } S \text{ کنونی مرحله } n \text{ تا مقصد نهایی}} = \underbrace{C(S, X_n)}_{\text{مسافت از } S \text{ تا مرحله بعد } X_n} + \underbrace{f^*_{n+1}(x_n)}_{\text{حداقل مسافت از } X_n \text{ (در مرحله بعد) تا مقصد نهایی}}$$

مسئله کوتاهترین مسیر (SPP)

S	x_3			$f_3^*(S)$	X^*_3
	۸	۹	۱۰		
۶	۵+۶=۱۱	۷+۶=۱۳	۵+۷=۱۲	۱۱	۸
۷	۸+۵=۱۳	۴+۶=۱۰	۷+۷=۱۴	۱۰	۹

$n=3$

$f_3(S=6, x_3=8)=6+5=\boxed{11}$
$f_3(S=6, x_3=9)=7+6=13$
$f_3(S=6, x_3=10)=5+7=12$
$f_3(S=7, x_3=8)=8+5=13$
$f_3(S=7, x_3=9)=4+6=10$
$f_3(S=7, x_3=10)=7+7=14$

مسئله کوتاهترین مسیر (SPP)

مرحله ۲

$n=2$

S	x_2		$f_2^*(S)$	X^*_2
	۶	۷		
۲	۲+۱۱=۱۳	۲+۱۰=۱۲	۱۲	۷
۳	۳+۱۱=۱۴	۲+۱۰=۱۲	۱۲	۷
۴	۱+۱۱=۱۲	۴+۱۰=۱۴	۱۲	۶
۵	۲+۱۱=۱۳	۳+۱۰=۱۳	۱۳	۶ یا ۷

مرحله ۱

$n=1$

S	x_1				$f_1^*(S)$	X^*_1
	۲	۳	۴	۵		
۱	۷+۱۲=۱۹	۵+۱۲=۱۷	۶+۱۲=۱۸	۴+۱۳=۱۷	۱۷	۳ یا ۵

مسئله کوتاهترین مسیر (SPP)

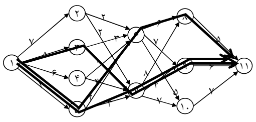
پاسخ بهینه

- حرکت از آغاز به سوی پایان و جستجوی پی در پی در ستون X^*_n

۱ → ۳ → ۷ → ۹ → ۱۱

۱ → ۵ → ۷ → ۹ → ۱۱

۱ → ۵ → ۶ → ۸ → ۱۱



- کوتاهترین مسیر از آغاز تا پایان
- $f_1^*(S) = 17$

ویژگیهای بنیادین برنامه‌ریزی پویا

1. روشی برای بهینه سازی، اما کاملاً متفاوت
   - یک رشته nتایی از تصمیم گیریهای مرتبط به هم
   - هر تصمیم گیری بیانگر یک مرحله (n مرحله)
   - توجه به اثر تصمیم در مرحله و همه مرحله‌های پسین
2. هر مرحله دارای چندین حالت
   - حالت، بخشی از مرحله است
   - پیوند دهنده مرحله به مراحل پیشین و پسین
   - شاید بیش از یک متغیر حالت
     - افزایش شمار متغییرهای حالت به معنی افزایش پیچیدگی مسئله

ویژگیهای بنیادین برنامه‌ریزی پویا

3. امکان انجام مجموعه‌ای از اقدامات در هر حالت
   - انتخاب اقدامات به عهده متغییر تصمیم است
   - در هر مرحله، با تصمیم گیری، حالت مرحله به حالتی وابسته به مرحله پسین منتقل می‌شود
4. متغییر حالت بیانگر اطلاعاتی در باره هدفهای تصمیم گیری
   - وجود چندین گزینه تصمیم (پاسخ شدنی) برای هر ارزش از متغییر حالت در هر مرحله
   - پاسخ بهینه هر مرحله از محاسبه تابع برگشت هر مرحله

$$f_n^*(S) = \underset{x_n}{Max} \quad \vee \quad \underset{x_n}{\text{Min}} \{f_n(S, x_n)\}$$

ویژگیهای بنیادین برنامه‌ریزی پویا

5. وجود پیوستگی در مراحل پی در پی تصمیم گیری
   - تابع $f^*_n(S)$ حالت S مرحله n را به مرحله پسین پیوند می‌دهد
   - مثلاً در مثال

$$f_n^*(S) = \underset{x_n}{Min}\left\{C(S, x_n) + f_{n+1}^*(x)\right\}$$

   - $f^*_{n+1}(S)$: مقدار بهینه تصمیم در مرحله $n+1$
   - اگر مقدار $f^*_4(S)$ مشخص باشد، مقدار $f^*_3(S)$ قابل دستیابی است
   - در واقع، $f^*_n(S)$ یک مقدار **انباشته** از تصمیمهای پی در پی است
   - $f^*_n(S)$ یک تابع **برگشتی** (*recursive function*) است

ویژگیهای بنیادین برنامه‌ریزی پویا

6. پاسخ بهینه مسئله از زنجیره تصمیمهای مراحل تعریف می‌شود
   - صرفنظر از چگونگی رسیدن به یکی از حالتهای مرحله، باید همه انتخابهای پس از آن حالت بهینه باشد
   - اصل بهینگی (*principle of optimality*)

ویژگیهای بنیادین برنامه‌ریزی پویا

7. گامهای برنامه‌ریزی پویا
   1. تعریف مرحله (n) و حالت (S)
   2. تعریف متغییرهای تصمیم (x_n)
   3. تعریف تابع بازده $f_n(S,x_n)$ برای سنجش ارزش پاسخ شدنی
   4. محاسبه تابع بازده بهینه $f^*_n(S)$ برای هر مرحله
   5. بکارگیری اصل بهینگی و تعیین مجموعه مراحل بهینه

ویژگیهای بنیادین برنامه‌ریزی پویا

8. نبود فرایندی مشخص برای حل همه مسائل برنامه‌ریزی پویا
9. پیوند بین حالتها در مراحل مختلف
   - تابع غیر احتمالی در مسائل برنامه‌ریزی پویای غیر احتمالی
   - تابع احتمالی در مسائل برنامه‌ریزی پویای احتمالی

01. ساختار تابع هدف، "بیشینه سازی" یا "کمینه سازی"

11. متغییرهای حالت
   - گسسته (*discrete*)
   - پیوسته (*continuous*)

ویژگیهای بنیادین برنامه‌ریزی پویا

21. روش حل
   - پسرو (*backward*)
   - پیشرو (*forward*)

31. کارآیی کمتر نسبت به دیگر الگوریتمها

برنامه‌ریزی پویا :: مسئله موجودی کالا

- تقاضای برای قایق در ۴ ماه آینده داده شده است. اگر شرکت در هر ماه تولید داشته باشد، علاوه بر ۱ تومان هزینه متغییر، ۳ تومان هزینه ثابت دارد. سقف تولید ماهیانه ۵ دستگاه قایق است. شرکت دارای انباری با گنجایش ۴ دستگاه است. هزینه نگهداری هر دستگاه در ماه معادل نیم تومان است که در هنگام تحویل کالا به انبار پرداخت می‌شود. شرکت در هر ماه چند دستگاه تولید نماید تا مجموع هزینه برآوردن تقاضا را کمینه نماید؟ موجودی کالای اول دوره صفر و در پایان ماه ۴ نیز باید صفر باشد.

ماه	۱	۲	۳	۴
تقاضا	۱	۳	۲	۴

برنامه‌ریزی پویا :: مسئله موجودی کالا

- گام ۱. تعریف مرحله و حالت
  - مرحله (n): ماهها
  - حالت / وضعیت (S): میزان موجودی قایق در اول ماه
- گام ۲. متغییر تصمیم
  - شمار تولید قایق در ماه (x_n)
- گام ۳ و ۴. هزینه تولید و نگهداری هر دستگاه قایق

(هزینه تولید در ماه) + (هزینه نگهداری) = هزینه هر واحد کالا

تقاضای ماه

$$f_n^*(S,x)=\frac{1}{2}(S+x_n-d_n)+C(x_n)$$

برنامه‌ریزی پویا :: مسئله موجودی کالا

- مثلاً اگر در ماه سوم $(n=3)$ موجودی اول ماه ۱ $(S=1)$ و میزان تولید ۳ $(x_3=3)$ و تقاضا ۲ $(d_3=2)$ باشد، داریم:

$$f_3^*(1,3)=\boxed{0.5(3+1-2)}+\boxed{(3(1)+3)}=7$$

هزینه نگهداری هر واحد در ماه

میزان تولید در ماه

هزینه متغییر تولید

هزینه ثابت تولید

هزینه نگهداری

هزینه تولید

برنامه‌ریزی پویا :: مسئله موجودی کالا

- بر اساس فرض بالا، موجودی اول ماه ۴، برابر با ۲ خواهد بود
  - در ماه ۳: ۳ واحد تولید، ۱ واحد موجودی اول ماه، ۲ واحد تقاضا
- پس، باید هزینه ماه بعد را نیز افزود

$$f_n(S)=\frac{1}{2}(S+x_n-d_n)$$
$$+C(x_n)+f_{n+1}(S_{n+1}+x_{n+1}-d_{n+1})$$

برنامه‌ریزی پویا :: مسئله موجودی کالا : حل

- مرحله ۴:

چون تقاضا، ۴ واحد است، و ۱ واحد موجودی از ماه قبل وجود دارد و نیز نباید در پایان ماه ۴ موجودی باشد، پس تنها گزینه تصمیم، ۳ واحد تولید است.

S	x_4					$f^*_4(S)$	x^*_4
	۰	۱	۲	۳	۴		
۰	–	–	–	–	۷	۷	۴
۱	–	–	–	۶	–	۶	۳
۲	–	–	۵	–	–	۵	۲
۳	–	۴	–	–	–	۴	۱
۴	۰	–	–	–	–	۰	۰

در اینصورت هزینه کل ۶ واحد است.

$$f_4(S,x_4)=\frac{1}{2}(S+x_4-d_4)+C(x_4)$$

برنامه‌ریزی پویا :: مسئله موجودی کالا : حل

- مرحله ۳:

S	x_3						$f^*_3(S)$	x^*_3
	۰	۱	۲	۳	۴	۵		
۰	–	–	۱۲	۵/۱۲	۱۳	۵/۱۳	۱۲	۱
۱	–	۱۱	۵/۱۱	۱۲	۵/۱۲	۱۰	۱۰	۵
۲	۷	۵/۱۰	۱۰	۵/۱۱	۹	–	۷	۰
۳	۵/۶	۱۰	۵/۱۰	۸	–	–	۵/۶	۰
۴	۶	۵/۹	۷	–	–	–	۶	۰
۵	۵/۵	۶	–	–	–	–	۵/۵	۰
۶	۲	–	–	–	–	–	۲	۰

$$f_3(S,x_3)=\frac{1}{2}(S+x_3-d_3)+C(x_3)+f_4^*(S)$$

برنامه‌ریزی پویا :: مسئله موجودی کالا : حل

- مرحله ۲:

S	x_2						$f^*_2(S)$	x^*_2
	۰	۱	۲	۳	۴	۵		
۰	–	–	–	۱۸	۵/۱۷	۱۶	۱۶	۵
۱	–	–	۱۷	۵/۱۶	۱۵	۱۶	۱۵	۴
۲	–	۱۶	۵/۱۵	۱۴	۱۵	۱۶	۱۴	۳
۳	۱۲	۵/۱۴	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۲	۰
۴	۵/۱۰	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۳	۵/۱۰	۰

$$f_2(S,x_2)=\frac{1}{2}(S+x_2-d_2)+C(x_2)+f_3^*(S)$$

برنامه‌ریزی پویا :: مسئله موجودی کالا : حل

- مرحله ۱:

x^*_1	$f^*_1(S)$	x_1						S
		۵	۴	۳	۲	۱	۰	
۱	۲۰	۵/۲۰	۵/۲۰	۱۹	۵/۲۰	۲۰	–	۰

$$f_1(S,x_1)=\frac{1}{2}(S+x_1-d_1)+C(x_1)+f_2^*(S)$$

- پس پاسخ بهینه

$$x_1^*=1, x_2^*=5, x_3^*=0, x_4^*=4$$
$$f_n^*(S)=20$$

31

تمرین :: مسئله تخصیص ظرفیت

- شرکتی دارای ۶ خط تولید برای ۳ مدل تلویزیون است. سود تولید هر مدل در هر خط داده شده است. چند خط تولید به هر مدل تخصیص داده شود تا سود شرکت بیشینه گردد.

تعداد خطوط تخصیص داده شده	سود ماهیانه هر خط برای هر مدل (میلیون ریال)		
	مدل ۱	مدل ۲	مدل ۳
۰	۰	۰	۰
۱	۱۵	۱۰	۲۰
۲	۳۰	۱۵	۳۵
۳	۴۰	۲۰	۴۵
۴	۴۵	۲۵	۵۰
۵	۴۸	۲۹	۵۴
۶	۵۰	۳۰	۶۰

32

تمرین :: مسئله کوله پشتی (KSP)

- نام‌آورترین مسئله در برنامه‌ریزی پویا
- کل وزنی که یک باربر می‌تواند حمل کند W است. همچنین n گونه شی هر کدام با وزن w وجود دارد که باربر باید حمل کند. هر شی دارای ارزشی معادل v است. هدف بیشینه سازی ارزش بار حمل شده به وسیله باربر است.
- فرض کنید: $W=5$ ، سه گونه کالا برای حمل

نوع کالا	A	B	C
وزن هر واحد کالا	۱	۲	۲
ارزش هر واحد کالا	۲۰	۵۰	۶۰

Knapsack Problem

35

تمرین: مسئله تخصیص یک منبع

- کارخانه‌ای سه کالای A، B، و C تولید می‌کند. هر کالا نیازمند یک نوع ماده اولیه است که از آن ۴ تن در دسترس است. به ازاء تخصیص میزان معینی از ماده اولیه به هر محصول، سود مشخصی به دست می‌آید. هدف تخصیص میزان بهینه ماده اولیه به کالاهاست که سود را بیشینه کند.

تخصیص ماده اولیه (تن)	کالا		
	A	B	C
۰	۰	۰	۰
۱	۱۰	۶	۸
۲	۱۵	۱۷	۱۱
۳	۱۹	–	–

39

تمرین: مسئله سرمایه گذاری

- شخصی ۶ میلیون تومان برای سرمایه گذاری در ۳ پروژه دارد. اگر d_j میزان سرمایه گذاری در پروژه jام باشد و ارزش فعلی خالص سرمایه گذاری $r_j(d_j)$ باشد، روش بهینه سرمایه گذاری را به گونه‌ای تعیین نمایید که ارزش فعلی سرمایه گذاری بیشینه گردد. میزان سرمایه گذاری در هر پروژه باید ضریبی صحیح از میلیون باشد.

$$r_1(d_1)=7d_1+2 \qquad (d_1>0)$$
$$r_2(d_2)=3d_2+7 \qquad (d_2>0)$$
$$r_3(d_3)=4d_3+5 \qquad (d_3>0)$$
$$r_1(0)=r_2(0)=r_3(0)=0$$

42