تعداد سوالات : تستی : ۲۰ **تشریحی :** ۵ | **زمان آزمون (دقیقه) : تستی :** ۶۰ **تشریحی :** ۶۰ | **سری سوال :** یک ۱

عنـــوان درس : نظریه معادلات دیفرانسیل

رشته تحصیلی/کد درس : ریاضی (محض)، ریاضی (کاربردی) ۱۱۱۱۰۵۱ - ، ریاضیات و کاربردها۱۱۱۱۴۳۳

۱- کدامیک از فضاهای زیر خطی نرمدار کامل است؟

۱. هیلبرت ۲. باناخ ۳. اقلیدسی ۴. کوشی

۲-

جواب معادله $u' = u^{\frac{1}{2}}\ ,\ u(0) = 2$ **کدام تابع است؟**

۱. $u(t) = -\frac{2}{t}$ ۲. $u(t) = \frac{t^2}{4}$ ۳. $u(t) = \frac{-2}{1-t}$ ۴. $u(t) = \frac{-2}{t-1}$

۳- اگر S یک زیرمجموعه بسته فضای باناخ B و T نگاشت انقباضی از S در S باشد، آنگاه

۱. مجموعه نقاط ثابت نگاشت T تهی است.
۲. مجموعه نقاط ثابت نگاشت T نامتناهی است.
۳. مجموعه نقاط ثابت نگاشت T یکانی است.
۴. مجموعه نقاط ثابت نگاشت T مجموعه باز است.

۴- مشتق دینی $\underset{h\to 0}{Lim\sup}\frac{u(t+h)-u(t)}{h}$ **کدام گزینه است؟**

۱. $D^- u(t)$ ۲. $D^+ u(t)$ ۳. $D_+ u(t)$ ۴. $D_- u(t)$

۵- اگر S یک زیرمجموعه بسته یک فضای باناخ B باشد و T نگاشتی انقباضی از S در S باشدآنگاه در مورد T کدام گزینه درست نمی باشد؟

۱. پیوسته است. ۲. کراندار است. ۳. نقطه ثابت دارد. ۴. برد آن بسته است.

۶-

کدام گزینه مقدار ویژه ماتریس $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -9 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ **می باشد؟**

۱. $\lambda = -2$ ۲. $\lambda = -2+3i$ ۳. $\lambda = -3i$ ۴. $\lambda = 1$

۷- اگر $\Phi(t)$ یک ماتریس اصلی دستگاه خطی همگن مرتبه اول $X' = A(t)X$ باشد در این صورت ورونیسکی جوابهای معادله، یعنی $W(t)$ در کدام گزینه صدق میکند؟

۱. $W'(t) = (Tr(A))W(t)$ ۲. $W'(t) = |\Phi(t)|$
۳. $W'(t) = |\Phi(t)|W(t)$ ۴. $W'(t) = (Tr\Phi(t))W(t)$

تعداد سوالات : تستی : ۲۰ **تشریحی :** ۵ | **زمان آزمون (دقیقه) : تستی :** ۶۰ **تشریحی :** ۶۰ | **سری سوال :** ۱ یک

عنـــوان درس : نظریه معادلات دیفرانسیل

رشته تحصیلی/کد درس : ریاضی (محض)، ریاضی (کاربردی) ۱۱۱۱۰۵۱ - ، ریاضیات و کاربردها۱۱۱۱۴۳۳

۸- فرض کنید معادله مرتبه n بصورت $L(D)y = y^{(n)} + a_n y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$ باشد کدامیک از گزینه های زیر صحیح است ؟

۱. اگر قسمت حقیقی تمام ریشههای چند جمله ای مشخصه $L(\lambda)$ که چندگانگی آنها یک است صفر باشد آنگاه جواب معادله فوق کراندار است

۲. اگر قسمت حقیقی تمام ریشههای چند جمله ای مشخصه $L(\lambda)$ منفی باشد آنگاه به ازای جواب داده شده $y(t)$ این معادله، اعدادی مثبت مانند α, M وجود دارند بطوریکه $|y(t)| \le Me^{-\alpha t}$

۳. اگر قسمت حقیقی تمام ریشههای چند جمله ای مشخصه $L(\lambda)$ که چندگانگی آنها از یک بزرگتر است مثبت باشد آنگاه جواب معادله فوق کراندار است

۴. اگر قسمت حقیقی تمام ریشههای چند جمله ای مشخصه $L(\lambda)$ که چندگانگی آنها از یک بزرگتر است صفر باشد آنگاه جواب معادله فوق کراندار است

۹- نقطه بحرانی $(۰,۰)$ دستگاه $\begin{cases} x_۱' = x_۱ + x_۲ \\ x_۲' = -x_۱ + ۳x_۲ \end{cases}$ چه نوع است؟

۱. پایدار ۲. مجانبا پایدار ۳. زینی ۴. ناپایدار

۱۰- کدام یک از دستگاه های زیر می تواند یک دستگاه خودگردان برای معادله ی $u'' + \frac{g}{L}\sin u = 0$ باشد؟

۱. $u' = v \quad , \quad v' = \frac{g}{L}\cos u = 0$

۲. $u' = 0 \quad , \quad v' = \frac{g}{L}\cos u = 0$

۳. $u' = v \quad , \quad v' = -\frac{g}{L}\sin u = 0$

۴. $u' = v' \quad , \quad v = -\frac{g}{L}\sin u = 0$

۱۱- تمام جوابهای دستگاه $x' = A(t)x$ که در آن $A(t)$ ماتریسی $n \times n$ و پیوسته بر $[۰,\infty)$ و x یک $n-$ بردار است پایدارند، اگر و تنها اگر:

۱. مجانبا پایدار باشند ۲. قوی پایدار باشند ۳. یکنواخت پایدار باشند ۴. کراندار باشند

۱۲- پایداری جواب دلخواه $X(t)$ دستگاه ناهمگن $X' = A(t)X + \beta(t)$ معادل با چه خاصیتی از جواب صفر دستگاه همگن $X' = A(t)X$ می باشد؟

۱. جاذب بودن ۲. پایداری ۳. مجانباًپایداری ۴. ناپایداری

تعداد سوالات : تستی : ۲۰ **تشریحی :** ۵ | **زمان آزمون (دقیقه) : تستی :** ۶۰ **تشریحی :** ۶۰ | **سری سوال :** ۱ یک

عنـــوان درس : نظریه معادلات دیفرانسیل

رشته تحصیلی/کد درس : ریاضی (محض)، ریاضی (کاربردی) ۱۱۱۱۰۵۱ - ، ریاضیات و کاربردها۱۱۱۱۴۳۳

۱۳- جوابهای نابدیهی معادله $u''+\varphi(t)u=0$ **نوسانی هستند مشروط به اینکه به ازای هر** t **داشته باشیم**

۱. $\varphi(t)\le 0$ ۲. $\varphi(t)\ge 0$ ۳. $\varphi(t)\le m<0$ ۴. $\varphi(t)\ge m^2>0$

۱۴- اگر $u=\varphi(t)$ **جوابی از معادله** $u'+p(t)u+q(t)u^2=r(t)$ **باشد.جواب دیگر به چه صورت است؟**

۱. $u=e^{\varphi(t)}$ ۲. $u=\varphi(t)-\frac{1}{t}$

۳. $u=t\varphi(t)$ ۴. $u=\varphi(t)-\frac{1}{\psi(t)}$

۱۵- تمام جوابهای معادله $u''+(1+b(t))u=0$ **تحت چه شرایطی روی بازه** $[0,+\infty)$ **کراندار هستند؟**

۱. $\int_0^\infty |b(s)|ds=\infty$ ۲. $\int_0^\infty |b(s)|ds<\infty$ ۳. $\int_0^\infty |b'(s)|ds<\infty$ ۴. $\lim_{t\to 0} b(t)=0$

۱۶- اگر تابع مثبت معینی چون $V(\chi)$ **چنان یافت شود که** $V^*(\chi)=gradV(\chi)\cdot f(\chi)$ **روی** S_ρ **(گوی باز به مرکز مبدأ در** R^n **)معین منفی باشد آنگاه نوع جواب صفر دستگاه معالات دیفرانسیل خودگردان** $\chi'=f(\chi)$ **کدام گزینه است؟**

۱. مجانباً نمایی پایدار ۲. ناپایدار ۳. پایدار ۴. مجانباً پایدار

۱۷- کدام گزینه در مورد تابع $V(t,x_1,x_2)=(x_1^2+x_2^2)\sin^2 t$ **درست است؟**

۱. نیمه معین مثبت وکاهنده است. ۲. معین مثبت و کاهنده است.

۳. معین مثبت است ولی کاهنده نیست. ۴. کاهنده و مثبت است ولی معین مثبت نیست.

۱۸- اگر جواب صفر دستگاه خطی $x'=A(t)x$ **تماما پایدار باشد آنگاه**

۱. مجانبا پایدار است. ۲. مجانبا یکنواخت - پایدار است.

۳. یکنواخت - پایدار است. ۴. قویا - پایدار است.

۱۹- اگر u **تابعی پیوسته بر بازه** $(0,\infty)$ **باشد کدام گزینه برقرار است ؟**

۱. اگر نرمهای u و u' کراندار باشند آنگاه نرم u'' کراندار است

۲. اگر نرم u'' کراندار باشند آنگاه نرم u' کراندار است

۳. اگر نرمهای u و u'' کراندار باشند آنگاه نرم u' کراندار است

۴. اگر u و u' به $L^2[0,\infty)$ متعلق باشند آنگاه u'' به $L^2[0,\infty)$ تعلق دارد

تعداد سوالات : تستی : ۲۰ **تشریحی :** ۵ | **زمان آزمون (دقیقه) : تستی :** ۶۰ **تشریحی :** ۶۰ | **سری سوال :** ۱ یک

عنـــوان درس : نظریه معادلات دیفرانسیل

رشته تحصیلی/کد درس : ریاضی (محض)، ریاضی (کاربردی) ۱۱۱۱۰۵۱ - ، ریاضیات و کاربردها۱۱۱۱۴۳۳

۲۰- ماتریس ژاکوبی دستگاه معادله ی $\begin{cases} \chi_1' = -\chi_1 - \chi_2 - \chi_1^3 \\ \chi_2' = \chi_1 - \chi_2 - \chi_2^3 \end{cases}$ عبارتند از

۱. $J(\chi) = \begin{bmatrix} -1-3\chi_1^2 & -1 \\ 1 & -1-3\chi_2^2 \end{bmatrix}$

۲. $J(\chi) = \begin{bmatrix} -3\chi_1^2 & -1 \\ 1 & -3\chi_2^2 \end{bmatrix}$

۳. $J(\chi) = \begin{bmatrix} -\chi_1 - \chi_2 - \chi_1^3 \\ \chi_1 - \chi_2 - \chi_2^3 \end{bmatrix}$

۴. $J(\chi) = \begin{bmatrix} -\chi_1 - \chi_1^3 \\ -\chi_2 - \chi_2^3 \end{bmatrix}$

سوالات تشریحی

۱- قضیه: فرض کنید عملگر T روی یک زیر مجموعه ی بسته ی S از فضای باناخ B (یعنی یک فضای خطی نرمدار کامل) در شرط لیپشیتز $\|Tx - Ty\| \le \alpha \|x - y\| \quad , \quad x, y \in S$ که در آن $0 < \alpha < 1$ صدق کند و T فرض کنید S را در S بنگارد. ثابت کنید معادله ی $Tx = x$ فقط یک جواب در S دارد. ۱.۴۰ نمره

۲- ثابت کنید یک شرط لازم و کافی برای اینکه جواب ماتریس $\phi(t)$ از $\phi'(t) = A(t)\phi(t)$ یک ماتریس اصلی آن باشد ؛ آن است که $\forall t \in (r_1, r_2) \quad w(t) \neq 0$ ۱.۴۰ نمره

۳- فرض کنید $a(t)$ روی $[0,\infty)$ تابعی پیوسته - مشتقپذیر بطوریکه $\lim_{t\to\infty} a(t) = \infty$ باشد . ثابت کنید تمام جوابهای $u'' + a(t)u = 0$ روی $[0,\infty)$ کراندارند. ۱.۴۰ نمره

۴- ثابت کنید اگر به ازای هر $t \in (a,b)$ ، $k(t) \le 0$ باشد آنگاه هر جواب نابدیهی معادلهٔ $u'' + k(t)u = 0$ در فاصلهٔ $a < t < b$ نمی تواند در این بازه بیش از یک صفر داشته باشد. ۱.۴۰ نمره

۵- اگر تابع معین مثبت اسکالری چون $V(x)$ وجود داشته باشدکه روی S_p داشته باشیم $V^*(x) \le 0$ آنگاه ثابت کنید جواب صفر $x' = f(x)$ پایدار است. ۱.۴۰ نمره

شمار سوال	پاسخ صحیح	وضعیت کلید
۱	ب	عادي
۲	ب	عادي
۳	ج	عادي
۴	الف	عادي
۵	د	عادي
۶	ب	عادي
۷	الف	عادي
۸	ب	عادي
۹	د	عادي
۱۰	ج	عادي
۱۱	د	عادي
۱۲	ب	عادي
۱۳	د	عادي
۱۴	د	عادي
۱۵	ب	عادي
۱۶	د	عادي
۱۷	ب	عادي
۱۸	ب	عادي
۱۹	ج	عادي
۲۰	الف	عادي

تعداد سوالات : تستی : ۲۰ **تشریحی :** ۵ **زمان آزمون (دقیقه) : تستی :** ۶۰ **تشریحی :** ۶۰ **سری سوال :** یک ۱

عنـــوان درس : نظریه معادلات دیفرانسیل

رشته تحصیلی/کد درس : ریاضی (محض)، ریاضی (کاربردی) ۱۱۱۱۰۵۱ - ، ریاضیات و کاربردها۱۱۱۱۴۳۳

سوالات تشریحی

۱- قضیه ی ۱،۶،۱ اثبات در صفحات ۷۳ تا ۷۵ (کتاب درسی با ویرایش سال ۱۳۷۵، البته صفحات این کتاب، دو صفحه با ویرایش جدید اختلاف دارد.) **۱،۴۰ نمره**

۲- قضیه ۲،۲،۴ صفحه ۱۰۳ فصل ۲ **۱،۴۰ نمره**

۳- صفحهٔ ۲۳۰ قضیهٔ ۱،۳،۴ **۱،۴۰ نمره**

۴- قضیه (۴،۴،۳)، صفحه ۲۴۷-۲۴۶. **۱،۴۰ نمره**

۵- فصل۵ ، صفحه ۲۹۱ ، قضیه ۱،۲،۵ **۱،۴۰ نمره**