تعداد سوالات : تستی : ۲۰ **تشریحی :** ۵   **زمان آزمون (دقیقه) : تستی :** ۶۰ **تشریحی :** ۶۰   **سری سوال :** یک ۱

عنـــوان درس: آنالیزریاضی ۲

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (کاربردی)، ریاضی (محض) ۱۱۱۱۰۴۱ - ، آمار ۱۱۱۱۰۸۸

۱- مقدار $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{k^{2}+n^{2}}$ برابر مقدار کدام یک از انتگرال های زیر است؟

۱. $\int_{0}^{1}\frac{1}{1+x^{2}}dx$ ۲. $\int_{0}^{1}\frac{1}{1+(\frac{1}{x})^{2}}dx$ ۳. $\int_{1}^{2}\frac{1}{1+x^{2}}dx$ ۴. $\int_{0}^{1}\frac{n}{x^{2}+n^{2}}dx$

۲- اگر $f(x)=e^{x}$ مقدار عددی $\lim_{n\to\infty}[\int_{a}^{b}f^{n}(x)dx]^{\frac{1}{n}}, (0<a<b)$ برابر کدام گزینه است؟

۱. e^{a} ۲. e ۳. e^{b} ۴. لزوما وجود ندارد.

۳- اگر $f(x)=e^{x^{2}}$ مقدار عددی $\lim_{n\to\infty}\left[\int_{a}^{b}\sqrt{x}f^{n}(x)dx\right]^{\frac{1}{n}}$ جایی که $0<a<b$ برابر کدام گزینه است؟

۱. $\sqrt{a}e^{a^{2}}$ ۲. $\sqrt{b}$ ۳. $e^{b^{2}}$ ۴. $\sqrt{b}e^{b^{2}}$

۴- یکی از شرایط برقراری رابطهٔ $ab\le\frac{a^{p}}{p}+\frac{b^{q}}{q}$ کدام رابطه است؟

۱. $pq=1$ ۲. $p+q=1$ ۳. $\frac{1}{p}-\frac{1}{q}=1$ ۴. $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

۵- مقدار $\int_{0}^{4}(x^{2}+1)d[x]$ برابر است با

۱. ۱۷   ۲. ۳۰   ۳. ۳۴   ۴. وجود ندارد.

۶- تابع f بر $[a,b]$ پیوسته است و $f^{2}(x)=\int_{a}^{x}f(t)dt$ در این صورت...............

۱. $f(x)=x^{2}+c$ ۲. $f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}a$ ۳. $f(x)=e^{x}$ ۴. $f(x)=x+c$

۷- مقدار $\int_{0}^{4}e^{x}d(x)+\int_{0}^{4}xd(e^{x})$ برابر است با

۱. $-e^{4}$ ۲. $4e^{4}$ ۳. $4e^{4}-1$ ۴. وجود ندارد

۸- اگر تابع f بر $[a,b]$ پیوسته و اکیداً صعودی و $f(a)=A$ و $f(b)=B$ ، مقدار $\int_a^b f(x)dx+\int_A^B f^{-1}(x)dx$;کدام است؟

۱. $Ba+Ab$ ۲. $Bb+Aa$ ۳. $Bb-Aa$ ۴. $Ba-Ab$

۹- اگر تابع f با تغییر کراندار باشد کدام گزینه صحیح نیست؟

۱. تعداد نقاط ناپیوستگی f حداکثر شمارش پذیر است.

۲. f را می توان به صورت تفاضل دو تابع صعودی و یا نزولی نوشت.

۳. f تابعی یکنوا است.

۴. f تابعی کراندار است.

۱۰- کدام یک از توابع زیر بر بازهٔ $[0,1]$ با تغییر کراندار نیست؟

۱. $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$

۲. $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$

۳. $f(x)=x^2-\frac{1}{2}$

۴. $f(x)=x^3+1$

۱۱- اگر توابع f و g بر بازهٔ $[a,b]$ با تغییر کراندار و اعداد مثبت A و B ثابت باشند، کدام گزینه صحیح است؟

۱. $v_{Af+vg} > Av_f + Bv_g$

۲. $v_{Af+vg} < Av_f + Bv_g$

۳. $v_{Af+vg} \geq Av_f + Bv_g$

۴. $v_{Af+vg} \leq Av_f + Bv_g$

۱۲- کدام گزینه صحیح است؟

۱. تابع f بر بازهٔ $[a,b]$ با تغییر کراندار است اگر و تنها اگر تفاضل دو تابع نزولی باشد.

۲. تابع f بر بازهٔ $[a,b]$ با تغییر کراندار است اگر و تنها اگر تفاضل دو تابع صعودی باشد.

۳. تابع f بر بازهٔ $[a,b]$ با تغییر کراندار است اگر و تنها اگر تفاضل دو تابع صعودی و نزولی باشد.

۴. گزینه های ۱و ۲ هر دو صحیح هستند.

۱۳- فرض کنید $\{r_n\}$ دنبالهٔ اعداد گویای بازهٔ $[0,1]$ باشد، دنبالهٔ $\{f_n\}$ بر $[0,1]$ را چنین تعریف می کنیم که

$$f_n(x)=\begin{cases}1 & x\in\{r_1,r_2,\dots,r_n\}\\ 0 & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

در این صورت..............

۱. همواره $f_n \in R$ در حالی که $f \notin R$

۲. همواره $f_n \notin R$ در حالی که $f \in R$

۳. همواره $f, f_n \in R$

۴. همواره $f, f_n \notin R$

۱۴- کدام گزینه صحیح نیست؟

۱. تابعی حقیقی و پیوسته بر R وجود دارد که هیچ جا مشتق پذیر نیست.

۲. برای هر تابع پیوسته بر بازهٔ $[a,b]$ دنباله ای از چند جمله ایها وجود دارد که به طور یکنواخت به این تابع همگراست.

۳. هرگاه $\{f_n\}$ به طور یکنواخت بر $[a,b]$ کراندار باشد، آنگاه دارای زیر دنباله ای همگراست.

۴. هرگاه X فشرده و $\{f_n\}\subseteq C(X)$ و $f_n \Rightarrow f$ آنگاه $\{f_n\}$ همپیوسته است.

۱۵- کدام یک از سریهای زیر بر مجموعهٔ داده شده بطور یکنواخت همگرا نیست؟

۱. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$ بر R

۲. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$ بر R

۳. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n(1+nx^2)}$ بر R

۴. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{x+\frac{1}{2}}}$ بر $[0,+\infty)$

۱۶- در کدام حالت تساوی $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n d\alpha=\int_a^b f d\alpha$ حتما برقرار است؟

۱. $f_n\in R(\alpha)$ بر $[a,b]$

۲. $f_n\to f$

۳. $f_n\Rightarrow f$

۴. موارد ۱ و ۳ صحیح می باشند.

تعداد سوالات : تستی : ۲۰ تشریحی : ۵ **زمان آزمون (دقیقه) : تستی : ۶۰ تشریحی : ۶۰** **سری سوال :** ۱ یک

عنـــوان درس: آنالیزریاضی ۲

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (کاربردی)، ریاضی (محض) ۱۱۱۱۰۴۱ - ، آمار۱۱۱۱۰۸۸

۱۷- فرض کنید R شعاع همگرایی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ باشد، کدام گزینه صحیح است؟

۱. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ روی $|z| < R$ پیوسته است.

۲. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ روی $|z| < R$ مشتق پذیر است.

۳. $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ روی $|z| < R$ مشتق پذیر است.

۴. همه موارد.

۱۸- کدام گزینه صحیح نیست؟

۱. سریهای توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ دارای شعاع همگرایی یکسانند.

۲. سریهای توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1}$ دارای شعاع همگرایی یکسانند.

۳. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ دارای شعاع همگرایی $R = 1$ می باشد.

۴. اگر R شعاع همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ باشد و $|x_0| < R$ آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ بطور مطلق همگراست.

۱۹- تابع E را با ضابطهٔ $E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ در نظر بگیرید. در این صورت:

۱. $E(1) = 1$

۲. $E(nx) = (E(x))^n$

۳. تابع E کراندار است.

۴. تابع E نزولی است.

تعداد سوالات : تستی : ۲۰ تشریحی : ۵ **زمان آزمون (دقیقه) : تستی : ۶۰ تشریحی : ۶۰** **سری سوال :** ۱ یک

عنـــوان درس: آنالیزریاضی ۲

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (کاربردی)، ریاضی (محض) ۱۱۱۱۰۴۱ - ، آمار۱۱۱۱۰۸۸

۲۰- شعاع همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^{n!}$ برابر چند است؟

۱. $\circ$ ۲. ∞ ۳. ۱ ۴. ۲

سوالات تشریحی

۱- شرط ریمان برای انتگرال پذیری را بیان و ثابت کنید. ۱،۴۰ نمره

۲- اگر $f \in R(\alpha)$ ، ثابت کنید $\|f\| \in R(\alpha)$ و داریم $\left\| \int_a^b f d\alpha \right\| \le \int_a^b \|f\| d\alpha$. ۱،۴۰ نمره

۳- فرض کنید دنبالهٔ $\{f_n\}$ بر مجموعهٔ شمارش پذیر E به طور نقطه وار کراندار باشد. ثابت کنید زیر دنباله ای مانند $\{f_{n_k}\}$ وجود دارد که بر E همگراست. ۱،۴۰ نمره

۴- فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله ای از توابع پیوسته بر E باشند که به طور یکنواخت به f همگرا هستند. ثابت کنید f تابعی پیوسته است. ۱،۴۰ نمره

۵- اگر $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ثابت کنید $\frac{2}{\pi} < \frac{\sin x}{x} < 1$. ۱،۴۰ نمره