

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۴۰ تشریحی: ۸۰

سری سوال: یک ۱

عنوان درس: هندسه جبری مقدماتی

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضیات و کاربردها ۱۱۱۳۸۱

۱- اگر  $P_1, \dots, P_5 \in P_R^2$  نقاط متمایزی باشند که هیچ چهارتای آنها همخط نباشند آنگاه:

۱. حداکثر یک مقطع مخروطی وجود دارد که از نقاط  $P_1, \dots, P_5$  می‌گذرد.

۲. حداقل یک مقطع مخروطی وجود دارد که از نقاط  $P_1, \dots, P_5$  می‌گذرد.

۳. دقیقاً یک مقطع مخروطی وجود دارد که از نقاط  $P_1, \dots, P_5$  می‌گذرد.

۴. هیچ یک مقطع مخروطی وجود ندارد که از نقاط  $P_1, \dots, P_5$  بگذرد.

۲- کدامیک از موارد زیر یک مقطع مخروطی نیست؟

۱.  $x^2 + y^2 = 1$     ۲.  $x^2 - y^2 = 1$     ۳.  $y = \ln x$     ۴. مجموعه تهی

۳- هذلولوی  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  در  $R^2$  با خم  $C: \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = Z^2$  در  $P_R^2$  متناظر است که این خم خط  $(Z=0)$  را در:

۱. دو نقطه  $(1, \pm 1, 0)$  قطع می‌کند.

۲. دو نقطه  $(a, \pm b, 0)$  قطع می‌کند.

۳. فقط در نقطه  $\{\infty\}$  قطع می‌کند.

۴. دو نقطه  $(1, \frac{\pm b}{a}, 0)$  قطع می‌کند.

۴- فرض کنید  $F(u, v)$  یک صورت ناصفر درجه  $d$  بر حسب  $u$  و  $v$  باشد. در اینصورت

۱.  $F$  حداکثر  $d$  صفر در  $P^1$  دارد.

۲.  $F$  حداقل  $d$  صفر در  $P^1$  دارد.

۳.  $F$  دقیقاً  $d$  صفر در  $P^1$  دارد.

۴.  $F$  هیچ صفری در  $P^1$  ندارد.

۵- اگر  $n \leq 5$  و هیچ چهار نقطه از نقاط  $P_1, \dots, P_n$  همخط نباشند، در اینصورت:

۱.  $\dim S_2(p_1, \dots, p_n) = n$

۲.  $\dim S_2(p_1, \dots, p_n) \geq n - 6$

۳.  $\dim S_2(p_1, \dots, p_n) = 6 - n$

۴.  $\dim S_2(p_1, \dots, p_n) \leq n - 6$

سری سوال: ۱ یک

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۴۰ تشریحی: ۸۰

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

عنوان درس: هندسه جبری مقدماتی

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضیات و کاربردها ۱۱۱۳۸۱

۶- هر خم درجه سوم در  $P_C^2$  یا  $P_R^2$  را می توان بشکل نرمال  $C: Y^2 Z = X^3 + aXZ^2 + bZ^3$  نوشت که شکل آفین آن عبارت است از:

$$y^3 = x^3 + ax + b \quad .1$$

$$y^3 = ax^3 + bx \quad .2$$

$$y^2 = ax^3 + bx \quad .3$$

$$y^2 = x^3 + ax + b \quad .4$$

۷- فرض کنید  $A$  یک حلقه جابجایی باشد که هر ایده ال  $I \subset A$  متناهی مولد است. کدام گزینه نادرست است؟

۱. زنجیر صعودی  $I_1 \subset I_2 \subset \dots \subset I_m \subset \dots$  از ایده الهای  $A$  وجود دارد که نا ایستا است.

۲. هر مجموعه نا تهی از ایده الهای  $A$  یک عضو ماکسیمال دارد.

۳. برای هر ایده ال  $I$  در  $A$ ، عناصری مانند  $f_1, \dots, f_k \in I$  وجود دارند که  $I = (f_1, \dots, f_k)$ .

۴. برای هر زنجیر صعودی  $I_1 \subset I_2 \subset \dots \subset I_m \subset \dots$  عدد طبیعی  $N$  وجود دارد که  $I_N = I_{N+1} = \dots$ .

۸- فرض کنید  $k$  یک میدان و  $f_i$  ها چند جمله ای هایی در  $k[x_1, \dots, x_n]$  هستند. کدام گزینه معرف یک چندگونا است؟

$$\{f_i \mid f_i = 0\} \quad .1$$

$$\{f_i \mid f_i \neq 0\} \quad .2$$

$$\{p \in k^n \mid f_i(p) = 0\} \quad .3$$

$$\{p \in k^n \mid f_i(p) \neq 0\} \quad .4$$

۹- فرض کنید  $X \subset A_k^n$  باشد. کدام گزینه درست است؟

$$X = V(I(X)) \quad .1$$

$$X \neq V(I(X)) \quad .2$$

$$X \subset V(I(X)) \quad .3$$

$$X \supset V(I(X)) \quad .4$$

۱۰- یک مجموعه جبری  $X \subset A_k^n$  تحویلناپذیر است هرگاه هیچ تجزیه ای از  $X$  بصورت ..... وجود نداشته باشد.

$$(X_1, X_2 \subset X)$$

$$X = X_1 \cup X_2 \quad .1$$

$$X = X_1 \cap X_2 \quad .2$$

$$X = X_1 \times X_2 \quad .3$$

$$X = X_1 = X_2 \quad .4$$

سری سوال: ۱ یک

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۴۰ تشریحی: ۸۰

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

عنوان درس: هندسه جبری مقدماتی

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضیات و کاربردها ۱۱۱۳۸۱

۱۱- فرض کنید  $X \subset A_k^n$  یک مجموعه جبری و  $I(X)$  ایده ال متناظر آن باشد، آنگاه  $X$  تحویلناپذیر است اگر و تنها اگر:

۱.  $I(X)$  یک ایده ال ماکسیمال باشد. ۲.  $I(X)$  یک ایده ال اول باشد.

۳.  $I(X)$  متناهی باشد. ۴.  $I(X) = \text{rad}(X)$

۱۲- فرض کنید  $I$  یک ایده ال حلقه  $A$  باشد. ایده ال  $I$  را رادیکال گویند هرگاه

۱.  $I = I^2$  ۲.  $I \neq I^2$  ۳.  $I = \sqrt{I^2}$  ۴.  $I^2 = 0$

۱۳- فرض کنید  $k$  یک میدان جبری بسته باشد آنگاه برای هر ایده ال  $J$  در حلقه  $k[x_1, \dots, x_n]$ :

۱.  $I(V(J)) = J$  ۲.  $I(V(J)) = \text{rad}(J)$

۳.  $I(V(J)) \subset J$  ۴.  $I(V(J)) = \Phi$

۱۴- فرض کنید  $V \subset A^n$  یک مجموعه جبری و  $V$  تحویلناپذیر باشد. کدام گزینه نادرست است؟

۱. به ازای هر دو زیرمجموعه ناتهی  $u_1, u_2 \subset V$  داریم  $u_1 \cap u_2 \neq \emptyset$

۲. به ازای هر دو زیرمجموعه ناتهی  $u_1, u_2 \subset V$ ،  $u_1 \cap u_2$  چگال است.

۳. به ازای هر دو زیرمجموعه ناتهی  $u_1, u_2 \subset V$ ،  $u_1 \cap u_2$  متناهی است.

۴. به ازای هر زیرمجموعه ناتهی  $u \subset V$ ،  $u$  چگال است

۱۵- فرض کنید  $\text{dom} f$  مجموعه همه  $p \in V$  هایی باشد که  $f$  در  $p$  منظم است. میدان را بسته جبری در نظر بگیرید. کدام گزینه نادرست است؟

۱. مجموعه  $\text{dom} f$  در توپولوژی زاریسکی زیر مجموعه ای باز و چگال است.

۲. اگر  $\text{dom} f = V$  آنگاه  $f \notin k[V]$

۳. اگر  $f \in k[V]$  آنگاه  $\text{dom} f = V$

۴. اگر  $\text{dom} f \supset V_h$  آنگاه  $f \in k[V][[h^{-1}]]$

سری سوال: ۱ یک

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۴۰ تشریحی: ۸۰

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

عنوان درس: هندسه جبری مقدماتی

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضیات و کاربردها ۱۱۱۳۸۱۱۱۳

۱۶- کدام گزینه درست است؟

- ۰۱ هر نگاشت غالب گویا است.  
 ۰۲ هر نگاشت غالب یک به یک است.  
 ۰۳ ترکیب دو نگاشت گویا، گویا است.  
 ۰۴ هر نگاشت گویا یک نگاشت غالب است.

۱۷- فرض کنید  $V$  یک چند گونای دلخواه باشد. در اینصورت:

- ۰۱  $\dim V = \deg_k k(V)$   
 ۰۲  $\dim V = \text{tr deg}_k k(V)$   
 ۰۳  $\dim V = \text{tr deg}_k k[V] + 1$   
 ۰۴  $\dim V = \dim k[V]$

۱۸- فرض کنید  $k$  یک میدان نامتناهی و  $f$  چند جمله ای باشد که برای هر  $\lambda \in k$  داریم:

$$f(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = \lambda f(x_0, \dots, x_n)$$

در اینصورت:

- ۰۱  $f$  متقارن است.  
 ۰۲  $f$  همگن است.  
 ۰۳  $f$  وارونپذیر است.  
 ۰۴  $f$  دارای تجزیه همگن یکتا است.

۱۹- عدد طبیعی مانند  $r$  و زیرمجموعه ای باز و چگال مانند  $V_0 \subset V$  وجود دارد که برای همه نقاط  $p \in V$  رابطه زیر برقرار است؟

- ۰۱  $\dim T_p V = r$   
 ۰۲  $\dim T_p V \leq r$   
 ۰۳  $\dim T_p V \geq r$   
 ۰۴  $\dim T_p V = 0$

۲۰- خم  $f = y^2 - x^2$  در  $A^2$  چند نقطه تکین دارد.

- ۰۱ یک نقطه  
 ۰۲ دو نقطه  
 ۰۳ سه نقطه  
 ۰۴ هیچ نقطه تکین ندارد

### سوالات تشریحی

۱- فرض کنید  $k$  میدانی با مشخصه مخالف ۲ باشد و  $\lambda \in k$  که  $\lambda \neq 0, 1$ . فرض کنید  $f, g \in k[t]$  تابع

$$f^2 = g(g-1)(g-\lambda)$$

گویایی باشند که  $f, g \in k$  است. در اینصورت ثابت کنید

۲- (آ) فرض کنید  $k$  میدانی نامتناهی باشد. در اینصورت نشان دهید که  $A_k^2$  یک فضای تحویلناپذیر است.(ب) فرض کنید  $k$  میدانی دلخواه باشد. در اینصورت نشان دهید که مجموعه های جبری  $A_k^1$ ، مجموعه هایمتناهی و خود  $A_k^1$  هستند.

سری سوال: ۱ یک

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۴۰ تشریحی: ۸۰

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

عنوان درس: هندسه جبری مقدماتی

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضیات و کاربردها ۱۱۱۳۸۱

نمره ۱.۴۰

۳- فرض کنید  $k$  میدانی نامتناهی باشد. در اینصورت نشان دهید که نگاشت چندجمله ای  
 $\varphi: A_k^1 \rightarrow C: (Y^2 = X^3) \subset A_k^2$  با ضابطه  $T \mapsto (T^2, T^3)$  یک یکرختی (ایزومورفیسم) نیست.

نمره ۱.۴۰

۴- فرض کنید  $k$  یک میدان بسته جبری و  $J$  ایده‌الی از حلقه  $k[X_0, \dots, X_n]$  باشد. در اینصورت ثابت کنید:  
 $V(J) = \emptyset \Leftrightarrow \text{rad } J \supset (X_0, \dots, X_n) \quad (\bar{I})$

(ب) اگر  $V(J) \neq \emptyset$  باشد، آنگاه  $I(V(J)) = \text{rad } J$  است.

نمره ۱.۴۰

۵- ثابت کنید تابع  $V \rightarrow N$  که توسط  $P \mapsto \dim T_P V$  تعریف می‌شود یک تابع نیم پیوسته نسبت به توپولوژی زاریسکی  $V$  است.