Subject. OR 1 Year. Month. Date.

سرفصل مطالب :

(۱) مدل سازی ریاضی

(۲) بررسی مدل های خطی در فضای ۲ بعدی

(۳) روش حل مسائل برنامه ریزی خطی simplex

(۴) روش حل مدل های خطی (تکمیلی)

(۵) دوگانگی در مسائل برنامه ریزی خطی

(۶) برنامه ریزی پارامتریک

(۷) برنامه ریزی حمل و نقل

مثال) یک شرکت دو نوع محصول تولید می کند برای این منظور از نیروی انسانی و مواد اولیه استفاده می شود

محصول	نیروی انسانی	مواد اولیه	سود فروش یک واحد
۱	۱	۴	۴
۲	۲	۳	۵

مقدار منابع موجود از نوع انسانی و مواد اولیه به ترتیب از نوع ۴۰ نفر ساعت و ۱۲۰ کیلوگرم است. مطلوبست مدل ریاضی حداکثر کردن سود

x_j مقدار تولید از محصول j ام ؛ $j = 1, 2$

$$\max z = 4x_1 + 5x_2 \quad , \quad \begin{cases} \text{محدودیت نیروی انسانی} : & 1x_1 + 2x_2 \le 40 \\ \text{محدودیت مواد خام} : & 4x_1 + 3x_2 \le 120 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

مدل سازی خطی چون دستگاه فوق شامل دو نامعادله خطی است.

APEX 1

مثال) محصولی با ترکیب انواع غلات نیازهای ویتامین های A و B را تأمین می کند. هدف حداقل کردن هزینه است. باید ترکیبی از گندم و جو و برنج ایجاد کرد که حداقل مقدار از دو ویتامین تأمین شود. هزینه هر کیلو از گندم و جو و برنج به ترتیب ۴ و ۶ و ۲ واحد پول است.

سهم ویتامین هر کیلو مواد برحسب mg

ویتامین	گندم	جو	برنج	تعداد مورد نیاز برحسب mg
A	۲۰	۲۰	۸	۱۰۰
B	۷	۱۴	۱۲	۱۲۰

x_1 : مقدار خرید گندم برحسب کیلوگرم

x_2 : " " جو " "

x_3 : " " برنج " "

تابع هدف : $\min z = 4x_1 + 6x_2 + 2x_3$

ویتامین A : $20x_1 + 20x_2 + 8x_3 \geq 100$

ویتامین B : $7x_1 + 14x_2 + 12x_3 \geq 120$

مثال) فرض کنید شخصی ۷۰۰۰۰ واحد پول در اختیار دارد و می خواهد آن را در طرح های مختلف سرمایه گذاری کند

(۱) سرمایه گذاری در طرح های دولتی با نرخ برگشت ۸٪

(۲) پول با نرخ برگشت ۱۰٪ (به صورت سپرده)

(۳) خرید کالا با نرخ برگشت ۶٪

(۴) سرمایه گذاری در ساخت ساز با نرخ برگشت ۱۲٪

هدف : حداکثر نمودن برگشت سرمایه

محدودیت ها :

(۱) بیشتر از ۲۰٪ پول را نمی توان در ساختمان سازی سرمایه گذاری کرد.

(۲) مبلغ سپرده بانکی باید از مبالغ سرمایه گذاری شده روی سه گزینه دیگر بیشتر باشد

مجموع

APEX

www.iedoc.ir

Subject. Year. Month. Date.

(۳) حداقل ٪۳۰ سرمایه گذاری مربوط به خرید کالا و پس انداز بانکی باشد

(۴) نسبت سرمایه گذاری روی طرحهای دولتی به خرید کالا از $\frac{1}{3}$ تجاوز نکند

(۵) تمام ۷۰۰۰۰ واحد پول سرمایه گذاری شود.

متغیرهای ریاضی: x_j مقدار سرمایه گذاری روی گزینه ی ام $j = 1,2,3,4$

برنامه ریزی خطی

هدف مسأله: $\text{Max } Z = 0.085x_1 + 0.1x_2 + 0.06x_3 + 0.13x_4$

اگر نرخ برگشت x_4 در سال دوم بررسی می شده داشتیم:

نرخ برگشت x_4 = $0.13x_4(1 + \text{نرخ بهره}) + (1 + \text{نرخ تورم})^{-1}$

ولی در اینجا همه متغیرها در سال اول بررسی می شوند.

constraints:

$$\begin{cases} x_4 \le 0.2(70000) \\ x_2 \le x_1 + x_3 + x_4 \\ x_2 + x_3 \ge 0.3(70000) \\ \frac{x_1}{x_3} \le \frac{1}{3} \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 70000 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \longrightarrow \text{none negativity constraint} \end{cases}$$

مثال) یک شرکت سازنده تلویزیون هر ماه از ۳ انبار خود، تعدادی تلویزیون برای ۳ فروشگاه ارسال می کند.

شرکت می خواهد بداند که چند TV از هر انبار به هر فروشگاه بفرستد تا هزینه حمل و نقل حداقل شود.

فروشگاه	تقاضا
A	۱۵۰
B	۲۵۰
C	۲۰۰

APEX

Subject. Year. Month. Date.

انبار	مقدار عرضه
۱	۳۰۰
۲	۱۰۰
۳	۱۰۰

فروشگاه \ محل	A	B	C
۱	۶	۸	۱
۲	۴	۲	۳
۳	۳	۵	۷

X_{ij} : تعداد TV که از انبار i ام به فروشگاه j ام ارسال خواهد شد.

تابع هدف : $\min Z = 6x_{1A} + 8x_{1B} + 1x_{1C} + \cdots$

محدودیت های انبارها :

$$\begin{cases} x_{1A} + x_{1B} + x_{1C} = 300 \\ x_{2A} + x_{2B} + x_{2C} = 100 \\ x_{3A} + x_{3B} + x_{3C} = 200 \end{cases} \Rightarrow \text{عرضه کامل}$$

محدودیت های فروشگاه ها :

$$\begin{cases} x_{1A} + x_{2A} + x_{3A} = 150 \\ x_{1B} + x_{2B} + x_{3B} = 250 \\ x_{1C} + x_{2C} + x_{3C} = 200 \\ x_{ij} \geq 0 \quad , \quad i = 1,2,3 \quad , \quad j = 1,2,3 \end{cases} \Rightarrow$$ این مسئله دارای ۱۵ محدودیت است

مثال) فرض کنید کشور به n منطقه کشاورزی تقسیم شده است، d_i مقدار زمین قابل کشت در منطقه i ام است. (برحسب هکتار)

$i = 1, 2, \cdots, n$

a_{ij} مقدار برحسب تن از محصول کشاورزی j ام که از کاشت یک هکتار زمین در منطقه i ام بدست می آید

$j = 1, 2, \cdots, n$

b_j مقدار برحسب تن از محصول کشاورزی j ام که در سال آینده مورد نیاز کشور است.

APEX

Subject. Year. Month. Date.

c_j : هزینه واردات یک تن از محصول j اُم برحسب دلار

c'_j : درآمد صادرات یک تن از محصول j اُم برحسب دلار

هدف : حداقل نمودن تفاضل واردات منهای صادرات (حداقل ارز مصرفی)

x_j : مقدار محصولی که وارد می‌شود

x'_j : " " " صادر "

y_{ij} : مقداری از زمین i ام که زیر کشت محصول j ام است

$$\text{Min } \Delta = \sum |x_j c_j - x'_j c'_j| \quad , \quad x_j + \sum_i a_{ij} y_{ij} - x'_i \geq b_i \quad , \quad j=1,2,\dots,n$$

تابع هدف

$$\sum_{j=1}^{n} y_{ij} \leq d_i \quad , \quad i=1,2,\dots,n \quad , \quad x_j , x'_j , y_{ij} \geq 0$$

www.iedoc.ir

APEX

(مثال) «مدل ضایعات برش» Cutting stock

مثال) یک کارخانه کاغذ سازی رول‌های کاغذ را با پهنای واحد و ۲۰ واحد و طول ثابت تولید می‌کند. سفارشات زیر به کارخانه ارسال شده است؟

سفارش	عرض	تعداد رول	محدودیت تقاضا
۱	۵	۱۵۰	≥ تعداد رول عرض
۲	۷	۲۰۰	
۳	۹	۳۰۰	

هدف حداقل سازی ضایعات برش است.

الگو	سفارش ۱	سفارش ۲	سفارش ۳	ضایعات
	۱	۲	۳	
۱	۴	۰	۰	۰
۲	۲	۱	۰	۳
۳	۲	۰	۱	۱
۴	۱	۲	۰	۱
۵	۱	۰	۱	۶
۶	۰	۲	۰	۶
۷	۰	۱	۱	۴
۸	۰	۰	۲	۲

x_j : تعداد رول‌های برش داده شده مطابق الگوی j ام ، $j = ۱, ۲, \dots, ۸$

تابع هدف : $\min Z = ۰x_۱ + ۳x_۲ + x_۳ + x_۴ + ۶x_۵ + ۶x_۶ + ۴x_۷ + ۲x_۸$

محدودیت ها:

$$\begin{cases} ۴x_۱ + ۲x_۲ + ۲x_۳ + x_۴ + x_۵ \geq ۱۵۰ \\ x_۲ + ۲x_۴ + ۲x_۶ \geq ۲۰۰ \\ x_۳ + x_۵ + x_۷ + ۲x_۸ \geq ۳۰۰ \\ x_j \geq ۰ \ , \ j = ۱, ۲, \dots, ۸ \\ \text{integer} \end{cases}$$

www.tedoc.ir

APEX

Subject.

Year. Month. Date.

مثال) مدل کوله پشتی «The knapsack prob»

یک کوهنورد توانایی حمل کوله پشتی تا حداکثر ۱۴ کیلوگرم را دارد. با در نظر گرفتن ۴ انتخاب زیر هدف کوهنورد ماکزیمم کردن ارزش عددی کل باری است که حمل می کند.

وزن	۵	۷	۴	۳
ارزش	۱۶	۲۲	۱۲	۸

$x_j = \begin{cases} 1 & \text{کالای } j \text{ ام حمل شود} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$ ،

$\text{Max } Z = 16x_1 + 22x_2 + 12x_3 + 8x_4$

$5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 \le 14$ ، $x_j \in \{0,1\}$ → binary variable

مثال) ترکیب خوراک «The food Mix»

به دنبال ترکیب n عنصر $(j = 1, 2, \dots, n)$ هستیم به نحوی که مقدار معینی از m ماده مغذی $(i = 1, 2, \dots, m)$ تأمین شود. فرض کنید c_j هزینه هر واحد عنصر j ام، a_{ij} مقدار ماده مغذی i ام موجود در واحد عنصر j ام، b_i حداقل ماده مغذی لازم باشد، مطلوب حداقل هزینه لازم برای ترکیب

x_j : مقدار استفاده شده از عنصر j ام، $j = 1, 2, \dots, n$

$c_i = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$ هزینه هر واحد مصرف شده از عنصر j ام ،

$\text{Min } C = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ ← هزینه

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i$

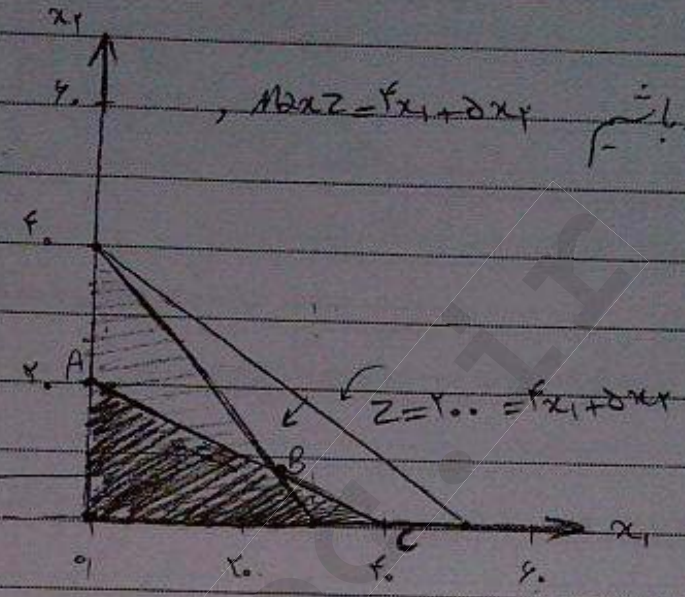
APEX $x_j \ge 0$

* فرق پارامتر و متغیر ← متغیر مقداری نامعلوم دارد ولی پارامتر مقدار مشخص دارد (نه لزوماً مقدار ثابت)

«برنامه‌ریزی خطی در دو بعد»

مثلاً داشته باشیم $\max z = 4x_1 + 5x_2$ ،

$$\begin{cases} (1) & x_1 + 2x_2 \le 40 \\ (2) & 4x_1 + 3x_2 \le 120 \\ (3) & x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$



feasible region منطقه موجه

$4x_1 + 5x_2 = z$ ← 200

$A\Big|_{20}^{0}$ $B\Big|_{8}^{24}$ $C\Big|_{0}^{30}$

$$\begin{cases} z_A = 100 \\ z_B = 136 \\ z_C = 120 \end{cases}$$

با شیفت خط به سمت پایین ابتدا به نقطه B (یعنی ۱۳۶ می‌خورد)

$\Longrightarrow$ optimal solution $\begin{cases} x_1^* = 24 \\ x_2^* = 8 \\ z^* = 136 \end{cases}$

مسأله برنامه‌ریزی خطی:

(1) ← نامحدود: unbounded

(2) ← یک جواب بهینه (یکتا بودن)

(3) ← چندین جواب بهینه یعنی شیب خط تابع هدف به یک پاره خط از فضای شدنی برخورد

(4) ← فاقد جواب (فصل مشترک منطقه موجه و تابع هدف، تهی است)

می‌کند که جواب بهینه ایجاد می‌کند.

دو جواب بهینه برای مسأله برنامه‌ریزی

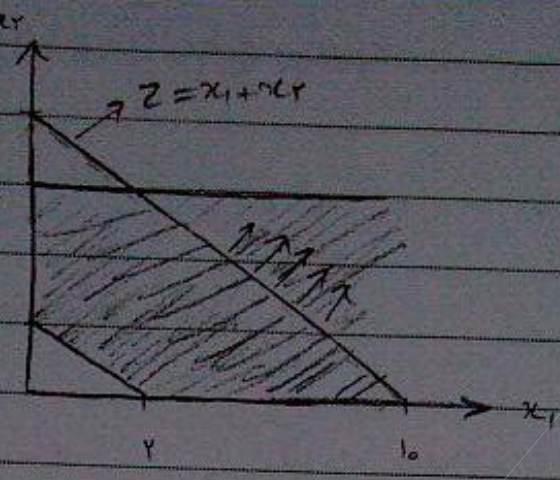
$A\Big|_{y_A}^{x_A}$, $B\Big|_{y_B}^{x_B}$, $0 \le \alpha \le 1$ ترکیب محدب $\Longrightarrow \alpha\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} + (1-\alpha)\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} \in$ منطقه موجه

APEX

$\Rightarrow Z_A = Z_B = Z_C$

مثال)

محدودیت
$x_2 \le 8$
$x_1, x_2 \ge 0$
$x_1 + x_2 \ge 2$



تابع هدف: $\text{Max } Z = x_1 + x_2$

$Z = 10 \Rightarrow x_1 + x_2 = 10$

فضای جواب از جهتی بازاست که حرکت تابع هدف در آن بی‌نهایت جواب نامتناهی ایجاد می‌کند.

روش simplex برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی

ابتدا مسأله به فرم استاندارد تبدیل شود یعنی Max یا Min:

$\text{Max یا Min } Z = CX$

$AX = b$ ← ماتریس ضرایب متغیرها در محدودیت‌ها

$X \ge 0 = \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}$

$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ | & & | \\ | & & | \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$

m: تعداد محدودیت‌ها ؛ n: تعداد متغیرها

$X_{n \times 1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ | \\ | \\ x_n \end{bmatrix}$

$(RHS)\ b_{m \times 1} = \begin{bmatrix} b_1 \\ | \\ | \\ b_m \end{bmatrix}$

مثلاً میزان اولیه سرمایه، زمان، نیروی کار

C بردار ضرایب متغیرها در تابع هدف $= \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$

APEX

الف) محدودیت $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1$

تساوی $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + S_1 = b_1$

↓

(کمبود) stack variable ، $S_1 \geq 0$

ب) محدودیت $a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n \geq b_2$

تساوی $a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n - S_2 = b_2$

↓

(مازاد) Surplus variable

مسأله برنامه‌ریزی خطی استاندارد:

$Max\ Z = CX$

$AX = b$ → feasible region

$X \geq 0$

روش شش برای حل دستگاه: ماتریس ضرایب مربعی شود

تعدادی از متغیرها $= 0$

$A_{m \times n} \longrightarrow B_{m \times m}$

$m < n$ ، $AX = B \Longrightarrow BX = b$

$X_R = \vec{0}$

R مجموعه متغیرهایی است که صفر در نظر گرفته شده‌اند

$BX = b$

$B^{-1}BX = B^{-1}b \longrightarrow X = B^{-1}b$

استقلال خطی: $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}$ بردارهای فرض می‌شوند که ترکیب خطی آنها به صورت زیر است:

$\alpha_1\vec{v_1} + \alpha_2\vec{v_2} + \cdots + \alpha_n\vec{v_n} = \vec{0}$

APEX

www.isadoc.ir

درصورتی برادیر v_1 و v_2 و ... و v_n مستقل خطی هستند اگر رابطه قبل فقط به ازای $\alpha_i = 0$ و $(i=1,2,\dots,n)$

برقرار باشد

حل مسأله برنامه‌ریزی خطی:

الف) به دست آوردن basic solution

X_B: بردار متغیرهای پایه

X_R: " " " غیرپایه

R: مجموعه اندیس متغیرهای غیرپایه

جواب پایه: $\begin{cases} X_B = B^{-1}b \\ X_R = 0 \end{cases}$, $AX = b$

$$AX = BX_B + \sum_{j\in R} a_j x_j = b$$

$$X_B = b' - \sum_{j\in R} \underbrace{B^{-1}a_j}_{y_j} x_j \Rightarrow X_B = b' - \sum_{j\in R} y_j x_j \rightarrow$$ نوشتن متغیرهای پایه برحسب غیرپایه

مثال)

$$3x_1 + x_2 + x_4 = 3$$
$$4x_1 + 3x_2 - x_3 + x_5 = 6$$
$$x_1 + 2x_2 + x_6 = 3$$

$$B = (a_4, a_5, a_6) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B^{-1} = I_3$$

$$X_B = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = B^{-1}b - \sum_{j\in R} y_j x_j = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} - \left[y_1 x_1 + y_2 x_2 + y_3 x_3 \right]$$

$$y_1 = B^{-1}a_1 , \quad y_2 = B^{-1}a_2 , \quad y_3 = B^{-1}a_3$$

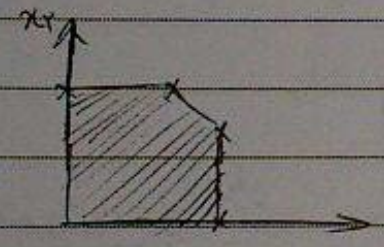
$$\Rightarrow X_B = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 \right]$$

APEX

$\Rightarrow$ یک جواب پایه : $\begin{cases} x_4 = 3 \\ x_5 = 6 \\ x_6 = 3 \\ x_1 = x_2 = x_3 = 0 \end{cases}$, $B_1 = (a_1, a_2, a_4) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

قضیه: چنانچه حداکثر تعداد بردار مستقل خطی برای ماتریس مربعی $B_{m\times m}$ برابر m باشد (رتبه ماتریس B برابر m باشد) پس B (1) دارای وارون خواهد بود

(2) برای دستگاه $BX=b$ جواب حتماً یک نقطه گوشه از فضای موجه است $X=B^{-1}b$



روش یافتن معکوس B_1 : $B_1 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

در مثال قبل

$B_1^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

جواب پایه برای B_1 $= X_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3}{5}, x_2 = \frac{6}{5} \\ x_4 = 0 \\ x_3 = x_4 = x_5 = 0 \end{cases}$

APEX

Subject. Year. Month. Date.

سؤالات: (۱) تشخیص بهینه بودن جواب

(۲) تمام حالات ۴ گانه در برنامه‌ریزی خطی قابل شناسایی باشد.

(۳) چگونه می‌توان از یک گوشه به گوشه دیگر (پایه به پایه دیگر) رفت.

(۴) آیا باید B^{-1} را محاسبه (مستقیم) کرد.

$$\text{Max } Z = CX$$

$$AX = B$$

$$X \geq 0 \qquad X_B = B^{-1}b = b' \geq 0 \rightarrow \text{جواب منطقی}$$

اولاً: بودن جواب پایه

① $X_B = b' - \sum_{j \in R} x_j y_j$ نوشتن متغیرهای پایه برحسب غیرپایه

② تابع هدف: $Z = C_B X_B + \sum_{j \in R} c_j x_j$ C_B: بردار ضرایب متغیرهای پایه در تابع هدف

رابطه (۱) را در (۲) جایگزین می‌کنیم:

$$Z = C_B\left[b' - \sum_{j \in R} y_j x_j\right] + \sum_{j \in R} c_j x_j$$

$$Z = \underbrace{C_B b'}_{Z_B} - \sum_{j \in R} C_B y_j x_j + \sum_{j \in R} c_j x_j \Rightarrow Z = Z_B - \sum_{j \in R} (\overbrace{C_B y_j}^{z_j} - c_j) x_j$$

$$\Rightarrow Z = Z_B - \sum_{j \in R} (z_j - c_j) x_j$$

مقدار تابع هدف به ازای پایه B

شرایط بهینه بودن تابع هدف به ازای پایه B:

(۱) اگر مسأله Max کردن باشد. $z_j - c_j \geq 0 \quad , \forall j \in R$

(۲) " " " min " " . $z_j - c_j \leq 0 \quad , \forall j \in R$

APEX

Subject.

Year. Month. Date.

مثال)

$$\text{Max } Z = 5x_1 + 3x_2 - 6x_3 + x_4 + x_5 + 2x_6$$

$$\text{s.t} \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_4 = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + x_5 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_6 = 3 \\ x_j \geq 0 \quad \forall j \end{cases}$$

(1) جواب پایه قابل قبول ،

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B^{-1} \quad , \quad \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0 \quad , \quad Z = C_B b' - \sum_{j \in R} (C_B B^{-1} a_j - C_j) x_j$$

$$C_B b' = (1, 1, 2) \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = 15 \quad , \quad Z = 15 - (14x_1 + 5x_2 + 5x_3)$$

$z_1 - c_1$ $z_2 - c_2$ $z_3 - c_3$

مثال) مطلوب

$$\text{Max } Z = 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 + 2x_6$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 3x_1 + x_2 + \underline{x_4} = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + \underline{x_5} = 6 \\ x_1 + 2x_2 + \underline{x_6} = 3 \\ x_j \geq 0 \quad \forall j \end{cases}$$

$$B = (a_4, a_5, a_6) = I = B^{-1}$$

جواب پایه : $\begin{cases} x_4 = 3 \\ x_5 = 6 \\ x_6 = 3 \\ x_1 = x_2 = x_3 = 0 \end{cases}$, $Z = C_B b' - \sum_{j \in R} (z_j - c_j) x_j$

$$Z_B = C_B b' = (1 \ 1 \ 2) \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = 15$$

$$Z = 15 - (4x_1 + 5x_2 + 3x_3)$$

$z_3 - c_3$

APEX

$$z_3 - c_3 = C_B B^{-1} a_3 - c_3 = (1\ 1\ 2)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 = -3$$

$$\begin{cases} z_1 - c_1 > 0 \\ z_2 - c_2 > 0 \\ z_4 - c_4 < 0 \end{cases} \xrightarrow{B \text{ پایه}} \text{چون مسأله max است، پس جواب بهینه نیست}$$

$$x_B = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = b' - \sum_{j \in R} y_j x_j = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} x_4 \right]$$

اگر $x_1 = x_2 = 0$ ، $x_4 = \beta > 0$ $\Longrightarrow$ $\begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \beta$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_4 = 3 - 1(\beta) = 3 - \beta \\ x_5 = 6 - (-1)\beta = 6 + \beta \\ x_6 = 3 - 0(\beta) = 3 \end{cases}$$

هر مقداری می‌گیرد و محدودیت نامنفی $\beta > 0$ خواهند بود پس مسأله، نامحدود خواهد بود

P.

شرط نامحدود بودن مسأله:

$$\begin{cases} (1)\ \max : \exists j \in R\ ,\ z_j - c_j < 0\ ,\ y_j \leq 0 \\ \quad \text{حالت مساوی عملاً وجود ندارد.} \\ (2)\ \min : \exists j \in R\ ,\ z_j - c_j > 0\ ,\ y_j \geq 0 \end{cases}$$

جواب مسأله در حالت نامحدود:

$$\begin{cases} x_4 = 3 \\ x_5 = 6 \\ x_6 = 3 \\ \text{بقیه متغیرها} = 0 \end{cases} , \quad z = 15 + 3\beta$$

اگر شرط بهینه بودن یا نامحدود بودن صدق نکند یعنی امکان یافتن مقدار بهتری برای تابع هدف (Z) وجود دارد.

فرض کنید x_k متغیری باشد که برای آن $z_k - c_k < 0$ ، $y_k \not\leq 0$ پس مسأله بهینه نیست و نامحدود هم نمی‌باشد

$$x_B = b' - \sum_{j \in R} y_j x_j \quad (1)$$

در رابطه (۱)، x_k صفر و بقیه صفر در نظر گرفته می‌شوند

$$X_B = b' - y_k x_k = \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_r \\ \vdots \\ b'_m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_{1k} \\ \vdots \\ y_{ik} \\ \vdots \\ y_{mk} \end{pmatrix} x_k$$

چنانچه $y_{ik} > 0$ به دلیل آنکه x_k مقدار بزرگتر از صفر می‌گیرد

$$X_B = \begin{pmatrix} x_{B_1} \\ \vdots \\ x_{B_i} \\ \vdots \\ x_{B_m} \end{pmatrix} \longrightarrow x_{B_i} = b'_i - y_{ik} x_{ik} \longrightarrow x_k = \frac{b'_i}{y_{ik}}$$

حداکثر مقدار x_k

اگر چنین y_{ik} ، $i = 1, 2, \dots, m$ وجود داشته باشد؛

θ حداکثر مقدار x_k خواهد بود $\theta = \min \left\{ \frac{b'_i}{y_{ik}} \mid y_{ik} > 0 \right\} = \frac{b'_r}{y_{rk}}$

فرض کنیم در محاسبه مقدار θ، $i = r$ نشان دهنده موقعیتی است که متغیر پایه روبروی آن صفر می‌شود،

نتیجه: چون ماتریس پایه $B_{m \times m}$ دارای رتبه کامل می‌باشد، چنانچه یک متغیر جدید، مقدار یکبر دیگر یعنی

یک بردار به ماتریس B اضافه شود لذا یک بردار باید از ماتریس حذف شود، طبق محاسبات فوق x_k به

پایه اضافه می‌شود و x_r از پایه حذف می‌شود

(مثال)

$$\max Z = 10x_1 + 3x_2 - 6x_3 + x_4 + x_5 + 2x_6$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_4 = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + x_5 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_6 = 3 \end{cases}$$

$B=(a_4,a_5,a_6)=I=B^{-1}$

$Z=15-(-x_1+5x_2+5x_3)$, چون $z_1-c_1<0$ ← جواب بهینه نیست

$z_1-c_1<0$, $Y_1=\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}\not\leq 0$ ⟶ مسئله نامحدود نیست

و بردار a_1 و متناظر آن X_1 وارد پایه می‌شود ⟶

برای تعیین بردار (متغیر) خروجی از پایه : $\theta=\min\{\frac{3}{3},\frac{6}{4},3\}=\frac{3}{3}$

چون روبروی x_4 ، $\min\theta$ ظاهر می‌شود، پس x_4 خارج می‌شود

$\Longrightarrow$ پایه جدید : (a_1,a_5,a_6) , ادامه

مثال)

$\max Z=x_1+x_2+x_3-x_4-2x_5$

s.t. $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}x_1+\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}x_2+\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}x_3+\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}x_4+\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}x_5=\begin{pmatrix}2.5\\3\\4\end{pmatrix}$

, $x_j\geq 0$

$B=(a_1,a_2,a_3)=\begin{bmatrix}1&1&2\\2&1&1\\3&1&1\end{bmatrix}$, $b=\begin{bmatrix}2.5\\3\\4\end{bmatrix}$

$B^{-1}=\begin{bmatrix}0&-1&1\\-1&5&-3\\1&-2&1\end{bmatrix}$ ⟶ جواب پایه $\begin{cases}X_B=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=B^{-1}b=\begin{pmatrix}1\\0.5\\0.5\end{pmatrix}\\ x_4=x_5=0\end{cases}$

www.iadoc.ir

C_B	θ	X_B	b'	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
1	$\frac{1}{1}$	x_1	1	1	0	0	1	0
1	—	x_2	0.5	0	1	0	-4	2
1	$\frac{0.5}{1}$	x_3	-0.5	0	0	1	(1)	-1
		z	z_B ↓ 2	z_1-c_1 ↓ 0	z_2-c_2 ↓ 0	z_3-c_3 ↓ 0	z_4-c_4 ↓ -1	z_5-c_5 ↓ 3

→ pivot element

عنصر لولا

$z_j - c_j = C_B B^{-1} a_j - c_j$

چون $z_4 - c_4 < 0$ پس این

جواب بهینه نیست ← $y_4 \not\leq 0$ ولی $z_4 - c_4 < 0$ پس نامحدود است

متغیر x_4 به پایه وارد می‌شود چون $z_4 - c_4 < 0$

x_3 از پایه خارج می‌شود چون θ آن min است. اگر جدول اول سیمپلکس تشکیل نشود، مسئله جواب نخواهد داشت.

C_B	θ	X_B	b'	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
		x_1	0.5	1	0	-1	0	1
		x_2	2.5	0	1	4	0	-2
		x_4	0.5	0	0	1	1	-1
		z	2.5	0	0	1	0	2

جواب بهینه: $\begin{cases} x_1 = 0.5 \\ x_2 = 2.5 \\ x_4 = 0.5 \end{cases}$, $x_3 = x_5 = 0$ $\quad z^* = 2.5$

* اگر x_k در پایه و x_r از پایه خارج شود پس y_{rk} عنصر لولا خواهد بود

* برای تغییر جدول سیمپلکس:

(۱) برای سطر مربوط به متغیر خروجی از پایه:

$$\hat{y}_{rj} = \frac{y_{rj}}{y_{rk}}$$

(۲) برای سایر مقادیر در جدول simplex

$$\hat{y}_{ij} = y_{ij} - y_{ik}\frac{y_{rj}}{y_{rk}} \quad , i = 1,2,\dots,m+1 \ , i \neq r$$

$$j = 1,2,\dots,n$$

«الگوریتم simplex»

(۱) یک پایه برای مسئله در نظر می‌گیریم، برای پایه مورد نظر، متغیرهای پایه و تابع هدف را براساس متغیر غیرپایه بنویسید و جدول simplex را تشکیل دهید. اگر پایه قابل قبولی تشکیل نشود، مسئله فاقد جواب است. (پایه قابل قبول $b_i \geq 0$)

(۲) $z_j - c_j$ را حساب کنید اگر $\forall j: z_j - c_j \geq 0$ جواب موجود بهینه است (البته برای مسئله ماکزیمم) پایان

در غیراین صورت $\exists k \in R \ , \ z_k - c_k < 0$ (برای حداقل یک متغیر غیرپایه) $y_k \leq 0$

مسئله نامحدود می‌شود ← پایان در غیراین صورت x_k وارد پایه می‌شود.

(۳) برای تعیین بردار خروجی از پایه (x_r) از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$\theta = \frac{b'_r}{y_{rk}} = \min\left\{\frac{b'_i}{y_{ik}} \mid y_{ik} > 0\right\}$$

(۴) برای پایه جدید، جدول simplex را با روابط زیر تشکیل دهید. (همان روابط صفحه قبل)

و به قدم ۲ بازمی‌گردیم.

www.tadbo.ir

حالت تبهگن (degeneracy) : مقدار تابع هدف وقتی از جدول ۱ به جدول ۲ می رویم تغییر نکند

مثال) : کارخانه ای دارای ۳ بخش (کارگاه) صنعتی است که ۴ نوع محصول تولید می کند.

کارگاه \ محصول	زمان مورد نظر برای ساخت یک واحد ۱	۲	۳	۴	ظرفیت ساخت (ساعت)
۱	۱	۱	۱	۱	۱۵
۲	۷	۵	۳	۲	۱۲۰
۳	۳	۵	۱۰	۱۵	۱۰۰
سود یک واحد	۴	۵	۹	۱۱	

الف) مدل ریاضی مسأله

ب) حل مسأله

X_j : مقدار تولید محصول ژام

$$\text{Max } Z = 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4$$

$$\text{S.t.} \begin{cases} 1x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 15 \\ 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \le 120 \\ 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \le 100 \\ x_j \ge 0 \quad \forall j \end{cases}$$

اگر قرار باشد کارگاه ها به ازای محصولات اختصاص یابند (کدام محصول به چه مقدار در کدام کارگاه تولید شود)

داریم : X_{ij} : مقدار تولید محصول iام در کارگاه jام

www.tedoc.ir

« TA »

(۲۶) مسأله تخصیص :

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{کارگر i ام به ماشین j ام تخصیص داده شود} \\ 0 & \text{نشود} \end{cases}$$

$$C = [c_{ij}] = \begin{bmatrix} ۲۲ & ۱۸ & ۳۵ \\ ۴۱ & ۳۰ & ۲۸ \\ ۲۵ & ۳۶ & ۱۸ \end{bmatrix}$$ ، تابع هدف : $\min T = \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij}$

s.t. $\sum_j x_{ij} = 1$ هر کارگر فقط روی یک ماشین کار می‌کند

$\sum_i x_{ij} = 1$ روی هر ماشین فقط یک کارگر ، $x_{ij} \in \{0,1\}$

(۲۹)

قالب ریزی	→	صیقل کاری	→	رنگ زنی
۷ تعداد ساعت		۱۲		۱۰
۸ هزینه هر یک از عملیات		۵		۶٫۵

X_i : تعداد ساعت صرف شده در مرحله ام

$x_1 \qquad x_2 \qquad x_3$

$7x_1 \geq 12x_2 \geq 10x_3$

s.t. $7x_1 \geq 12x_2$ ، تعداد خروجی $= 10x_3 \Longrightarrow \max Z = 175 \times 10x_3 = 1750x_3$

$12x_2 \geq 10x_3$

$90 \times 7x_1 \leq 10000$

حالت مساوی برای وقتی است که چیزی در ذیل نداریم

x_{ij} : مقدار کالای انتقالی از گره i به گره j (۳۰)

$x_{13} + x_{14} + x_{15} = A$

$x_{12} = x_{25}$

$x_{13} = x_{34}$

$x_{14} + x_{34} = x_{45}$

$x_{25} + x_{45} = A$

$x_{ij} \geq 0$

فرض : A تعداد کل کالا در سیستان

c_{ij} : هزینه انتقال یک تن کالا از گره i به گره j

طول تخته	مقدار تقاضا
j	d_j
مثال : ۵ متری	۷۰۰ تا

(۳۳)

a_{ij} : تعداد تخته نوع j در الگوی i ام برش

l_i : ضرر در الگوی i ام

x_i تعداد برش در الگوی i ام

تابع هدف

(الف) $\min z = \sum_i x_i$

(ب) $\min z = \sum_i l_i x_i$

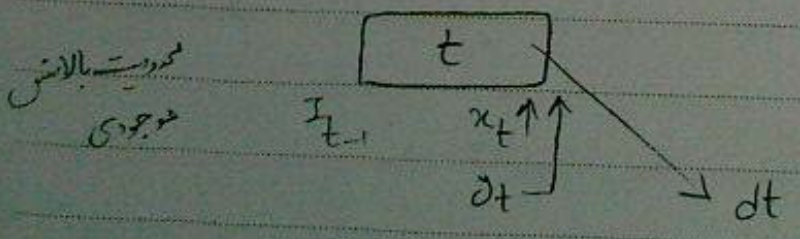
(۳۶)

d_t : میزان فروش

z_t : تعداد تولید در دوره t ام (در زمان عادی)

y_t : " " " " (در زمان اضافه کاری)

I_t : موجودی دیدیر در دوره t ام



www.tedoc.ir

$I_{t-1} + \underbrace{(x_t + y_t)}_{\text{تولید}} - d_t = I_t \quad , \quad I_{t-1} + (x_t + y_t) - I_t = d_t \quad , \forall t$

$I_0 = 0 \; , I_3 = 0 \quad , \quad 0 \le x_t \le 2000$

$0 \le y_t \le 600$

$$\text{Min } C = 10 \sum_{t=1}^{5} x_t + 15 \sum_{t=1}^{5} y_t + 2 \sum_{t=1}^{5} I_t$$

هزینه نگهداری کالا

x_{ij} : تعداد کالای انتقالی از گره i به گره j (۳۸)

cap_{ij} : حداکثر تعداد قابل انتقال از i به j

↳ اندیس‌های یال ij

تابع هدف : $\text{Max } x_{AB} + x_{AC}$

برای گره B : $x_{AB} = x_{BC} + x_{BD} + x_{BE}$

$0 \le x_{ij} \le cap_{ij} \quad , \forall ij$

x_t : تعداد کارمندانی که در دوره t ام شروع به کار می‌کنند (۴۲)

$x_1 + x_2 \ge 90 \qquad x_3 + x_4 \ge 60$

$x_1 + x_2 \ge 215 \qquad x_4 + x_5 \ge 300$

$x_2 + x_3 \ge 250 \qquad x_5 + x_6 \ge 145$

$x_t \ge 0 \; , \text{int}$

www.tadoc.ir

مثال) ادامه حل مثال دو صفحه قبل:

استانداردسازی محدودیت‌ها (چون جواب پایه دوحالت استاندارد است)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + s_1 = 15 \\ 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 + s_2 = 120 \\ 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 + s_3 = 100 \\ \forall j : x_j \geq 0 \ , \ s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{cases}$$

θ	C_B	X_B	b' (*)	y_1	y_2	y_3	y_4 ↓	y_{s_1}	y_{s_2}	y_{s_3}
$\frac{15}{1}$	0	s_1	15	1	1	1	1	1	0	0
$\frac{120}{2}$	0	s_2	120	7	5	3	2	0	1	0
$\frac{100}{15}$	0	s_3	100	3	5	10	(15)	0	0	1
		Z_B	0	-4	-5	-9	-11	0	0	0

(*) چون $B = B^{-1}$ ، چون $z_j - c_j$ها منفی است پس جواب، پایه نیست، بهتر است متغیری که $z_j - c_j$ اش منفی‌تر است وارد پایه شود

θ	C_B	X_B	b'	y_1	y_2	y_3	y_4	y_{s_1}	y_{s_2}	y_{s_3}
$\frac{5}{3} \div \frac{4}{5}$	←	s_1	$\frac{5}{3}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	1	0	
$\frac{320}{3} \div \frac{33}{5}$		s_2	$\frac{320}{3}$	$\frac{33}{5}$	$\frac{15}{2}$	$\frac{5}{2}$	0	0	1	
$\frac{1}{15} \div \frac{3}{15}$		x_4	$\frac{100}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{5}{15}$	$\frac{10}{15}$	1	0	0	$\frac{1}{15}$
		Z_B	$\frac{1100}{15}$	$\frac{-9}{5}$	$\frac{-4}{3}$	$\frac{-5}{3}$	0	0	0	$\frac{11}{15}$

منفی‌تر ⇐ x_1 وارد پایه می‌شود

جواب پایه نیست

	X_B	b'	y_1	y_2	y_3	y_4	y_{s_1}	y_{s_2}	y_{s_3}
	x_1	$\frac{125}{12}$	1	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{12}$	0	$\frac{5}{4}$	0	$-\frac{1}{12}$
	s_2	$\frac{455}{12}$	0	$-\frac{7}{6}$	$-\frac{13}{12}$	0	$\frac{33}{4}$	1	$\frac{5}{12}$
$\min\theta$:	x_4	$\frac{55}{12}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{12}$	1	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{12}$
	z	$\frac{1105}{12}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{-11}{12}$	0	$\frac{9}{4}$	0	$\frac{7}{12}$

	X_B	b'	y_1	y_2	y_3	y_4	y_{s_1}	y_{s_2}	y_{s_3}
	x_1	$\frac{50}{7}$	1	$\frac{5}{7}$	0	$-\frac{5}{7}$	$\frac{10}{7}$	0	$-\frac{1}{7}$
	s_2	$\frac{325}{7}$	0	$-\frac{6}{7}$	0	$\frac{13}{7}$	$-\frac{61}{7}$	1	$\frac{4}{7}$
	x_3	$\frac{55}{7}$	0	$\frac{2}{7}$	1	$\frac{12}{7}$	$-\frac{3}{7}$	0	$\frac{1}{7}$
	z	$\frac{695}{7}$	0	$\frac{3}{7}$	0	$\frac{11}{7}$	$\frac{13}{7}$	0	$\frac{5}{7}$

تکمیل جواب بهینه

جواب بهینه: $x_1=\frac{50}{7}$ ، $x_2=0$ ، $x_3=\frac{55}{7}$ ، $x_4=0$ و $s_1=0$ ، $s_2=\frac{325}{7}$ ، $s_3=0$

$z^*=\frac{695}{7}$ ⟹ چون $s_1=s_3=0$ ⟵ ظرفیت کارگاه‌های ۱ و ۳ تکمیل می‌شود ولی در کارگاه ۲، کمبود خواهیم داشت.

Degeneracy : (تبهگن یا انحطاط)

الف) مقدار b' هر ردیف یک متغیر پایه صفر باشد و عنصر لولا روی همین سطر دیده شود (عنصر لولا همیشه مثبت است)

در این صورت مقدار تابع هدف در جدول بعدی تغییر نمی‌کند. متغیر خروجی به پایه مجدداً دارای b' با مقدار صفر است.

(ب) اگر یک متغیر غیرپایه دارای z_j-c_j مساوی صفر باشد و به هر دلیلی بخواهیم آن را وارد پایه کنیم

Subject:
Year. Month. Day.

PAYA

در این صورت در جدول بعدی، مقدار تابع هدف ثابت می ماند.

«TA»

مدل های بهینه سازی
- خطی LP
- غیرخطی NLP

فرضیات مدل خطی:

(۱) تناسب $Z = C_1x_1 + C_2x_2$

$a_1x_1 + a_2x_2 \geq b$

تخفیف / پس انداز / هزینه اولیه

تابع هدف: $\frac{y}{x_i} = C_i$, $x = 0 \Rightarrow y = 0$

(۲) جمع پذیری
- عملیات جمع $x_1 + x_2$ یا $x_1 + (-x_2)$
- قابل جمع: متغیرها هم جنس باشند مثلا ۱۰۰ لیتر آب با ۲۰۰ لیتر آب

(۳) تقسیم پذیری: متغیرها قابل تقسیم به هر عدد مثبتی باشند

$\min Cx$
$Ax \leq B$
باید نسبت $\frac{B}{A}$ صحیح باشد

(۴) قطعی و معین بودن: $x_1 = 5$ ، $C_1 = 6$ ، متغیرها به صورت تابع توزیع احتمال نباشند

$C \sim N(\mu, \sigma) \Rightarrow C = \mu$

تابع هدف: $\min(\max)\ C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3 + \dots + C_nx_n$ (هزینه / درآمد)

$\sum a_{ij}x_j \leq / = / \geq b_i \quad \forall i$

ضرایب فنی

$x_j \geq 0$ / غیر از این نامقید (مقید)

مقادیر سمت راست

متغیر تصمیم x_j و

www.iedoc.ir

مدل برنامه‌ریزی خطی ← کانونی (متقارن)
← استاندارد

کانونی

$$\begin{cases} \min CX & \max CX \\ AX \geq B & AX \leq B \\ X \geq 0 & X \geq 0 \end{cases}$$

استاندارد

$$\begin{cases} \min CX / \max CX \\ AX = B \\ X \geq 0 \end{cases}$$

$\min CX \approx -\max CX$

$aX \geq b \approx -aX \leq -b$

$aX = b \approx \begin{cases} aX \geq b \\ aX \leq b \end{cases}$

استانداردسازی: مازاد

$aX \geq b \Rightarrow aX - S_1 = b$ ← surplus

$aX \leq b \Rightarrow aX + S_1 = b$

↓ slack ← کمبود

Auxilary Var

متغیرهای کمکی

مثال)

$|2x_1 + x_2| \leq 3 \rightarrow -3 \leq 2x_1 + x_2 \leq 3$

← دو محدودیت خطی ← خطی (قابلیت خطی‌سازی دارد)

$|2x_1 + x_2| \geq 3$ ← $2x_1 + x_2 \geq 3$ یا $2x_1 + x_2 \leq -3$ ← غیرخطی است.

x_i

↳ آزاد در عبارت free $\approx x_j^+ - x_j^-$, $x_j^+, x_j^- \geq 0$

$x_j = -3 \longrightarrow$ ۳

کانشان دهنده وابستگی خطی آنهاست

یکی غیر پایه و دیگری پایه است

$|x_j|$ ⟶ نامنفی

↳ free , $x_j^+ + x_j^-$, $x_j^-, x_j^+ \geq 0$

حل هندسی :

$$\min Z = x_1 - 3x_2 \quad , \quad s.t. \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$X = \left\{ x \;\middle|\; \begin{matrix} x_1 + x_2 \leq 6 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 1 \\ x \geq 0 \end{matrix} \right\} \quad , \quad x^* = \{ x \in X ; Cx^* \leq Cx \}$$

↓ فضای feasible

قضیه : اگر مسئله‌ای جواب بهینه داشته باشد حداقل یکی از جواب به، در گوشه است

Max: در جهت گرادیان حرکت می‌کنیم

min: در خلاف جهت گرادیان حرکت می‌دهیم

روش m در مسأله سیمپلکس ⟵ The big m

$Max\ Z = CX$ Q: اندیس بردارهای واحدی است که

$AX = b$ (I) در ماتریس A موجود نیستند.

$X \geq 0$

$Max\ \bar{Z} = CX + \sum_{i=Q} (-M) X_{a_i}$, M عدد خیلی بزرگ (II)

X_{a_i} : متغیر مصنوعی برای سطر iام $i=Q$

$AX + \sum_{i=Q} e_i \cdot X_{a_i} = b$

مثال)

$Max\ Z = 3x_1 + 4x_2 + x_3$

s.t. $x_1 + x_2 + x_3 = 7$

$-x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 3$

$2x_1 + x_2 - x_3 \geq 8$

$x_j \geq 0 \quad \forall j$, $Q = \{1, 3\}$

مسأله جدید : $Max\ \bar{Z} = 3x_1 + 4x_2 + x_3 - MX_{a_1} - MX_{a_3}$

s.t. $x_1 + x_2 + x_3 + X_{a_1} = 7$

$-x_1 + x_2 + 3x_3 + S_2 = 3$

$2x_1 + x_2 - x_3 - S_3 + X_{a_3} = 8$, $B = (a_1, S_2, a_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= B^{-1} = I_3$, B : فول رنک است

مسأله II با روش سیمپلکس حل می شود.

مسأله II جواب بهینه دارد یا نامحدود می شود:

الف) اگر مسأله (II) به جواب بهینه برسد:

Subject:
Year. Month. Day.

PAYA

(۱) در جواب بهینه، هیچ متغیر مصنوعی وجود ندارد

(۲) در جواب بهینه، حداقل یک متغیر تصادفی مصنوعی وجود دارد ولی مقدار آنها همگی صفر است

(۳) در جواب بهینه، حداقل یک متغیر مصنوعی با مقدار مثبت در پایه وجود دارد

5 اگر مسأله II به وضعیت (۱) برسد به جواب بهینه برای مسأله اصلی رسیده‌ایم

اگر مسأله II به وضعیت (۳) برسد، مسأله اصلی فاقد جواب است

اگر مسأله II به وضعیت (۲) برسد، یک جواب قابل قبول برای دستگاه محدودیت‌ها یافته‌ایم که عملاً همان جواب

10 مسأله اصلی خواهد بود، ولی می‌توان متغیر مصنوعی با مقدار صفر را که در پایه قرار دارد از پایه خارج کرد و متغیر دیگری

جایگزین کرد.

15 (ب) اگر مسأله (II) نامحدود شود.

(۴) هنگامی که علامت نامحدودبودن در مسأله II در شرایطی رخ دهد که کل متغیرهای مصنوعی، صفر هستند.

در این صورت مسأله اصلی نامحدود است.

20

(۵) علامت نامحدودبودن روی ستونی از جدول simplex مسأله II دیده شود که حداقل $z_j - c_j$ را دارد و

حداقل یک متغیر مصنوعی با مقدار مثبت در پایه است ← در این صورت مسأله (I) جواب ندارد

25

www.tedoc.ir

مثال)

$$\max Z = x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 2.5$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 3$$

$$3x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 4$$

$$x_j \geq 0 \;,\; \forall j$$

$$Q = \{1, 2, 3\} \;,\; \max \bar{Z} = x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 - Mx_{a_1} - Mx_{a_2} - Mx_{a_3}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_{a_1} = 2.5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 + x_{a_2} = 3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + x_5 + x_{a_3} = 4 \end{cases}$$

برای x_{a_i} ها ستون y_{a_i} نوشته نمی شود چون نمی خواهیم دوباره به پایه برگردند

$C_{B_{10}}$	X_B	b'	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	θ
$-m$	x_{a_1}	2.5	1	1	2	-1	0	2.5
$-m$	x_{a_2}	3	2	1	1	-1	1	1.5
$-m$	x_{a_3}	4	(3)	1	1	0	1	1.33
	$\bar{Z}$	$-6m$	$-6m-1$	$-3m-1$	$-4m-1$	$2m+1$	$-2m+2$	
	x_{a_1}	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$	-1	$-\frac{1}{3}$	min
	x_{a_2}	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	-1	$\frac{1}{3}$	
	x_1	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	
	$\bar{Z}$	$-1.5m + \frac{4}{3}$	0	$-m - \frac{2}{3}$	$-2m - \frac{2}{3}$	$2m+1$	$\frac{1}{3}$	
	x_4	-1.7	0	$\frac{1}{5}$	1	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	
	x_{a_2}	0.1	0	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{4}{5}$	$\frac{2}{5}$	
	x_1	1.1	1	1.5	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	
	$\bar{Z}$	$-0.1m + 1.8$	0	$\frac{-m}{5} - 2.5$	0	$\frac{4}{5}m + 2.5$	$\frac{-2}{5}m + \frac{11}{5}$	

Subject:

Year. Month. Day.

PAYA

X_B	b'	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	θ
X_2	۰/۱۵	۰	۰/۵	۱	-۱	۰	
X_5	۱/۲۵	۰	۰/۵	۰	-۲	۱	
X_1	۱	۱	۰	۰	+۱	۰	
$\bar{Z}$	۱/۲۵	۰	$-\frac{1}{5}$	۰	۵	۰	
X_3	۰/۵	۰	۰	۱	۱	-۱	
X_2	۰/۵	۰	۱	۰	-۴	۲	
X_1	۱	۱	۰	۰	۱	۰	
	$\bar{Z}$	۲	۰	۰	۰	-۲	۱
X_4	۰/۵	۰	۰	۱	۱	-۱	
X_2	۲/۵	۰	۱	۴	۰	-۲	
X_1	۰/۵	۱	۰	-۱	۰	۱	
$\bar{Z}^*$	۲/۵	۰	۰	۱	۰	۲	

«روش دوفازی»

مسئله صفر

$\max Z = CX$

$AX = b \quad , b \geq 0$

$X \geq 0$

فاز ۱ : $a = ?$ آنیس بردارهای واحدی که در مسئله نیستند

مسئله (۱)

$\max Z^* = -\sum_{i \in Q} X_{ai} \quad , \quad AX + \sum e_i X_{ai} = b$

$X \geq 0 \quad , \quad X_{ai} \geq 0 \quad , \quad i \in Q$

مثال)

$\max Z = X_1 + X_2 + X_3$

s.t. $4x_1 + x_2 - 3x_3 = 8$ $\quad -4x_1 - x_2 + 3x_3 = 8$

$2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 11 \longrightarrow 2x_1 + x_2 + 2x_3 + s_2 = 11$

$5x_1 - 3x_2 + x_3 \ge 9 \quad 5x_1 - 3x_2 + x_3 - s_3 = 9$

$x_j \ge 0 \ \forall j \quad , Q = [1, 3]$

فازاول $\quad \text{Max } \bar{z} = -x_{a_1} - x_{a_2} \longrightarrow$ s.t. $-4x_1 - x_2 + 3x_3 + x_{a_1} = 8$

$2x_1 + x_2 + 2x_3 + s_2 = 11$

$5x_1 - 3x_2 + x_3 - s_3 + x_{a_2} = 9$

$x_1, x_2, x_3, x_{a_1}, x_{a_2}, s_2, s_3 \ge 0$

نکته: مسأله فازاول حتماً به حالت بهینه می رسد.

۳ حالت رخ می دهد: (۱) در جواب بهینه مسأله (۱) هیچ متغیر مصنوعی در پایه وجود ندارد.

(۲) در جواب بهینه مسأله (۱) حداقل یک متغیر مصنوعی در پایه وجود دارد ولی تمام آنها مقدار صفر خواهند داشت

(۳) در جواب بهینه مسأله (۱) حداقل یک متغیر مصنوعی با مقدار مثبت در پایه وجود دارد:

اگر به حالت (۱) برخورد کنیم:

یک پایه قابل قبول برای مسأله صفر یافته ایم لازم است سطر z مجدداً محاسبه شود و مسأله ادامه می یابد (فاز ۲)

اگر به حالت (۳) برخورد کنیم: مسأله صفر فاقد جواب است

اگر به حالت (۲) برگردیم : مسئله وارد فاز ۲ می‌شود یعنی مسئله جدید به فرم زیر خواهیم داشت .

$$\text{Max } Z^{**} = CX$$

$$AX + \sum e_i x_{a_i} = b \qquad (۲)$$

$$X \geq 0 \ , \ x_{a_i} \geq 0 \ , \ i \in Q$$

در این صورت سطر Z ، تعویض می‌شود و در تمام مدت حل مسئله تا پایان باید متغیرهای مصنوعی را در مقدار صفر نگه داشت .

اگر مسئله (۲) را حل کنیم و به جواب بهینه برسیم که در آن $x_a = 0$ ، جواب به دست آمده برای مسئله صفر بهینه است . ثانیاً در جریان حل مسئله ۲ به جدولی برسیم که :

برای هر متغیر مصنوعی در پایه $y_{ij} = 0$

برای $j \in R$ که $z_j - c_j < 0$ است ،

سایر موارد $y_{ij} \leq 0$

مسئله (۲) و به دنبال آن مسئله (۱) نامحدود خواهد شد .

ثالثاً اگر با حالتی غیر از دو حد قبلی مواجه شویم باید تغییر پایه داد .

فرض کنیم $z_j - c_j < 0$ و $y_{ij} > 0$ روبردی متغیر مصنوعی در پایه که مقدارش صفر است در این صورت در اثر تغییر پایه متغیر مصنوعی در جعول بعدی ، صفری ماند

← اگر $z_j - c_j < 0$ و $y_{ij} = 0$ روبری متغیر مصنوعی در پایه مجدداً در جدول بعدی، مقدار متغیر مصنوعی، صفر می ماند

← اگر نمیر از دو حالت فوق دیده شود چنانچه براساس روش simplex تغییر پایه دهیم در جدول بعدی، مقدار متغیر مصنوعی مثبت خواهد ماند. عنصر لولا را باید تغییر داد (برای اجتناب از مثبت شدن متغیر مصنوعی)

یعنی تغییر متغیر ورودی و یا خروجی

(مثال)

$$\min z = x_1 + 2x_2 + x_4 + x_5 - 5x_6$$

$$\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 + 2x_6 = 4 \\ 2x_1 - \frac{1}{3}x_2 - x_3 + x_4 + \frac{1}{2}x_5 \geq 3 \\ -3x_1 + x_2 - 2x_3 - 4x_4 + \frac{1}{2}x_5 - x_6 \geq -2 \\ x_j \geq 0 \quad \forall j \end{cases}$$

$$\text{s.t} \begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 + 2x_6 = 4 \\ 2x_1 - \frac{1}{3}x_2 - x_3 + x_4 + \frac{1}{2}x_5 - s_2 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 - \frac{1}{2}x_5 + x_6 + s_3 = 2 \end{cases}$$

$Q = \{1, 2\}$ (الف): $\max z^* = -x_{a_1} - x_{a_2}$

$$\text{s.t} \begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 + 2x_6 + x_{a_1} = 4 \\ 2x_1 - \frac{1}{3}x_2 - x_3 + x_4 + \frac{1}{2}x_5 - s_2 + x_{a_2} = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 - \frac{1}{2}x_5 + x_6 + s_3 = 2 \\ x_j \geq 0 \ \forall j, \ x_{a_1}, x_{a_2}, s_3, s_2 \geq 0 \end{cases}$$

Subject:

Year. Month. Day.

PAYA

θ	C_B^*	X_B	b'	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_{s_2}	y_{s_3}
$\frac{4}{6}$	-1	x_{a_1}	4	6	-2	1	-1	1	2	0	0
$\frac{3}{2}$	-1	x_{a_2}	3	2	$-\frac{1}{3}$	-1	1	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\frac{2}{3}$	0	S_3	2	(3)	-1	2	4	$-\frac{1}{2}$	1	0	1
		Z^*	-7	-8	$\frac{7}{3}$	0	0	$-\frac{3}{2}$	-2	1	0
$-$		x_{a_1}	0	0	0	-3	-9	0	0	0	-2
		x_{a_2}	$\frac{5}{2}$	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{7}{3}$	$-\frac{5}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	-1	$-\frac{2}{3}$
$-$		x_1	$\frac{7}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
		Z^*	$-\frac{5}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{16}{3}$	$\frac{32}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{8}{3}$
	0	x_{a_1}	0	0	0	-3	-9	0	0	0	-2
فازدوم	2	x_2	5	0	1	-7	-5	$\frac{1}{2}$	-2	-3	-2
	1	x_1	$\frac{1}{3}$	1	0	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	-1	$-\frac{1}{3}$
		Z^*	0	0	0						
		Z^{**}	$\frac{37}{3}$	0	0	$-\frac{47}{3}$	$-\frac{34}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	-7	$-\frac{14}{3}$

حالت بهینه ندارد

چون مثبت اند و مسئله min گرفتن است و به خاطر ستون y_6، مسئله نامحدود است

جواب قابل قبول

$$x_1 = \frac{7}{3}$$
$$x_2 = 5$$
$$x_3 = y_4 = y_5 = s_1 = s_3 = 0$$
$$Z = \frac{37}{3}$$

فرم دوم: $\min Z^{**} = x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 - 5x_6$

$$AX + \sum_{i \in Q} e_i x_{a_i} = b$$

سوال) اگر $b<0$ باشد مسأله نامحدود می‌ماند یا حتماً باید $b=0$ باشد؟

مثال)

$$\max Z = x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 2.5$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 3$$

$$3x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 4$$

$$Q = \{1,2,3\}, \quad \max Z^* = -x_{a_1} - x_{a_2} - x_{a_3}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_{a_1} = 2.5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 + x_{a_2} = 3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + x_5 + x_{a_3} = 4 \\ x_i \geq 0 \ \forall i, \quad x_{a_1}, x_{a_2}, x_{a_3} \geq 0 \end{cases}$$

www.tadoc.ir

Subject:
Year. Month. Day.

PAYA

a	C_B^*	X_B	b'	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
۲٫۵	X_{a_1}	-۱	۲٫۵	۱	۱	۲	-۱	۰
-۱٫۵	X_{a_2}	-۱	۳	۲	۱	۱	-۱	۱
← $\frac{۴}{۳}$	X_{a_3}	-۱	۴	۳	۱	۱	۰	۱
		Z^*	-۹٫۵	-۶	-۳	-۴	۲	-۲
	X_{a_1}	X_{a_1}	$\frac{۷}{۶}$	۰	$\frac{۲}{۳}$	$\frac{۵}{۳}$	-۱	$-\frac{۱}{۳}$
		X_{a_2}	$\frac{۱}{۳}$	۰	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۳}$	-۱	$\frac{۱}{۳}$
		X_1	$\frac{۴}{۳}$	۱	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۳}$	۰	$\frac{۱}{۳}$
		Z^*	-۱٫۵	۰	-۱	-۲	۲	۰
		X_3	۰٫۷	۰	$\frac{۲}{۵}$	۱	$-\frac{۳}{۵}$	$-\frac{۱}{۵}$
←	-	X_{a_2}	-۰٫۱	۰	$\frac{۱}{۵}$	۰	$-\frac{۴}{۵}$	$\frac{۲}{۵}$
		X_1	۱٫۱	۱	$\frac{۱}{۵}$	۰	$\frac{۱}{۵}$	$\frac{۲}{۵}$
		Z^*	-۰٫۱	۰	$-\frac{۱}{۵}$	۰	$\frac{۴}{۵}$	$-\frac{۲}{۵}$
	۱	X_3	-۰٫۷۵	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱	-۱	۰
←	-۲	X_5	-۰٫۲۵	۰	$\frac{۱}{۲}$	۰	-۲	۱
	۱	X_1	۱	۱	۰	۰	۱	۰
		Z^*	۰	۰		۰		۰
		Z^{**}	۱٫۲۵	۰	-۱٫۵	۰	۵	۰
	۱	X_3	-۰٫۵	۰	۰	۱	۱	-۱
	۱	X_2	-۰٫۵	۰	۱	۰	-۴	۲
	۱	X_1	۱	۱	۰	۰	۱	۰
		Z^{**}	۲	۰	۰	۰	-۱	۳
		X_4	-۰٫۵	۰	۰	۱	۱	-۱
		X_2	۲٫۵	۰	۱	۴	۰	-۲
		X_1	-۰٫۵	۱	۰	-۱	۰	۱
		Z^{**}	۲٫۵	۰	۰	۱	۰	۲

www.iedoc.ir

جواب بهینه : $\begin{cases} X_1 = 0/5 \\ X_2 = 2/5 \\ X_3 = X_5 = 0 \\ X_4 = 0/5 \end{cases}$ $Z = 2/5$

«روش سیمپلکس تجدیدنظر شده»

Revised Simplex

فرم (1)

$\text{Max } Z = CX$

$AX = b$

$X \geq 0 \; , \; b \geq 0 \; , \; Q = \emptyset = \{$ اندیس بردارهای ستونی ماتریس $A \}$

سایر فرم زیر تعریف می شود :

$Z - CX = 0$

$AX = b$

$X \geq 0 \quad , \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 & -C_B \\ 0 & \\ \vdots & B = I \\ 0 & \end{bmatrix} \quad , \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & C_B B^{-1} \\ 0 & \\ \vdots & B^{-1} = I \\ 0 & \end{bmatrix}$

$a_{ij}^{(1)} = \begin{pmatrix} -C_j \\ \hline a_j \end{pmatrix} \quad , \quad z_j - C_j = (1, C_B B^{-1}) \cdot a_j^{(1)}$

$y_j^{(1)} = \begin{pmatrix} z_j - C_j \\ \hline y_{1j} \\ \vdots \\ y_{mj} \end{pmatrix}$

$X_B^{(1)}$	$b'^{(1)}$	β_0	$\beta_1 \quad - - - \quad \beta_m$
Z	Z_B	1	$C_B B^{-1}$
		0	
		1	
		1	
		1	
		1	
X_B	b'	0	B^{-1}

مثال)

$$\min Z = -x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - 4x_5 + 2x_6$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + S_1 \le 6 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 + S_2 \le 4 \\ x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 + S_3 \le 4 \\ x_j \ge 0 \quad \forall j \quad , \quad S_1, S_2, S_3 \ge 0 \end{cases}$$

$(1, C_B B^{-1})$

θ	$X_B^{(1)}$	$b'^{(1)}$	β_0	β_1	β_2	β_3	$y_0^{(1)}$	$b'_1 = B_1^{-1} b^{(1)}$
	Z	0	1	0	0	0	4	$\longrightarrow b'_1 = Ib^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$
$\frac{6}{1}$	S_1	6	0	1	0	0	1	
$-$	S_2	4	0	0	1	0	0	
$\frac{4}{2}$ ←	S_3	4	0	0	0	1	2	
	Z	-8	1	0	0	-2	2	1
$\frac{4}{1}$ ←	S_1	4	0	1	0	-0.5	1	2
$-$	S_2	4	0	0	1	0	-1	3
$-$	X_5	2	0	0	0	-0.5	0	4

لولا

j	$z_j - c_j$
1	1
2	2
3	-1
4	1
5	4 ←
6	-2

متغیرهای غیرپایه ای

X_5 وارد پایه می شود

مثلاً $z_5 - c_5 = (1, 0, 0, 0) \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 4$

$$y_5^{(1)} = B^{-1} a_5^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 4$$

j	$z_j - c_j$
1	1
2	2 → x_2 وارد پایه می‌شود
3	-3 → $z_3 - c_3 = (1,0,0,2)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = -3$
4	-1
6	-4
s_2	-2

$$y_2^{(1)} = B_1^{-1} a_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

ادامه جدول

θ	$x_B^{(1)}$	b'	β_0	β_1	β_2	β_3	y
	z	-16	1	-2	0	-1	
	x_4	4	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	
	s_2	8	0	1	1	$-\frac{1}{2}$	
	x_5	2	0	0	0	$\frac{1}{2}$	

$z^* = -16$

$x_1 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$ جواب بهینه

$x_2 = 4$

$s_1 = 0$

$s_2 = 8$

$s_3 = 0$

(۲) تمرین

$\max z = CX$

$AX = b$

$X \geq 0, b \geq 0, Q \neq \emptyset$

Subject:
Year. Month. Day.

PAYA

مسأله فاز I

$$Z - CX = 0$$

$$Z^* + \sum_{i \in Q} X_{a_i} = 0$$

$$AX + \sum_{i \in Q} e_i X_{a_i} = b \quad ,$$

$$b^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \hline b \end{pmatrix} \quad , \quad a_j^{(2)} = \begin{pmatrix} -c_j \\ -c_j^* \\ \hline a_j \end{pmatrix} \quad , \quad B_{(2)} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -C_B \\ 0 & 1 & -C_B^* \\ \hline 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & B = I \\ 0 & 0 & \end{array}\right]$$

$$B_2^{-1} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & C_B B^{-1} \\ 0 & 1 & C_B^* B^{-1} \\ \hline 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & B^{-1} = I \\ 0 & 0 & \end{array}\right]$$

$$z_j^* - c_j^* = (B_2^{-1} \text{ سطر دوم})\, a_j^{(2)}$$

$$y_j^{(2)} = B_2^{-1} \cdot a_j^{(2)} = \begin{bmatrix} z_j - c_j \\ z_j^* - c_j^* \\ \hline y_j \end{bmatrix}$$

$$b'^{(2)} = B_2^{-1} \cdot b^{(2)} = \begin{pmatrix} z_B \\ z_B^* \\ \hline b' \end{pmatrix}$$

$X_B^{(2)}$	b'^2	β_0	β_1	β_2 ----
Z	z_B	1	0	$C_B B_2^{-1}$
		0	1	$C_B^* B_2^{-1}$
X_B		0	0	
				$B^{-1} = I$
		0	0	

www.iedoc.ir

«مثال»

$$\text{Max } Z = -x_1 - 2x_2 - x_3$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 \geq 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 2 \\ x_j \geq 0 \quad \forall j \end{cases}$$

پیچیدگی تجدید نظر شده : $Q = \{1, 2\}$

فاز I

$$Z + x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$

$$Z^* + x_{a_1} + x_{a_2} = 0$$

$$2x_1 + 5x_2 + 5x_3 - S_1 + x_{a_1} = 6$$

$$x_1 + x_2 + x_3 - S_2 + x_{a_2} = 2$$

$$x_i \geq 0 \ \forall i, \quad x_{a_1}, x_{a_2}, S_1, S_2 \geq 0$$

$$b^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ \hline b \end{pmatrix} \Rightarrow b^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = B_2^{-1} \cdot b^{(2)}$$

j	$z_j^* - c_j^*$
1	-3
2	-6
3	-6
S_1	1
S_2	1

$$\rightsquigarrow z_2^* - c_2^* = (0, 1, -1, -1)\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$z_j^* - c_j^* = (B_2^{-1} \text{ سطر دوم}) \cdot a_j^{(2)}$$

$$y_2^{(2)} = B_2^{-1} \cdot a_2^{(2)}$$

j	$z_j^* - c_j^*$
1	-0.6
3	0
S_1	-0.2
S_2	1

$$\rightsquigarrow z_3^* - c_3^* = (0, 1, 0.2, -1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$y_1^{(2)} = B_2^{-1} \cdot a_1^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.4 & 0 \\ 0 & 1 & 0.2 & -1 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & -0.2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

j	$z_j - c_j$
3	-1
S_1	0.333
S_2	0.333

$$\rightsquigarrow z_3 - c_3 = (1, 0, -0.333, -0.333)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = -1$$

Subject:
Year. Month. Day.

PAYA

θ_i	$X_B^{(2)}$	$b^{(2)}$	β_0	β_1	β_2	β_3	$y_r^{(1)}$	$y_r^{(2)} = B_2^{-1} a_r^{(2)}$
	z	0	1	0	0	0	2	
	z^*	-8	0	1	-1	-1	-6	
$\frac{6}{8}$	x_{a_1}	6	0	0	1	0	5	
$\frac{2}{1}$	x_{a_2}	2	0	0	0	1	1	
	z	-2.4	1	0	-0.4	0	-0.2	$y_2^{(2)}$
	z^*	-0.8	0	1	-0.2	-1	-0.6	
	x_2	1.2	0	0	0.2	0	0.4	
	x_{a_2}	0.8	0	0	-0.2	1	-0.6	
فاز (II)	z	-2.667	1	0	-0.333	-0.333	-1	$y_3^{(2)}$
	z^*	0	0	1	0	0	0	
	x_2	0.667	0	0	0.333	-0.667	1	
	x_1	1.333	0	0	-0.333	1.667	0	
	z	-2	1	0	0	-1		
	z^*	0	0	1	0	0		
	x_3	0.667	0	0	0.333	-0.667		
	x_1	1.333	0	0	-0.333	1.667		

j	$z_j - c_j$
1	2
s_1	0
s_2	1

جواب بهینه:

$$\begin{cases} Z = -2 \\ X_2 = S_1 = S_2 = 0 \\ X_1 = 1.333 \\ X_3 = 0.667 \end{cases}$$

نکته: در بدترین حالت «worst case» تعداد جداول سیمپلکس یا نقاط گوشه یا پایه‌ای قابل قبول برای مسائلی که n متغیر و m محدودیت دارد برابر است با $\frac{n!}{(n-m)!\,m!} = \binom{n}{m}$

نکته : اگر یک مسأله LP بیش از یک جواب داشته باشیم در این صورت ترکیب محدب اجویه ، مجدداً جواب بهینه خواهد بود ← جواب های بهینه : $X_1^*, X_2^*, \dots, X_p^*$

$$\begin{cases} \bar{X} = \sum_{i=1}^{p} \mu_i X_i^* \\ \mu_i \geq 0 \ , \ \sum_{i=1}^{p} \mu_i = 1 \end{cases} \Rightarrow \bar{X} \text{ نیز یک جواب بهینه است.}$$

نکته : فضای اجویه قابل قبول یک فضای محدب خواهد بود (Convex Hull) البته در یک مسأله LP با جواب بهینه یا نامحدود

فضای محدب : چنانچه S یک فضای محدب باشد یعنی

$$\begin{cases} x_1 \in S \\ x_2 \in S \end{cases} \rightarrow \alpha x_1 + (1-\alpha) x_2 \in S \quad , \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

قضیه : یک فضای محدب است اگر و فقط اگر برای هر دو نقطه دلخواه متعلق به S ، ترکیب محدب آن نیز نقطه ای از S می باشد.

Duality دوگانی / زوجیت / مزدوج

$$\text{Max } Z = CX$$
$$AX = b \qquad \text{primary problem} \quad \text{اولیه}$$
$$X \geq 0$$

$$\min z = b^T w$$
$$A^T w \geq c^T$$
$$w \geq 0$$

Dual problem

مثال) هرچه محدودیت‌ها کمتر باشد، حل مسئله معمولاً آسان‌تر است به شرطی که ماتریس ضرایب پر نباشد.

$$\max z = 4x_1 + 7x_2 - x_3 + x_4$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} 3x_1 + 12x_2 + 6x_3 - 2x_4 \geq 8 \\ x_1 + 5x_2 - 8x_3 + x_4 = 16 \\ x_j \geq 0 \ , \forall j \end{cases}$$

$$\max z = 4x_1 + 7x_2 - x_3 + x_4$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} w_1: -3x_1 - 12x_2 - 6x_3 + 2x_4 \leq -8 \\ w_2: x_1 + 5x_2 - 8x_3 + x_4 \leq 16 \\ w_3: -x_1 - 5x_2 + 8x_3 - x_4 \leq -16 \\ x_j \geq 0 \ , \forall j \end{cases}$$

ماتریس ضرایب، پراست یعنی تمام متغیرها هستند هرچه تعداد صفر در ماتریس ضرایب بیشتر باشد سرعت حل سیمپلکس افزایش می‌یابد

$$\min z = -8w_1 + 16w_2 - 16w_3$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} -3w_1 + w_2 - w_3 \geq 4 \\ -12w_1 + 5w_2 - 5w_3 \geq 7 \\ -6w_1 - 8w_2 + 8w_3 \geq -1 \\ 2w_1 + w_2 - w_3 \geq 1 \\ w_i \geq 0 \ , \ i = 1,2,3 \end{cases}$$

قضیه (۱): اگر $\bar{X}$ یک جواب قوی برای مسئله (۱) و $\bar{w}$ یک جواب قابل قبول برای مسئله (۲) باشد

$$C\bar{X} \leq b^T \bar{w}$$

در این صورت برای هر $\bar{X}$ و $\bar{w}$ رابطه زیر صادق است.

اثبات:

$$A\bar{X} \leq b \ , \ \bar{w} \geq 0 \quad (2)$$
$$\bar{w}^T A\bar{X} \leq \bar{w}^T b$$

طبق مسئله dual $A^T\bar{w} \geq c^T$, $\bar{w}^T A \geq c$, $\bar{x} \geq 0 \xrightarrow{\times \bar{x}} \bar{w}^T A \bar{x} \geq c\bar{x}$ (b)

پس : $\boxed{c\bar{x} \leq \bar{w}^T A x \leq b^T w}$

قضیه (۲) : اگر x^* یک جواب قابل قبول برای مسأله I و w^* یک جواب قابل قبول برای مسأله II باشد و $cx^* = b^T w^*$ ، در این صورت x^* جواب بهینه مسأله (۱) و w^* جواب بهینه مسأله (۲) خواهد بود

و برعکس

x^* و w^* جوابه قابل قبولی برای مسائل ۱ و ۲ فرض می‌شوند و چون $cx^* = b^T w^*$ است : (به لگ قضیه (۱))

$b^T w^* \leq b^T \bar{w}$

$\Leftarrow$ w^* جواب بهینه مسئله (۲) است .

اگر w^* یک جواب قابل مسئله ۲ و $\bar{x}$ یک جواب قابل قبول مسئله ۱ :

$c\bar{x} \leq b^T w^* = cx^* \Rightarrow c\bar{x} \leq cx^*$

پس تابع هدف دو مسئله primal برای هر جواب دلخواه قابل قبول مانند $\bar{x}$ بزرگتر مساوی از تابع هدف حاصل از x^* است پس x^* جواب بهینه مسأله (۱) است .

قضیه (۳) : اگر مسأله (۱) جواب بهینه داشته باشد ، مسأله (۲) نیز جواب بهینه دارد و برعکس

$AX \le B$

اثبات

$AX + \sum_{i=1}^{m} e_i s_i = b$

$z_j - c_j \ge 0$, $j = 1,2,3,\dots,n$ به شرط جواب بهینه برای مسأله (1)

ادعا می‌شود که $w^{*T} = C_B B^{*-1}$ جواب بهینه مسأله (2) است.

ادامه اثبات: $z_j - c_j \ge 0 \longrightarrow C_B B^{*-1} a_j - c_j \ge 0 \quad \forall j$

$w^{*T} a_j - c_j \ge 0 \Longrightarrow w^{*T} a_j \ge c_j \Longrightarrow A^T w^* \ge c^T$

نتیجه: $w^{*T} = C_B B^{*-1}$ در محدودیت‌های مسأله dual صدق می‌کند پس w^* یک جواب مسأله dual است

$z_j - c_j \ge 0$ برای متغیرهای «slack» $z_{s_i} - c_{s_i} \ge 0$, $i = 1,2,3,\dots,m$

$C_B B^{*-1} a_j - c_{s_i} \ge 0 \Longrightarrow (C_B B^{*-1}) e_i - 0 \ge 0 \Longrightarrow w^{*T} e_i \ge 0$

$\Longrightarrow w_i^* \ge 0$ پس $w^{*T} = C_B B^{*-1}$ یک جواب قابل قبول برای مسأله dual است (تابع هدف وجود ندارد)

$b^T w^* = w^{*T} b = C_B B^{*-1} b = z_B$

مقدار تابع هدف مسأله primal

بنابراین $w^{*T} = C_B B^{*-1}$ جواب بهینه مسأله (2) است.

قضیه (4): اگر مسأله (1) یا مسأله (2) نامحدود شود دیگری جواب ندارد

$$\max Z = x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 - 2x_6$$ (دلخ

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \le 6 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 \le 4 \\ x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 \le 4 \\ x_j \ge 0 \quad \forall j \end{cases}$$

$$\min Z = 6w_1 + 4w_2 + 4w_3$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} w_1 + 2w_2 \ge 1 \\ w_1 - w_2 \ge 2 \\ w_1 - 2w_2 + w_3 \ge -1 \\ w_1 + w_2 + w_3 \ge 1 \\ w_1 + 2w_2 \ge 4 \\ w_1 + w_3 \ge -2 \end{cases}$$

www.tedoo.ir

Subject:

Year. Month. Day.

PAYA

X_B	b'	β_0	β_1	β_2	β_3
z	۱۶	۱	۲	۰	$C_B B^{*-1}$
x_2	۴	۰	۱	۰	-۰/۵
s_2	۸	۰	۱	۱	-۰/۵
x_5	۲	۰	۰	۰	-۰/۵

j	$z_j - c_j$
۱	۱
۲	۰
۳	۴
۴	۲
۵	۰
۶	۵
s_1	۲
s_2	۰
s_3	۱

$z_\rho = ۱۶ \longrightarrow z_0 = ۱۶$

$w^{*T} = C_B B^{*-1}$

$w^* = (w_1^*, w_2^*, w_3^*) = (۲, ۰, ۱)$

جواب بهینه مسئله اولیه:
$z = ۱۶$
$x_2 = ۴ , s_2 = ۸ , x_5 = ۲$
$x_1 = x_3 = x_4 = x_6 = s_1 = s_3 = ۰$

نکته: $z_{s_i} - c_{s_i} = C_B B^{*-1} e_i - ۰ = w_i^*$

همچنین:

$a_j^T w \geq c_j^T \Rightarrow w^T a_j \geq c_j \Rightarrow w^T a_j - w_{s_j} = c_j$

$\Rightarrow w_{s_j} = w^T a_j - c_j \xrightarrow{\text{جواب بهینه}} w_{s_j}^* = \underbrace{C_B B^{*-1} a_j}_{z_j} - c_j = z_j - c_j$

$\Rightarrow \begin{cases} w_{s_1}^* = ۱ \\ w_{s_2}^* = ۰ \\ w_{s_3}^* = ۴ \\ w_{s_4}^* = ۲ \\ w_{s_5}^* = ۰ \\ w_{s_6}^* = ۵ \end{cases}$

۵۰

قضیه: «اصل مکمل ضعیف complementary slackness»

اگر X^* و X_S^* برای مسأله (۱) جواب بهینه ارائه دهند و W^* و W_S^* برای مسأله (۲) جواب بهینه ارائه دهند

5 $W^{*T} \cdot X_S^* = 0$

$X^{*T} \cdot W_S^* = 0$

در این صورت و (برعکس)

مثال)

$$W^{*T} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_S^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X^{*T} = \begin{pmatrix} 4 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

10 $$W_S^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad X_S^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

اثبات:

$$\text{Max } Z = CX \qquad \min Z = b^T W$$

15 $AY \leq B \quad (I) \qquad A^T W \geq C^T \quad II$

$X \geq 0 \qquad W \geq 0$

□□

$$Ax^* \leq b \Rightarrow W^{*T} A X^* \leq W^{*T} b \quad (2)$$

$W^{*T} \geq 0$

20

$$A^T W^* \geq C^T \Rightarrow \begin{cases} W^{*T} A \geq C \Rightarrow W^{*T} A X^* \geq C X^* \quad (b) \\ X^* \geq 0 \end{cases}$$

$CX^* = W^{*T} b$ ، از طرفی: $AX^* - X_S^* = b$

↓

25 (a),(b) $W^{*T} A X^* = C X^* = W^{*T} b$

$$W^{*T}AX^{*} + W^{*T}\cdot X_S^{*} = W^{*T}b \Longrightarrow W^{*T}\cdot X_S^{*} = 0$$

$$A^{t}W^{*} - W_S^{*} = C^{T}$$

$$W^{*T}A - W_S^{*T} = C \longrightarrow W^{*T}AX^{*} - W_S^{*T}\cdot X^{*} = CX^{*}$$

بس از ترانسپوز گرفتن : $\boxed{X^{*T}\cdot W_S^{*} = 0}$

« نوشتن مستقیم مسئله dual »

$$\text{Max}Z = C_1X_1 + \cdots + C_nX_n$$

$$a_{11}X_1 + \cdots + a_{1n}X_n \gtrless b_1$$

$$a_{21}X_1 + \cdots + a_{2n}X_n \lesseqgtr b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}X_1 + \cdots + a_{mn}X_n \leq b_m$$

$$\text{Max}Z = C_1X_1 + \cdots + C_nX_n$$

$$\begin{array}{c|l} w_1 & -a_{11}X_1 - a_{12}X_2 - \cdots - a_{1n}X_n \leq -b_1 \\ \vdots & \vdots \\ w_n & a_{m1}X_1 + \cdots + a_{mn}X_n \leq b_n \end{array}$$

$$\text{Min}Z = -b_1w_1 + b_2w_2 + \cdots + b_mw_m$$

$$\begin{cases} -a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \cdots + a_{m1}w_m \geq C_1 \\ \vdots \\ -a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \cdots + a_{mn}w_m \geq C_n \end{cases}$$

www.tadoc.ir

(۱) اگر در مسأله اولیه، محدودیت ام به جای ≤ به صورت ≥ باشد متغیر ام مسأله dual به جای ۰≤ به صورت ۰≥

نوشته می شود

(۲) اگر در مسأله dual، محدودیت ل ام به جای ≥ به صورت ≤ باشد متغیر ل ام در مسأله اولیه به جای ۰≥

به صورت ۰≤ نوشته می شود.

(۳) اگر در مسأله اولیه، محدودیت ام به صورت تساوی باشد در مسأله dual، متغیر ام، آزاد خواهد بود.

(۴) اگر در مسأله اولیه، متغیر ام به جای ۰≥ به صورت ۰≤ باشد محدودیت ل ام در مسأله dual به جای ≥ به صورت

≤ نوشته می شود.

(۵) اگر در مسأله dual، متغیر ام به جای ۰≥ به صورت ۰≤ باشد محدودیت ام در مسأله primal به جای ≤

به صورت ≥ خواهد بود

(۶) اگر در مسأله اولیه، متغیر ام آزاد باشد، محدودیت ام در مسأله dual به صورت تساوی است.

مثال:

$$\min z = 7x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 5x_1 + 6x_2 + 8x_3 - x_4 \geq 11 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 6x_4 \leq 9 \\ x_1 + 2x_2 + 8x_3 + x_4 = 10 \\ x_1, x_2 \geq 0 \qquad x_3: \text{آزاد}, \quad x_4 \leq 0 \end{cases}$$

www.iedoc.ir

$$\text{Max } z = 11w_1 + 9w_2 + 10w_3$$

$$\begin{cases} 5w_1 + 3w_2 + w_3 \le 7 \\ 6w_1 + 2w_2 + 2w_3 \le 3 \quad \Big] \; x_1, x_2 \ge 0 \\ 8w_1 + 4w_2 + 8w_3 = -1 \longrightarrow x_3 : \text{free} \\ -w_1 - 6w_2 + w_3 \ge 4 \longrightarrow x_4 \le 0 \\ w_1 \ge 0 \;,\; w_2 \le 0 \;,\; w_3 : \text{free} \end{cases} ,$$

Dual simplex

متداین روش، حرکت در خارج از فضای موجه است.

«الگوریتم DS» ← برای مسئله Max
" " min

قدم (۱): یک پایه برای مسئله $AX=b$ که برای آن $0 \ge z_j - c_j \le 0$ و $\forall j$ است بدست آورید.

اگر پایه‌ای پیدا نشد، مسئله dual فاقد جواب و مسئله اصلی نامحدود می‌شود

قدم (۲): اگر $\forall i$ و $b_i \ge 0$، جواب موجود بهینه است. در غیر این صورت فرض کنید $b_r < 0$ (روبروی x_r)

پس بردار rام از پایه خارج می‌شود.

قدم (۳): اگر $y_{rj} \ge 0$ به ازای تمام jها، مسئله dual نامحدود می‌شود و مسئله فعلی فاقد جواب است

در غیر این صورت بردار ورودی به پایه a_k (متغیر x_k) با کمک رابطه زیر مشخص می‌شود:

$$\theta = \min \left\{ \left| \frac{z_j - c_j}{y_{rj}} \right| \;\middle|\; y_{rj} < 0 \right\}$$

قدم (۴): با استفاده از روابط تغییر جدول simplex، عمل کنید و به قدم (۲) برگردید.

برنامه‌ریزی (تحلیل) حساسیت ← بررسی نوسانات جواب بهینه به دلیل تغییرات جواب متغیرها

برنامه‌ریزی پارامتریک

$$\begin{aligned} &\text{Max } Z = CX \\ &AX = b \\ &X \geq 0 \end{aligned}$$

الف) به ازای تغییر روی C (برنامه‌ریزی پارامتریک روی بردار C)

$$* \quad \text{Max } Z = \sum_{j=1}^{n} (c_j + \alpha f_j) X_j \quad , \quad \alpha \geq 0$$

$$AX = b \qquad c_j \longrightarrow c_j + \alpha f_j$$

$$X \geq 0$$

f: بردار تغییرات ضرایب متغیرها در تابع هدف (c_j تغییرات f_j)

اندیس

f_B: بردار تغییرات متغیرهای پایه

$$z_j^* - c_j^* = c_B^* y_j - c_j^* = (c_B + \alpha f_B) y_j - (c_j + \alpha f_j)$$

$$\boxed{z_j^* - c_j^* = (z_j - c_j) + \alpha (f_B y_j - f_j)}$$

$$\alpha \geq 0$$

چنانچه $f_B y_j - f_j \geq 0$ ، $\forall j$ ، بهینه بودن جواب تضمین می‌گردد. ولی اگر $f_B y_j - f_j < 0$:

$$z_j^* - c_j^* \geq 0 \Longrightarrow (z_j - c_j) + \alpha (f_B y_j - f_j) \geq 0 \Longrightarrow \alpha \leq \frac{-(z_j - c_j)}{f_B y_j - f_j}$$

به ازای $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha$ ، جواب بهینه ثابت می‌ماند پس $\alpha = \alpha_1$ و متغیر j ام وارد پایه می‌شود، به دلیل اینکه $z_j^* - c_j^* = 0$ است، مقدار تابع هدف در جدول بعدی، تغییر نمی‌کند، تغییر جدول صورت می‌دهیم و مسئله

مثال)

$$\text{Max } Z = -3x_1 - x_2 \quad , \quad s.t. \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1 \\ 2x_1 + 3x \geq 2 \\ x_1 , x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Max } Z = -3x_1 - x_2 \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - S_1 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - S_2 = 2 \\ x_1 , x_2 , S_1 , S_2 \geq 0 \end{cases}$$

$\theta = -\frac{3}{2}$ $\theta = -\frac{1}{3}$

* پایه dual feasible ← پایه ای که $z_j - c_j \geq 0$ (برای مسأله max)

	X_B	b'	Y_1	Y_2	Y_{S_1}	Y_{S_2}
	S_1	-1	-1	-1	1	1
متغیر خروجی ←	S_2	-2	$(-2$	-3	0	$0)$
	Z	0	3	1 ↑	0	0
خروجی ←	S_1	$-\frac{1}{3}$	$(-\frac{1}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3})$
	X_2	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$
	Z	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$ ↑
	S_2	1	1	0	-3	1
	X_2	1	1	1	-1	0
	Z	-1	2	0	1	0

جواب بهینه dual

مسأله اولیه

$$\begin{cases} X_1 = 0 \\ X_2 = 1 \\ S_1 = 0 \\ S_2 = 1 \end{cases} , \quad Z^* = -1 \quad , \quad \begin{matrix} W_1 = 1 & W_{S_1} = 2 \\ W_2 = 0 & W_{S_2} = 0 \end{matrix}$$

به‌ازای $\alpha_1 > \alpha_2$ ادامه می‌یابد

نکته: اگر چنین $f_{Bj} - f_j < 0$ وجود داشته باشد مقدار α_1 از رابطه زیر تعیین می‌شود:

$$\alpha_1 = \min_{\forall j} \left\{ \frac{-(z_j - c_j)}{f_{Bj} - f_j} \;\middle|\; f_{Bj} - f_j < 0 \right\}$$

مثال ۱

$$\text{Max } z = -3x_1 - x_2$$

$$\text{S.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 - s_1 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - s_2 = 2 \\ x_j \geq 0 \quad \forall j \end{cases}, \quad f = (-1, -2, 0, 0)$$

$\alpha \geq 0$

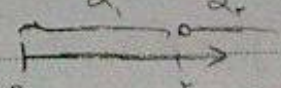
$\alpha_1 = 2$

c_B	x_B	b	y_1	y_2	y_{s_1}	y_{s_2}
0	s_2	1	①	0	-3	1
$-1-2\alpha_1$	x_2	1	1	1	-1	0
	z	-1	2	0	1	0
	z_α	$-1-2\alpha_1$	$2-\alpha_1$	0	$1+2\alpha_1$	0
	z	-5	0 ↑	0	5	0
$-5-\alpha_2$	x_1	1	1	0	-3	1
	x_2	0	0	1	②	-1
$-5-2\alpha_2$	z	-5	0	0	5	0
	z_α	$-5-\alpha_2$	0	0	$5-\alpha_2$	$0+\alpha$
	z	10	0	0	0 ↑	5
$-10-\alpha_3$	x_1	1	1	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$
0	s_1	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$
	z	-10	0	0	0	5
	z_α	$-10-\alpha_3$	0	$\frac{\alpha_3+2}{2}$	0	$\frac{12+\alpha_3}{2}$

$\to z_j^+ - c_j^+ = (z_j - c_j) + \alpha(f_{Bj} - f_j)$

$= 2 - \alpha_1$

$0 \leq \alpha \leq 2$ $\begin{cases} s_2 = 1 \\ x_2 = 1, \; x_1 = s_1 = 0 \\ z = -1 - 2\alpha_1 \end{cases}$



$2 \leq \alpha \leq 5$ $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ z = -5 - \alpha_2 \end{cases}$ $s_1 = s_2 =$

$0 \leq \alpha_1 \leq 5$

$\alpha \geq V$ $\begin{cases} X_1 = 1 \\ \alpha_2 \geq 0 \quad S_1 = S_2 = X_2 = 0 \\ Z = -10 - \alpha_2 \end{cases}$

اضافه کردن فعالیت (متغیر) :

C_{n+1}, a_{n+1}

چنانچه X_{n+1} به مسئله اضافه شود :

$\text{Max } Z = CX + C_{n+1} X_{n+1}$

$AX + a_{n+1} X_{n+1} = b$

$X \geq 0 \quad , \quad X_{n+1} \geq 0$

X_B	b'	y_1	---- y_n	y_{n+1}
Z				$z_{n+1} - C_{n+1}$

مثال) در مسئله قبلی

$\text{Max } Z = -x_1 + x_2$

$x_1 + 2x_2 + S_1 = 2$

$2x_1 + x_2 + S_2 = 2$

$X_j \geq 0$

C_B	X_B	b'	y_1	y_2	y_{S_1}	y_{S_2}	y_3
1	X_2	1	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	1
0	S_2	1	$\frac{5}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	1	1
	Z	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	-9

قرارست محصول جدیدی تولید شود :

مقدار تولید محصول جدید : X_3

$C_3 = 10$

$a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$z_3 - C_3 = C_B y_3 - C_3$

$z_3 - C_3 = (1 \quad 0)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 10 = -9$

$y_3 = B^{-1} a_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

برنامه ریزی پارامتریک
روی بردار b

$Max Z = CX \quad , \quad AX = b \quad , \quad X \geq 0$

$r = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_m \end{pmatrix}$ بردار تغییرات روی b (بردار RHS)

$\alpha \geq 0 \quad , \quad b^* = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 + \alpha r_1 \\ b_2 + \alpha r_2 \\ \vdots \\ b_m + \alpha r_m \end{pmatrix}$

مقادیر جدید سمت راست محدودیت ها

$b^* = b + \alpha r \longrightarrow b'^* = B^{-1} b^* = \underbrace{B^{-1} b}_{b'} + \alpha B^{-1} r$

$B^{-1} r = y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \Longrightarrow b' = \begin{pmatrix} b'^*_1 + \alpha y_1 \\ b'^*_i + \alpha y_i \\ \vdots \\ b'^*_m + \alpha y_m \end{pmatrix}$

اگر $y_i \geq 0$ ، $\forall i$ در این صورت جواب بهینه به ازای مقادیر $\alpha \geq 0$ برقرار می ماند

اگر $y_i < 0 \Rightarrow b'^*_i + \alpha y_i \geq 0 \longrightarrow \alpha \leq \dfrac{-b_i}{y_i}$

اگر چنین مورد $y_i < 0$ باشند در این صورت $\alpha_1 = \min \left\{ \dfrac{-b_i}{y_i} \mid y \leq 0 \right\}$ به ازای $0 \leq \alpha \leq \alpha_1$ پایه قابل قبول و بهینه است به ازای $\alpha = \alpha_1$ و به روش دوگان تغییر پایه می دهیم و مسئله ادامه می یابد.

مثال)

$Max Z = -x_1 + x_2$

$s.t. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + s_1 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + s_2 = 2 \end{cases} \quad , \forall j : x_j \geq 0$

www.tabesh.ir

$r=(0,-1)$, $b^{**}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\alpha_1\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+\alpha_1(0)\\ 1+\alpha_1(-1)\end{pmatrix}$

$\alpha_1=1$

C_B	X_B	b'	b^{**}	b^{*}	y_1	y_2	y_{s_1}	y_{s_2}
1	x_1	1	$1+\alpha_1(0)$	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0
← 0	S_2	1	$1+\alpha_1(-1)$	0	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1
	Z	1			$\frac{3}{2}$	0	↑ $\frac{1}{2}$	0
←	x_2	1	↑ $-\alpha_2$	0	2	1	0	1
	S_1	0	$0+2\alpha_2$	2	-3	0	1	-2
	Z	1	$-\alpha_2$		3	0	0	1

B^{-1} → B^{-1}

$0\le\alpha_1\le 1$ $\begin{cases} x_2=1\\ S_2=1-\alpha_1\\ Z=1\\ x_1=S_1=0\end{cases}$ $b^{**}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-\alpha_2\\ 0+2\alpha_2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1-1-\alpha_2\\ 0+2+2\alpha_2\end{pmatrix}\longrightarrow \boxed{\alpha_2=1}$ $\begin{cases} 1\le\alpha\le 2 \longrightarrow x_2=1-\alpha_2 \quad x_1=S_2=0\\ 1\le\alpha_2\le 1 \longrightarrow S_1=2\alpha_2 \quad Z=1-\alpha_2\end{cases}$

مسئله اصلی بدون جواب و dual نامحدود.

اضافه کردن محدودیت:

$\max Z=CX$

$AX=b$, $X\ge 0$, محدودیت جدید: $\sum_{j=1}^{n}\alpha_{m+1,j}x_j\le b_{m+1}$

$\sum_{j=1}^{n}a_{m+1,j}k_j+S_{m+1}=b_{m+1}\longrightarrow S_{m+1}=b_{m+1}-\sum_{j=1}^{n}a_{m+1,j}k_j$

* بازگشتن متغیرهای پایه برحسب غیرپایه:

$S_{m+1}=b'_{m+1}-\sum_{j=1}^{n}y_{m+1,j}x_j$

مثال)

$\max Z = -x_1 + x_2$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + s_1 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + s_2 = 2 \end{cases} \quad x_j \geq 0,\ s_1, s_2 \geq 0$$

$r = (0, -1)$

محدودیت جدید: $3x_1 + 2x_2 \leq 12$

$3(0) + 2(1) \leq 12$ ✓

محدودیت جدید: $x_1 + 2x_2 \leq 1$

$0 + 2(1) \leq 1 \times 4$

C_B	X_B	b'	y_1	y_2	y_{s_1}	y_{s_2}	s_2
1	x_1	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	0
0	s_2	1	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	0
	s_2	-1	0	0	-1	0	1
	Z	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	
	x_2						
	s_1						
	s_1						
	Z						

$x_1 + 2x_2 + s_2 = 1$

$\rightarrow s_2 = 1 - (x_1 + 2x_2)$

$x_2 = 1 - \left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}s_1\right)$

$\rightarrow s_2 = 1 - (x_1 + 2 - x_1 - s_1)$

$= -1 - (-s_1)$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{m+1,j} x_j \geq b_{m+1} \Rightarrow \sum a_{m+1,j} x_j - s_{m+1} = b_{m+1}$$

$$\rightarrow s_{m+1} = -b_{m+1} + \sum_{i=1}^{n} a_{m+1,j} x_j$$

نوشتن متغیرهای پایه برحسب غیرپایه و افزودن s_{m+1} به جدول simplex و استفاده از روش دوگان

$$\sum_{j=1}^{n} a_{m+1,j} x_j = b_{m+1} \Rightarrow \sum a_{m+1,j} x_j + x_{a_{m+1}} = b_{m+1}$$

قبل از افزودن متغیر مصنوعی باید دقت کنیم که جواب در محدودیت جدید چه شرایطی را ایجاد می‌کند؟

(I) $\sum a_{m+1,j} X_j^* \geq b_{m+1} \longrightarrow X_{a_{m+1}}$ که اضافه شود منفی خواهد بود $\longrightarrow$ با کمک dual، این متغیر از پایه خارج خواهد شد

(II) $\sum a_{m+1,j} X_j^* \leq b_{m+1} \longrightarrow X_{a_{m+1}}$ که اضافه شود مثبت خواهد بود $\longrightarrow$ در این حالت ابتدا طرفین محدودیت جدید در (-1) ضرب و سپس $x_{a_{m+1}}$ اضافه می‌شود

X_B	b'	y_1	y_2	y_{s_1}	y_{s_2}
x_1	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0
s_2	1	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1
$\leftarrow x_{a_3}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0
Z	1	$\uparrow \frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0
x_2					
s_2					
x_1					
Z					

محدودیت جدید

$-x_1 + x_2 = 0$

$0 + 1 \geq 0$

$-x_1 + x_2 + x_{a_3} = 0$

$x_{a_3} = x_1 - x_2$

$x_2 = 1 - (\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}s_1)$

$x_{a_3} = -1 - (-\frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{2}s_1)$

مثال)

$$\text{Min } Z = -2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{10}x_1 + \frac{1}{10}x_2 \leq \frac{37}{10} \\ \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 \leq \frac{3}{2} \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

(a) فرض کنید C_1 از (-2) به $-2+\Delta_1$ و C_2 از 3 به $3+\Delta_2$ تغییر کند، Δ_1 و Δ_2 را طوری محاسبه کنید که جواب بهینه در جدول آخر، بهینه بماند

(b) فرض کنید b_1 از $\frac{37}{10}$ به $\frac{37}{10}+\Delta$ تغییر کند، Δ را طوری تعیین کنید که جواب آخر، شدنی باقی بماند

(c) مقدار x_3 را با فرایی به مسئله اضافه کنید که جدول آخر دارای مقدار بهینه نامحدود باشد.

x_B	b'	y_1	y_2	y_{s_1}	y_{s_2}
s_1	$\frac{37}{10}$	$-\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	1	0
$\leftarrow s_2$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	0	1
z	0	$2\uparrow$	-3	0	0
s_1	4	0	0	1	$\frac{1}{5}$
x_1	3	1	-1	0	2
z	-6	0	-1	0	-4

B^{-1}

(a) $z_2 - c_2 = c_B B^{-1} a_2 - c_2$

$= (0, -2+\Delta_1)\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} - (3+\Delta_2) \le 0$

$z_{s_2} - c_{s_2} = c_B B^{-1} a_{s_2} - c_{s_2}$

$= (0, -2+\Delta_1)\begin{pmatrix}\frac{1}{5}\\2\end{pmatrix} - 0 \le 0$

$\longrightarrow \Delta_1 + \Delta_2 \ge -1 \longrightarrow \Delta_2 \ge -1 - \Delta_1$

$\Delta_1 \le 2$ $\qquad \Delta_2 < 1 + \Delta_1$

(b) $b' = B^{-1} b = \begin{pmatrix}1 & \frac{1}{5}\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{37}{10}+\Delta\\ \frac{3}{2}\end{pmatrix} \ge 0 \longrightarrow \Delta \ge -4$

(c) $c_3 = ?$, $a_3 = ?$

$z_3 - c_3 = c_B B^{-1} a_3 - c_3 = (0, -2)\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{5}\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{13}\\ a_{23}\end{pmatrix} > 0$

مسأله بهینه نیست

$\longrightarrow -4a_{23} - c_3 > 0$

$y_3 = B^{-1} a_3 = \begin{pmatrix}1 & \frac{1}{5}\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{13}\\ a_{23}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{13} + \frac{a_{23}}{5}\\ 2a_{33}\end{pmatrix} \le 0 \longrightarrow \begin{cases} c_3 = 4 \\ a_{13} = 1 \\ a_{23} = -5 \end{cases}$

مثال) نحوه تعیین بردار simplex هنگام تغییر پایه.

$\min z = -2x_1 - 3x_2$

$\text{s.t.} \begin{cases} x_2 - x_1 \le 2 \\ x_2 - 2x_1 \le 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$

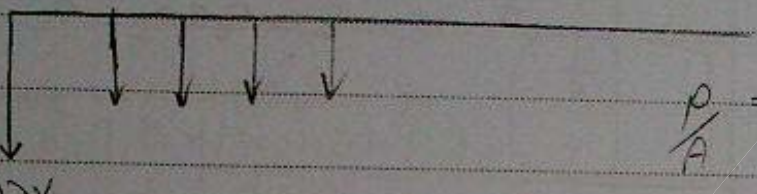
www.ieddo.ir

Subject:
Year. Month. Day.

PAYA

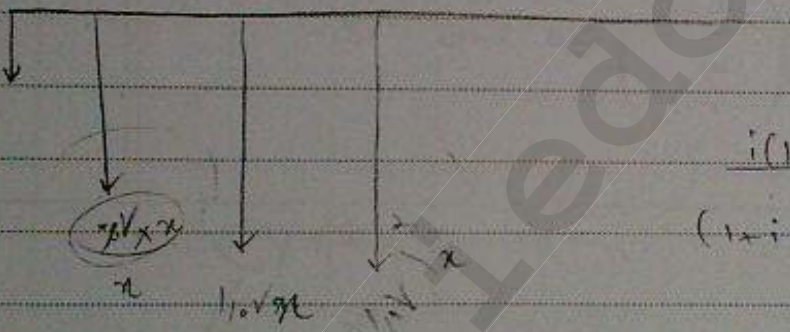
$F = P(1+r)^n \longrightarrow F^{\frac{1}{n}} = P^{\frac{1}{n}}(1+r) \longrightarrow 1+r = \frac{F^{\frac{1}{n}}}{P^{\frac{1}{n}}}$

$\Rightarrow r = \frac{F^{\frac{1}{n}}}{P^{\frac{1}{n}}} - 1$, $\log F = n \log P(1+r)^n$



$\frac{P}{A} = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$

عمو مصطفی عاطلی



$\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} + \frac{1-(1-g)^N(1+i)^{-n}}{1+i}$

www.tedoc.ir

تعریف بردار Simplex برای پایه B :

فرض کنید $z_k - c_k \geq 0$ (برای Max)

حالت غیرپبنه $x_B = B^{-1}b - x_k d_k$

طبق تعریف بردار d_k به صورت زیر بعنوان بردار Simplex معرفی می‌شود توجه شود که در نوشتن d_k ترتیب قرارداری متغیرهای مسئله رعایت شود

نحوه تعیین این بردار هنگام تغییر پایه :

$$d_k = \begin{pmatrix} -y_k \\ e_k \end{pmatrix}$$

$B \to B_1 \to B_2$

$$d_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad d_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{matrix} x_1 \\ x_4 \\ s_1 \\ s_2 \end{matrix}$$

$$d_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

تمرین (۱) اگر $A_1, A_2, \ldots, A_k$ مجموعه‌های محدب باشند ثابت کنید :

$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cdots \cap A_k$ محدب است

(۲) اگر $S = \{x \mid Ax = b\}$ ثابت کنید محدب است.

(۳) نشان دهید مسئله در حالت نگین است و سایر جواب بهینه مسئله چگونه استخراج می‌شوند؟

$$\min Z = -4x_1 + x_4$$
$$-x_1 + x_4 \leq 1$$
$$-x_1 + 4x_4 \leq 7$$
$$3x_1 + x_4 \leq 18$$
$$x_1, x_4 \geq 0$$

AVA

Subject:
Year: Month: Date:

www.iedoc.ir

AVA

Subject:
Year. Month. Date. ( )

* در حل جداول Simplex امکان ندارد بلافاصله سطر خروجی، وارد یا ستون ورودی، خارج شود و جای هم را بگیرند.

جبر Simplex :

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}N x_N = B^{-1}b - \sum_{j\in R} \underbrace{B^{-1}a_j}_{y_j} x_j$$

غیرپایه‌ایها

$$z = cx = (c_B, c_N)\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = c_B \cdot x_B + c_N \cdot x_N = c_B(B^{-1}b - B^{-1}N x_N) + c_N x_N$$

$$= c_B B^{-1} b - (c_B B^{-1} N + c_N) x_N = c_B B^{-1} b - \sum_{j\in R} \underbrace{(c_B B^{-1} a_j - c_j)}_{z_j - c_j} x_j$$

به همین دلیل است که: max ← سطر هدف منفی

min ← " " مثبت

$$z_{\text{جدید}} = c_B B^{-1} b - \boxed{(z_j - c_j) x_j} = 0$$

$$z_{\text{جدید}} = z_{\text{قدیم}} = c_B B^{-1} b \begin{cases} z_j - c_j = 0 \rightarrow \text{بهینه چندگانه} \\ x_j = 0 \rightarrow \text{تباهیدگی} \end{cases}$$

توضیحات بیشتر در پایین (حالات خاص)

$$x_B = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} - \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{y_1} \underbrace{\cancel{x_1}}_{0} - \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{y_2} \underbrace{\cancel{x_2}}_{3}$$

$$\xrightarrow{\text{تکرار بعدی}} x_B^{\text{جدید}} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}(3) = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

نکته: برای امتحان { * حالات خاص جواب Simplex ← ۱- جواب نامتناهی

max

-1	1
-1	4
-1	

↑ وارد شونده

۲- جواب بهینه چندگانه

	x_1	x_2	s_1	s_2	
s_1	1	-1	1	0	1
s_2	2	-1	0	1	4
	0	+1	0	0	

Subject:
Year Month Date

Degeneracy

۳- جواب تباهیده :

x_1	x_2	s_1	s_2	
	۴			۸
	۲			~~۴~~ $-۴=۰$
	۲			

(از لحاظ هندسی، نقطه در جا می‌زند)

جواب میان ترم ۲ :

غ ۱) الف) تست مینیمم نسبت ب) بستگی به فضای جواب دارد ج) هر مقدار مثبتی د) الف و ج

ص ۲) بعد فضای جواب در LP با n بعد با ماتریس رتبه کامل m محدودیت $m<n$

الف) m ب) $n-m$ ج) n د) $m-n$

ص ۳) غلط بود

ص ۴) انتخاب درست متغیر وارد شونده تعیین کننده‌ی ؟

الف) شدنی بودن جدول بعدی ب) انتخاب مناسب شعاع بهینگی ج) حرکت به سمت بهینگی د) هم موارد

مقدار بهینه تابع هدف را

ص ۵) در چه شرایطی جدول س. در گوشه‌ای بهینه است ولی نشان نمی‌دهد؟ (۳-۱۷ بازار ۱)

شکل درست سؤال: ولی سطر هدف جواب صحیح

الف) غیر ممکن ب) تکرار صفر س. ب) تباهیدگی ج) بهینه چندگانه

غ ۶) $\binom{۲}{۶}$ و $\binom{۱}{۲}$ بهینه‌اند، کدام نقاط بهینه‌اند؟ الف) $\binom{۳}{۱۰}$ ب) $\binom{۰}{۰٫۵}$ ج) $\binom{۱٫۴}{۳٫۶}$ د) هر سه گزینه

* نکته: هرگاه دو نقطه بهینه بودند، ترکیب محدب آنها هم بهینه خواهند بود.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

ص ۷ سطر هدف برای متغیرهای پایه ای چقدر است؟ جواب درست ۰

ص ۸ مقدار

$$\underbrace{\text{Min}\{\text{Max}(-3x_1+4x_2\ ,\ 2x_1-5x_2)\}}_{y}+4$$

$$4x_1+3x_2 \geq -4$$

$$|2x_1+x_2| \leq 3$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \text{ free}$$

⇓

مدل خطی

⇓

اگر بهینه دارد پس در یکی از گوشه ها هم به بهینه می رسیم

⇓

از طریق رسم

گزینه صحیح: هیچکدام

$$\text{Min } y$$

$$-3x_1+4x_2 \leq y$$

$$2x_1-5x_2 \leq y$$

$$-4x_1+3x_2 \leq 4$$

$$2x_1+x_2 \leq 3$$

$$-2x_1-x_2 \leq 3 \qquad y^+ - y^-$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \text{ free} \qquad y \text{ free}$$

۴

$$\max P = 4x_1+2x_2-2x_3$$

$$x_1+x_2-x_3=80$$

$$8x_1+8x_2+2x_3 \geq 30$$

$$x_1 \leq 20$$

$$\underline{x} \geq 0$$

I $x_3 = x_1+x_2-80$

II جایگذاری عبارت بالا به جای x_3

III تبدیل مسئله به ۲ بعدی

⇓

$x_1, x_2 \Rightarrow \boxed{z^* = 200}$

www.ieduc.ir

Subject:

Year. Month. Date. ( )

الف) متغیرهای کمکی همیشه جواب نهایی مثبت دارند.

ب) با افزایش تعداد متغیرها ← همیشه مدل بهتر می‌شود. ← با افزایش تعداد محدودیت‌ها همیشه بهتر می‌شود.

ج) تعداد جواب‌ها یک یا بی‌نهایت. ← با افزایش متغیر لزوماً همیشه بهتر می‌شود!

د) هر سه

- تعداد بی‌نهایت در بازه مجاز
- تعداد جواب‌ها یک یا نامحدود

در LP با افزایش یک متغیر جدید،

۱) همیشه بهتر می‌شود. ۲) بدتر می‌شود. ۳) همیشه بدتر نمی‌شود. ۴) همیشه بهتر نمی‌شود. *

* ← چون بسته به Max و Min متفاوت است.

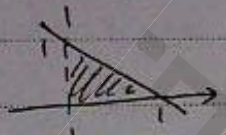
افزودن متغیر جدید ← قیدهای جواب کوچکتر نمی‌شود ← ناحیه‌ی امکان حذف نمی‌شود. ← همیشه بدتر نمی‌شود.

$\text{Min } Z = x_1$

$x_1 + x_2 \leq 1$

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$



جواب نامحدود.

گزینه‌ی دقیق‌تر همیشه حل کلاسیک حل تقل ۲ این صفحه

در روش Simplex در هر تکرار چند متغیر وارد پایه می‌شود؟

۱) $n-m-1$

۲) حداقل $1-m-n$ ✓

۳) حداکثر $n-m-1$

۴) $n-m$

$\text{Max } Z = 3x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 5$

$a_1x_1 + x_2 + a_2x_3 \leq 15$

$a_3x_1 + 4x_2 + a_4x_3 \leq 25$

$+s_1$

$+s_2$

ستون‌های پایه‌ای $Y_j = B^{-1}a_j = e_j$

$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow -a_1 + a_3 = 1 \Rightarrow$

$2a_1 - a_3 = 0$

$a_1 = 1$

$a_2 = a_4 = 1$

$a_3 = 2$

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	b
Z	0		0			35
x_1	1	2	0	-1	1	10
x_3	0		1	2	-1	5

B^{-1} همواره

Subject:
Year. Month. Date. ( )

(OR) TA

متغیر مصنوعی ← دو فاز
← M-بزرگ

دو فاز:

فاز اول همیشه جواب دارد.

$$\begin{cases} Min + \sum R_i \\ Max - \sum_{i \in R} R_i \end{cases}$$

در دو فاز، فضای جواب مشابه حالت M-بزرگ است.
که نسبت به M-بزرگ تغییر نمی‌کند.

انتهای فاز اول:

R ها صفرند: تابع هدف اصلی و تغییرات در جدول وارد می‌شود. (وارد فاز دوم شدیم)

$\exists i \; R_i > 0$: مسئله‌ی اصلی ناموجه است (فاز دوم شروع نشده)

یعنی منطقه‌ی موجه نداریم پس جواب ندارد.

دوگانگی - دوگان (مزدوج، دوآل، Dual)

هر مسئله بهینه‌سازی یک مسئله متناظر دارد که به آن دوگان، زوج و مزدوج گفته می‌شود.
(مدل)

* این مسئله مزدوج حتماً منحصر بفرد است. ⇐ $D(D(P)) = P$

نوشتن دوگان به صورت مستقیم:

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\text{Min } 6x_1 - 2x_2 + 4x_3$$
$$w_1 \ (3x_1 + 4x_2 - 2x_3 \geq 6)$$
$$w_2 \ (2x_1 - 3x_3 \leq -7)$$
$$w_3 \ (2x_2 + x_3 = 4)$$
$x_1 \geq 0$ (مقید) $\quad x_2 \leq 0 \quad x_3$ آزاد

$$\xrightarrow{\text{Dual}}$$

$$\text{Max } 6w_1 - 7w_2 + 4w_3$$
$$3w_1 + 2w_2 \leq 6$$
$$4w_1 + 2w_3 \geq -2$$
$$-2w_1 - 3w_2 + w_3 = 4$$
$w_1 \geq 0 \quad w_2 \leq 0 \quad w_3$ آزاد

* ضرایب w_i در تابع هدف D همان اعداد سمت راست هستند.
* Min به Max و Max به Min تبدیل می شود
* محدودیت های Dual به صورت ستونی نوشته می شود.
* مقادیر سمت راست Dual همان ضرایب تابع هدف اصلی هستند.
* $\geq \ \leq \ =$ در Dual براساس نوع x_j ها در مسئله اصلی نوشته می شود (اگر x_j آزاد باشد، تساوی) (اگر x_j مقید باشد، فرم کانونی (متناسب با min و max بودن))
* نوع w_j ها در Dual براساس $\geq \ \leq \ =$ مسئله Dual نوشته می شود.

همیشه (حتی غیرخطی)

مقدار تابع هدف مسئله Min $\leq$ مقدار تابع هدف مسئله Max

* مقدار تابع هدف هر یک از مسائل اولیه و ثانویه، کران مقدار تابع هدف مسئله ی دیگر است.

* در بهینگی مسائل اتفاق مقابل رخ می دهد:

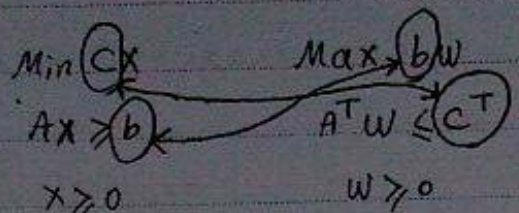
مقدار تابع هدف Max = مقدار تابع هدف Min

$$cx^* = bw^*$$

* محدودیت های زیاد در یک مسئله باعث افزایش پیچیدگی مسئله می شود پس استفاده از Dual مناسب خواهد بود.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مسائل بهینه هستند $\Longleftrightarrow$ $cx^* = bw^*$



$$\begin{array}{ll} \text{Min } cx & \text{Max } bw \\ Ax \geq b & A^T w \leq c^T \\ x \geq 0 & w \geq 0 \end{array}$$

* بهینگی یکی از مسائل $\longleftrightarrow$ موجود بودن دیگری

* یکی از مسائل جواب بهینهٔ نامتناهی داشت $\xrightarrow{\text{یکطرفه}}$ دیگری حتماً ناموجه است

* " " " ناموجه باشد $\longrightarrow$ دیگری موجه $\rightarrow$ حتماً بهینه نامتناهی
یا
" ناموجه

* یکی از مسائل بهینه متناهی باشد $\xleftrightarrow{\text{دوطرفه}}$ دیگری هم بهینه است $\nearrow$ دیگری موجه
$z^*_{I} = cx^*$ $\qquad$ $z^*_{II} = bw^*$

یکی موجه

* یکی از مسائل جواب بهینه چندگانه داشته باشد $\xrightarrow{\text{یکطرفه}}$ دیگری تباهیده است

"اثبات در جزوه استاد" $\rightarrow$ مقدار سطر هدف بهینه غیرپایه‌ای در دیگری = مقدار بهینه متغیرهای کمکی در یکی

جزوه : برای max ، P

** تمرین : برای Min : P

مکمل ضعیف

$$\text{اصلی یکی} \times \text{کمکی متناظرش از دیگری} = 0 \longleftarrow \left\{ \begin{array}{l} P: \\ \text{اصلی } w_1 \text{ ——— } s_1 \text{ کمکی} \\ w_2 \text{ ——— } s_2 \\ w_3 \text{ ——— } s_3 \\ D(P): \end{array} \right.$$

بهینگی در مسئله اولیه (Min) :

$$z_j - c_j \le 0 \Rightarrow \underbrace{C_B B^{-1}}_{w} a_j - c_j \le 0 \Rightarrow w a_j - c_j \le 0$$

فرم کانونی $w a_j \le c_j$

Max موجه بودن دیگری

متغیرهای کمکی

$$z_j - c_j \le 0 \Rightarrow C_B B^{-1} a_j - c_j \le 0 \Rightarrow w(-e_j) - c_j \le 0$$

$$\Rightarrow -w_j - \underbrace{c_j}_{0} \le 0 \Rightarrow w_j \ge 0$$

موجه بودن دیگری

سیمپلکس دوگان :

متغیری با بردار ضرایب یکه نداریم : ⇐ متغیر مصنوعی اضافه می‌کنیم ⇐ M بزرگ / دو فاز

⇓

سیمپلکس دوگان به شرط بهینگی جدول ⟵ پایه سیمپلکس دوگان : بهینه و غیر موجه

~~متغیر مصنوعی~~

پایه سیمپلکس : موجه و غیر بهینه

مثال / Max

$$4x_1 + 2x_2 \ge 2$$

⇓

$$-4x_1 - 2x_2 \le -2$$

$+s_1 =$

pivot

Max	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	RHS ≤ 0
سطر خارج شونده s_1	-2	-3	1	0	0	-2 → RHS < 0 (Min, Max)
s_2			0	1	0	
s_3			0	0	1	
بهینه ← Z	-1	-2	0	0	0	z_0

تست مینیمم نسبت : $Min\{-2/-3 , -1/-2\} = 1/2$

↓

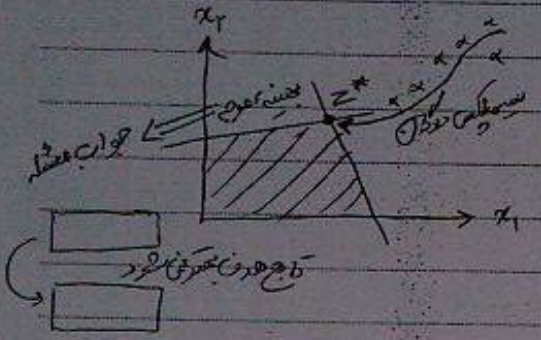
بطور مثال اگر مسئله Min بود قدر مطلق مقادیر محاسبه می‌شود. ⟶ $Min\left\{\frac{|z_j - c_j|}{y_{rj}} , y_{rj} < 0\right\}$

Subject: ..... Year: ..... Month: ..... Date: .....

عنصر محورگیری همیشه منفی است

* اگر در سیمپلکس عادی عنصر Pivot منفی باشد، شدنی نخواهد بود.

* سیمپلکس دوگان با بهینه نگه داشتن به سمت موجه شدن حرکت می‌کند.



$$\begin{cases} Max: z_j - c_j \geq 0 \\ Min: z_j - c_j \leq 0 \end{cases}$$

در جدول قبلی، خارج شونده داریم ولی وارد شونده نداریم در اینصورت مسئله‌ی دوگان بی‌کران است در نتیجه مسئله‌ی اصلی قطعاً ناموجه است.

تعابیر اقتصادی:

$$D: Max \sum_j b_j . w_j$$

تعداد محصول تولیدی j ام — قیمت هر واحد محصول j ام — حداکثر سازی درآمد تولید

حداقل سازی هزینه تولید

$$\sum_j a_{ij} w_j \leq c_i \quad \forall i$$

سهم فعالیت i ام در درآمد تولید — هزینه فعالیت i ام

$$w_j \geq 0$$

تعداد تولید

درآمد = هزینه

$$P: Min \sum_i c_i x_i$$

هزینه استفاده (به کارگیری) از فعالیت i — سطح استفاده از فعالیت i

~~سطح استفاده از منبع i برای یک واحد محصول j~~

$$\sum_i a_{ij} x_i \geq b_j \quad \forall j$$

سطح تولید هر واحد فعالیت i ام — تولید i ام — نیاز محصول j ام

$$x_i \geq 0$$

فعالیت‌های i برای تولید کالای j اتفاق می‌افتد.

$$\sum a_{ij} w_j < c_i \Rightarrow w^*_{s_i} > 0$$

$$\Downarrow$$

مکمل ضعیف $\longrightarrow$ $x_i = 0$ از فعالیت i استفاده نمی‌شود. (نابهینه)

$$\sum a_{ij} x_i > b_j \quad \forall j$$

100 — 95

$$\Downarrow$$

$w_j = 0 \Rightarrow$ تولید به صرفه نیست.

قیمت سایه‌ای (shadow price)

Subject: ..... Year: ..... Month: ..... Date: .....

$$Z = C_B B^{-1} b - \sum_{j \in R} (z_j - c_j) x_j = w^* b - \sum_{j \in R} (z_j - c_j) x_j$$

$$\frac{\partial Z}{\partial b_i} = (C_B B^{-1})_i = w_i^*$$

قیمت سایه‌ای

قیمت سایه‌ای (مقدار سمت راست)

به ازای یک واحد افزایش تقاضا، تابع هدف چقدر تغییر می‌کند.

www.tedoc.ir

GOLDEN TORANO S.L.C. CO-HABER

محدودیتهای عرضه:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=10 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=17 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=23 \end{cases}$$

محدودیتهای تقاضا:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}+x_{31}=8 \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}=13 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=19 \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}=10 \end{cases} \quad , \quad A=\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$x_{ij} \longrightarrow p_{ij} = e_i + e_{m+j}$$

بردار ستونی متغیر x_{ij} در محدودیتها

$$x_{12} \longrightarrow p_{12} = e_1 + e_{3+2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

نکته: $R(A) = n+m-1$

نکته: چنانچه minor های $k \times k$ از ماتریس ضرایب ... کنیم دترمینان آنها ۱- یا ۱+ یا ۰ است.

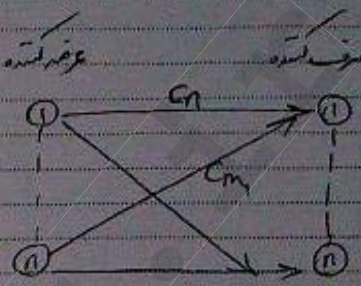
نکته: برای حل اگر از روش در فاز استفاده شود، در انتهای فاز I، یک متغیر مصنوعی با مقدار صفر در پایه می ماند.

نکته: مسأله حمل و نقل چنانچه $\sum a_i = \sum b_j$ حتماً جواب بهینه دارد.

نکته: اگر مقادیر a_i و b_j همگی integer باشند، جواب بهینه متغیرها حتماً عدد صحیح است.

قضیه: هر روشی برای تخصیص مقدار به x_{ij} ها در یک مسأله حمل و نقل که در آن طی هر مرحله، مقدار بشتی به یک

برنامه ریزی حمل و نقل:



x_{ij}: مقداری که از عرضه کننده (انبار) i ام برای مصرف کننده j ام ارسال می شود

c_{ij}: هزینه انتقال یک واحد از عرضه کننده i ام به مصرف کننده j ام

a_i: مقدار موجودی نزد عرضه کننده (انبار) i ام

b_j: مقدار تقاضا برای مصرف کننده j ام

$$\min z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad , \quad i=1,2,\dots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad , \quad j=1,2,\dots,n$$

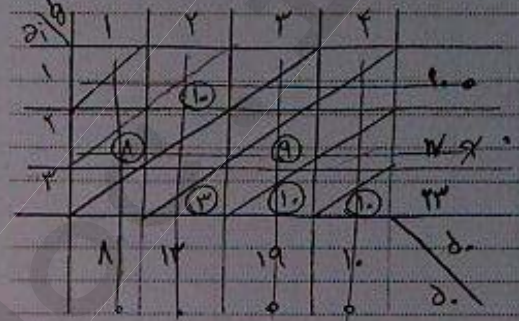
$$x_{ij} \geq 0 \quad , \quad \forall i,j$$

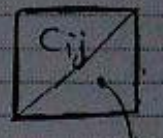
مثال)

a_i	b_j
۱۰	۸
۱۷	۱۳
۲۳	۱۹
	۱۰

$$, \quad \min \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} c_{ij} x_{ij}$$

X_{ij} اختصاص می‌یابد به نحوی که یک سطر یا ستون جدول حمل و نقل، تأمین شود، یک جواب قابل قبول feasible برای مسئله حمل و نقل ایجاد می‌کند.





مقدار متغیر اگر در پایه است.

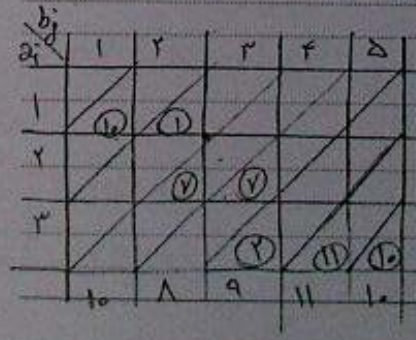
$z_j - c_j$ اگر نیز پایه است.

$$X_B = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{21} \\ x_{23} \\ x_{32} \\ x_{33} \\ x_{34} \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱۰ \\ ۸ \\ ۹ \\ ۳ \\ ۱۰ \\ ۱۰ \\ ۰ \end{pmatrix}$$

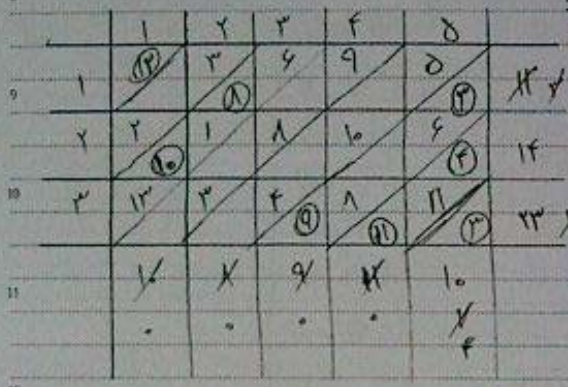
نکته: بردار ستونی $z_j - c_j$ دارای مقادیر ۱- یا ۱+ یا ۰ خواهد بود.

روش‌های دست‌یابی به یک جواب قبول در مسئله حمل و نقل:

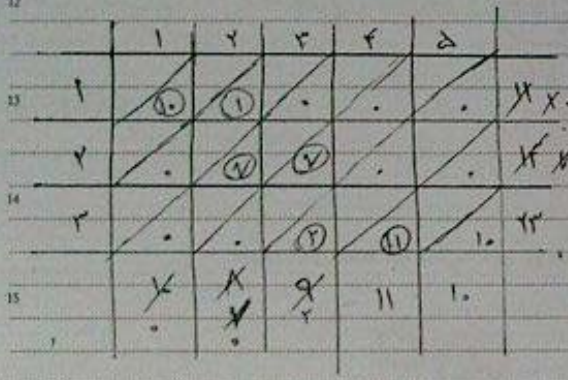
(۱) روش گوشه شمال غربی North west corner



(۲) روش حداقل C_{ij} روی سطر یا ستون:



(۳) روش حداقل سازی از C_{ij} روی ماتریس.



www.iedu...

روش وگل (Vogel)

	۱	۲	۳	۴	۵		انحرافات
۱	۱۲	۳ (۱)	۶	۹	۵ (۱۰)	~~۱۱~~ ۱	۲
۲	۲ (۱۰)	۱ (۴)	۸	۱۰	۶	~~۱۴~~ ۴	۵
۳	۱۳	۳ (۳)	۴ (۹)	۸ (۱۱)	۱۱	۲۳	۱
	~~۱۰~~ ۰	~~۸~~ ۴	۹	۱۱	~~۱۰~~ ۰		
انحرافات	↑ ۱۰	~~۲~~ ۰	۲	۱	~~۱~~ ۰		

در min هر سطر و ستون را تفاضل می‌گیریم Max انحرافات را انتخاب $C_{ij\,min}$ آن سطر یا ستون را عدد می‌دهیم

	$v_1=4$ ۱	$v_2=3$ ۲	$v_3=4$ ۳	$v_4=8$ ۴	$v_5=5$ ۵	
۱	۱۲ −۸	۳ (۱۲)	۶ −۲	۹ −۱	۵ (۱۰)	۸
۲	۲ (۱۰)	۱ (۴)	۸	۱۰	۶	۱۴
۳	۱۳ −۹	۳ (۱۴)	۴ (۹)	۸ (۱۴)	۱۱ −۶	۲۳
b_j	۱۰	۸	۹	۱۱	۱۰	

محاسبه $z_{ij}-c_{ij}$ به کمک متغیرهای dual

$$\min z = \sum\sum c_{ij}x_{ij}$$

$u_1, \dots, u_m$: $\sum x_{ij} = a_i \quad i=1,2,3,\dots,m$

$v_1, \dots, v_n$: $\sum x_{ij} = b_j \quad j=1,2,\dots,n$

$$\max z = a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_mu_m + b_1v_1 + \dots + b_nv_n$$

$$u_i + v_j \le c_{ij}$$

u_i و v_j همگی متغیرهای آزاد هستند

نکته: برای متغیرهای پایه می‌توان نشان داد که $u_i + v_j = c_{ij}$ خواهد بود

$$X_B = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{15} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{24} \\ x_{33} \\ x_{34} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} u_1+v_2=3 & , u_1=0 , v_2=3 \\ u_1+v_5=5 & , v_5=5 , u_2=-2 \\ u_2+v_1=2 & \\ u_2+v_2=1 & , v_1=4 , u_3=0 \\ u_3+v_2=3 & , v_3=4 , v_4=8 \\ u_3+v_3=4 & \\ u_3+v_4=8 & \\ z_{ij}-c_{ij} = c_B \underbrace{B^{-1}a_{ij}}_{y_{ij}} - c_{ij} & \end{cases}$$

$$c_B = (3,5,2,1,3,4,8)$$

صدور فرمان مشروطیت (۱۳۸۵ ه‍ ش) - روز حقوق بشر اسلامی و کرامت انسانی

روش تعیین y_{ij}: با کمک حلقه جهت‌دار ساده (Simple Directed loop)

(۱) یک حلقه است با کمک خانه هدف (خانه‌ای $z_{ij}-c_{ij}$ را می‌خواهیم) و خانه‌های پایه

(۲) حتماً در هر حرکت یک پاره خط است بین دو خانه پایه $z_{31}-c_{31}=?$

انفجار بمب اتمی امریکا در هیروشیما با بیش از ۱۰ هزار کشته و مجروح (۶۴۵ میلادی)

(۳) از هر سطر یا ستون عبور نمی‌کنیم یا حداکثر در نقطه توقف داریم.

$$y_{21} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

روی حلقه جهت‌دار ساده حرکت می‌کنیم، اولین توقف در بردار y_{ij} متناظر (+1) بعدی (-1) و ... ادامه می‌یابد، از خانه‌های پایه‌ای که عبور نمی‌کنیم عضو متناظر آنها در y_{ij} صفر است.

مثال) محاسبه $z_{14} - c_{14}$ در جدول صفحه قبل:

$$C_B = (3, 5, 2, 1, 3, 4, 8)$$

$$c_{14} = 9 \quad , \quad y_{14} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

محاسبه $z_{ij} - c_{ij}$ به کمک متغیرهای u_i و v_j:

نکته: برای خانه‌های غیر پایه:

$$z_{ij} - c_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$$

برای پایه: $u_i + v_j = c_{ij}$ ← چرا؟

تغییر پایه در مسئله حمل و نقل:

$v_1 = 7 \quad v_2 = 9 \quad v_3 = 4 \quad v_4 = 8 \quad v_5 = 11$

		1	2	3	4	5	
$u_1 = -6$	1	12 / -11	3 / 7 / 8	6 / -8	9 / -7	5 / 4 / 3	11
$u_2 = -5$	2	2 / 10	1 / 3	8 / -9	10 / -7	6 / 4	14
$u_3 = 0$	3	13 / -6	3 / 6	4 / 9	8 / 11	11 / 2 / 3	23
		10	8	9	11	10	

ضریب مثبت یک واحد اضافه

ضریب منفی یک واحد کم می‌شود

ضریب x_{12} چون جایگزین آن می‌شود

$u_3 = 0 \qquad v_1 = 7$

$u_1 = -6 \qquad v_5 = 11$

$u_2 = -5 \qquad v_4 = 8$

$v_3 = 4$

$v_2 = 9$

$$\begin{cases} u_1 + v_2 = 3 \\ u_1 + v_5 = 5 \\ u_2 + v_1 = 2 \\ u_2 + v_5 = 6 \\ u_3 + v_3 = 4 \\ u_3 + v_4 = 8 \\ u_3 + v_5 = 11 \end{cases}$$

متغیر x_{32} وارد پایه می‌شود: $z_j - c_j$ مثبت‌تر

$$X_B = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{15} \\ x_{21} \\ x_{25} \\ x_{33} \\ x_{34} \\ x_{35} \end{pmatrix} \quad , \quad Y_{32} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$C_B = (3, 5, 2, 6, 4, 8, 11)$$

x_{12} از پایه خارج می‌شود.

مسئله‌ای که به ما داده می‌شود حتماً بهینه است

تحلیل حساسیت:

(۱) تغییر در ضرایب تابع هدف

(۲) تغییر مقادیر RHS

(۳) حذف و افزودن متغیر

(۴) " " محدودیت

(۵) تغییر در ماتریس ضرایب

(۱) ضرایب تابع هدف: $C_k \to C_k'$

برای X_k غیرپایه‌ای: $z_j - c_j = c_B B^{-1} a_j - c_j$: سطر هدف

متناظر سطر هدف فقط برای X_k ← $c_B B^{-1} a_k - c_k'$

$= c_B B^{-1} a_k - c_k + c_k - c_k = (z_k - c_k)$ قدیم $- \Delta c_k$

* ممکن است $z_j - c_j$ متغیری در مسئله شرایط بهینگی را برهم بزنند که در این حالت، با سیمپلکس آنرا حل می‌کنیم

* مقدار ضریب تابع هدف c_B تغییر می‌کند ⟸ z تغییر نمی‌کند

تغییر در ضرایب پایه

$C_B \to C_B'$: برای X_k پایه‌ای: $C_k \to C_k'$

$z_j - c_j = 0$: تغییر پایه‌ای : سطر هدف ← مقدار تابع هدف $= \underbrace{C_B' B^{-1} b}_{RHS}$

بطن تغییر

$C_B' B^{-1} a_j - c_j$, $j \neq k$: تغییر غیرپایه‌ای

* در صورت تغییر شرایط بهینگی جدول بعدی به روند مسئله حل می‌شود. تغییر در شدنی بودن تأثیر نداشت و مسئله شدنی می‌ماند.

(۲) تغییر در مقادیر سمت راست: $b_i \to b_i'$

$RHS \to RHS'$ ممکن است موجب بیرون جدول عوض شود

محاسبه $B^{-1}b$ ⟨ $B^{-1}b \geq 0$ موجه

$B^{-1}b \leq 0$ ← نا موجه و بهینه ← ادامه حل با سیمپلکس دوگان

مقدار تابع هدف $= C_B B^{-1} b'$

(۳) حذف و افزودن متغیر:

حذف غیرپایه‌ای: اشکال ندارد ⟸ کم شدن یک ستون

حذف پایه‌ای: می‌خواهیم جدول را به‌روز کنیم ← ولی در صورت کاردستی نیست ← انجام این کار

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
x_2	۳	۱	۰	-۱	۲	۲۰
x_3	-۴	۰	۱	۲	-۳	۲۰

حذف x_3

عنصر لولا چین مثبت است

ممکن است جدول بعدی به‌اینصورت باشد

x_2			
s_1			

افزودن متغیر: X_{n+1} , a_{n+1} , C_{n+1}

اگر شرایط بهینگی دارد. ← محاسبه $Z_{n+1} - C_{n+1}$

با بیانی و محاسبات بیشتر نیست (جواب حل جواب نکرده است)

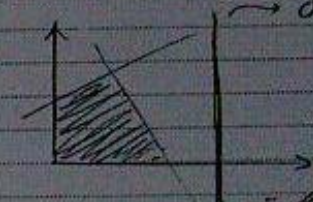
اگر شرایط بهینگی نداشته باشد:
- $X_{n+1} = B^{-1} a_{n+1}$
- یک ستون به جدول اضافه و حل می‌گردد

(۴) حذف و اضافه نمودن محدودیت:

حذف محدودیت: محدودیت غیرفعال باشد (منظور غیرفعال بهینه نه موجه) ← s نظیرش مثبت است ← در بهینگی تأثیری ندارد

← حذف آن بلامانع است

محدودیت غیرفعال:
- جبری: نسبت به سایر محدودیتها مستقل خطی نیست
- هندسی



غیرفعال

متغیر کمکی نظیرش مثبت باشد ← محدودیت غیرفعال شود ← باید حذف محدودیت فعال

متغیر کمکی دارد پایه می‌شود

افزودن محدودیت: تست نقطه بهینه
- صدق کند ← در محدودیت جدید جواب قبلی
- صدق نکند ← جدول را به روز می‌کنیم

(مثال)

X_B	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	
x_1	1	1	1	1	0	6
S_2	0	3	1	1	1	10

$x^* = (6, 0, 0)$

(الف) محدودیت جدید: $-x_1 + 3x_3 \geq 2$

نقطه بهینه در آن صدق نمی‌کند

$\longrightarrow -x_1 + 3x_3 - S_3 = 2 \longrightarrow S_3 = -2 - x_1 + 3x_3$

$X_B = C_B B^{-1} - \sum_{j \in R} (z_j - c_j) x_j$

X_B	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	
x_1	1	1	1	1	0	6
S_2	0	3	1	1	1	10
S_3	1	0	-3	0	0	-2
			بهینه			

-2 ← خارج شونده در دوال سیمپلکس

(ب) $x_1 + x_2 \leq 3 \Longrightarrow x_1 + x_2 + S_3 = 3$

مثل قبلی ادامه داده می‌شود

(ج) $x_1 + 2x_3 = 3 \longrightarrow$
- $\cancel{x_1 + 2x_3 \geq 3}$ صدق می‌کند
- $x_1 + 2x_3 \leq 3$ صدق نمی‌کند ← اضافه می‌شود و جدول به روز می‌شود

(۵) تغییر در ماتریس ضرایب:

X_k: $a_k \longrightarrow a'_k$ غیرپایه‌ای

$y'_k = B^{-1} a'_k$ ستون فقط همان متغیر

$z_k - c_k = C_B B^{-1} a'_k - c_k$ فقط همان متغیر

X_k: $a_k \longrightarrow a'_k$, $B \longrightarrow B'$

$\Longrightarrow B^{-1} = B'^{-1} \Longrightarrow$ کل جدول عوض می‌شود

www.iedu.ir